Friedrich-Alexander-Universität
Naturwissenschaftliche Fakultät

NUMERIK OPTIMALER STEUERUNGEN

Skript zur Vorlesung
Sommersemester 2024

Hannes Meinlschmidt

meinlschmidt@math.fau.de

Professor für Angewandte Analysis
Chair for Dynamics, Control, Machine Learning and Numerics (AvH Professorship)
Department Mathematik

Vorläufige Version
22. Juli 2024

Vorbemerkung

In dieser Vorlesung wird die grundlegende numerische Analysis von Optimalsteuerungsproblemen behandelt. Unter *Optimalsteuerungsproblem* verstehen wir hier ein Optimierungsproblem in einem Funktionenraum, bei dem die Nebenbedingungen durch partielle Differentialgleichungen beschrieben sind. Da diese Vorlesung einführenden Charakter in die Thematik haben soll, betrachten wir zunächst nur elliptische partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Es hilft, mit diesen schon vertraut zu sein, wir führen die grundlegenden Konzepte aber auch am Anfang der Vorlesung noch einmal ein, ohne jedoch größere Beweise zu führen.

Die Grundlage dieses Skriptes wurde freundlicherweise von Arnd Rösch von der Universität Duisburg-Essen zur Verfügung gestellt; seinen Dank an die Mitwirkenden Danilo Leonel und Sven Perske möchte ich auch weitergeben.

Das Skript wird im Verlauf der Vorlesung überarbeitet. Anmerkungen und Hinweise auf Fehler und allgemeine Unsauberkeiten können gerne an meinlschmidt@math.fau.de gerichtet werden.

Hannes Meinlschmidt
22. Juli 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation und Grundlagen

1.1 Motivation

Viele Prozesse werden durch partielle Differentialgleichungen beschrieben. Wir verweisen auf einschlägige Literatur bzw. die zu *Partielle Differentialgleichungen*. Übliche einfache Fälle sind:

$$\underline{\text{stationär}}: \qquad \begin{aligned} -\Delta y &= f && \text{in } \Omega && (\text{Gebiet} \subseteq \mathbb{R}^n) \\ y &= 0 && \text{auf } \partial\Omega && (= \partial\Omega, \text{ Rand}) \end{aligned}$$

oder

$$\underline{\text{zeitabhängig}}: \qquad \begin{aligned} y_t - \Delta y &= f && \text{in } Q = \Omega \times (0, T) \\ y &= 0 && \text{auf } \Sigma = \partial\Omega \times (0, T) \\ y(x, 0) &= y_0 && \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

Natürlich gibt es auch schwierigere Probleme, wie etwa das *quasilineare*

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\big(a(y)\,\mathrm{grad}\,y\big) &= f && \text{in } \Omega \\ y &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Solche Prozesse möchte man in vielen Kontexten mittels einer *Steuerung* oder *Kontrolle* u **optimal beeinflussen**. Diese gehen in die partielle Differentialgleichung ein, z.B. als *verteilte Steuerung*

`control`

`distributed control`

$$\begin{aligned} -\Delta y &= u && \text{in } \Omega \\ y &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

oder als *Randsteuerung*

`boundary control`

$$\begin{aligned} -\Delta y + y &= f && \text{in } \Omega \\ \partial_u y &= u && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Dazu gibt es ein Optimierungsziel, also eine Funktion der Lösung y und Steuerung u, die zu minimieren ist—die sogenannte *Zielfunktion*—, z.B. im ersten Fall

`objective function`

$$J(y,u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \big(y(x) - y_d(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x + \frac{\nu}{2}\int_\Omega u^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

mit einem Parameter $\nu \geq 0$ bei deren Minimierung man versucht, u so zu wählen, dass die assoziierte Lösung y im Mittel möglichst genau einer gegebenen Funktion y_d entspricht, und dabei gewisse "Kosten" für u bezahlt. (Subskript d wie $d$esired.) Zusätzlich gibt es oft noch aus physikalischen oder Modellierungs-Gründen Einschränkungen an die Steuerung, kurz *Steuerbeschränkungen*, z.B.

control constraints

$$u \in U_{\mathrm{ad}} = \Big\{u \in L^2(\Omega)\colon\, u_a \leq u(x) \leq u_b \text{ fast überall in } \Omega\Big\}.$$

optimal control problem

Damit erhalten wir das *Optimalsteuerproblem*:

$$\min_{y,u} \quad J(y,u) = \frac{1}{2}\|y - y_d\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\nu}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

state equation

mit der *Zustandsgleichung*

$$\begin{aligned} -\Delta y &= u && \text{in } \Omega \\ y &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

und den *Steuerbeschränkungen*

$$u \in U_{\mathrm{ad}} = \Big\{u \in L^2(\Omega)\colon\, u_a \leq u(x) \leq u_b \text{ fast überall in } \Omega\Big\}.$$

Wir wollen uns in der Vorlesung damit beschäftigen, was passiert, wenn wir eine solche Aufgabe diskretisieren. Dazu werden wir Finite-Elemente-Ansätze benutzen. Die Grundlagen dafür werden wir in separaten Kapiteln bereitstellen.

1.2 Grundlagen aus der Funktionalanalysis

Hier werden einige grundlegende Ergebnisse zusammengefasst. Weiterführende Ergebnisse folgen später.

X bezeichnet einen linearen normierten Raum über dem Körper $\mathbb{R}$ mit der Norm $\|\cdot\|_X$.

inner product

Falls es ein *Skalarprodukt* auf X gibt, d.h. eine bilineare Abbildung $(u,v) \mapsto (u,v)_X$ von $X \times X$ nach $\mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

- $(u,u)_X \geq 0$ zudem $(u,u)_X = 0 \Leftrightarrow u = 0$
- $(u,v)_X = (v,u)_X$
- $(u_1 + u_2, v)_X = (u_1,v)_X + (u_2,v)_X \quad \forall u_1,u_2 \in X$
- $(\lambda u, v)_X = \lambda(u,v)_X \quad \forall\lambda \in \mathbb{R},\ u,v \in X,$

so erzeugt dieses Skalarprodukt eine Norm auf X mittels $\|u\|_X = (u,u)^{\frac{1}{2}}$.

Konvergenzeigenschaft: $u_n \to u$ in X, falls $\|u_n - u\|_X \to 0$ für $n \to \infty$. Diese Konvergenz bezeichnet man als *starke Konvergenz* oder *Normkonvergenz*.

Eine Folge (u_n) heißt *Cauchy-Folge*, wenn es zu beliebigem $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0(\varepsilon)$ gibt mit

$$\|u_n - u_m\|_X \leq \varepsilon \qquad \forall n, m \geq n_0(\varepsilon).$$

Eine konvergente Folge ist immer eine Cauchy-Folge. Umgekehrt gilt dies nicht automatisch. Ein Vektorraum X, in dem jede Cauchy-Folge stark konvergiert, heißt *vollständig*. complete
Vollständige normierte Vektorräume heißen *Banachräume*. Banachräume, deren Norm von einem Skalarprodukt induziert ist, heißen *Hilberträume*.

Wir werden uns vorwiegend mit Hilberträumen beschäftigen. Der einfachste Raum dieser Art ist $L^2(\Omega)$ auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Das ist der Raum der messbaren Funktionen (identifiziert bis auf Gleichheit fast überall), für die die Norm

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$$

existiert und endlich ist. Das Skalarprodukt ist entsprechend

$$(f,g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x) g(x) \, \mathrm{d}x$$

Für den weiteren Verlauf werden andere Hilberträume gebraucht, die wir in Kürze bereitstellen. Gelegentlich tauchen auch die Banachräume $L^p(\Omega)$ auf, die man analog zu $L^2(\Omega)$ definiert, die aber kein Skalarprodukt haben. Der Raum $L^\infty(\Omega)$ besteht aus allen wesentlich beschränkten messbaren Funktionen auf Ω. essentially bounded

Die in der Vorlesung auftretenden Hilberträume sind *separabel*, d.h., es existieren abzählbar dichte Teilmengen. In separablen Hilberträumen X gibt es vollständige *Orthonormal-Systeme* (e_k) mit

$$(e_k, e_\ell)_X = \begin{cases} 1, & k = \ell, \\ 0, & k \neq \ell. \end{cases}$$

Damit gilt für jedes $x \in X$ die Darstellung:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(x, e_k)}_{=:x_k} e_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \quad \text{and} \quad \|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Trotz dieser großen Ähnlichkeit zum $\mathbb{R}^n$ gibt es auch Unterschiede. Ein *wesentlicher* Unterschied ist, dass Konvergenz und koordinatenweise Konvergenz nicht mehr zusammenfallen.

Im $\mathbb{R}^n$ weiß man

$$x_m \xrightarrow{m\to\infty} x \quad \iff \quad x_m^{(k)} \longrightarrow x^{(k)} \quad \text{for } k = 1, ..., m.$$

Das stimmt im unendlichdimensionalen Raum **nicht**. So konvergieren die Einheitsvektoren $e_m^{(k)} \to 0$ für fixed k und $m \to \infty$ koordinatenweise, aber *nicht* in der Norm, denn $\|e_m - 0\| = 1$ für jedes m.

Daher definiert man eine andere Art der Konvergenz.

converges weakly

Definition 1.2.1 (Schwache Konvergenz)**.** Sei X ein Hilbertraum. Die Folge (x_k) *konvergiert schwach* gegen x (Bezeichnung: $x_k \rightharpoonup x$) für $k \to \infty$, falls gilt

$$(x_k, v)_X \xrightarrow{k\to\infty} (x, v)_X \qquad \text{für jedes } v \in X.$$

Die Definition von schwacher Konvergenz lässt sich auf Banachräume verallgemeinern.

Beispiel 1.2.2. Setzen wir $v = e_m,\ m = 1, \ldots,$ so erhalten wir gerade die koordinatenweise Konvergenz im separablen Hilbertraum. Die Einheitsvektoren konvergieren also schwach gegen 0, aber nicht stark.

Die schwache Konvergenz ersetzt an vielen Stellen die starke Konvergenz bei der Verwendung unendlichdimensionaler Hilberträume.

bounded

Lemma 1.2.3. *Jede beschränkte Menge mit unendlich vielen Elementen in einem separablen Hilbertraum enthält eine* schwach konvergente Teilfolge.

Im $\mathbb{R}^n$ gilt damit die Aussage auch für die starke Konvergenz. Im unendlichdimensionalen Raum ist das nicht der Fall, wie man an der Menge (e_k) sehen kann. Tatsächlich gilt die Aussage mit starker Konvergenz *genau dann* für einen Banachraum, wenn dieser endlichdimensional ist.

April 16, 2024

Lecture 1

weakly (sequentially) closed

Definition 1.2.4 (Schwach abgeschlossen)**.** Eine Menge $M \subset X$ heißt schwach (folgen-) abgeschlossen, wenn aus $x_k \rightharpoonup x$ für $k \to \infty$ mit $x_k \in M$ folgt, dass $x \in M$ gilt.

Lemma 1.2.5. *Konvexe und abgeschlossene Mengen sind schwach abgeschlossen.*

Beispiel 1.2.6. Die Steuerbeschränkung control constraint

$$U_{\text{ad}} = \left\{ u \in L^2(\Omega) \colon u_a \leq u(x) \leq u_b \text{ fast überall in } \Omega \right\}$$

ist abgeschlossen und konvex und daher schwach abgeschlossen im Raum $L^2(\Omega)$.

Ist eine Menge M in einem Hilbertraum beschränkt, dann kann man also eine schwach konvergente Teilfolge auswählen. Ist M zusätzlich abgeschlossen und konvex, dann gehört der schwache Grenzwert zu M. Diese Eigenschaft wird auch *schwache (Folgen-) Kompaktheit* genannt. limit

weak (sequential) compactness

Beispiel 1.2.7. Die Steuerbeschränkungsmenge U_{ad} ist schwach kompakt.

Zurück zu den Einheitsvektoren im separablen Hilbertraum. Diese sind beschränkt. Es existiert also eine schwach konvergente Teilfolge. Wir wissen schon, dass $e_k \rightharpoonup 0$, aber 0 ist kein Einheitsvektor. Das liegt daran, dass diese Menge *nicht konvex* ist. Nehmen wir dagegen die abgeschlossene Einheitskugel im Hilbertraum X:

$$\overline{B(0,1)} = \left\{x \in X \colon \|x\|_X \leq 1\right\}.$$

Dann ist diese Menge konvex, beschränkt, abgeschlossen und daher schwach kompakt. Es passt also, dass der schwache Grenzwert 0 von (e_k) wieder in $\overline{B(0,1)}$ liegt.

Die schwache Konvergenz ist nur teilweise ein Ersatz für die starke. Im Zielfunktional haben wir Terme der Form $\|\cdot\|^2$. Für eine stark konvergente Folge $x_k \to x$ gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k\|^2 = \|x\|^2.$$

Am Beispiel der Einheitsvektoren sieht man, dass das für schwach konvergente Folgen nicht mehr gilt. Es gilt immer noch die *schwache Unterhalbstetigkeit.*

weak lower semicontinuity

Lemma 1.2.8. *Sei $x_k \rightharpoonup x$ eine schwach konvergente Folge. Außerdem sei f ein konvexes und stetiges Funktional $X \to \mathbb{R}$. Dann ist f* schwach unterhalbstetig*, also:*

$$f(x) \leq \liminf_{k\to\infty} f(x_k).$$

Das passt wieder zu den Einheitsvektoren:

$$0 = \|0\|^2 \leq \liminf_{k\to\infty} \|e_k\|^2 = 1.$$

Mit den vorigen Resultaten erhalten wir:

non- empty

Satz 1.2.9. *Sei f ein konvexes und stetiges Funktional, welches auf einer nichtleeren, abgeschlossenen, konvexen und beschränkten Menge M nach unten beschränkt ist. Dann existiert ein minimales Element $\bar{x} \in M$ von f über M, d.h.*

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \qquad \forall x \in M.$$

Beweis. Nach Annahme ist f auf M nach unten beschränkt, also gibt es ein Infimum j:

$$j \coloneqq \inf_{x \in M} f(x) > -\infty.$$

Weiter existiert eine *Infimalfolge* $(x_k) \subset M$ mit

$$j = \lim_{k \to \infty} f(x_k).$$

Die Menge M ist beschränkt, d.h., es existiert eine Teilfolge $(x_\ell)_\ell$ mit $x_\ell \rightharpoonup \bar{x}$. Dazu ist M konvex und abgeschlossen. Daher gilt $\bar{x} \in M$. Die schwache Unterhalbstetigkeit von f liefert

$$f(\bar{x}) \leq \liminf_{\ell \to \infty} f(x_\ell) = \lim_{\ell \to \infty} f(x_\ell) = j.$$

Mit $j = \inf_{x \in M} f(x)$ folgt $f(\bar{x}) = j$. $\square$

Mit dieser Aussage erhält man die Existenz optimaler Steuerungen für einfache Optimalsteuerprobleme.

1.2.1 Sobolev-Räume

Für die Lösungstheorie der partiellen Differentialgleichungen sind Sobolev-Räume unentbehrlich geworden. Sie bieten einen natürlichen Lösungsraum, insbesondere für elliptische Gleichungen zweiter Ordnungen, der in einem funktionalanalytischen Sinne sehr gutartig ist, zum Beispiel ist der meistgenutzte Raum $H^1(\Omega)$ (siehe unten) ein Hilbertraum. Das steht in starkem Kontrast zu z.B. Räumen (mehrmals) differenzierbarer oder stetiger Funktionen, die leider funktionalanalytisch gesehen sehr unschöne Eigenschaften haben.

weak derivative

Zur Definition der Sobolev-Räume benötigen wir den Begriff der *schwachen Ableitung*. Ausgangspunkt ist die Formel der partiellen Integration:

$$\int_\Omega v(x) D_i y(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} v(x) y(x) \nu_i(x)\,\mathrm{d}s(x) - \int_\Omega y(x) D_i v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Hier ist ν_i die i-te Komponente des äußeren Normalenvektors an Ω. Damit die Formel Sinn macht, seien v, y zunächst aus $C^1(\overline{\Omega})$. Gilt noch zusätzlich $v(x) = 0$ auf $\partial\Omega$, dann gilt

$$\int_\Omega v(x) D_i y(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega y(x) D_i v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Allgemein gilt für $y \in C^k(\overline{\Omega})$, $v \in C_0^k(\Omega)$ die Formel

$$\int_\Omega y(x) D^\alpha v(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^\alpha \int_\Omega v(x) D^\alpha y(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.2.1}$$

Dabei ist $C_0^k(\Omega)$ die Menge der k-fach stetig differenzierbaren Funktionen, mit kompaktem *Träger* support

$$\operatorname{supp} v := \overline{\left\{x \in \Omega \colon v(x) \neq 0\right\}}.$$

Weiter ist $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ein Multiindex bzw. ein Vektor natürlicher Zahlen, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Wir setzen

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n, \qquad D^\alpha v = \frac{\partial^\alpha v}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}},$$

also z.B. mit $n = 3$ und $\alpha = (1, 0, 2)$ ein Ableitungsoperator D^α der Ordnung $|\alpha| = 3$ und

$$D^\alpha v = \frac{\partial^3 v}{\partial_{x_1} \partial_{x_3}^2}.$$

Formel (1.2.1) lässt sich zur Definition einer verallgemeinerten Ableitung nutzen. Dazu brauchen wir noch zwei weitere Funktionenräume:

- Die *Testfunktionen* aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω:

$$C_0^\infty(\Omega) := \bigcap_{k=0}^{\infty} C_0^k(\Omega).$$

- Die lokal integrierbaren Funktionen $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$:

$$L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \bigcap_{\substack{K \subseteq \Omega \\ \text{compact}}} L^1(K).$$

derivative

Definition 1.2.10 (Schwache Ableitung)**.** Es sei $y \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ gegeben und α ein Multiindex. Existiert ein $w \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega y(x) D^\alpha v(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega w(x) v(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega),$$

dann heißt w *schwache Ableitung* der Ordnung α von y und wir schreiben $D^\alpha y = w$.

Beispiel 1.2.11. Eine schwache Ableitung sollte den normalen Ableitungsbegriff verallgemeinern. Es wäre daher schön, wenn zum Beispiel die gerade so nicht-differenzierbare

Funktion $y(x) = |x|$ auf, sagen wir, $\Omega = (-1, 1)$, eine schwache Ableitung hätte. Nachrechnen:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} |x| v'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{0} (-x) v'(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x v'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -x \cdot v(x)\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} (-1) v(x)\,\mathrm{d}x + x \cdot v(x)\Big|_{0}^{1} - \int_{0}^{1} v(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\left[\int_{-1}^{0} (-1) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} 1 \cdot v(x)\,\mathrm{d}x\right] = -\int_{-1}^{1} w(x) v(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

mit

$$w(x) = \begin{cases} -1 & x \in (-1, 0), \\ 1 & x \in (0, 1). \end{cases}$$

Also hat y die schwache Ableitung $y'(x) = w(x)$ und diese ist auch die erwartete.

Definition 1.2.12 (Sobolev-Raum)**.** Es sei $1 \leq p \leq \infty$. Unter $W^{k,p}(\Omega)$ versteht man den Raum aller $y \in L^p(\Omega)$, deren schwache Ableitungen bis Ordnung k existieren und zu $L^p(\Omega)$ gehören, versehen mit der Norm

$$\|y\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha y|^p \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}} \qquad (p < \infty)$$

bzw.

$$\|y\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha y\|_{L^\infty(\Omega)} \qquad (p = \infty).$$

Die Räume $W^{k,p}(\Omega)$ sind vollständige normierte Räume, d.h. Banachräume. Uns interessiert speziell der Fall $p = 2$. Man setzt

$$H^k(\Omega) \coloneqq W^{k,2}(\Omega),$$

speziell:

$$H^1(\Omega) = \Big\{y \in L^2(\Omega)\colon D_i y \in L^2(\Omega),\ i = 1, \dots, n\Big\}$$

mit der zugehörigen Norm

$$\|y\|_{H^1(\Omega)} = \Big(\int_{\Omega} y(x)^2 + |\nabla y(x)|^2 \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

In der Tat ist $H^1(\Omega)$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega u(x) \cdot v(x) \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \,\mathrm{d}x$$

Auch die anderen $H^k(\Omega)$ sind Hilberträume. Nach Definition gilt zudem $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$. Ist Ω bzw. der Rand von Ω hinreichend glatt, so sind auch die beliebig oft differenzierbaren Funktionen $C^\infty(\overline{\Omega})$, die sich auf den Abschluss von Ω fortsetzen lassen, *dicht* in $H^1(\Omega)$. Man kann also jede $H^1(\Omega)$-Funktion als Grenzwert einer auf $\overline{\Omega}$ glatten Funktion in $H^1(\Omega)$ erhalten.

Funktionen aus $W^{k,p}(\Omega)$ oder $H^k(\Omega)$ sind zunächst nur bis auf Mengen vom Maß 0 definiert. Damit machen Randwerte, wie in der partiellen Differentalgleichung gestellt, eigentlich keinen Sinn. Wir benötigen aber Randwerte für die Differentialgleichung. Dazu gibt es den folgenden

trace operator

Satz 1.2.13 (Spursatz)**.** *Sei $1 \leq p \leq \infty$. Ist Ω hinreichend glatt, so existiert eine stetige lineare Abbildung*

$$\tau \colon W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega),$$

so dass für alle $y \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$ gilt:

$$\tau y = y\big|_\partial \Omega.$$

Hier heißt τy die Spur *von y auf $\partial\Omega$ und τ heißt* Spuroperator. trace

April 23, 2024

Lecture 2

Damit können wir definieren:

$$H_0^1(\Omega) := \Big\{ y \in H^1(\Omega) \colon \tau y = 0 \Big\}.$$

Funktionen in $H_0^1(\Omega)$ haben demnach genau Spur 0. Ist der Rand von Ω hinreichend glatt, so gilt zudem

$$H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}},$$

also der Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$. Jede Funktion $y \in H_0^1(\Omega)$ entsteht also als Grenzwert einer Folge von Testfunktionen in $C_0^\infty(\Omega)$ in $H^1(\Omega)$. Für $H_0^1(\Omega)$ gilt zudem die fundamentale *Poincaré-Ungleichung*:

$$\int_\Omega y(x)^2 \,\mathrm{d}x \leq C_P \int_\Omega |\nabla y(x)|^2 \,\mathrm{d}x \qquad \forall y \in H_0^1(\Omega)$$

Diese kann nur für eine Funktionenmenge gelten, in der die einzige konstante Funktion die Nullfunktion ist. Das folgt für $H_0^1(\Omega)$ mittels Definition. Die Ungleichung würde aber zum Beispiel auch für Funktionen mit Mittelwert 0 gelten (Lemma 3.3.3), oder für solche, die nur auf einem Teilstück von $\partial\Omega$ die Spur 0 haben. Durch die Poincaré-Ungleichung kann man kann im Raum $H_0^1(\Omega)$ mittels

$$\|y\|_{H_0^1(\Omega)} := \int_\Omega |\nabla y(x)|^2 \, \mathrm{d}x$$

eine äquivalente Norm einführen, wobei man im Vergleich zur üblichen $H^1(\Omega)$ Norm den L^2-Anteil weglässt. Wir verwenden im weiteren diese Norm, wenn wir uns auf $H_0^1(\Omega)$ beziehen.

1.2.2 Schwache Lösungen elliptischer Gleichungen

Die Lösungstheorie von elliptischen Differentialgleichungen, mit dem einfachsten Vertreter

$$\begin{cases} -\Delta y = f & \text{in } \Omega \\ y = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.2.2}$$

kann sehr unterschiedlich entwickelt werden. Für unsere Zwecke sind schwache Lösungen sinnvoll. Diese gehören zu Sobolev-Räumen. Man geht dabei wie folgt vor:

- Multiplizieren von (1.2.2) mit einer Testfunktion $v \in C_0^\infty(\Omega)$,
- Integration über Ω,
- partielle Integration:

$$\int_\Omega \nabla y \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega} v \cdot \partial_\nu y = \int_\Omega f \cdot v.$$

(Wir lassen im folgenden die Integrationsvariablen weg.) Wegen $v = 0$ auf $\partial\Omega$ gilt

$$\int_\Omega \nabla y \cdot \nabla v = \int_\Omega f \cdot v.$$

Diese Gleichung gilt zunächst für alle $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Diese Menge liegt dicht in $H_0^1(\Omega)$. Da alle Terme für $v \in H_0^1(\Omega)$ vernünftig definiert und stetig sind, gilt diese Formel sogar für beliebige $v \in H_0^1(\Omega)$. Im Gegensatz zur Ausgangsgleichung mit Δy macht die letzte Beziehung bereits für $y \in H_0^1(\Omega)$ Sinn und führt auf folgenden Begriff:

Definition 1.2.14 (Schwache Lösung)**.** Eine Funktion $y \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega \nabla y \cdot \nabla v = \int_\Omega f \cdot v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{1.2.3}$$

weak solution

heißt *schwache Lösung* von (1.2.2). Die variationelle Gleichung (1.2.3) heißt *schwache Formulierung* von (1.2.2).

Schauen wir uns die Struktur von (1.2.3) näher an. Wir haben eine Bilinearform auf $H_0^1(\Omega)$ gegeben durch

$$a(y,v) \coloneqq \int_\Omega \nabla y \cdot \nabla v. \tag{1.2.4}$$

Sei $V = H_0^1(\Omega)$. Dann können wir (1.2.3) schreiben als

$$a(y,v) = (f,v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in V,$$

oder mit einem linearen Funktional $F(v) \coloneqq (f,v)_{L^2(\Omega)}$:

$$a(y,v) = F(v) \quad \forall v \in V. \tag{1.2.5}$$

Für lineare Funktionale $F\colon V \to \mathbb{R}$ definiert man die Norm

$$\|F\|_{V^\star} = \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{|F(v)|}{\|v\|_V}.$$

Falls $\|F\|_{V^\star} < \infty$, so sagen wir, dass F ein *beschränktes* lineares Funktional ist und $F \in V^\star$, dem *Dualraum* von V. Das fundamentale Theorem über Gleichungen der Form (1.2.5) ist wie folgt:

Satz 1.2.15 (Lax-Milgram). *Es sei V ein reeller, separabler Hilbertraum und $a\colon V \times V \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) Es existiert eine Konstante $\alpha_0 > 0$ mit

$$|a(y,v)| \le \alpha_0 \cdot \|y\|_V \|v\|_V \qquad \text{(Beschränktheit } von\ a\text{)}$$

(b) Es existiert eine Konstante $\beta_0 > 0$ mit

$$a(y,y) \ge \beta_0 \cdot \|y\|_V^2 \qquad (V\text{-Elliptizität } von\ a)$$

Dann besitzt die Variationsformulierung (1.2.5) für jedes $F \in V^\star$ genau eine Lösung $y = y_F \in V$ und es existiert eine Konstante $c > 0$ mit

$$\|y_F\|_V \le c \cdot \|F\|_{V^\star} \qquad \forall F \in V^\star. \tag{1.2.6}$$

Satz 1.2.16. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 1.2.15 erfüllt und es sei $V_h \subseteq V$ ein abgeschlossener, linearer Unterraum. Sei $F \in V^\star$. Dann besitzt die Gleichung*

$$a(y_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

eine eindeutige Lösung $y_h \in V_h$ *mit*

$$\|y_h\|_V \leq c \cdot \|F\|_{V^\star}.$$

Beweis. Nach Annahme ist V_h ein abgeschlossener linearer Unterraum. Versehen mit der Norm von V ist V_h selbst ein Hilbertraum. Die Voraussetzungen an die Bilinearform aus Satz 1.2.15 ist für die eingeschränkte Bilinearform $a\colon V_h \times V_h \to \mathbb{R}$ erfüllt. Damit ist Satz 1.2.15 für diese anwendbar. □

Satz 1.2.16 hilft uns in der numerischen Analysis immens. Hier ist V_h ein endlichdimensionaler Unterraum, welcher automatisch abgeschlossen ist. Die Existenz einer eindeutigen Lösung überträgt sich damit automatisch von V auf das endlichdimensionale Problem.

Wir wenden Satz 1.2.15 noch kurz auf (1.2.2) an. Sei dazu $f \in L^2(\Omega)$ und $F(v) \coloneqq (f, v)_{L^2(\Omega)}$ sowie a wie in (1.2.4). Dann gilt mit der Hölder- und der Poincaré-Ungleichung

$$|F(v)| \leq \int_\Omega |f| \cdot |v| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \tag{1.2.7}$$

also $\|F\|_{V^\star} \leq C_P \|f\|_{L^2(\Omega)}$. Weiter mit Hölder-Ungleichung

$$|a(y, v)| \leq \|\nabla y\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = \|y\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

also ist a beschränkt mit $\alpha_0 = 1$. Zudem ist a $H_0^1(\Omega)$-elliptisch mit $\beta_0 = 1$, denn

$$a(y, y) = \int_\Omega |\nabla y|^2 = \|y\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Also hat (1.2.2) gemäß Satz 1.2.15 für jedes $f \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige Lösung $y = y_f \in H_0^1(\Omega)$ und es existiert eine Konstante $c > 0$, so dass

$$\|y\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c \cdot \|f\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall f \in L^2(\Omega).$$

Not done ↓

Ähnlich kann man für andere Gleichungen vorgehen, z.B. für $c_0 > 0$ und $\alpha \geq 0$ konstant,

$$\begin{aligned} -\Delta y + c_0 y &= f \quad \text{in } \Omega \\ \partial_\nu y + \alpha y &= g \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Mit Testfunktion $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ multiplizieren, integrieren:

$$\int_\Omega (-\Delta y + c_0 \cdot y) v = \int_\Omega f \cdot v,$$

partiell integrieren:

$$\int_\Omega \nabla y \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega} v \cdot \partial_\nu y + \int_\Omega c_0 \cdot y \cdot v = \int_\Omega f \cdot v,$$

und Einsetzen der Randbedingungen (hier sieht man, wieso es nicht ausreicht, $v \in C_0^\infty(\Omega)$ zu wählen!) ergibt die schwache Formulierung:

$$\int_\Omega \nabla y \cdot \nabla v + \int_\Omega c_0 \cdot y \cdot v + \int_{\partial\Omega} \alpha \cdot y \cdot v = \int_\Omega f \cdot v + \int_{\partial\Omega} g \cdot v.$$

für alle $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ und dann für alle $v \in H^1(\Omega)$. Die Bilinearform zu obigem Problem ist nun also

$$a(y, v) = \int_\Omega \nabla y \cdot \nabla v + \int_\Omega c_0 \cdot yv + \int_{\partial\Omega} \alpha \cdot yv,$$

und das Funktional

$$F(v) = \int_\Omega f \cdot v + \int_{\partial\Omega} g \cdot v.$$

Als Hilbertraum wählt man entsprechend $V = H^1(\Omega)$ und prüft leicht nach, dass Satz 1.2.15 anwendbar ist, sofern c_0 groß genug ist. ↑

1.2.3 Lineare Abbildungen

Seien im folgenden U und V Banachräume.

Definition 1.2.17 (Linearer Operator)**.** Eine Abbildung $A\colon U \to V$ heißt *linear* oder *linearer Operator*, wenn gilt

$$\begin{aligned} A(u_1 + u_2) &= A(u_1) + A(u_2) \quad && \forall u_1, u_2 \in U \\ A(\lambda u) &= \lambda A(u) && \forall u \in U, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Eine Abbildung $f\colon U \to \mathbb{R}$, also $V = \mathbb{R}$, heißt *lineares Funktional.*

Definition 1.2.18 (Beschränkter/stetiger linearer Operator)**.** Ein linearer Operator A heißt *beschränkt*, wenn eine Konstante $c \geq 0$ existiert, so dass bounded

$$\|Au\|_V \leq c \cdot \|u\|_U \qquad \forall u \in U.$$

Ein linearer Operator ist *genau dann* stetig, wenn er beschränkt ist. Wir bezeichnen als $\mathcal{L}(U, V)$ den Raum der linearen und stetigen Operatoren zwischen U und V. Die *Norm* des linearen Operators A in diesem Raum ist definiert durch

$$\|A\|_{\mathcal{L}(U,V)} \coloneqq \sup_{u \in U,\ u \neq 0} \frac{\|Au\|_V}{\|u\|_U} = \sup_{\|u\|_U = 1} \|Au\|_V .$$

Wenn die Räume aus dem Kontext klar sind, schreiben wir kurz $\|A\|$, sonst $\|A\|_{\mathcal{L}(U,V)}$.

Bemerkung 1.2.19. Im Satz von **Lax-Milgram** haben wir die Beschränktheit der Abbildung $V^\star \ni F \mapsto y = y_f \in V$ formuliert. Damit ist diese Lösungsabbildung auch stetig als linearer Operator $V^\star \to V$.

Beispiel 1.2.20. Sei $U = V = L^\infty(\Omega)$ und sei $a \in L^\infty(\Omega)$. Definiere den Multiplikationsoperator

$$A \colon L^\infty(\Omega) \to L^\infty(\Omega), \qquad (Au)(x) \coloneqq a(x)u(x).$$

Der Operator ist beschränkt mit $\|A\|_{\mathcal{L}(U,V)} \leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)}$ wegen

$$\|Au\|_{L^\infty(\Omega)} = \|a(\cdot)u(\cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Betrachtet man weiter speziell $u \equiv 1$, so ergibt sich auch $\|A\|_{\mathcal{L}(U,V)} = \|a\|_{L^\infty(\Omega)}$.

May 7, 2024

Lecture 3

Der Raum $\mathcal{L}(U, \mathbb{R})$ wird kurz mit $U^\star$ bezeichnet und heißt zu U *dualer Raum* bzw. *Dualraum* von U; seine Elemente heißen (stetige lineare))*Funktionale*.

Beispiel 1.2.21. Sei $U = C[0,1]$ und setze $f(u) = u(\frac{1}{2})$. Dann bildet $f \colon U \to \mathbb{R}$ ab und

$$|f(u)| = \left| u\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq \max_{t \in [0,1]} |u(t)| = \|u\|_{C[0,1]},$$

also $\|f\|_{U^\star} \leq 1$. Mit Einsetzen von $u \equiv 1$ folgt wieder $\|f\|_{U^\star} = 1$.

Im Hilbertraum können wir stetige lineare Funktionale genau charakterisieren:

Riesz representation theorem

Satz 1.2.22 (Rieszscher Darstellungssatz)**.** *Jedes stetige lineare Funktional $F \in H^\star$ in einem Hilbertraum H kann eindeutig in der Form*

$$F(v) = (f, v)_H \qquad \forall v \in H$$

mit einem Element $f \in H$ dargestellt werden. Die Abbildung $\mathcal{R} \colon F \mapsto f$ ist der Riesz Isomorphismus $\mathcal{R} \in \mathcal{L}(H^\star, H)$. *Dieser ist ein isometrischer Isomorphismus, d.h. er ist bijektiv und es gilt $\|F\|_{H^\star} = \|\mathcal{R}F\|_H$.*

In diesem Sinne kann man $H^\star$ mit H identifizieren. Man schreibt dann $H^\star = H$. Auch in anderen Fällen gibt es einfache Darstellungen der Dualräume, z.B.

$$L^p(\Omega)^\star = L^q(\Omega) \qquad \text{mit } \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1 \quad \text{für } 1 \leq p < \infty.$$

Funktionale aus dem Hilbertraum $F \in (H^1(\Omega))^\star$ *kann* man, aber *muss* man nicht in der Form $v \mapsto (f, v)_{H^1(\Omega)}$ mit $f \in H^1(\Omega)$ darstellen. Um das Element f zu finden, muss man die Gleichung

$$F(v) \stackrel{!}{=} (f, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega f \cdot v \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla f \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x \qquad \forall v \in H^1(\Omega)$$

lösen. Das ist aber eine schwache Formulierung einer partiellen Differentialgleichung und damit eher kompliziert, die Formulierung als $F(v)$ beizubehalten, ist da möglicherweise einfacher.

Definition 1.2.23 (Adjungierter Operator)**.** Sei $A \in \mathcal{L}(U, V)$. Dann ist der *adjungierte Operator* $A^* \in \mathcal{L}(V^\star, U^\star)$ eindeutig definiert durch die Relation

adjoint operator

$$\langle Au, v^\star \rangle_{V,V^\star} = \langle u, A^* v^\star \rangle_{U,U^\star} \qquad \forall u \in U, \; v^\star \in V^\star.$$

Es gilt die Isometrie $\|A\|_{\mathcal{L}(U,V)} = \|A^*\|_{\mathcal{L}(V^\star,U^\star)}$. Im Hilbertraum speziell betrachten wir den zu $A \in \mathcal{L}(H)$ adjungierten Operator $A^\star \in \mathcal{L}(H)$ als denjenigen, der

$$\big(Au, v\big)_H = \big(u, A^\star v\big)_H \qquad \forall u, v \in H$$

erfüllt. Im Fall $H = \mathbb{R}^n$ ist $A^\star = A^T$. Formell erhält man $A^\star$ aus der Ähnlichkeitstransformation von $A^\star = \mathcal{R} A^* \mathcal{R}^{-1}$ mit dem Riesz Isomorphismus $\mathcal{R}$.

a map of Riesz Representation theorem