有这样一类题, 是求重积分的极限问题, 并且重积分的边界趋于无穷. 这样的题有一些简化积分区域的小技巧

例:

设矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 正定矩阵, 计算极限

$$\lim_{R\to\infty}\iint\cdots\int_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\le R^2}\mathrm{e}^{-\sum\limits_{1\le i,j\le n}a_{ij}x_ix_j}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

一看到正定矩阵, 就要想到实矩阵的对角化并且特征值全部大于 0, 并且变换矩阵是正交矩阵, 那自然少不了正交换元. 设

$$A=P^{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)P$$

那么 P 就是正交矩阵了, 所以作换元

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

接下来... 你应该懂得 (手动滑稽) , 就变为了

$$\lim_{R\to\infty}\iint\cdots\int_{y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2\le R^2}\mathrm{e}^{-\lambda_1y_1^2-\lambda_2y_2^2\cdots-\lambda_ny_n^2}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_n$$

这个积分仍然不方便算出, 原因就是积分区域. 假如积分区域为 $\mathbb{R}^n$ 就很容易积出了, 但是, 通过类比二维圆

$$\{(x,y):x^2+y^2\le R^2\}\subseteq\{(x,y):x\le|R|,y\le|R|\}\subseteq\{(x,y):x^2+y^2\le 2R^2\}$$

即一个正方形总在一个它的内接圆和一个外接圆之间.

对于三维球

$$\{x^2+y^2+z^2\le R^3\}\subseteq\{x\le|R|,y\le|R|,z\le|R|\}\subseteq\{x^2+y^2+z^2\le 3R^3\}$$

即一个正方体总在一个它的内接球和一个外接球之间.

对于 n 维球, 也有

$$\{x_1^2+x_2^2+x_3^2\le R^n\}\subseteq\{x_1\le|R|,x_2\le|R|,\cdots,x_n\le|R|\}\subseteq\{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\le nR^n\}$$

又因为被积函数在任何区域都为正, 所以

$$\int_{x_1^2+x_2^2+x_3^2\le R^n} f\mathrm{d}u \le \int_{x_1\le|R|,x_2\le|R|,\cdots,x_n\le|R|} f\mathrm{d}u \le \int_{x_1^2+x_2^2+x_3^2\le nR^n} f\mathrm{d}u$$

当 $R\to+\infty$ 时, 假如极限

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{x_1^2+x_2^2+x_3^2\le R^n} f\mathrm{d}u$$

存在, 由夹挤定理知

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{x_1\le|R|,x_2\le|R|,\cdots,x_n\le|R|} f\mathrm{d}u = \lim_{R\to+\infty}\int_{x_1^2+x_2^2+x_3^2\le R^n} f\mathrm{d}u$$

所以就把积分区域简化为 $[-\infty,+\infty]^n$

然后只需计算

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_1y_1^2-\lambda_2y_2^2\cdots-\lambda_ny_n^2}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_n$$

即

$$\prod_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_iy_i^2}\mathrm{d}y_i$$

虽然 n 重积分基本上不会考到, 但是利用极限简化积分区域这种方法还是有用的. 可以在 2,,3 维半径趋于无穷的球或者椭球在球坐标变换不方便时试用也可以是在不太规则的距离远点距离趋于无穷的几何形体上使用.