

基于 PDE 方法的一类图像去噪模型

Author

吉林大学数学学院

May 1, 2020

研究背景

图像在获取，存储及传输的过程中，通常会不可避免地受到各种噪声的干扰，致使图像质量受到不同程度的损害。噪声会对图像产生不同的影响，主要包括两个方面：

- 影响主观视觉效果
- 无法继续对图像的信息层和知识层进行处理

研究背景

近几年，基于偏微分方程（PDE）的图像去噪技术已经成为图像处理领域的强有力的工具。因其具有很强的自适应性，提高的变通性和广泛的灵活性，其在图像处理和计算机视觉领域的诸多方面已经有极为广泛的应用。

基本思想是将图像复原过程转化成球一个能量泛函模型或一系列 PDE，以待处理图像作为方程初始值，经过数值迭代或智能优化的方法对该过程求解，最后得到的方程解即是需要的处理结果。这种算法的优势主要体现在以下四个方面：

- 能够在连续领域中进行图像处理，大大简化了图像复原问题
- 能够直接利用图像的几何特征分析图像，比如：曲率，水平集，梯度和切线等
- 能够很好的模拟人类视觉意义的各同向性和各向异性扩散方程
- 可以直接通过成熟的数值计算方法，或利用优化智能方法进行数值实现

国内外研究现状

- 基于 PDE 的理论最早可以追溯到 1965 年 Gabor 以及后来 Jain 等人关于图像光滑和图像增强的研究工作
- 1983 年和 1984 年, Koenderink 和 Witkin 引入了尺度空间的严格理论, 并明确指出了高斯滤波, 处理过程中与热传导方程的各向同性扩散过程是等效的
- 1990 年, Rudin, Osher 和 Fatemi 提出了另一个著名的图像去噪模型, 即 TV 模型。提出运用 ROF 方法即使用人工时间演化求解欧拉方程, 又称为 ROF 模型
- 2000 年, You Y L 等人提出了一种四阶 PDE 模型, 在此过程中 PDE 去噪方法实现了从低阶到高阶的过渡
- 2008 年, Chen Y 等人提出了一种改进的四阶图像去噪模型

主要工作

- 分析了 Chen Y, Vrmuri B C 和 Wang L 等人的一类 PDE 模型, 进而给出了模型的一种改进形式
- 对模型进行了数值实现, 从数学角度分析了其可行性和有效性
- 对模型进行仿真试验和结果分析

PDE 图像去噪数学理论及方法

- 变分方法的能量极小化原理
- 泛函、变分原理及梯度下降流
- 有限差分法

模型的提出

文献 [1] 能量泛函

$$E(u) = \iint_{\Omega} \{g(\nabla G * u)|\nabla u| + \beta(u - I)^2\} dx dy$$

对应的梯度流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -E'(u)$$

文献 [1] 修正以上梯度流方程为：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -|\nabla u| \cdot E'(u)$$

得到用于处理图像去噪的偏微分模型：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g(\nabla G_{\sigma} * u)|\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + \nabla g(\nabla G_{\sigma} * u) \cdot \nabla u - \beta|\nabla u|(u - I), x \in \Omega, t > 0 \\ u(x, 0) = I(x), x \in \Omega \end{cases} \quad (1)$$

模型的改进

在本文中，基于上述两者梯度流方程，使用下面的梯度流方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{|\nabla u|}{\theta + |\nabla u|^{1-\theta}} \cdot E'(u)$$

其中 $0 < \theta \leq 1$ 。当 $\theta = 1$ 时，这个模型与文献 [1] 的模型是一样的，当 $\theta \rightarrow 0$ 时，该方程在形式上趋于未修正的梯度流方程。从这里可以看出，本文中的模型要比文献 [1] 中的模型更广泛，更具有一般意义。

根据以上修正的梯度流方程，得到相应的初值问题：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\theta + |\nabla u|^{1-\theta}} \{g(\nabla G_\sigma * u) |\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + \nabla g(\nabla G_\sigma * u) \cdot \nabla u - \beta |\nabla u| (u - I)\}, x \in \Omega, t > 0 \\ u(x, 0) = I(x), x \in \Omega \end{cases} \quad (2)$$

模型的改进

根据之前的算法，我们可以得到方程（2）的差分格式为：

$$\frac{u^{n+1}(i, j) - u^n(i, j)}{\tau} = g(u^n(i, j))l(u^n(i, j)) + \nabla g \cdot \nabla u^n(i, j) - |\nabla u^n|(i, j)(u^n(i, j) - I(i, j))$$

实验结果及分析

本文将模型 (1) 和模型 (2) 的实验结果进行了比较, 实验证明本文提出的模型 (2) 具有更好的去噪效果。

本文通过第二部分所介绍的相关理论和方法, 通过变分原理, 对图像能量泛函的极小值问题进行了分析, 在已有的模型基础上, 提出了一类改进的 PDE 去噪模型。改进的模型主要是考虑到之前的两类偏微分模型的联系, 在此基础上再梯度流方程中乘以不同的系数项, 这样的话使该种模型具有更好地去噪效果。实验结果证明, 利用改进后的模型不但对图像边缘有更佳良好的保护效果, 而且背景物体以及图像的主体也更加细致清晰, 因此可以得到比较理想的去噪效果。

实验结果及分析



初始图像



加噪图像



模型 (1) 结果图像



模型 (2) 结果图像