1. 求极限问题

这种题的一般形式就是

$$\lim_{a\to\alpha}\int_a^b f(x,a)\mathrm{d}x$$

这种题真的很简单, 做法就是把极限带入到被积函数中, 被积函数求极限后会变得灰常简单.

但要知道这样做的根据.(假如题目要求说明这样做的理由, 需要有恰当的解释, 下面的定理是这样做的理论依据)(定理也要看看嘛, 说不定定理证明就考这一个呢)

定理 1(极限和积分换序):如果函数 f 在闭矩形 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续, 那么

$$\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x$$

是区间 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数.

证明:任取 $u_0\in[\alpha,\beta]$, 我们证明 φ 在 u_0 处连续. 从

$$\varphi(u)-\varphi(u_0)=\int_a^b (f(x,u)-f(x,u_0))\mathrm{d}x \tag{1}$$

得到

$$|\varphi(u)-\varphi(u_0)|\le\int_a^b |f(x,u)-f(x,u_0)|\mathrm{d}x$$

由于 f 在闭矩形上连续, 所以必定一致连续, 因而对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 对闭矩形 I 中任意的两点 $(x_1,u_1),(x_2,u_2)$, 只要它们的距离小于 δ, 就有

$$|f(x_1,u_1)-f(x_2,u_2)|\le\varepsilon$$

由于点 (x,u) 和点 (x,u_0) 的距离等于 $|u-u_0|$, 所以当 $|u-u_0|<\delta$ 时,

$$|f(x,u)-f(x,u_0)|\le\varepsilon$$

对任意的 $x\in[a,b]$ 成立, 于是由 (1), 即得

$$|\varphi(u)-\varphi(u_0)|<\varepsilon(b-a)$$

这就证明了 φ 在 u_0 处连续, 由于 u_0 是 $[\alpha,\beta]$ 中的任意一点, 所以 φ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续.

注意，φ 在 u_0 连续意味着

$$\lim_{u\to u_0}\varphi(u)=\varphi(u_0) \tag{2}$$

而

$$\varphi(u_0)=\int_a^b f(x,u_0)\mathrm{d}x=\int_a^b\lim_{u\to u_0}f(x,u)\mathrm{d}x$$

这样, 式 (2) 可以写为

$$\lim_{u\to u_0}\int_a^b f(x,u)\mathrm{d}x=\int_a^b\lim_{u\to u_0}f(x,u)\mathrm{d}x$$

这就是说,f 的连续性可以保证积分和极限交换顺序.

练习:

计算下列极限:

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}y$

(2)$\lim\limits_{t\to 0}\int_0^2 x^2\cos tx\mathrm{d}x$

(3)$\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{\alpha+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{4+\alpha x^2}\mathrm{d}x$

2. 积分号下求导问题

这种题的一般形式就是

$$F(u)=\int_{p(u)}^{q(u)}f(x,u)\mathrm{d}x$$

求 $F'(u)$

这种题也算比较简单, 套公式就可以了, 注意不要算错

这样做的根据是:

假如 f 和 $\frac{\partial f}{\partial u}$ 在闭矩形 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续, 并且当 u 有界时,$p(u),q(u)$ 都有界, 那么 F 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微, 并且

$$F'(u)=\int_{p(u)}^{q(u)}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x+f(q(u),u)q'(u)-f(p(u),u)p'(u)$$

(注意: 公式中积分号下限的那个函数求导前边的是负号)(看下这个定理的证明, 有可能会考)

练习:

计算下列函数的导数:

(1)$f(x)=\int_{\sin\ x}^{\cos\ x}\mathrm{e}^{(1+t)^2}\mathrm{d}t$

(2)$f(x)=\int_{x}^{x^2}\mathrm{e}^{-x^2u^2}\mathrm{d}u$

(3)$f(x)=\int_{a+x}^{b+x}\frac{\sin\ xt}{t}\mathrm{d}t$

(4)$f(u)=\int_{0}^{u}g(x+u,x-u)\mathrm{d}x$

(5)$f(t)=\int_{0}^{t^2}\mathrm{d}x\int_{x-t}^{x+t}\sin(x^2+y^2-t^2)\mathrm{d}y$

3. 利用对参数的微分法, 计算积分

这部分内容的特点是积分上下限都为有限值, 假如**上限是$+\infty$ 才会去考虑是否一致收敛**, 如果上下限都是有限值, 那么只要 $f(x,u)$ 和 $\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}$ 连续, 即可用这种方法计算复杂的积分.

练习:

利用对参数的微分法, 计算下列积分:

(1)$\int_{0}^{\pi/2}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)\mathrm{d}x$

(2)$\int_{0}^{\pi/2}\ln\frac{1+a\cos\ x}{1-a\cos\ x}\frac{\mathrm{d}x}{\cos\ x},(|a|<1)$

(3)$\int_{0}^{\pi/2}\frac{\arctan(a\tan\ x)}{\tan\ x}\mathrm{d}x$,(注意讨论 a 的正负)

(4)$\int_{0}^{\pi}\ln(1+a\cos\ x)\mathrm{d}x,|a|<1$

(5)$\int_{0}^{1}\frac{x^2-x}{\ln\ x}\mathrm{d}x$

(6)$\int_{0}^{1}\frac{\arctan\ x}{x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

(7)$\int_{0}^{1}\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$

(8)$\int_{0}^{a}\arctan\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\mathrm{d}x$

利用交换积分次序的方法, 计算下列积分:

(9)$\int_{0}^{1}\sin(\ln\frac{1}{x})\frac{x^b-x^a}{\ln\ x}\mathrm{d}x$

4. 一致收敛

对于积分上限是 $+\infty$ 的积分, 假如交换积分和极限，或者积分号内求导，就必须加上条件是对参数一致收敛

例如

$$\lim_{u\to u_0}\int_{a}^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x=\int_{a}^{+\infty}\lim_{u\to u_0}f(x,u)\mathrm{d}x$$

成立的条件就不只有 f 在 $[a,+\infty]\times[\alpha,\beta]$ 上连续了, 还要加上 $\int_{a}^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 一致收敛.

所以, 如果某个求极限的题需要用到极限和积分换序, 并且积分上限是无穷, 一定要先说明这个积分在极限点附近一致收敛.

同理, 假如用到对参数求导后求积分这种方法时, 如果积分上限是无穷, 也需要先判断是不是在 $[\alpha,\beta]$ 一致收敛，其中 $[\alpha,\beta]$ 是参数需要求积分的区域.

证明一致收敛的常用方法有 3 个, 分别是控制判别法,Abel，dirichlet

证明不一致收敛只能用 cauchy.

控制判别法: 假如存在 $F(x)$ 对于任意的 $u\in[\alpha,\beta]$, 都有 $|f(x,u)|<F(x)$, 并且 $\int_a^{+\infty}F(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $f(x,u)$ 一致收敛

dirichlet:$f(x,u)$ 对于任意的 u 都是单调的, 并且当 x 趋于无穷时对于 $u\in[\alpha,\beta]$ 一致的趋于 0,$\int_a^{+\infty}g(x,u)\mathrm{d}x$ 对于 $u\in[\alpha,\beta]$ 一致有界, 可以推出 $\int_a^{+\infty}f(x,u)g(x,u)\mathrm{d}x$ 一致收敛.

abel:$\int_a^{+\infty}f(x,u)\mathrm{d}x$ 对于 $u\in[\alpha,\beta]$ 一致收敛,$g(x,u)$ 对于任意的 u 都是单调的, 并且对于 $u\in[\alpha,\beta]$ 一致有界, 可以推出 $\int_a^{+\infty}f(x,u)g(x,u)\mathrm{d}x$ 一致收敛.

练习:

证明下列积分在指定的区间一致收敛.

(1)$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(1+x^2)t}\sin t\mathrm{d}x, t\in[0,+\infty)$(控制判别法)(再提示:$|\mathrm{e}^{-(1+x^2)t}\sin t|\le t\mathrm{e}^{-x^2t}\le\frac{t}{1+x^2t}\le\frac{1}{x^2}$)

(2)$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xu}\frac{\sin x}{x+u}\mathrm{d}x, u\in[0,+\infty)$(abel)

(3)$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xu}\sin x\mathrm{d}x, 0<u_0\le u<+\infty$(控制判别法,abel)

(4)$\int_{-\infty}+\infty\frac{x^2\cos ux}{1+x^4}\mathrm{d}x, -\infty<u<+\infty$(控制判别法)

(5)$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+(x+u)^2}, u\in[0,+\infty)$(控制判别法)

(6)$\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-xu}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x, u\in[0,+\infty)$(abel)

对于证明不一致收敛, 只能利用 cauchy 来证明, 即证明对于**任意的**$A>0$, 都存在一个 u_0, A_1, 使得

$$\left|\int_A^{A_1}f(x,u_0)\mathrm{d}x\right|\le\varepsilon_0$$

例: 证明:

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\cos ux}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$$

在 $(0,+\infty)$ 不一致收敛.

思路:当 u 恒大于某个任意的正数 c 时,$|\int_0^{+\infty}\cos\, ux\mathrm{d}x| \le \frac{2}{u} \le \frac{2}{c}$ 对 u 一致有界, 而 $\frac{x}{a^2+x^2}$ 对于每个 u 都是单调的, 并且对 u 一致趋于 0, 所以由 dirichlet 可知原积分在 $[c,+\infty)$ 一致收敛.

所以上述积分不一致收敛的原因就在于 u **可以趋于 0**.

由于 $\int_0^{+\infty}\frac{x}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$ 是发散的, 所以对于任意的 A, 总存在 A_1, 使得

$$\left|\int_A^{A_1}\frac{x}{a^2+x^2}\mathrm{d}x\right| \ge \varepsilon_0$$

由于 u 是可以趋于 0 的, 所以对于任意的 A 对应的 A_1, 总能找到足够小的 u, 使得 $uA_1 < \pi/4$, 所以对于任意的 $x \in [A, A_1]$, 都有 $ux < \frac{\pi}{4}$, 即 $\cos\, ux > \frac{\sqrt{2}}{2}$

所以

$$\left|\int_A^{A_1}\frac{x\cos\, ux}{a^2+x^2}\mathrm{d}x\right| > \frac{\sqrt{2}}{2}\left|\int_A^{A_1}\frac{x}{a^2+x^2}\mathrm{d}x\right| \ge \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon_0$$

即不一致收敛.

例: 证明:

$$\int_0^{+\infty}\sqrt{u}\mathrm{e}^{-ux^2}\mathrm{d}x$$

在 $[0,+\infty)$ 不一致收敛.

提示:对于任意的 A, 取 $A_1 = 2A$, 则作换元 $t = \sqrt{u}x$, 由于 u 可以趋于 0, 不妨取 $u = 1/A$, 则 $t \in [1, 2]$ 原积分化为 $\int_1^2 \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$, 这个值是一个大于 0 的常数, 所以不是一致收敛.

4. 利用对参数求微分计算积分

假如积分上限是无穷, 则必须有一致收敛，才能对参数求导.

(1) 计算积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\sin\, cx\mathrm{d}x, (a,b,c>0)$$

(2) 利用已知的积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \int_0^{+\infty}\frac{\sin\, x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$, 计算下列积分

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(2x^2+x+2)}\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\ x^2}{x} \mathrm{d}x$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x} \mathrm{d}x$$

答案

1.(1)1

1.(2)$\frac{8}{3}$

1.(3)$\frac{\pi}{16}$

2.(1)$-\mathrm{e}^{(1+\cos\ x)^2}\sin\ x-\mathrm{e}^{(1+\sin\ x)^2}\cos\ x$

2.(2)$-2x\int_x^{x^2}\mathrm{e}^{-x^2u^2}u^2\mathrm{d}u+2x\mathrm{e}^{-x^6}-\mathrm{e}^{-x^4}$

2.(3)$\frac{1}{x}(\sin\ x(b+x)-\sin\ x(a+x))+\frac{\sin(b+x)}{b+x}-\frac{\sin(a+x)}{a+x}$

2.(4)$\int_0^u(g_1'(x+u,x-u)-g_2'(x+u,x-u))\mathrm{d}x+g(2u,0)$

2.(5)$\int_0^{t^2}[-2t\int_{x-t}^{x+t}\cos(x^2+y^2-t^2)\mathrm{d}y+\sin(x^2+(x+t)^2-t^2)+\sin(x^2+(x-t)^2-t^2)]\mathrm{d}x+2t\int_{t^2-t}^{t^2+t}\sin\ y^2\mathrm{d}y$

3.(1)$\pi\ln\frac{a+b}{2}$

3.(2)$\arcsin\ a$

3.(3)$\pm\frac{\pi}{2}\ln(1+|a|)$, 若 $a>0$, 取正号, 若 $a<0$, 取负号.

3.(4)$2\pi\ln\cos\frac{\arcsin\ a}{2}$, 或 $\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{2}$

3.(5)$\ln\ \frac{3}{2}$

3.(6)$\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2})$

3.(7)$\frac{\pi\ln\ 2}{8}$

3.(8)$\frac{1}{2}a$

3.(9)$\arctan(1+b)-\arctan(1+a)$

4.(1)$\arctan\ \frac{b}{c}-\arctan\ \frac{a}{c}$

4.(2)$\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\mathrm{e}^{-15/8}$

$\frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{4}$