简化直升机无人机建模

宁海云
广东省佛山市禅城区
haiyunning@gmx.com

2025 年 8 月 14 日

1 初步假设

本研究提出了一种简化的直升机无人机模型。为了使分析可行，采用以下假设:

1. 主旋翼提供升力及前后方向的推力。
2. 尾旋翼用于防止偏航旋转。
3. 忽略机身阻力、侧向力以及复杂的空气动力相互作用。
4. 无人机被视为刚体。
5. 对平移运动采用小角度近似:主旋翼倾角保持在 $\pm 10^\circ$ 内,从而 $\sin(\theta) \approx \theta$。

这些假设旨在聚焦无人机的核心动力学，同时保持模型适用于控制与仿真。

2　含俯仰力矩的简化无人机动力学

基于上述假设，无人机被建模为具有三个主要自由度的刚体：垂直运动、前后运动和偏航旋转。

2.1　力和力矩分解

设 F_{rotor} 为主旋翼推力，θ 为倾角，d 为质心到主旋翼轴心沿前轴的距离，则有：

$$
\begin{aligned}
F_x &= F_{\text{rotor}} \sin\theta && \text{(前向力)} \\
F_L &= F_{\text{rotor}} \cos\theta && \text{(垂直升力)} \\
M_y &= d \cdot F_x = d \cdot F_{\text{rotor}} \sin\theta && \text{(俯仰力矩)}
\end{aligned}
$$

2.2　运动方程

平移动力学:

$$m\dot{u} = F_x = F_{\text{rotor}} \sin\theta, \quad m\dot{w} = F_L - mg = F_{\text{rotor}} \cos\theta - mg \tag{1}$$

俯仰旋转动力学:

$$I_y \, \dot{q} = M_y = d \cdot F_{\text{rotor}} \sin\theta \tag{2}$$

偏航旋转动力学:

$$I_z \, \dot{r} = M_z = d_{\text{tail}} \cdot F_{\text{tail rotor}} \tag{3}$$

惯性系下运动学:

$$\dot{X} = u, \quad \dot{Z} = w, \quad \dot{\psi} = r \tag{4}$$

2.3 控制输入

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} F_{\text{rotor}} \\ \theta \\ F_{\text{tail rotor}} \end{bmatrix}$$

- F_{rotor} 控制垂直运动。
- θ 控制前后运动并产生俯仰力矩。
- $F_{\text{tail rotor}}$ 控制偏航旋转。

3 线性化无人机动力学与状态空间矩阵

3.1 状态与输入向量

定义状态向量和控制输入向量为:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} X \\ Z \\ \psi \\ u \\ w \\ q \\ r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} F_{\text{rotor}} \\ \theta \\ F_{\text{tail rotor}} \end{bmatrix} \tag{5}$$

3.2 悬停平衡

悬停时,无人机应无线性或角速度。主旋翼平衡重力,尾旋翼抵消主旋翼扭矩:

$$u = w = q = r = 0, \quad \theta = 0, \quad F_{\text{rotor0}} = mg, \quad F_{\text{tail rotor0}} = F_{\text{tail hover}}$$

其中 $F_{\text{tail hover}}$ 为悬停时尾旋翼抵消主旋翼扭矩所需推力。

3.3 线性化

对悬停状态进行一阶泰勒展开线性化：

$$
\begin{aligned}
m\dot{u} &\approx mg\,\theta \\
m\dot{w} &\approx \Delta F_{\text{rotor}} \\
I_y\dot{q} &\approx d\,mg\,\theta \\
I_z\dot{r} &\approx d_{\text{tail}}\,\Delta F_{\text{tail rotor}}
\end{aligned}
$$

3.4 状态空间形式

定义状态向量与输入扰动：

$$
\mathbf{x} = \begin{bmatrix} X \\ Z \\ \psi \\ u \\ w \\ q \\ r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Delta F_{\text{rotor}} \\ \theta \\ \Delta F_{\text{tail rotor}} \end{bmatrix}
$$

其中，X 和 Z 分别表示水平与垂直位置，ψ 为偏航角，u 和 w 为机体坐标系下的速度，q 和 r 分别为俯仰角速度与偏航角速度。控制输入为主旋翼推力 F_{rotor}、主旋翼倾角 θ、以及尾旋翼推力 $F_{\text{tail rotor}}$。符号 Δ 表示某变量相对于平衡（悬停）状态的偏差。

线性化系统可表示为：

$$
\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \tag{6}
$$

对应矩阵为：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d\,mg}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d_{\text{tail}}}{I_z} \end{bmatrix}$$

A 描述运动学（位置由速度决定），B 描述动力学（速度与偏航角速度受控制输入影响）。

4 LQR 控制设计

4.1 状态空间表示

基于线性化的三自由度无人机动力学，系统可表示为：

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} X \\ Z \\ \psi \\ u \\ w \\ q \\ r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Delta F_{\text{rotor}} \\ \theta \\ \Delta F_{\text{tail rotor}} \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}.$$

4.2 LQR 控制器

线性二次型调节器（LQR）的目标是寻找使下式最小化的控制输入 $\mathbf{u}$：

$$J = \int_0^\infty \left(\mathbf{x}^T Q\mathbf{x} + \mathbf{u}^T R\mathbf{u}\right) dt,$$

其中 $Q \succeq 0$ 用于惩罚状态偏差，$R \succ 0$ 用于惩罚控制能量；$\mathbf{x}$ 表示状态误差（error），计算方式为 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\text{current}} - \mathbf{x}_{\text{ref}}$。最优状态反馈律为：

$$\mathbf{u} = -K\mathbf{x},$$

其中 K 由连续时间代数黎卡提方程（CARE）求得：

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0.$$

4.3 实现说明

- LQR 会通过耦合的状态动力学自动协调垂直、前进、俯仰与偏航的控制。
- 权重矩阵 Q 和 R 可调节，需要在仿真或者实验中得到最符合期望运动的数值。
- 线性化模型仅在悬停附近有效；对于大幅机动，需要使用增益调度或非线性控制方法。

5 关于上次面试的进一步评论

5.1 测试不稳定性的原因

测试尾旋翼产生的推力，并将其与使尾梁发生变形所需的力进行比较是合理的做法。根据力的作用是相互的，尾梁受到的力大小是由尾旋翼推力和主旋翼较小的一方决定的，所以直接测试飞行器稳定时，尾旋翼推力，然后测试相同大小的力是否会导致尾梁产生形变的这测试，是可以用来判断晃动是否由控制器导致。

5.2 改进现有 PID 控制策略的可能性

根据面试时内容，因为并未听到关于现有 PID 控制设计的具体细节。PID 控制有多种实现方式，因此目前无法判断不稳定性是由控制器设计本身引起，还是由其他因素造成。可以确定的是，PID 控制无法像基于模型的策略那样实现瞬时且高度精确的控制效果。