# 目录

# 1 极坐标, 球坐标, 柱坐标换元

这个记住各种换元的 Jacobi 行列式就可以了, 极坐标, 柱坐标是 $r$, 球坐标是 $r^2\sin\varphi$, 球坐标这个容易记错, 要记住 Jacobi 行列式里面出现的角度是和 z 轴的夹角, 是 $z = r\cos\varphi$ 里面的角度 $\varphi$, 而不是那个 $\theta$.

(1) 计算积分

$$\iiint_D z\mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中 $D$ 是半球 $x^2+y^2+z^2 \le R^2, (z > 0)$

极 (球) 坐标换元还有另外的一种情况是对过原点的圆 (球) 进行换元 (比如区域 $D: x^2+y^2 \le ax$), 换元仍然为 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 对于换元后的变元的取值范围可以通过下面的方式确定: 原点和圆上的任意一点的连线与 x 轴的夹角的取值范围为 $[-\pi/2, \pi/2]$, 所以 $\theta$ 的取值范围是 $[-\pi/2, \pi/2]$, 对于固定的 $\theta$, 这条线段与圆在 $a\cos\theta$ 处相交, 所以 $r$ 的变化范围是 $[0, a\cos\theta]$, 即

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}r$$

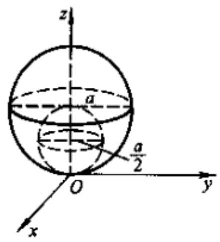
(2) 设 $D: x^2+y^2 \le ax$, 计算积分

$$A = \iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(3) 计算积分

$$A = \iiint_D z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中 $D$ 是两个球面 $x^2+y^2+z^2 = 2az$ 和 $x^2+y^2+z^2 = az$ 之间的点集 (如下图).
用球坐标换元, 容易得 $\theta$ 和 $\varphi$ 的变化范围分别是 $[0, \pi/2]$ 和 $[0, 2\pi]$. 过坐标原点, 在上半空间中作一条射线, 这条射线将同两个球面相交, 只要 $\theta \neq \pi/2$, 交点就有两个, 它们到原点的距离分别是 $a\cos\theta$ 和 $2a\cos\theta$, 这就是说, 对任




意固定的 $\theta \in [0, \pi/2]$,$r$ 的变化范围是 $[a\cos\theta, 2a\cos\theta]$. 这样, 新变量的取值范围就都确定了.

## 2 广义极坐标, 广义球坐标换元

广义极坐标和广义球坐标的换元一般是用在椭圆和椭球区域上的, 需要注意的是 Jacobi 行列式分别变为了 $abr$ 和 $abcr^2\sin\varphi$, 需要注意在这个里面 $r$ 的取值范围是 $[0,1]$(这个也不是很难我就不多讲了)

## 3 不规则区域的换元

(1) 计算

$$\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $D$ 是由曲线 $x^2-y^2=1, x^2-y^2=2, xy=1$ 和 $xy=2$ 围成的图形在第一象限中的那部分.

(2) 计算

$$\iint_D \frac{3x}{y^2+xy^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $D$ 是由曲线 $y^2=x, y^2=3x, xy=1$ 和 $xy=3$ 围成的有界闭区域.

(3) 计算

$$\iint_D \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^4}{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $D$ 是由 $x$ 轴,$y=x, \sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 和 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ 围成的有界闭区域.

这种题一般都是令 $u=f(x,y),v=g(x,y)$ 使得 $u,v$ 的取值为矩形闭区域. 但是对于某些题, 求出用 $x,y$ 来表示的 $u,v$ 是困难的, 所以这种换元的 Jacobi 行列式 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ 也不易求出, 然而我们可以先求出 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$(这个非常好求, 只需要将 $u,v$ 看成自变量然后求 $x,y$ 对 $u,v$ 的偏导数即可), 再利用两者为倒数关系 (根据隐映射定理可以推出) 求出所求的 Jacobi 行列式.

## 4 柱面, 抛物面, 锥面, 球相交问题

有一大类题目的积分区域是柱面, 抛物面, 锥面, 球等旋转体互相相交所截的部分, 这些积分区域的特点是在 z 轴上的投影都是规则的, 所以可以用柱坐标换元.

计算三重积分

$$I=\iiint_D x^2\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中 $D$ 是曲面 $z=x^2+y^2$ 和 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 围成的部分.

## 5 利用对称性简化积分计算

(1) 计算二重积分

$$I=\iint_D(3x^3+x^2+y^2+2x-2y+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $D$=$\{(x,y)$:$1\le x^2+(y-1)^2\le 2$, 且 $x^2+y^2\le 1\}$

(2) 计算三重积分

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1}(x+y+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

## 6 正交变换

这种题吉大的教材挺重视的, 但是其他高校的教材好像并不重视.

(1) 常数 $a,b$ 不全为 0, 求证:

$$\iint_{x^2+y^2\le 1}f(ax+by+c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}f(t\sqrt{a^2+b^2}+c)\mathrm{d}t$$

**解题思路:**正交变换是指坐标轴旋转的变换, 它的特点是坐标轴只旋转, 坐标轴不伸缩, 之间的夹角不变, 所以对于一个圆心在原点的圆 $x^2+y^2=r^2$ 来说, 坐标轴旋转后的图形仍然是圆, 并且位置仍然在圆心, 半径不变.(想一想经过非正交变换后的圆可能会变成什么样的图案?) 也就是说如果有正交变换 $(u,v)^{\mathrm{T}}=A(x,y)^{\mathrm{T}}$, 那么 $x^2+y^2=r^2$ 变为 $u^2+v^2=r^2$, 仍然是圆 (即新变量的积分区域也很容易确定) 这就给计算提供了方便.

对于正交变换的 Jacobi 行列式, 可以证明 Jacobi 行列式的值就等于相应的正交矩阵的行列式的值. 而正交矩阵的行列式的值只有 $\pm 1$, 所以换元的时候就只需要把 dx 换成 du,dy 换成 dv 就可以了.

那么如何来构造正交变换呢? 对于上面的 (1) 来说, 我们自然是希望 $f$ 里面只有一个未知量, 这样才能化为定积分. 一个很自然的想法就是令 $t=ax+by$(当然, 换元 $t=ax+by+c$ 可能更自然的会想到, 但是正交变换中是不能带有常数的), 但是我们还需要另外一个变元, 不妨设 $u=cx+dy$(之所以这样设是因为正交变换都是线性变换, 不可能出现 $u=cx^2+dy^3$ 等). 所以求出对应的正交矩阵是

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

这个矩阵的两个行向量应该互相垂直, 所以应有 $c=-kb, d=ka$ 并且两个行向量的模应该都为 1(根据这个条件在前面乘上相应的系数), 所以最后的正交变换矩阵是

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$$

所以 $t=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y, u=\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}x+\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}y$, 就是正交变换. 再根据正交变换圆的积分区域还是圆,dxdy=dtdu 得到

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} f(ax+by)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{t^2+u^2\le 1} f(\sqrt{a^2+b^2}t)\mathrm{d}u\mathrm{d}t$$

注意到被积函数已经与 u 无关, 所以可以轻松转化为定积分.

**我们发现在上面的推导中, 我们完全不需要完全求出正交矩阵**,(只需要知道这样的正交矩阵是存在的, 不需要求出) 需要做的只是把变换 $t=ax+by$ 前面乘一个系数 $1/\sqrt{a^2+b^2}$ 使得系数的平方和是 1 即可. 然后就可以用正交变换来求解.

(1) 常数 $a,b,c$ 不全为 0, 求证:

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1} f(ax+by+cz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pi\int_{-1}^{1}(1-t^2)f(t\sqrt{a^2+b^2+c^2})\mathrm{d}t$$

## 7 二重积分对参数求导问题

**例:**

设 $f$ 是单变量函数, 连续可导, 令

$$F(t)=\iint_{[0,t]^2} f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

证明:

(1)

$$F'(t)=\frac{2}{t}\left(F(t)+\iint_{[0,t]^2} xyf'(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$$

(2)

$$F'(t)=\frac{2}{t}\int_0^{t^2} f(s)\mathrm{d}s$$

**解:**(1) 作变换 $x=tu,y=tv$, 其 Jacobi 行列式为 $t^2$, 所以

$$F(t)=\iint_{[0,1]^2} t^2f(t^2uv)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

由于这时被积区域已不含 $t$, 所以直接对被积函数求导即可, 有

$$F'(t)=2t\iint_{[0,1]^2} f(t^2uv)\mathrm{d}u\mathrm{d}v+t^2\iint_{[0,1]^2} 2tf'(t^2uv)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

再用变换 $u=x/t,v=y/t$ 换回到原来的变量 $x,y$ 即可得证.

(2)

$$\begin{aligned}F(t)&=\int_0^t\mathrm{d}x\int_0^t f(xy)\mathrm{d}y\\&=\int_0^t\left(\int_0^t f(xy)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x &(1)\\&&(2)\end{aligned}$$

将 $\int_0^t f(xy)\mathrm{d}y$, 看成是关于 x,y,t 的函数 $g(x,y,t)$,

$$
\begin{aligned}
F'(t) &= \left(\int_0^t g(x,y,t)\mathrm{d}x\right)' && (3)\\
&= g(t,y,t) + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial t}(x,y,t)\mathrm{d}x && (4)
\end{aligned}
$$

由于 $g$ 对 $t$ 的导数为 $f(tx)$, 所以

$$
\begin{aligned}
F'(t) &= \left(\int_0^t g(x,y,t)\mathrm{d}x\right)' && (5)\\
&= \int_0^t f(ty)\mathrm{d}y + \int_0^t f(tx)\mathrm{d}x && (6)
\end{aligned}
$$

对两个积分分别作换元 $s = ty, s = tx$, 有

$$
F'(t) = \frac{2}{t}\int_0^{t^2} f(s)\mathrm{d}s \tag{7}
$$

综上,(1) 通过换元把积分区域的 t 转移到了被积函数中, 使得积分区域是常数, 这样就只需要对被积函数求导就可以了.(2) 先变成累次积分再将内层的积分看成是关于 x,y,t 的函数, 再利用含参变量积分中对参数的求导来计算.

模仿上面的例题, 完成下面的练习

设 $f$ 是单变量函数, 连续可导, 令

$$
F(t) = \iint_{[0,t]^3} f(xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z
$$

证明:

(1)

$$
F'(t) = \frac{3}{t}\left(F(t) + \iint_{[0,t]^3} xyzf'(xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)
$$

(2)

$$
F'(t) = \frac{3}{t}\int_0^{t^3} f(s)\mathrm{d}s
$$

# 8 答案

1.(1)$\pi(R^2\mathrm{e}^{R^2}-\mathrm{e}^{R^2}+1)$

1.(2)$\frac{2}{3}a^3(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3})$

1.(3)$\frac{5}{4}\pi a^4$

3.(1)$\frac{1}{2}$

3.(2)$\frac{2}{3}\ln 2$

3.(3)$\frac{15}{2}$

4.$\frac{\pi}{42}$

5.(1)$\frac{7\pi}{12}+\frac{7\sqrt{3}}{8}-2$

5.(2)$\frac{4\pi}{5}$