1. 求多元函数的极限

$$(1)\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2} \tag{1}$$

$$(2)\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\ln(x^2+\mathrm{e}^{y^2})}{x^2+y^2} \tag{2}$$

$$(3)\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2} \tag{3}$$

$$(4)\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{1+xy}-1}{xy} \tag{4}$$

$$(5)\lim_{x\to+\infty}\lim_{y\to+\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y}\quad \lim_{y\to+\infty}\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y} \tag{5}$$

2. 讨论下列函数是否在 (0,0) 处连续

$$(1)f(x,y)=\frac{x^6y^8}{(x^2+y^4)^5} \tag{6}$$

$$(2)f(x,y)=\frac{x^3y^3}{x^4+y^8} \tag{7}$$

$$(3)f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2} \tag{8}$$

$$(4)f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2} \tag{9}$$

$$(5)f(x,y)=\frac{xy}{x+y} \tag{10}$$

$$(6)f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{1+x+y}-1} \tag{11}$$

3. 说明下列函数在 (0,0) 处的二重极限和累次极限是否存在

$$(1)f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} \tag{12}$$

$$(2)f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} \tag{13}$$

$$(3)f(x,y)=\frac{x^2(1+x^2)-y^2(1+y^2)}{x^2+y^2} \tag{14}$$

4. 证明下列函数不一致连续

$$f(x,y) = \sin\frac{1}{x+y} \qquad (x,y) \in [0,1]^2 \setminus (0,0) \tag{15}$$

5. 方向导数, 偏导数, 可微

(1) 设函数 $f(x,y) = xy$. 计算函数 f 在点 $(1,1)$ 处沿方向 $\mathbf{u} = (1,1)$ 的方向导数.

(2) 设函数 $f(x,y) = (x-1)^2 - y^2$. 计算函数 f 在点 $(0,1)$ 处沿方向 $\mathbf{u} = (3/5, -4/5)$ 的方向导数.

ps: 我觉得初等多元函数偏导数的计算你应该会了 (比如:$z = x^y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$)，我就不找题了.

(3) 设

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 > 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases} \tag{16}$$

验证:f 在 $(0,0)$ 处不连续, 因而 f 在 $(0,0)$ 处不可微. 并验证 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$,$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续.

(4) 证明: 函数 $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

(5) 验证函数

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 > 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases} \tag{17}$$

在 $(0,0)$ 连续且偏导数存在, 但在 $(0,0)$ 处不可微.

(6) 设

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 > 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases} \tag{18}$$

验证:$\frac{\partial f}{\partial x}$,$\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 $(0,0)$ 处不连续, 但 f 在 $(0,0)$ 处可微.

证明一个函数是否可微是重点

偏导数连续是最强的条件，可以推出可微，不可微也可以推出偏导数不连续，但是可微不能推出偏导数连续，偏导数不连续也不能推出不可微 (如 **(6)**)。

可微可以同时推出函数连续和各方向导数 (偏导数) 存在，但是函数连续不能推出可微，各方向导数存在 (偏导数存在) 也不能推出可微。所以偏导数不存在或方向导数不存在可以推出不可微，不连续可以推出不可微

各方向导数存在或偏导数存在和函数连续没有必然的联系，例如: 当 $y = x^2$ 且 $x \neq 0$ 时,f(x,y)=1, 其他情况时,f(x,y)=0. 对于这样的 f 在 (0,0) 处偏导数和各方向导数存在但 f 不连续，函数连续也不能推出偏导数或方向导数存在。

综上

证明一个函数不可微常用的有三种方法，一是用不连续推出不可微，二是利用偏导数不存在推出不可微，假如 **f** 既连续，偏导数又存在就只能在求出偏导数之后利用定义来证明不可微，即证明

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot\Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot\Delta y - f(x,y)$$

不是 $\sqrt{x^2+y^2}$ 的高阶无穷小, 即

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot\Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot\Delta y - f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

不为 0

证明一个函数可微只有用定义 (虽然偏导数连续也能推出可微但是我做过的题里都没有这么用的) 先计算出偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 再证明

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot\Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot\Delta y - f(x,y)$$

是 $\sqrt{x^2+y^2}$ 的高阶无穷小, 即

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot\Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot\Delta y - f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

答案

1.(1) 1

1.(2) 1

1.(3) $+\infty$

1.(4) 1/2

1.(5) 1　0

2. 除了 (3) 外，都不连续

3.(1) 极限存在，累次极限均不存在

3.(2) 极限不存在，累次极限存在

3.(3) 极限不存在，累次极限存在

4. 考虑点列 $(x_n, y_n) = (\frac{1}{\pi+4n\pi}, \frac{1}{\pi+4n\pi})$,$(x'_n, y'_n) = (\frac{1}{4n\pi}, \frac{1}{4n\pi})$ $n \to +\infty$ 时, 虽然两点的距离趋于 0，但 $f(x_n, y_n) - f(x'_n, y'_n) = 1$