

4 Finite-Elemente-Abschätzung für optimale Steuerungen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ weiterhin ein konvexes Polygon. Wir untersuchen verschiedene Ansätze zur Finite-Elemente-Diskretisierung des Optimalsteuerproblems

$$\min_{y,u \in L^2(\Omega)} J(y,u) = \frac{1}{2} \|y - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

bei

$$\left. \begin{array}{ll} -\Delta y = u & \text{in } \Omega \\ y = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{array} \right\} \quad (2.2.1)$$

und

$$u \in U_{\text{ad}} = \left\{ u \in L^2(\Omega) : u_a \leq u(x) \leq u_b \text{ fast überall in } \Omega \right\}.$$

Wir setzen in diesem Kapitel $\lambda > 0$ voraus. Den Fall $\lambda = 0$ behandeln wir im nächsten Kapitel. Das Optimalitätssystem war

$$\begin{array}{ll} -\Delta \bar{y} = \bar{u} & \text{in } \Omega, \\ \bar{y} = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{array} \quad \begin{array}{ll} -\Delta \bar{p} = \bar{y} - y_d & \text{in } \Omega, \\ \bar{p} = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{array}$$

$$(\bar{p} + \lambda \bar{u}, u - \bar{u})_{L^2(\Omega)} \geq 0 \quad \forall u \in U_{\text{ad}}.$$

Unser optimales Tripel aus Zustand, Steuerung und adjungiertem Zustand ist also $(\bar{y}, \bar{u}, \bar{p})$. Nach den Erkenntnissen aus [Abschnitt 2.1](#) existiert ein solches Tripel, und es ist zudem eindeutig.

Aufgabenstellung

design; draft

Das Ziel ist im Folgenden, ein Schema zu entwerfen, mittels dessen wir eine Funktionenfolge (y_h, u_h) erzeugen, die für $h \downarrow 0$ in $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ gegen (\bar{y}, \bar{u}) konvergiert. Dabei sollen die Approximierenden (y_h, u_h) *diskret* sein, d.h., sie sollen geeignet als endlichdimensionales Objekt auf einem Computer abzubilden sein. Weiterhin sind wir nicht nur an quantitativer Konvergenz an sich, sondern insbesondere auch an qualitativer, d.h. an *Konvergenzraten* in Ordnungen des Diskretisierungsparameters $h \downarrow 0$ interessiert.

rates of
convergence

Um im Folgenden die verschiedenen Objekte gut auseinander halten zu können, nutzen wir die Lösungsoperatoren der Laplace-Gleichung bzw. der zugehörigen Galerkin-Approximation.

Bezeichne mit S Lösungsabbildung $f \mapsto z$ der Laplace-Gleichung (1.2.2), d.h. $z = Sf \in V = H_0^1(\Omega)$ löst (eindeutig)

$$a(z, v) = (\nabla z, \nabla v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

Wie in Abschnitt 2.2 betrachten wir S als Operator $S: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$.

Im weiteren sei ein Finite-Elemente Setup gegeben wie in Kapitel 3, grundsätzlich mit stückweise linearen Ansatzfunktionen und dem zugehörigen Ansatzraum $V_h = V_h^1$, basierend auf einer Triangulierung \mathcal{T}_h von Ω . Wir bezeichnen wir die Lösungsabbildung S_h zur Galerkin-Approximation $f \mapsto z_h$ mit $z_h \in V_h$ definiert durch

$$a(z_h, v_h) = (\nabla z_h, \nabla v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

als Operator $S_h: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$. Für gegebenes $f \in L^2(\Omega)$ gibt $Sf \in H_0^1(\Omega)$ also die schwache Lösung der Laplace-Gleichung (1.2.2), während $S_h f \in V_h$ die Galerkin-Approximation von Sf liefert. Die adjungierten Operatoren dazu sind S_h^* bzw. S^* ; diese sind wohldefiniert und stimmen nach der Überlegung in Abschnitt 2.2 mit S_h bzw. S überein. Es ist aus Gründen mathematischer Sorgfalt sinnvoll, die Operatoren und ihre Adjungierten auseinander zu halten. Beachte, dass wir nach den Ergebnissen in Kapitel 3 Approximationsordnungen in h für Ausdrücke der Form $Su - S_h u$ bzw. $S^* u - S_h^* u$ zur Verfügung haben.

4.1 Variationelle Diskretisierung

Die variationelle Diskretisierung wurde eingeführt von Hinze (2005)¹. Wir beginnen mit dieser Methode, weil sie relativ einfach zu analysieren ist. Wir betrachten dazu das teil-diskretisierte Problem:

variational
discretization

$$\min_{u \in L^2(\Omega)} \frac{1}{2} \|S_h u - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (\text{P}_h^{\text{Var}})$$

mit

$$u \in U_{\text{ad}} = \left\{ u \in L^2(\Omega) : u_a \leq u(x) \leq u_b \text{ fast überall in } \Omega \right\}.$$

¹M. Hinze: *A Variational Discretization Concept in Control Constrained Optimization: The Linear-Quadratic Case*. Computational Optimization and Applications 30, 45–61 (2005). DOI:10.1007/s10589-005-4559-5

Beachte: die Steuerung wird **nicht** diskretisiert ^{scheduled} angesetzt. Im Vergleich zum Ausgangsproblem haben wir nur y in der Zielfunktion durch die Galerkin-Approximation ersetzt.

Nach der Theorie in Kapitel 2 existiert eine eindeutige Lösung von (P_h^{Var}) . Wir nennen diese $\bar{u}_h \in L^2(\Omega)$. Das zugehörige Optimalitätssystem ist ^{corresponding}

$$\bar{y}_h = S_h \bar{u}_h, \quad \bar{p}_h = S_h^*(\bar{y}_h - y_d), \quad (\bar{p}_h + \lambda \bar{u}_h, u - \bar{u}_h) \geq 0 \quad \forall u \in U_{\text{ad}}.$$

Wir möchten den Diskretisierungsfehler der Steuerung $\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2(\Omega)}$ abschätzen. Der Ausgangspunkt sind die beiden Variationsungleichungen. Dazu setzen wir jeweils die andere Lösung für u ein. Addition der beiden Ungleichungen

$$\begin{aligned} (\bar{p} + \lambda \bar{u}, \bar{u}_h - \bar{u}) &\geq 0 \\ (\bar{p}_h + \lambda \bar{u}_h, \bar{u} - \bar{u}_h) &\geq 0 \end{aligned}$$

liefert

$$(\bar{p} - \bar{p}_h, \bar{u}_h - \bar{u}) + \lambda(\bar{u} - \bar{u}_h, \bar{u}_h - \bar{u}) \geq 0$$

oder

$$\lambda \cdot \|\bar{u}_h - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (\bar{p} - \bar{p}_h, \bar{u}_h - \bar{u}). \quad (4.1.1)$$

Daraus wollen wir eine Fehlerabschätzung herleiten:

$$\begin{aligned} (\bar{p} - \bar{p}_h, \bar{u}_h - \bar{u}) &= (S^*(\bar{y} - y_d) - S_h^*(\bar{y}_h - y_d), \bar{u}_h - \bar{u}) \\ &= (S_h^* y_d - S^* y_d, \bar{u}_h - \bar{u}) + (S^* S \bar{u} - S_h^* S_h \bar{u}_h, \bar{u}_h - \bar{u}). \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Für den ersten Term in (4.1.2) können wir einfach

$$(S_h^* y_d - S^* y_d, \bar{u}_h - \bar{u}) \leq \underbrace{\|S_h^* y_d - S^* y_d\|_{L^2(\Omega)}}_{\text{FE-Fehler}} \cdot \|\bar{u}_h - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \quad (4.1.3)$$

verwenden. Mit der Fehlerabschätzung

$$\|S^* y_d - S_h^* y_d\|_{L^2(\Omega)} \leq ch^2 \cdot \|S^* y_d\|_{H^2(\Omega)} \leq ch^2 \cdot \|y_d\|_{L^2(\Omega)}$$

ergibt sich hier die Ordnung h^2 . Wir schauen uns nun den zweiten Term in (4.1.2) an:

$$(S^* S \bar{u} - S_h^* S_h \bar{u}_h, \bar{u}_h - \bar{u}) = (S^* S \bar{u} - S_h^* S_h \bar{u}, \bar{u}_h - \bar{u}) + (S_h^* S_h \bar{u} - S_h^* S_h \bar{u}_h, \bar{u}_h - \bar{u}).$$

Für den hinteren Term gilt

$$(S_h^* S_h \bar{u} - S_h^* S_h \bar{u}_h, \bar{u}_h - \bar{u}) = (S_h \bar{u} - S_h \bar{u}_h, S_h \bar{u}_h - S \bar{u}) = -\|S_h \bar{u} - S_h \bar{u}_h\|^2 \leq 0. \quad (4.1.4)$$

Demnach bleibt der vordere Term:

$$(S^*S\bar{u} - S_h^*S_h\bar{u}, \bar{u}_h - \bar{u}) \leq \|S^*S\bar{u} - S_h^*S_h\bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\bar{u}_h - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Das ist im Wesentlichen wieder ein Finite-Elemente-Fehler, analog zu (4.1.3):

$$\|S^*S\bar{u} - S_h^*S_h\bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq \underbrace{\|S^*S\bar{u} - S_h^*S_h\bar{u}\|_{L^2(\Omega)}}_{\text{FE-Fehler} \leq ch^2 \cdot \|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)}} + \underbrace{\|S_h^*S_h\bar{u} - S_h^*S_h\bar{u}\|_{L^2(\Omega)}}_{\text{FE-Fehler} \leq ch^2 \cdot \|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)}}. \quad (4.1.5)$$

Insgesamt ergibt sich für (4.1.2) nach einmaligem Kürzen von $\|\bar{u}_h - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}$ das Resultat:

Lemma 4.1.1. Für die Optimallösungen $\bar{u}_h \in L^2(\Omega)$ der variationellen Diskretisierung (P_h^{Var}) gilt

$$\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq ch^2.$$

Kann man das Problem numerisch lösen? Analog zu Abschnitt 2.2 kann man die Variationsungleichung

$$(\bar{p}_h + \lambda \bar{u}_h, u - \bar{u}_h) \geq 0 \quad \forall u \in U_{\text{ad}}$$

in eine punktweise Projektionsformel überführen: transfer

$$\bar{u}_h(x) = P_{[u_a, u_b]} \left(-\frac{1}{\lambda} \bar{p}_h(x) \right).$$

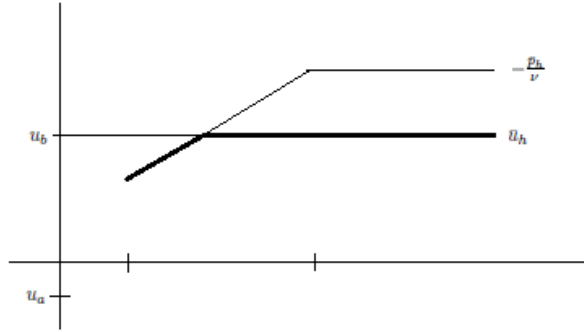


Abbildung 4.1: Zusätzliche Verzweigungen in der variationellen Diskretisierung

Es entstehen zusätzliche Knicke innerhalb der einzelnen Dreiecke, siehe Abbildung 4.1. Die berechnete Steuerung \bar{u}_h ist stückweise linear, aber im Allgemeinen kein Element von V_h , d.h. $\bar{u}_h \notin V_h$.

Algorithmische Schwierigkeiten:

1. Berechnung von \bar{u}_h aus \bar{p}_h .
2. Berechnung von Skalarprodukten (\bar{u}_h, v_h) .
3. Konstruktion eines guten Lösungsalgorithmus zum Lösen des Problems.

Prinzipiell kann man diese Probleme numerisch lösen. Die Programmierung ist aber recht aufwändig.

4.2 Stückweise konstante Steuerungen

piecewise
constant

Die erste Arbeit zum Ansatz mit stückweise konstanten Steuerungen lieferte Falk (1973)². Es ist damit die älteste Methode. Weitere Popularität gewann das Thema durch eine Arbeit von Arada, Casas und Tröltzsch (2002)³. Ein Vorteil in dieser Diskretisierung ist, dass hierfür sehr effiziente Algorithmen existieren (*semismooth Newton, primal-duale Aktive-Mengen-Strategie*).

Wir setzen hier

$$U_h = \left\{ u \in L^2(\Omega) : u|_T \in \mathbb{P}_0 \right\}$$

und definieren

$$U_{\text{ad}}^h = U_h \cap U_{\text{ad}}.$$

Das diskretisierte Problem ist gegeben durch

$$\min_{u \in U_{\text{ad}}^h} J(y_h, u) = \frac{1}{2} \|S_h u - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (\text{P}_h^0)$$

Die optimale Lösung bzw. das Optimalitäts-Tripel von (P_h^0) wird mit $(\bar{y}_h, \bar{u}_h, \bar{p}_h)$ bezeichnet. Es ergibt sich

$$\bar{p}_h = S_h^*(\bar{y}_h - y_d)$$

und

$$(\bar{p}_h + \lambda \bar{u}_h, u_h - \bar{u}_h) \geq 0 \quad \forall u_h \in U_{\text{ad}}^h. \quad (4.2.1)$$

July 2, 2024

Lecture 12 →

²R. S. Falk: *Approximation of a class of optimal control problems with order of convergence estimates*. Journal of Mathematical Analysis and Applications 44 #1, 28–47 (1973). DOI:10.1016/0022-247X(73)90022-X

³N. Arada, E. Casas, & F. Tröltzsch: *Error Estimates for the Numerical Approximation of a Semilinear Elliptic Control Problem*. Computational Optimization and Applications 23, 201–229 (2002). DOI:10.1023/A:1020576801966

Im Gegensatz zur variationellen Diskretisierung dürfen wir aber die diskrete Optimalitätsbedingung nur mit $u_h \in U_{\text{ad}}^h$ testen, d.h., wir können **nicht** mit $\bar{u} \notin U_{\text{ad}}^h$ testen, sondern nur mit Projektionen oder Interpolanten von \bar{u} . Im Fall stückweise konstanter Funktionen arbeitet man mit der L^2 -Projektion, d.h. mit

$$\Pi_h \bar{u} := \arg \min_{v_h \in U_h} \|\bar{u} - v_h\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Es gilt

$$\Pi_h \bar{u}|_T = \frac{1}{|T|} \int_T \bar{u} \, dx$$

und

$$(\Pi_h \bar{u} - \bar{u}, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in U_h,$$

Wir sehen: $\Pi_h \bar{u}|_T$ ist der Mittelwert von \bar{u} über T . Das entspricht auch genau der lokalen Interpolanten $I_T \bar{u}$ für stückweise konstante Finite Elemente V_h^0 wie in [Kapitel 3](#) konstruiert. Mit dieser gilt automatisch $u_a \leq \Pi_h \bar{u} \leq u_b$ wenn $\bar{u} \in U_{\text{ad}}$, d.h. automatisch $\Pi_h \bar{u} \in U_{\text{ad}}^h$. Siehe die Übungen und [Abbildung 4.2](#) weiter unten.

Wir testen die Variationsungleichungen (2.2.2) bzw. (4.2.1) mit \bar{u}_h bzw. mit $\Pi_h \bar{u}$:

$$\begin{aligned} (\bar{p} + \lambda \bar{u}, \bar{u}_h - \bar{u}) &\geq 0 \\ (\bar{p}_h + \lambda \bar{u}_h, \Pi_h \bar{u} - \bar{u}_h) &\geq 0. \end{aligned}$$

Die zweite Ungleichung schreiben wir als ($0 = \bar{u} - \bar{u}$ einfügen)

$$(\bar{p}_h + \lambda \bar{u}_h, \Pi_h \bar{u} - \bar{u}) + (\bar{p}_h + \lambda \bar{u}_h, \bar{u} - \bar{u}_h) \geq 0.$$

Durch Addition der beiden Ungleichungen ergibt sich dann

$$(\bar{p}_h + \lambda \bar{u}_h, \Pi_h \bar{u} - \bar{u}) + (\bar{p}_h - \bar{p}, \bar{u} - \bar{u}_h) \geq \lambda \cdot \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (4.2.2)$$

Den zweiten Term links in (4.2.2) hatten wir bereits in (4.1.2), wo wir gesehen haben, dass wir die Ordnung h^2 erzeugen können. Neu ist der Term $(\bar{p}_h + \lambda \bar{u}_h, \Pi_h \bar{u} - \bar{u})$. Wegen $\bar{u}_h \in U_h$ gilt

$$(\lambda \bar{u}_h, \Pi_h \bar{u} - \bar{u}) = 0.$$

Die Funktion \bar{p}_h gehört nicht zu U_h sondern zu V_h , es kann also keine weitere Orthogonalität direkt ausgenutzt werden. Allerdings haben wir in der Übung gezeigt, dass für die optimale Lösung \bar{u} des kontinuierlichen Problems $\bar{u} \in H^1(\Omega)$ gilt (wegen (2.2.5)), und daher (siehe (3.4.6))

$$\|\Pi_h \bar{u} - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq ch \cdot \|\bar{u}\|_{H^1(\Omega)}.$$

Wir könnten also in (4.2.2) abschätzen:

$$(\bar{p}_h + \lambda \bar{u}_h, \Pi_h \bar{u} - \bar{u}) = (\bar{p}_h, \Pi_h \bar{u} - \bar{u}) \leq \|p_h\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\Pi_h \bar{u} - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq c \cdot h \|\bar{u}\|_{H^1(\Omega)}.$$

Diese Abschätzung würde uns ein $h^{\frac{1}{2}}$ als Gesamtordnung für $\bar{u} - \bar{u}_h$ liefern, da in (4.2.2) links $\|\bar{u} - \bar{u}_h\|^2$ steht und wir nicht mehr insgesamt gegen diesen Term abgeschätzt haben:

$$\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq ch^2 \cdot \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2(\Omega)} + ch \cdot \|\bar{u}\|_{H^1(\Omega)}.$$

Das ist nicht optimal, und tatsächlich geht es besser, wenn man geschickt Orthogonalität benutzt:

$$\begin{aligned} (\bar{p}_h + \lambda \bar{u}_h, \Pi_h \bar{u} - \bar{u}) &= (\bar{p}_h, \Pi_h \bar{u} - \bar{u}) = (\bar{p}_h - \Pi_h \bar{p}_h, \Pi_h \bar{u} - \bar{u}) \\ &\leq \|\bar{p}_h - \Pi_h \bar{p}_h\|_{L^2(\Omega)} \|\Pi_h \bar{u} - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq ch^2 \cdot \|\bar{p}_h\|_{H^1(\Omega)} \|\bar{u}\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir insgesamt

$$\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c \cdot h^2 \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2(\Omega)} + ch^2.$$

Das ist eine Ungleichung der Form

$$a^2 \leq ch^2 \cdot a + ch^2.$$

weighted

Mittels der gewichteten Young-Ungleichung (auch *Peter-Paul inequality*) der Form $\alpha\beta \leq \frac{\varepsilon\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2\varepsilon}$ schätzen wir $ch^2 \cdot a$ via $\alpha = c \cdot a$ und $\beta = h^2$ sowie $\varepsilon = c^{-2}$ ab:

$$\begin{aligned} a^2 \leq ch^2 \cdot a + ch^2 &\leq \frac{a^2}{2} + \frac{h^4}{2c^2} + ch^2 \quad \implies \quad a^2 \leq \frac{h^4}{c^2} + 2ch^2 \\ &\implies \quad a \leq \sqrt{\frac{h^4}{c^2} + 2ch^2} \leq \frac{h^2}{c} + \sqrt{2c} \cdot h. \end{aligned}$$

Für $h \downarrow 0$ erhalten wir eine Approximationsordnung von h .

Lemma 4.2.1. *Für die Diskretisierung mit stückweise konstanter Steuerung \bar{u}_h als Optimallösung von (P_h^0) ergibt sich*

$$\|\bar{u}_h - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq ch.$$

Wir verlieren damit eine Ordnung gegenüber der variationellen Diskretisierung, was jedoch nicht verwunderlich ist, da h die Bestapproximations-Ordnung in U_h ist:

$$\min_{u_h \in U_h} \|u_h - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} = \|\Pi_h \bar{u} - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq ch \cdot \|\bar{u}\|_{H^1(\Omega)}.$$

4.3 Stückweise lineare Steuerungen

Steuerungen mit einem stückweise linearen Ansatz wurden seit 2002 von verschiedenen Autoren untersucht (Casas, Mateos, Rösch, Tröltzsch, ...). Wir setzen hier

piecewise
linear

$$U_h = \left\{ u \in L^2(\Omega) : u|_T \in \mathbb{P}_1 \right\}$$

und definieren

$$U_{\text{ad}}^h = U_h \cap U_{\text{ad}}.$$

Wir bestimmen \bar{u}_h als Optimallösung zum diskretisierten Problem

$$\min_{u_h \in U_{\text{ad}}^h} \frac{1}{2} \|S_h u_h - y_d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u_h\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (\text{P}_h^1)$$

Auf den ersten Blick kann man stückweise lineare Steuerungen analog zu stückweise linearen diskutieren. Wegen $U_h = V_h$ würden sogar alle Terme in (4.2.2) wegfallen, d.h. auch $(\bar{p}_h, \Pi_h \bar{u} - \bar{u})$. Das erscheint nun überaus erstaunlich und dieser Weg ist in der Tat mathematisch nicht korrekt, denn die L^2 -Projektion $\Pi_h \bar{u}$ auf den Unterraum $U_h = V_h$ verletzt möglicherweise die Steuerschranken, d.h. $\Pi_h \bar{u} \notin U_{\text{ad}}$. Man darf $\Pi_h \bar{u}$ also nicht in die Variationsungleichung des kontinuierlichen Problems einsetzen. Siehe die Übungen und [Abbildung 4.2](#).

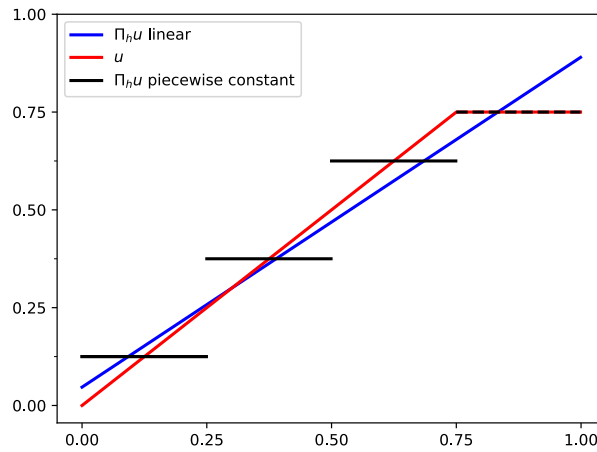


Abbildung 4.2: L^2 Projektion auf stückweise konstante und lineare Ansatzfunktionen.

Die Verwendung der linearen interpolierenden Funktion von \bar{u} ist prinzipiell möglich, wird aber recht technisch. Wir verfolgen daher eine elegantere Idee von Casas und Mateos⁴.

⁴E. Casas, M. Mateo: *Error estimates for the numerical approximation of Neumann control problems*. Computational Optimization and Applications 39, 265–295 (2008). [10.1007/s10589-007-9056-6](https://doi.org/10.1007/s10589-007-9056-6)

Wir möchten eine diskrete Steuerung $I_h \bar{u} \in U_{\text{ad}}^h$ finden, für die gilt:

$$(\bar{p} + \lambda \bar{u}, u_h - I_h \bar{u}) \geq 0 \quad \forall u_h \in U_{\text{ad}}^h.$$

Wir nehmen zunächst an, dass diese Beziehung richtig ist. Was folgt daraus? Die vorige Ungleichung mit $u_h = \bar{u}_h$ addiert mit der diskreten Variationsungleichung (4.2.1) mit $u_h = I_h \bar{u} \in U_{\text{ad}}^h$, also

$$\begin{aligned} (\bar{p} + \lambda \bar{u}, \bar{u}_h - I_h \bar{u}) &\geq 0, \\ (\bar{p}_h + \lambda \bar{u}_h, I_h \bar{u} - \bar{u}_h) &\geq 0, \end{aligned}$$

ergibt

$$(\bar{p} - \bar{p}_h, \bar{u}_h - I_h \bar{u}) + \lambda \cdot (\bar{u} - \bar{u}_h, \bar{u}_h - I_h \bar{u}) \geq 0$$

oder ($0 = \bar{u} - \bar{u}$ einfügen)

$$(\bar{p} - \bar{p}_h, \bar{u}_h - I_h \bar{u}) + \lambda \cdot (\bar{u} - \bar{u}_h, \bar{u} - I_h \bar{u}) \geq \lambda \cdot \|\bar{u}_h - \bar{u}\|^2. \quad (4.3.1)$$

Für den zweiten Term in (4.3.1) finden wir

$$\lambda \cdot (\bar{u} - \bar{u}_h, \bar{u} - I_h \bar{u}) \leq \lambda \cdot \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2(\Omega)} \|\bar{u} - I_h \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Das merken wir uns vorerst. Nun zum erste Term in (4.3.1):

$$\begin{aligned} (\bar{p} - \bar{p}_h, \bar{u}_h - I_h \bar{u}) &= (S^*(S\bar{u} - y_d) - S_h^*(S_h \bar{u}_h - y_d), \bar{u}_h - I_h \bar{u}) \\ &= \underbrace{(S_h^* y_d - S^* y_d, \bar{u}_h - I_h \bar{u})}_{(A)} + \underbrace{(S^* S \bar{u} - S_h^* S_h \bar{u}, \bar{u}_h - I_h \bar{u})}_{(B)} \\ &\quad + \underbrace{(S_h^* S_h \bar{u} - S_h^* S_h \bar{u}_h, \bar{u}_h - I_h \bar{u})}_{(C)}. \end{aligned}$$

Wir schätzen die ersten beiden Terme ab und setzen dabei die FE-Fehler-Abschätzungen ein (für (B) die $0 = S_h^* S \bar{u} - S_h^* S \bar{u}$ einfügen, siehe (4.1.5)):

$$\begin{aligned} (A) &\leq \|S_h^* y_d - S^* y_d\|_{L^2(\Omega)} \|\bar{u}_h - I_h \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq ch^2 \cdot (\|\bar{u}_h - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} + \|\bar{u} - I_h \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}), \\ (B) &\leq \|S^* S \bar{u} - S_h^* S_h \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\bar{u} - I_h \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq ch^2 \cdot (\|\bar{u}_h - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} + \|\bar{u} - I_h \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}). \end{aligned}$$

Weiter für (C), analog zu (4.1.4),

$$\begin{aligned} (C) &= (S_h^* S_h \bar{u} - S_h^* S_h \bar{u}_h, \bar{u}_h - \bar{u}) + (S_h^* S_h \bar{u} - S_h^* S_h \bar{u}_h, \bar{u} - I_h \bar{u}) \\ &\leq 0 + c \cdot \|\bar{u} - u_h\|_{L^2(\Omega)} \|\bar{u} - I_h \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Fasst man alles zusammen, folgt

$$\|\bar{u}_h - \bar{u}\|^2 \leq c \cdot \|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2(\Omega)} \|\bar{u} - I_h \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} + ch^2 \cdot (\|\bar{u}_h - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} + \|\bar{u} - I_h \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}).$$

Das ist eine Ungleichung der Form

$$a^2 \lesssim ab + h^2 \cdot (a + b) = a(b + h^2) + h^2 \cdot b.$$

Wir haben bereits im vorigen Abschnitt gesehen, wie wir mit den Faktoren c mittels gewichteter Young-Ungleichung umgehen können. Daher verfahren wir hier der Übersichtlichkeit halber ohne diese und benutzen nur die normale Young Ungleichung $\alpha\beta \leq \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2}$ für $\alpha = a$ und $\beta = b + h^2$, mittels der wir $a^2/2$ auf der linken Seite absorbieren können:

$$a^2 \lesssim (b + h^2)^2 + h^2 \cdot b = b^2 + 3h^2 \cdot b + h^4 \lesssim b^2 + h^4,$$

also

$$a \lesssim \sqrt{b^2 + h^4} \lesssim b + h^2.$$

Übersetzt ergibt das

$$\|\bar{u}_h - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq c \cdot (h^2 + \|\bar{u} - I_h \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}). \quad (4.3.2)$$

Mit der expliziten Ordnung h^2 kann man zufrieden sein; es verbleiben aber die offensichtlichen Fragen:

1. Wie kommt man zu $I_h \bar{u}$?
2. Wie groß ist $\|\bar{u} - I_h \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}$?

Zunächst die folgende **Beobachtung**: Wegen $\bar{p} = S^*(\bar{y} - y_d)$ und $\bar{y}, y_d \in L^2(\Omega)$ folgt mittels [Lemma 3.1.5](#), dass $\bar{p} \in H^2(\Omega) \hookrightarrow C^{1-\varepsilon}(\bar{\Omega})$ für jedes $\varepsilon > 0$ (Hölder-Stetigkeit, Sobolev-Einbettung in $d = 2$). Wir schreiben α als Platzhalter für “ $1 - \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$ ”. Mit der Projektionsformel (2.2.5) ergibt sich, dass auch $\bar{u} \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ ist, die optimale Steuerung \bar{u} ist also fast Lipschitz-stetig. Insbesondere folgt

substitute

$$|\bar{u}(x) - \bar{u}(y)| \leq c \cdot |x - y|^\alpha \quad \forall x, y \in \bar{\Omega}. \quad (4.3.3)$$

Seien nun x, y aus benachbarten Dreiecken der Triangulierung \mathcal{T}_h , d.h., die Dreiecke teilen (mindestens) eine Ecke. Dann folgt $|x - y| \leq 2h$ nach Definition von h . Insbesondere folgt für $h \downarrow 0$ hinreichend klein also, dass

neighboring

$$|\bar{u}(x) - \bar{u}(y)| \leq c \cdot h^\alpha \leq \frac{u_b - u_a}{2} \quad \forall x, y \text{ aus benachbarten Dreiecken.} \quad (4.3.4)$$

Das heißt, es kann **nicht** passieren, dass \bar{u} auf einem Dreieck T eine der beiden Kontrollschranken u_a bzw. u_b annimmt und gleichzeitig auf dem selben oder einem benachbarten Dreieck die andere Kontrollschranke u_b bzw. u_a angenommen wird. Das wird kritischer Baustein der nun folgenden Konstruktion sein.

Zur **Konstruktion** von $I_h \bar{u} \in U_{\text{ad}}^h$. Wir hätten gern

$$(\bar{p} + \lambda \bar{u}, u_h - I_h \bar{u}) \geq 0 \quad \forall u_h \in U_{\text{ad}}^h. \quad (4.3.5)$$

Wir betrachten ein einzelnes Element T . Es ist hinreichend, (4.3.5) auf jedem Element T zu zeigen. Dabei können die folgenden Fälle auftreten:

1. $\bar{u} \in (u_a, u_b)$ auf ganz T . (Wir schreiben $T \in \mathcal{I}$.) Dann folgt aus der Optimalitätsbedingung (2.2.3) für \bar{u} , dass $\lambda \bar{u} + \bar{p} = 0$ sein muss. Auf dieser Menge ist die Ungleichung (4.3.5) demnach bei **jeder** Wahl von $I_h \bar{u}$ stets erfüllt.
2. $\bar{u} \equiv u_a$ oder $\bar{u} \equiv u_b$ auf T . (Wir schreiben $T \in \mathcal{A}$.) Hier wählen wir $I_h \bar{u} := \bar{u}$ für jede Ecke von T und damit auf ganz T . Nach (2.2.4) folgt (4.3.5) auf T .
3. $\bar{u} \in [u_a, u_b)$ bzw. $\bar{u} \in (u_a, u_b]$ in T . (Wir schreiben $T \in \mathcal{Z}$.) Hier setzen wir $I_h \bar{u} \equiv u_a$ bzw. $I_h \bar{u} \equiv u_b$ auf den Ecken von T und damit auf ganz T . Das ist nach der Vorbemerkung und (4.3.4) wohldefiniert. Da nach (2.2.3) bzw. (2.2.4) $\bar{p} + \lambda \bar{u} \geq 0$ bzw. $\bar{p} + \lambda \bar{u} \leq 0$ jeweils auf T gelten muss, folgt (4.3.5) auf T nach Wahl von $I_h \bar{u}$.

Bis jetzt ist $I_h \bar{u}$ auf jenen Dreiecken und zugehörigen Knoten festgelegt, wo es Punkte $x \in T$ mit $\bar{u}(x) \in \{u_a, u_b\}$ gibt. In den verbleibenden Knoten (diese gehören alle zu Dreiecken in \mathcal{I}) setzen wir $I_h \bar{u} = \bar{u}$. Damit ist $I_h \bar{u}$ in V_h eindeutig bestimmt.

Wie groß ist der **Fehler** $\|\bar{u} - I_h \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}$?

1. Auf einem inaktiven Dreieck $T \in \mathcal{I}$ gibt es zwei Möglichkeiten:
 - a) Sowohl T als auch alle benachbarten Dreiecke gehören zu \mathcal{I} . Wir schreiben $T \in \mathcal{I}^\circ$. Dann ist $I_h \bar{u}$ die lineare interpolierende Funktion von \bar{u} . Zudem gilt wegen $T \in \mathcal{I}$ nach der Projektionsformel (2.2.5) $\bar{u} = -\lambda^{-1} \bar{p} \in H^2(T)$, also erhalten wir

$$\|\bar{u} - I_h \bar{u}\|_{L^2(T)} \leq ch^2 \cdot |\bar{p}|_{H^2(T)}.$$

- b) Mindestens eines der benachbarten Dreiecke gehört zu \mathcal{Z} . Nehmen wir zunächst an, dort werde nur die untere Schranke u_a angenommen, d.h. es existiert y aus einem benachbarten Dreieck, so dass $\bar{u}(y) = u_a$. Dann gilt:

$$|\bar{u}(x) - (I_h \bar{u})(x)| \leq |\bar{u}(x) - \bar{u}(y)| + |(I_h \bar{u})(x) - u_a| \quad \forall x \in T.$$

Nach (4.3.4) und Konstruktion folgt

$$|\bar{u}(x) - \bar{u}(y)| \leq ch^\alpha.$$

Weiter ist $I_h \bar{u}$ per Konstruktion die lineare Funktion, die in den Ecken x_1, x_2, x_3 von T durch entweder $\bar{u}(x_i)$ oder u_a gegeben ist. Es folgt wieder mit (4.3.4):

$$|(I_h \bar{u})(x) - u_a| \leq \max_{i=1,2,3} |\bar{u}(x_i) - u_a| = \max_{i=1,2,3} |\bar{u}(x_i) - \bar{u}(y)| \leq ch^\alpha,$$

also

$$|\bar{u}(x) - (I_h \bar{u})(x)| \leq ch^{1-} \quad \forall x \in T$$

und damit

$$\|\bar{u} - I_h \bar{u}\|_{L^2(T)} \leq ch^\alpha \cdot |T|^{\frac{1}{2}}.$$

Analog behandeln wir den Fall, in dem auf den benachbarten Dreiecken zu T nur die obere Schranke u_b angenommen wird. Damit verbleibt der Fall, in dem benachbarte Dreiecke existieren, auf denen sowohl u_b als auch u_a angenommen werden. (Nach (4.3.4) müssen dies mehrere Dreiecke sein, und sie dürfen auch nicht benachbart sein.) Seien y_b, y_a jeweils in den benachbarten Dreiecken, so dass $\bar{u}(y_b) = u_b$ und $\bar{u}(y_a) = u_a$ gelten. Wegen $u_a \leq I_h \bar{u} \leq u_b$ und mit (4.3.4) gilt für alle $x \in T$:

$$\begin{aligned} |\bar{u}(x) - (I_h \bar{u})(x)| &\leq \max \left[|\bar{u}(x) - u_a|, |\bar{u}(x) - u_b| \right] \\ &= \max \left[|\bar{u}(x) - \bar{u}(y_a)|, |\bar{u}(x) - \bar{u}(y_b)| \right] \leq ch^\alpha \end{aligned}$$

und damit auch in diesem Fall

$$\|\bar{u} - I_h \bar{u}\|_{L^2(T)} \leq ch^\alpha \cdot |T|^{\frac{1}{2}}.$$

Damit erhalten wir insgesamt für die Menge der inaktiven Dreiecke:

$$\begin{aligned} \|\bar{u} - I_h \bar{u}\|_{L^2(\cup_{T \in \mathcal{I}} T)}^2 &= \sum_{T \in \mathcal{I}} \|\bar{u} - I_h \bar{u}\|_{L^2(T)}^2 \\ &\leq ch^4 \cdot \sum_{T \in \mathcal{I}^\circ} |\bar{p}|_{H^2(T)}^2 + ch^{2\alpha} \cdot \sum_{T \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}^\circ} |T| \\ &\leq ch^4 \cdot |\bar{p}|_{H^2(\Omega)}^2 + ch^{2\alpha} \cdot \sum_{T \in \mathcal{Z}} |T| \end{aligned}$$

bzw.

$$\|\bar{u} - I_h \bar{u}\|_{L^2(\cup_{T \in \mathcal{I}} T)} \leq ch^2 + ch^\alpha \cdot \left(\sum_{T \in \mathcal{Z}} |T| \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2. Auf einem aktiven Dreieck $T \in \mathcal{A}$ gilt in der Tat $I_h \bar{u} = \bar{u}$ und damit

$$\|\bar{u} - I_h \bar{u}\|_{L^2(\cup_{T \in \mathcal{A}} T)}^2 = \sum_{T \in \mathcal{A}} \|\bar{u} - I_h \bar{u}\|_{L^2(T)}^2 = 0.$$

without loss of
generality

3. Auf der Zwischenmenge $T \in \mathcal{Z}$ argumentieren wir ähnlich wie für $T \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}^\circ$. Nach Annahme existiert ein $y \in T$, so dass die Schranke u_a oder u_b durch $\bar{u}(y)$ angenommen wird. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit werde $\bar{u}(y) = u_a$ angenommen. Dann ist $I_h \bar{u} = u_a$ konstant auf T und es gilt mit (4.3.3):

$$|\bar{u}(x) - (I_h \bar{u})(x)| = |\bar{u}(x) - u_a| = |\bar{u}(x) - \bar{u}(y)| \leq c \cdot |x - y|^\alpha \leq ch^\alpha \quad \forall x \in T,$$

also

$$\|\bar{u} - I_h \bar{u}\|_{L^2(\cup_{T \in \mathcal{Z}} T)} = \left(\sum_{T \in \mathcal{Z}} \int_T (\bar{u} - I_h \bar{u})^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq ch^\alpha \cdot \left(\sum_{T \in \mathcal{Z}} |T| \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Insgesamt erhalten wir für $\|\bar{u} - I_h \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}$ wie in (4.3.2) übrig geblieben also

$$\|\bar{u} - I_h \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq ch^2 + ch^\alpha \cdot \left(\sum_{T \in \mathcal{Z}} |T| \right)^{\frac{1}{2}},$$

also zunächst Ordnung h^α . Da generisch—dies kann man numerisch beobachten, es scheint keine bekannten Gegenbeispiele zu geben—gilt, dass

$$\sum_{T \in \mathcal{Z}} |T| \leq ch \tag{4.3.6}$$

ist, ist die Ordnung praktisch sogar fast $h^{\frac{3}{2}}$. Einen Beweis für (4.3.6) unter den gegebenen allgemeinen Bedingungen gibt es bislang nicht.

Lemma 4.3.1. Für stückweise lineare Steuerungen \bar{u}_h als Optimallösung von (P_h^1) gilt

$$\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq ch^{1-\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Ist die Menge \mathcal{Z} der Finiten Elemente mit den Übergängen zwischen aktiver und inaktiver Nebenbedingung $\bar{u} \in U_{ad}$ asymptotisch klein im Sinne von (4.3.6), dann gilt sogar

$$\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq ch^{\frac{3}{2}-\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Mit etwas schärferer Analysis und minimal stärkeren Annahmen lässt sich auch das ε entfernen. Dies wird in einer zukünftigen Iteration dieses Skriptes nachgeholt.

4.4 Superkonvergenzzugang

Der Superkonvergenzzugang wurde nahezu zeitgleich zur variationellen Diskretisierung von Meyer und Rösch (2004) entwickelt⁵. Wir wissen bis jetzt:

Abschnitt 4.1: *Variationelle Diskretisierung* durch (P_h^{Var}) , Ordnung h^2 , schwierig numerisch zu lösen.

Abschnitt 4.2: *Stückweise konstante Steuerungen* durch (P_h^0) , Ordnung h , sehr effiziente Algorithmen.

Abschnitt 4.3: *Stückweise lineare Steuerungen* durch (P_h^1) , Ordnung h bzw. nach Annahme an $|\#Z|$ üblicherweise $h^{\frac{3}{2}}$.

Wünschenswert wäre ein Ansatz mit der besseren Ordnung h^2 , der aber auch numerisch freundlich umzusetzen ist. Eine Erhöhung des Polynomgrades für den Steuerungs-Ansatzraum über 1 bringt nichts Besseres als $h^{\frac{3}{2}}$ wegen der Zwischenmenge Z . (Dort ging keine Approximations-Ordnung ein, sondern nur die Größe der Dreiecke!). Wir schauen uns einmal numerisch berechnete Ordnungen für stückweise konstante Ansatzfunktionen an:

$$\begin{aligned}\|\bar{u}_h - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} &\sim ch \\ \|\bar{y}_h - \bar{y}\|_{L^2(\Omega)} &\sim ch^2 \\ \|\bar{p}_h - \bar{p}\|_{L^2(\Omega)} &\sim ch^2\end{aligned}$$

Definieren wir $\tilde{u}_h = P_{[u_a, u_b]}(-\frac{1}{\lambda}\bar{p}_h)$, dann gilt auch

$$\|\tilde{u}_h - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda} \|\bar{p}_h - \bar{p}\|_{L^2(\Omega)} \leq ch^2,$$

d.h., das Tripel $(\bar{y}_h, \tilde{u}_h, \bar{p}_h)$ hat die Approximationsordnung h^2 . Kann man das beweisen?

Betrachtet man die Werte von \bar{u} in den Schwerpunkten der Dreiecke der Triangulierung und baut sich daraus stückweise konstante Funktionen $R_h\bar{u}$, so erhält man experimentell

$$\|R_h\bar{u} - \bar{u}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq ch^2,$$

d.h., die Werte im Schwerpunkt konvergieren schneller als die Funktion selbst. Solche Aussagen nennt man häufig Superkonvergenz. Wir setzen zunächst voraus, dass wir folgende Abschätzung zur Verfügung haben:

$$\|S\bar{u} - SR_h\bar{u}\| \leq ch^2 \quad (A1)$$

⁵C. Meyer, A. Rösch: *Superconvergence Properties of Optimal Control Problems*. SIAM Journal on Control and Optimization 43 #3 970–985 (2004). DOI:10.1137/S0363012903431608

Lemma 4.4.1. *Angenommen (A1) gilt. Dann gilt auch*

$$\|S_h \bar{u} - S_h R_h \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq ch^2.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \|S_h \bar{u} - S_h R_h \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|S \bar{u} - S R_h \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} + \|(S - S_h)(\bar{u} - R_h \bar{u})\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \underbrace{ch^2}_{(A1)} + \underbrace{ch^2 \cdot \|\bar{u} - R_h \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}}_{\substack{L^2\text{-Fehlerabschätzung} \\ \text{für Finite Elemente}}} \end{aligned}$$

□

Wie baut man $R_h \bar{u}$ in die Fehlerabschätzung mit ein? Offenbar ist $R_h \bar{u}$ eine Funktion aus U_{ad}^h .

$$\Rightarrow (\bar{p}_h + \lambda \bar{u}_h, R_h \bar{u} - \bar{u}_h) \geq 0$$

Wir benötigen eine ähnliche Beziehung für $R_h \bar{u}$. Für \bar{u} wissen wir

$$(\bar{p} + \lambda \bar{u}, u - \bar{u}) \geq 0 \quad \forall u \in U_{\text{ad}}.$$

Unter unseren Voraussetzungen sind \bar{p} und \bar{u} stetig. Daher gilt in jedem Punkt $x \in \Omega$

$$(\bar{p}(x) + \lambda \bar{u}(x)) \cdot (u - \bar{u}(x)) \geq 0 \quad \forall u \in [u_a, u_b].$$

Das gilt speziell in den Schwerpunkten der Finiten Elemente. Wir integrieren diese Ungleichungen über die einzelnen Elemente und summieren dann über alle Elemente auf:

$$(R_h \bar{p} + \lambda R_h \bar{u}, u - R_h \bar{u}) \geq 0 \quad \forall u \in U_{\text{ad}}.$$

Für unsere Abschätzung wählen wir $u = \bar{u}_h$. Addition der Ungleichungen

$$\begin{aligned} (R_h \bar{p} + \lambda R_h \bar{u}, \bar{u}_h - R_h \bar{u}) &\geq 0, \\ (R_h \bar{p} + \lambda R_h \bar{u}, R_h \bar{u} - \bar{u}_h) &\geq 0 \end{aligned}$$

liefert

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \|\bar{u}_h - R_h \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq (R_h \bar{p} - \bar{p}_h, \bar{u}_h - R_h \bar{u}_h) \\ &\leq (R_h \bar{p} - \bar{p}, \bar{u}_h - R_h \bar{u}) + (\bar{p} - \bar{p}_h, \bar{u}_h - R_h \bar{u}). \end{aligned}$$

Wir schauen uns den ersten Term an:

$$\begin{aligned}
 & (R_h \bar{p} - \bar{p}, \bar{u}_h - R_h \bar{u})_\Omega \\
 &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T (R_h \bar{p} - \bar{p})(\bar{u}_h - R_h \bar{u}) \, dx \\
 &= \sum_{T \in \mathcal{T}} (\bar{u}_h - R_h \bar{u}) \cdot \int_T (R_h \bar{p} - \bar{p}) \, dx.
 \end{aligned}$$

Da wir den Schwerpunkt genommen haben, ist das Integral für die Polynome aus \mathbb{P}_1 , d.h. für alle linearen Polynome, gleich 0. Satz 3.2.8 liefert

$$\left| \int_T R_h \bar{p} - \bar{p} \, dx \right| \leq ch^2 \cdot |p|_{2,T}.$$

Insgesamt gilt

$$(R_h \bar{p} - \bar{p}, \bar{u}_h - R_h \bar{u})_\Omega \leq \|\bar{u}_h - R_h \bar{u}\| \cdot ch^2 \cdot \|\bar{p}\|_{H^2(\Omega)},$$

d.h., man hat Ordnung h^2 .

Es bleibt ein zweiter Anteil abzuschätzen:

$$(\bar{p} - \bar{p}_h, \bar{u}_h - R_h \bar{u}) = (\bar{p} - S_h^*(S_h R_h \bar{u} - y_d), \bar{u}_h - R_h \bar{u}) + (S_h^*(S_h R_h \bar{u} - y_d) - \bar{p}_h, \bar{u}_h - R_h \bar{u})$$

Für den zweiten Summanden gilt

$$\begin{aligned}
 & (S_h^*(S_h R_h \bar{u} - y_d) - \bar{p}_h, \bar{u}_h - R_h \bar{u}) \\
 &= (S_h^*(S_h R_h \bar{u} - y_d) - S_h^*(S_h \bar{u}_h - y_d), \bar{u}_h - R_h \bar{u}) \\
 &= (S_h^* S_h (R_h \bar{u} - \bar{u}_h), \bar{u}_h - R_h \bar{u}) \\
 &= - \|S_h (R_h \bar{u} - \bar{u}_h)\|^2 \leq 0.
 \end{aligned}$$

Bleibt noch der Term

$$\begin{aligned}
 & (\bar{p} - S_h^*(S_h R_h \bar{u} - y_d), \bar{u}_h - R_h \bar{u}) \\
 &= (S^*(S \bar{u} - y_d) - S_h^*(S_h R_h \bar{u} - y_d), \bar{u}_h - R_h \bar{u}) \\
 &= (S_h^* S_h y_d - S^* S y_d, \bar{u}_h - R_h \bar{u}) + (S^* S \bar{u} - S_h^* S_h \bar{u}, \bar{u}_h - R_h \bar{u}) + (S_h^*(S_h (\bar{u}_h - R_h \bar{u})), \bar{u}_h - R_h \bar{u}) \\
 &\leq ch^2 \cdot \|\bar{u}_h - R_h \bar{u}\|_{L^2(\Omega)},
 \end{aligned}$$

wobei bei dem letzten Term das Lemma 5.4.1 benutzt wurde. Alle Terme zusammenfassen und einmal durch $\|\bar{u}_h - R_h \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}$ teilen ergibt

$$\lambda \cdot \|\bar{u}_h - R_h \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq ch^2. \quad (\star)$$

Was hat das für Auswirkungen?

$$\begin{aligned} \|\bar{y}_h - \bar{y}\|_{L^2(\Omega)} &\leq \underbrace{\|\bar{y}_h - S_h R_h \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}}_{(*)} + \underbrace{\|S_h R_h \bar{u} - S R_h \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}}_{\text{Finite-Elemente-Fehler}} + \underbrace{\|S R_h \bar{u} - S \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}}_{(A1)} \\ &\leq ch^2. \end{aligned} \quad (**)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|\bar{p}_h - \bar{p}\|_{L^2(\Omega)} &\leq \underbrace{\|\bar{p}_h - S_h^*(\bar{y} - y_d)\|_{L^2(\Omega)}}_{(**)} + \underbrace{\|S_h^*(\bar{y} - y_d) - \bar{p}\|_{L^2(\Omega)}}_{\text{Finite-Elemente-Fehler}} \\ &\leq ch^2. \end{aligned}$$

Folglich gilt für $\tilde{u}_h = P_{[u_a, u_b]}(-\frac{1}{\lambda}\bar{p}_h)$

$$\|\tilde{u}_h - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq ch^2.$$

Unter der Voraussetzung (A1) erhalten wir das gewünschte Ergebnis. Doch wann ist (A1) erfüllt?

Wir betrachten zwei Mengen von Finiten Elementen:

$$\begin{aligned} K_1 &= \{T \in \mathcal{T} \mid \bar{u} \notin H^2(T)\} \\ K_2 &= \{T \in \mathcal{T} \mid \bar{u} \in H^2(T)\} \end{aligned}$$

Die Menge K_2 enthält die glatten Anteile und die Menge K_1 alle Knicke. Man kann erwarten, dass die Menge K_1 klein ist. Unsere neue Voraussetzung lautet dann

$$|K_1| \leq ch. \quad (A2)$$

Wir wollen daraus (A1) herleiten, d.h.

$$\|S\bar{u} - S R_h \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq ch^2.$$

Wir benutzen die L^2 -Projektion auf U_h mit

$$\Pi_h \bar{u}|_T = \frac{1}{|T|} \int_T \bar{u} \, dx.$$

Lemma 4.4.2. *Es gilt*

$$\|\Pi_h \bar{u} - \bar{u}\|_{-1} \leq ch^2 \cdot \|\bar{u}\|_{H^1(\Omega)}.$$

Beweis. Aus der Optimalitätsbedingung für die Projektion folgt

$$(u_h, \Pi_h \bar{u} - \bar{u}) = 0 \quad \forall u_h \in U_h$$

$$\Rightarrow \|\Pi_h \bar{u} - \bar{u}\|_{-1} = \sup_{\substack{v \in H^1(\Omega) \\ v \neq 0}} \frac{(\Pi_h \bar{u} - \bar{u}, v)}{\|v\|_{H^1(\Omega)}} = \sup_{\substack{v \in H^1(\Omega) \\ v \neq 0}} \frac{(\Pi_h \bar{u} - \bar{u}, v - \Pi_h v)}{\|v\|_{H^1(\Omega)}}$$

$$\begin{aligned} \frac{(\Pi_h \bar{u} - \bar{u}, \Pi_h v - v)}{\|v\|_{H^1(\Omega)}} &\leq \|\Pi_h \bar{u} - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \cdot \frac{\|v - \Pi_h v\|_{L^2(\Omega)}}{\|v\|_{H^1(\Omega)}} \\ &\leq ch \cdot \|\bar{u}\|_{H^1(\Omega)} \cdot \frac{ch \cdot \|v\|_{H^1(\Omega)}}{\|v\|_{H^1(\Omega)}} \\ &\leq ch^2 \cdot \|\bar{u}\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

□

Wegen $\|\bar{u} - \Pi_h \bar{u}\|_{-1} \leq ch^2$ und

$$S : H^{-1}(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

gilt daher

$$\|S(\bar{u} - \Pi_h \bar{u})\|_{L^2(\Omega)} \leq c \cdot \|\bar{u} - \Pi_h \bar{u}\|_{-1} \leq ch^2 \cdot \|\bar{u}\|_{H^1(\Omega)}.$$

Es reicht also aus, sich mit dem Term

$$\|S\Pi_h \bar{u} - SR_h \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}$$

zu beschäftigen:

$$\begin{aligned} \|S\Pi_h \bar{u} - SR_h \bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 &= (S\Pi_h \bar{u} - SR_h \bar{u}, S(\Pi_h \bar{u} - R_h \bar{u})) \\ &= (\Pi_h \bar{u} - R_h \bar{u}, S^* S(\Pi_h \bar{u} - R_h \bar{u})) \\ &\leq \|\Pi_h \bar{u} - R_h \bar{u}\|_{L^1(\Omega)} \|S^* S(\Pi_h \bar{u} - R_h \bar{u})\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq \|\Pi_h \bar{u} - R_h \bar{u}\|_{L^1(\Omega)} \|S(\Pi_h \bar{u} - R_h \bar{u})\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

wegen $S^* : L^2(\Omega) \rightarrow L^\infty(\Omega)$ (stetig).

Demnach ist es ausreichend, diese L^1 -Norm abzuschätzen.

$$\begin{aligned} \|\Pi_h \bar{u} - R_h \bar{u}\|_{L^1(\Omega)} &= \int_{\Omega} |\Pi_h \bar{u} - R_h \bar{u}| \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T |\Pi_h \bar{u} - R_h \bar{u}|. \end{aligned}$$

Da $\Pi_h \bar{u} - R_h \bar{u}$ konstant auf T ist, gilt

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T |\Pi_h \bar{u} - R_h \bar{u}| &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \left| \int_T \Pi_h \bar{u} - R_h \bar{u} \right| \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \left| \int_T \bar{u} - R_h \bar{u} \right|. \end{aligned}$$

Abschätzung auf der Menge K_1 : Im Schwerpunkt stimmen $\bar{u}(x)$ und $R_h \bar{u}(x)$ überein. Mit Hilfe der Lipschitzstetigkeit erhalten wir

$$|\bar{u}(x) - \bar{u}(S_i)| \leq L \cdot \|x - S_i\| \leq Lh \leq h \cdot \|\bar{u}\|_{C^{0,1}(\Omega)}$$

und damit

$$\begin{aligned} \left| \int_T \bar{u} - R_h \bar{u} \right| &\leq ch \cdot |T| \cdot \|\bar{u}\|_{C^{0,1}(\Omega)} \\ \Rightarrow \sum_{T \in K_1} \left| \int_T \bar{u} - R_h \bar{u} \right| &\leq ch \cdot |K_1| \cdot \|\bar{u}\|_{C^{0,1}(\Omega)} \\ &\stackrel{(A2)}{\leq} ch^2 \cdot \|\bar{u}\|_{C^{0,1}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Auf der Menge K_2 argumentiert man anders:

$$\begin{aligned} \sum_{T \in K_2} \left| \int_T \bar{u} - R_h \bar{u} \right| &\stackrel{\text{Bemerkung 3.2.11}}{\leq} \sum_{T \in K_2} ch^2 \cdot |T|^{\frac{1}{2}} \cdot |\bar{u}|_{H^2(T)} \\ &\leq ch^2 \cdot |K_2|^{\frac{1}{2}} \cdot |\bar{u}|_{H^2(K_2)}, \end{aligned}$$

was wegen

$$\begin{aligned} \sum_{T \in K_2} |T|^{\frac{1}{2}} \cdot |\bar{u}|_{H^2(T)} &= \sum_{T \in K_2} \|1\|_{L^2(T)} \cdot |\bar{u}|_{H^2(T)} \\ &\leq \|1\|_{L^2(K_2)} \cdot |\bar{u}|_{H^2(K_2)} \\ &= |K_2|^{\frac{1}{2}} \cdot |\bar{u}|_{H^2(K_2)} \end{aligned}$$

folgt. Somit folgt mit (A2) weiter

$$\|S\bar{u} - SR_h \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq ch^2,$$

d.h (A1).

Fazit: Mit dem Superkonvergenzzugang erreicht man Ordnung h^2 . Der Rechenaufwand ist sehr gering.

Bemerkung 4.4.3. Eine Übertragung auf stückweise lineare Ansatzfunktionen für die Steuerung ist nicht bekannt. Numerische Experimente liefern auch hier die Ordnung h^2 .