1. 隐函数方程组的求解

(1) 求下列方程组确定的隐函数的偏导数

$$\begin{cases} x = u + v, \\ y = u - v, \\ z = u^2 v^2. \end{cases} \tag{1}$$

求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

这类题一般的解法是在各个方程的两端对自变量 x, y 求偏导数，得到关于 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 的方程组 (注意 u, v 是关于 x, y 的函数，所以在对第三个式子两边求偏导数时要用复合函数的求导 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial (u^2v^2)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial (u^2v^2)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 2uv^2\frac{\partial u}{\partial x} + 2u^2v\frac{\partial u}{\partial x}$) 然后根据求偏导后的前两式 $1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}, 0 = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}$ 解出 $\frac{\partial u}{\partial x} = 1/2, \frac{\partial v}{\partial x} = 1/2$, 带入即可解得 $\frac{\partial z}{\partial x} = uv^2 + u^2v$, 同理可求 $\frac{\partial z}{\partial y}$

(2) 求下列方程组确定的隐函数的偏导数

$$\begin{cases} x + y = u + v, \\ x\sin\, v = y\sin\, u. \end{cases} \tag{2}$$

求 $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}$

这个题没有中间变量, 只有自变量 u, v 和因变量 x, y, 大部分的考试题也没有中间变量.x, y 是 u, v 的函数，所以直接在两式两边求对 u 的偏导数, 有 $\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial u} = 1$ 和 $\frac{\partial x}{\partial u}\sin\, v = \frac{\partial y}{\partial u}\sin\, u + y\cos\, u$, 解这个二元一次方程组即可得 $\frac{\partial x}{\partial u}$, 同理对 v 求偏导数可得 $\frac{\partial x}{\partial v}$. (这种类型的题考试常考, 多练练)

2. 映射的 Jacobi 矩阵

(这个应该不考或者只考最简单的情况, 复合函数的 Jacobi 矩阵就不用练了)

试求 $\mathbf{f}(x, y, z) = (x^z, \sin\, xy, xyz)$ 的 Jacobi 矩阵.

3. 求切向量, 切平面, 法向量, 法平面

(1) 求曲面 $z = \arctan\frac{y}{x}$ 在 $\mathbf{p_0} = (1, 1, \frac{\pi}{4})$ 处的法向量和切平面方程.
(2) 证明: 曲面 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}\ \ (a > 0)$ 的切平面在各坐标轴上截下的诸线段之和为常数.
(3) 求曲线

$$\begin{cases} x = \mathrm{e}^t \\ y = t \\ z = t^2 \end{cases} \tag{3}$$

在 $t = 0, t = 1$ 这两点处的切线方程.
(4) 求柱面和球相交得到的曲线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases} \tag{4}$$

在点 (2,1,2) 的切向量和切线方程.

这类题的关键是求切向量和法向量.

对于一个曲面 $F(x, y, z) = 0$ 来说, 法向量就等于 $(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z})$, 带入给定的点 (x_0, y_0, z_0) 就得到了法向量. 有了法向量, 再加上平面过点 (x_0, y_0, z_0), 很容易写出切平面方程 $\frac{\partial F}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(z-z_0) = 0.$

对于曲线来说, 有两种形式, 一是表示成参数方程 $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, 根据题目给定的点 (x_0, y_0, z_0) 确定对应的 t_0, 这一点的切向量就等于 $(x'(t_0), y'(t_0)\ z'(t_0))$, 然后再根据过点 $(x(t_0), y(t_0)\ z(t_0))$ 即得切线 $\frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}$ 和法平面 $x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) + z'(t_0)(z - z(t_0))$

曲线的第二种形式是表示成两个曲面的交线, 对于这一类的题, 可以先求得两个曲面的法平面在给定的点的法向量, 由于两个曲面在交线处相交, 所以切线的切向量应该同时与两个曲面在该点的法向量相垂直, 利用这一条件可以算出切向量, 进而可以算出切线, 法平面。

4. 极值问题

(1) 求 $f(x, y) = x^2 - 3x^2y + y^3$ 的极值

(2) 条件极值在教材 55 页例 5.6

条件极值和无条件极值有各自需要的地方

条件极值一般是要求闭集上的最大值和最小值，因为闭集上一定可以取到最值，所以求出各个使偏导数等于 0 的点后依次带入函数，直接比较这些点的函数值大小就行啦，最大的即为最大值，最小的即为最小值。

条件极值需要注意的问题就是求偏导之后的方程组的求解，以教材 55 页例 5.6 为例，求得的方程组是一个齐次方程，必有解 x=0,y=0, 但是由于 D 的边界是闭集，一定可以在 D 上的某点取得最值，也就是说存在 D 上的某点使得方程组成立，所以齐次方程有非零解，系数矩阵的行列式为 0，根据这一点可以迅速解出 λ, 进而求出 x,y.(这样的题在好几年的考试上都出过, 所以... 好好看下)

对于无条件极值一般是要求极值点 (注意是极值点不是最大值最小值!!!) 这时就不能用比较函数值大小的方法来进行判断了, 因为极大 (小) 值的函数值不一定最大 (小), 所以只能用二阶微分 (Hesse 矩阵) 来判断. 当 Hesse 矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

以下简记为

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

为严格正定时, 取得极小值, 为严格负定时取得极大值 (可以类比一元函数的驻点，二阶导数大于 0 是极小值点，二阶导数小于 0 是极小值点)。当 Hesse 矩阵为不定方阵时，不是极值点.

根据线性代数, 有一些判断矩阵是否为严格正定的方法.(严格正定矩阵的充要条件是各阶顺序主子式的行列式大于 0, 严格负定矩阵的充要条件是奇数阶顺序主子式的行列式大于 0, 偶数阶的顺序主子式的行列式小于 0) 把这些方法对应到二阶的 Hesse 矩阵上 (一阶主子式的行列式是 a, 二阶的是 $ac-b^2$), 就有了

(1) 若 $a>0, ac-b^2>0$, 则原矩阵是严格正定矩阵, 则有极小值

(2) 若 $a<0, ac-b^2>0$, 则原矩阵是严格负定矩阵, 则有极大值

(3) 若 $ac-b^2<0$, 则原矩阵是不定矩阵, 无极值

(4) 若 $ac-b^2=0$, 则原矩阵不能判定 (这时就相当于一元函数的二阶导数为 0, 不能判断是否为极值, 只能根据三阶导数来判断)

假如你感觉到记住上面这些条条框框的太麻烦, 担心即使现在记住了考试的时候也会忘，那么你可以通过求 Hesse 矩阵的特征值来判断. 反正是只要严格正定就极小，严格负定就极大, 不定就不是极值, 求出来特征值之后不就全都解决了嘛, 所以只需要求 Hesse 矩阵的特征值 (什么b^2-ac 的都一边去吧, 劳资不需要你), 假如求出的两个特征值都是正数, 那就是严格正定, 就是极小值, 假如两个特征值都是负数, 那么就是严格负定, 就是极大值嘛, 假如一正一负, 就是不定矩阵, 没有极值. 假如一正一零或一负一零或者两个都是 0, 那么就是不能判断 (是不是还在担心特征根是复数的情况怎么办? 放心好了, 实对称矩阵的特征根只能是实数, 并且二阶的矩阵对应二次方程, 很容易能解出来)

(这一段选择性的看看就行, 考试应该不会考) 假如出现了不能判断是否是极值点的情况, 就不能依赖 Hesse 矩阵来判断是否是极值点了. 以 $f(x,y)=x^2-3x^2y+y^3$ 在 (0,0) 处为例, 可以通过找两个趋于 (0,0) 的点列, 其中一个在趋于 (0,0) 的过程中恒大于 f(0,0), 另一个恒小于 f(0,0), 比如取 $\mathbf{x_n}=(\frac{1}{n},\frac{1}{n})$ 和 $\mathbf{y_n}=(\frac{1}{n^3},-\frac{1}{\sqrt[3]{n}})$, 可以证明 (0,0) 不是极值点. 证明是极值点就要取该点的某个邻域, 证明 $f(x_0+\delta x,y_0+\delta y)-f(x_0,y_0)$ 恒为正数或负数即可.

答案

1.(1)$\frac{\partial z}{\partial x}=uv^2+u^2v$

$\frac{\partial z}{\partial y}=uv^2-u^2v$

1.(2)$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\sin\ u+y\cos\ u}{\sin\ u+\sin\ v}$

$\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{\sin\ u-x\cos\ v}{\sin\ u+\sin\ v}$

2.

$$\begin{pmatrix} zx^{z-1} & 0 & x^z\ln\ z \\ y\cos\ xy & x\cos\ xy & 0 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

3.(1) 法向量 (1,-1,2), 切平面 $x-y+2z-\frac{\pi}{2}=0$

3.(3)$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}$

$\frac{x-e}{e}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$

3.(4) 切向量 (1,2,-2), 切线 $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{-2}$

4.(1) 各偏导数为 0 的点有 $(0,0),(-1/3,1/3),(1/3,1/3)$ 这些点都不是极值点