$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\ \sin\ bx\ \mathrm{d}x &= -\frac{1}{2\alpha}\int_0^{+\infty}\sin\ bx\ \mathrm{d}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\\ &= -\frac{1}{2\alpha}[\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\sin\ bx]_0^{+\infty}+\frac{1}{2\alpha}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\ \mathrm{d}(\sin\ bx)\\ &= \frac{b}{2\alpha}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\ \cos\ bx\ \mathrm{d}x\end{aligned}$$

注意到 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\ \cos\ bx\ \mathrm{d}x$ 对 b 的导数是 $-\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\ \sin\ bx\ \mathrm{d}x$, 令 $I(b)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\ \cos\ bx\ \mathrm{d}x$, 这样由上面的推导就有

$$I'(b)=-\frac{b}{2\alpha}I(b)$$

即

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}b}=-\frac{bI}{2\alpha}$$
$$\frac{\mathrm{d}I}{I}=-\frac{b\ \mathrm{d}b}{2\alpha}$$

两边同时对积分得

$$\ln\ I=-\frac{b^2}{4\alpha}+c$$

即

$$I=c\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4\alpha}}$$

又因为 $b=0$ 时,

$$I(0)=c=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\ \mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}$$

所以

$$I(b)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4\alpha}}$$

原积分 $=\frac{b}{2\alpha}I(b)=\frac{\sqrt{\pi}b}{4\alpha\sqrt{\alpha}}\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{4\alpha}}$