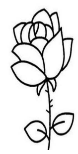
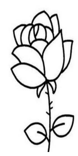
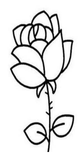
算数入门

先假设你有一支玫瑰



假设喜欢你的男生又给了你另一支玫瑰

现在，数一下你所拥有的玫瑰数量，你会得到结果是两支。也就是说一支玫瑰加一支玫瑰等于两支玫瑰，也就是一加一等于二。

$$1 + 1 = 2$$

这就是算数的运算方法了。

那么，现在你已经对算数的基本原理有了一定了解，就让我们来看一看下面这个简单的例子，来把我们刚刚学到的知识运用到实践中吧。

试试看！**例**

证明：

(1)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}$$

(2)

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

证明：

(1) 对于 $n \in N^*$，$0 < x < \frac{\pi}{2}$, 有

$$sin^{2n+1}x < sin^{2n}x < sin^{2n-1}x$$

从 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 作积分，得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2n+1}xdx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2n}xdx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2n-1}xdx$$

计算得

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

变形后得

$$\frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{((2n)!!)^2}{(2n+1)((2n-1)!!)^2} < \frac{\pi}{2}$$

由夹逼定理，可知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!})^2 = \frac{\pi}{2}$$

化简得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}$$

(2) 利用不等式

$$1 - x^2 \leq e^{-x^2}(0 \leq x \leq 1), e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}(x \geq 0)$$

可得

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx \leq \int_0^1 e^{-nx^2}dx < \int_0^{+\infty} e^{-nx^2}dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

作换元 $t = \sqrt{n}x$, 可得

$$\sqrt{n}\int_0^1 (1-x^2)^n dx \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt \leq \sqrt{n}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

即

$$\frac{\sqrt{n}(2n)!!}{(2n+1)!!} < \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt < \frac{\sqrt{n}(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

令 $n \to \infty$, 利用 (1) 的结论，得到

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$