2017 新年福利

2020 年 4 月 27 日

线性代数的几个解题技巧

$\boxed{例\ 1}$

计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ b & x & a & \cdots & a \\ b & b & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$\boxed{解}$

第 n 行减第 n-1 行, 第 n-1 行减第 n-2 行,$\cdots$, 得到

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a & a \\ b-x & x-a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b-x & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b-x & x-a \end{vmatrix}$$

将最后一列展开得

$$D_n = (x-a)D_{n-1} + (-1)^{n+1}a(b-x)^{n-1}$$

即得到递推公式

$$D_n = (x-a)D_{n-1} + a(x-b)^{n-1} \tag{1}$$

当 $a \neq b$ 时, 在原行列式中把 a 换成 b, 把 b 换成 a, 相当于对行列式取转置, 行列式的值不变, 那么便有

$$D_n = (x-b)D_{n-1} + b(x-a)^{n-1} \tag{2}$$

(1) 和 (2) 联立, 消去 D_{n-1}, 即得

$$D_n = \frac{a(x-b)^n - b(x-a)^n}{a-b}$$

当 $a=b$ 时, 容易算出,$D_n = (x+(n-1)a)(x-a)^{n-1}$

本题的关键在于利用对称性构造一个和递推公式对偶的式子, 从而可以消去 D_{n-1}, 直接求出 D_n, 避免了通过递推公式求通项公式的麻烦.

$\boxed{\text{例 2}}$

计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 9 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

$\boxed{\text{解}}$

将 D_n 第 1 列展开得

$$D_n = 9D_{n-1} - 4M_{21}$$

其中 M_{21} 是 a_{21} 的代数余子式, 再将它按第 1 行展开, 得

$$D_n = 9D_{n-1} - 20D_{n-2}$$

这是一个数列的二阶齐次递推公式, 而且已知初始项 $D_1 = 9, D_2 = 61$, 我们需要通过递推公式导出通项公式, 这需要一些技巧.

在递推公式中将 D_n 替换为 x^2, 将 D_{n-1} 替换为 x, 将 D_{n-2} 替换为 1 得到方程

$$x^2 = 9x - 20$$

解得

$$x_1 = 4, x_2 = 5$$

我们计算一下这两个式子 $D_n - x_1D_{n-1}$ 和 $D_n - x_2D_{n-1}$, 发现有

$$D_n - 4D_{n-1} = 5(D_{n-1} - 4D_{n-2})$$

$$D_n - 5D_{n-1} = 4(D_{n-1} - 5D_{n-2})$$

也就是说, 数列 $\{D_n - 4D_{n-1}\}$ 和 $\{D_n - 5D_{n-1}\}$ 都是等比数列, 是不是很神奇? (事实上, 具体是什么原理我也没弄明白)

因此根据 $D_1 = 9, D_2 = 61$ 很容易求出

$$D_n - 4D_{n-1} = 5^n$$

$$D_n - 5D_{n-1} = 4^n$$

消去 D_{n-1} 就得到

$$D_n = 5^{n+1} - 4^{n+1}$$

下面我们来看一个线性方程组问题的栗子 (注意, 这不是错别字, 这是强行卖萌)

$\boxed{\text{例 } 3}$

a, b 取何值时以下方程组有唯一解, 无穷多解, 无解?

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + 2x_3 = 1 \\ ax_1 + (2b-1)x_2 + 3x_3 = 1 \\ ax_1 + bx_2 + (b+3)x_3 = 1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{解}}$

由于系数矩阵是方阵, 我们可以用 Cramer 法则找出唯一解的情况, 这样可以减少计算量.(如果系数矩阵不是方阵则只能通过增广矩阵的行变换求解)

系数矩阵的行列式 $D_n = a(b-1)(b+1)$

故当 $a \neq 0, b \neq \pm 1$ 时有唯一解 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5-b}{a(b+1)} \\ -\frac{2}{b+1} \\ \frac{2(b-1)}{b+1} \end{pmatrix}$

当 $D = 0$ 时, 下面进行分类讨论

(i) 当 $a = 0$ 时，对增广矩阵化简得

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-b & 1-b \\ 0 & 0 & b+1 & 2b-2 \end{pmatrix}$$

要使方程组有解, 第 2 行和第 3 行必成比例, 否则无解

即 $b = 1$ 或 $b = 5$ 时有无穷多解,$b \neq 1$ 且 $b \neq 5$ 时无解

当 $b=1$ 时原方程组的解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

当 $b=5$ 时原方程组的解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

其中 c 为任意常数

(ii) 当 $a \neq 0, b=1$ 时, 同理可得原方程有无穷多解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -\frac{1}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中 c 为任意常数

(iii) 当 $a \neq 0, b=-1$ 时, 同理可得原方程组无解

综合上面的讨论, 得

$a \neq 0, b \neq \pm 1$ 时有唯一解

$a=0, b=1$ 时或 $a=0, b=5$ 时或 $a \neq 0, b=1$ 时有无穷多解

$a=0, b \neq 1$ 且 $b \neq 5$ 时或 $a \neq 0, b=-1$ 时无解