

# 2017 新年快乐

祝 xxx 同学新年快乐

2020 年 5 月 1 日

线性代数的几个解题技巧

例 1

计算  $n$  阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ b & x & a & \cdots & a \\ b & b & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & x \end{vmatrix}$$

解

第  $n$  行减第  $n-1$  行, 第  $n-1$  行减第  $n-2$  行,  $\cdots$ , 得到

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a & a \\ b-x & x-a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b-x & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b-x & x-a \end{vmatrix}$$

将最后一列展开得

$$D_n = (x-a)D_{n-1} + (-1)^{n+1}a(b-x)^{n-1}$$

即得到递推公式

$$D_n = (x-a)D_{n-1} + a(x-b)^{n-1} \quad (1)$$

当  $a \neq b$  时, 在原行列式中把  $a$  换成  $b$ , 把  $b$  换成  $a$ , 相当于对行列式取转置, 行列式的值不变, 那么便有

$$D_n = (x-b)D_{n-1} + b(x-a)^{n-1} \quad (2)$$

(1) 和 (2) 联立, 消去  $D_{n-1}$ , 即得

$$D_n = \frac{a(x-b)^n - b(x-a)^n}{a-b}$$

当  $a=b$  时, 容易算出,  $D_n = (x + (n-1)a)(x-a)^{n-1}$

本题的关键在于利用对称性构造一个和递推公式对偶的式子, 从而可以消去  $D_{n-1}$ , 直接求出  $D_n$ , 避免了通过递推公式求通项公式的麻烦.

### 例 2

计算  $n$  阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 9 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

### 解

将  $D_n$  第 1 列展开得

$$D_n = 9D_{n-1} - 4M_{21}$$

其中  $M_{21}$  是  $a_{21}$  的代数余子式, 再将它按第 1 行展开, 得

$$D_n = 9D_{n-1} - 20D_{n-2}$$

这是一个数列的二阶齐次递推公式, 而且已知初始项  $D_1 = 9, D_2 = 61$ , 我们需要通过递推公式导出通项公式, 这需要一些技巧.

在递推公式中将  $D_n$  替换为  $x^2$ , 将  $D_{n-1}$  替换为  $x$ , 将  $D_{n-2}$  替换为 1 得到方程

$$x^2 = 9x - 20$$

解得

$$x_1 = 4, x_2 = 5$$

我们计算一下这两个式子  $D_n - x_1 D_{n-1}$  和  $D_n - x_2 D_{n-1}$ , 发现有

$$D_n - 4D_{n-1} = 5(D_{n-1} - 4D_{n-2})$$

$$D_n - 5D_{n-1} = 4(D_{n-1} - 5D_{n-2})$$

也就是说, 数列  $\{D_n - 4D_{n-1}\}$  和  $\{D_n - 5D_{n-1}\}$  都是等比数列, 是不是很神奇? (事实上, 具体是什么原理我也没弄明白)

因此根据  $D_1 = 9, D_2 = 61$  很容易求出

$$D_n - 4D_{n-1} = 5^n$$

$$D_n - 5D_{n-1} = 4^n$$

消去  $D_{n-1}$  就得到

$$D_n = 5^{n+1} - 4^{n+1}$$

下面我们来看一个线性方程组问题的栗子 (注意, 这不是错别字, 这是强行卖萌)

**例 3**

$a, b$  取何值时以下方程组有唯一解, 无穷多解, 无解?

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + 2x_3 = 1 \\ ax_1 + (2b-1)x_2 + 3x_3 = 1 \\ ax_1 + bx_2 + (b+3)x_3 = 1 \end{cases}$$

**解**

由于系数矩阵是方阵, 我们可以用 Cramer 法则找出唯一解的情况, 这样可以减少计算量. (如果系数矩阵不是方阵则只能通过增广矩阵的行变换求解)

系数矩阵的行列式  $D_n = a(b-1)(b+1)$

$$\text{故当 } a \neq 0, b \neq \pm 1 \text{ 时有唯一解 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5-b}{a(b+1)} \\ -\frac{2}{b+1} \\ \frac{2(b-1)}{b+1} \end{pmatrix}$$

当  $D = 0$  时, 下面进行分类讨论

(i) 当  $a = 0$  时, 对增广矩阵化简得

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-b & 1-b \\ 0 & 0 & b+1 & 2b-2 \end{pmatrix}$$

要使方程组有解, 第 2 行和第 3 行必成比例, 否则无解

即  $b = 1$  或  $b = 5$  时有无穷多解,  $b \neq 1$  且  $b \neq 5$  时无解

$$\text{当 } b = 1 \text{ 时原方程组的解为 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{当 } b = 5 \text{ 时原方程组的解为 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中  $c$  为任意常数

(ii) 当  $a \neq 0, b = 1$  时, 同理可得原方程有无穷多解

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -\frac{1}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中  $c$  为任意常数

(iii) 当  $a \neq 0, b = -1$  时, 同理可得原方程组无解

综合上面的讨论, 得

$a \neq 0, b \neq \pm 1$  时有唯一解

$a = 0, b = 1$  时或  $a = 0, b = 5$  时或  $a \neq 0, b = 1$  时有无穷多解

$a = 0, b \neq 1$  且  $b \neq 5$  时或  $a \neq 0, b = -1$  时无解