

Hajar BADRAOUI

Résumé

Ce rapport examine en détail les méthodes de Runge-Kutta, des techniques numériques largement utilisées pour résoudre des équations différentielles. L'objectif est de fournir une compréhension approfondie de ces méthodes, en mettant en lumière leur applicabilité et leur efficacité dans la résolution de divers problèmes mathématiques. Le rapport commence par introduire le contexte des équations différentielles et la nécessité d'approches numériques pour leur résolution. Il explore ensuite les principes fondamentaux des méthodes de Runge-Kutta, en mettant en évidence leur stabilité, leur consistance et leur ordre.

Mots clés : Méthodes de Runge-Kutta, Runge-Kutta implicite, Runge-Kutta explicite, RK2, RK4, stabilité, consistance, convergence, ordre.

Sommaire

1	Introduction	3
2	Préliminaire	4
2.1	Problème de Cauchy	4
2.2	Principe général des méthodes numériques	4
2.3	Principales méthodes numériques	4
3	Méthodes à un pas	5
3.1	Propriétés des méthodes numériques à un pas	5
4	Méthodes de Runge-Kutta	9
4.1	Description de la méthode de Runge-Kutta	9
4.2	Principe fondamental des méthodes de Runge-Kutta	13
4.3	Existence de la solution et stabilité des méthodes de Runge-Kutta	13
4.4	Consistance des méthodes de Runge-Kutta	15
4.5	Ordre des méthodes de Runge-Kutta	15
4.6	Exemples des méthodes de Runge-Kutta	16
5	Conclusion	18
6	Annexes	19

1 Introduction

Au cœur des modèles mathématiques qui décrivent l'évolution temporelle des phénomènes naturels et des systèmes dynamiques complexes se trouvent les équations différentielles. Ces équations, bien que cruciales pour comprendre le comportement des systèmes en évolution, souvent résistent à une résolution analytique élégante. Lorsque la plume du mathématicien ne peut esquisser une solution, c'est dans ce contexte que les méthodes numériques, et notamment les méthodes de Runge-Kutta, émergent en tant qu'outils essentiels pour obtenir des solutions précises et efficaces. Elles ont été nommées en l'honneur des mathématiciens **Carl Runge** et **Martin Wilhelm Kutta**, lesquels élaborèrent la méthode en **1901**.

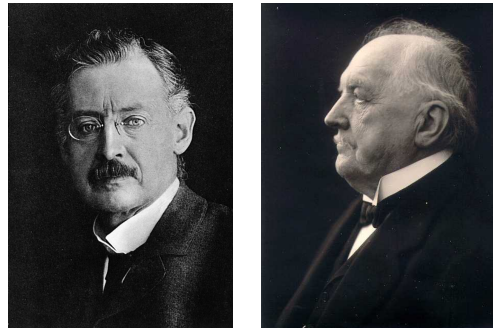


FIGURE 1 – Carl David Tolmé Runge (1856-1927) et Martin Wilhelm Kutta (1867-1944) deux mathématiciens allemands.

2 Préliminaire

2.1 Problème de Cauchy

La plupart des méthodes numériques pour résoudre les équations différentielles s'appliquent à des problèmes du type problème de Cauchy suivant le nom donné par les mathématiciens.

Soit $I \subset \mathbb{R}^+$ un intervalle et $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

On appelle **problème de Cauchy** ou problème à la valeur initiale : le problème qui consiste à trouver un intervalle I tel que $t_0 \in I$ et une fonction $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) & t \in I \\ x(t_0) = x_0 & t_0 \in I, x_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1)$$

Si la fonction f est continue et vérifie une condition de Lipschitz par rapport à la deuxième variable alors le problème admet une solution unique. On dit que le problème est bien posé.

2.2 Principe général des méthodes numériques

Pour obtenir une approximation numérique de la solution $x(t)$ sur l'intervalle $I = [t_0, t_0 + T]$, nous allons estimer la valeur de cette fonction en un nombre fini de points t_i , pour $i = 0, 1, \dots, N$ constituant les noeuds du maillage.

i.e une subdivision $\sigma : t_0 < t_1 < \dots < t_n \dots < t_N = t_0 + T$

- La solution numérique discrète obtenue aux points t_i est notée $x_i = x(t_i)$.
- L'écart entre deux abscisses, noté h , est appelé pas de discrétisation. Ce pas dans les méthodes les plus simples est constant, mais on peut travailler avec un pas variable $h_i = t_i - t_{i-1}$ et $h = h(\sigma) := \max_{0 \leq n \leq N-1} h_n$

2.3 Principales méthodes numériques

Les principales méthodes de résolution numérique des EDO sont séparées en deux grands types :

Méthodes à un pas. Pour ces méthodes, le calcul de la valeur discrète x_{n+1} au noeud t_{n+1} fait intervenir la valeur x_n obtenue à l'abscisse précédente.

Les principales méthodes sont :

- Méthodes d'Euler explicite et implicite
- Méthode d'Euler amélioré
- Méthode de Heun
- Méthode de Crank-Nicholson
- Méthodes de Runge et Kutta

Méthodes à pas multiples. Pour ces méthodes, le calcul de la valeur discrète x_{n+1} au noeud t_{n+1} fait intervenir plusieurs valeurs $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots$ obtenues aux abscisses précédentes.

Les principales méthodes sont :

- Méthode de Nystrom ou saute-mouton

- Méthodes d'Adams-Bashforth-Moulton
- Méthodes de Gear

3 Méthodes à un pas

La formulation générale des méthodes à un pas est :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h_n \Phi(t_n, x_n, h_n) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2)$$

Où Φ est une fonction continue de $[t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \times [0, h_0]$ dans \mathbb{R} et qui dépend de la fonction f . Elle est appelée fonction d'incrément.

3.1 Propriétés des méthodes numériques à un pas

Plusieurs notions mathématiques sont introduites lors de la résolution d'EDO au moyen de leurs équivalents discrétisés.

Les trois principales sont **la convergence**, **la stabilité** et **la consistance**, ces notions permettent de relier la solution exacte des équations continues à la solution exacte des équations discrétisées et à la solution numérique obtenue.

3.1.1 Consistance

Définition

Soit $x(t)$ la solution exacte du problème de Cauchy, on appelle erreur de consistance :

$$\varepsilon_{n+1} := \frac{1}{h_n} (x(t_{n+1}) - x(t_n)) - \Phi(t_n, x(t_n), h_n)$$

Définition

La méthode (2) est **consistante** avec l'équation différentielle (1) si et seulement si :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{n=1, \dots, N} |\varepsilon_n| = 0$$

3.1.2 Stabilité

Définition

Soient $\{x_n, n = 0, \dots, N\}$ et $\{z_n, n = 0, \dots, N\}$ les solutions respectives des systèmes :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h_n \Phi(t_n, x_n, h_n) & n = 0, \dots, N-1 \\ z_{n+1} &= z_n + h_n (\Phi(t_n, z_n, h_n) + \eta_{n+1}) & n = 0, \dots, N-1 \end{aligned}$$

Où les perturbations η_{n+1} sont bornées.

On dit que la méthode est **stable** s'il existe deux constantes positives M_1 et M_2 indépendantes de h telles que :

$$\max_{n=1, 2, \dots, N} |x_n - z_n| \leq M_1 |x_0 - z_0| + M_2 \max_{n=1, 2, \dots, N} |\eta_n|$$

Remarque. Il est nécessaire d'étudier la stabilité, une méthode instable ne présente aucun intérêt.

3.1.3 Convergence

Définition

Soit l'erreur à l'instant t_n , $e_n = x(t_n) - x_n$, où $x(t)$ est la solution exacte. Nous dirons que la méthode est convergente ssi

$$\lim_{h \rightarrow 0} |e_0| = 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \max_n |e_n| = 0$$

Théorème 1 (Théorème de Lax). Si la méthode à un pas est stable et consistante alors elle est convergente.

Démonstration. On a

$$\frac{\Delta x(t_n)}{h_n} - \Phi(t_n, x_n, h_n) = \varepsilon_n$$

Puisque la méthode est consistante alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_n |\varepsilon_n| = \lim_{h \rightarrow 0} \max_n \left| \frac{\Delta x(t_n)}{h_n} - \Phi(t_n, x_n, h_n) \right| = 0$$

La méthode est stable, alors il existe deux constantes M_1 et M_2 positives telles que

$$\max_{0 < n \leq N-1} |e_n| \leq M_1 |e_0| + M_2 \max_n |\varepsilon_n|$$

D'où

$$\lim_{h \rightarrow 0} |e_0| = 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \max_n |e_n| = 0$$

Ce qui achève la démonstration. □

3.1.4 Condition nécessaire et suffisante de Consistance

Théorème 2. La méthode à pas est consistante si et seulement si, pour tout $(t, x) \in [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}$, on a :

$$\Phi(t, x, 0) = f(t, x)$$

Démonstration. \Rightarrow Supposons que la méthode est consistante, alors pour toute solution x de l'équation différentielle, on a $\lim_{h \rightarrow 0} \max_{n=1, \dots, N} |\varepsilon_n| = 0$. D'où

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{n=0, \dots, N-1} \left| \frac{1}{h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, x(s)) ds - \Phi(t_n, x(t_n), h_n) \right| = 0.$$

Soit t un point quelconque de $[t_0, t_0 + T]$, on peut construire une suite de points $(t_n)_n$ qui converge vers t quand h tend vers 0.

Puisque les fonctions f et Φ sont continues, alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, x(s)) ds - \Phi(t_n, x(t_n), h_n) = f(t, x(t)) - \Phi(t, x(t), 0) = 0.$$

\Leftarrow Supposons $\Phi(t, x, 0) = f(t, x)$ alors l'erreur de consistance sera défini comme :

$$\epsilon_n = \frac{1}{h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\Phi(s, x(s), 0) - \Phi(t_n, x(t_n), h_n)) ds.$$

La fonction $(t, h) \mapsto \Phi(t, x(t), h)$ est continue sur le compact $[t_0, t_0 + T] \times [0, h_0]$, elle est uniformément continue par [le théorème de Heine](#), donc pour $t_n \leq s \leq t_{n+1}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{n=0, \dots, N-1} |\Phi(s, x(s), 0) - \Phi(t_n, x(t_n), h_n)| = 0,$$

ce qui implique $\lim_{h \rightarrow 0} \max_{n=1, \dots, N} |\varepsilon_n| = 0$.

Ce qui termine la preuve. □

3.1.5 Condition suffisante de Stabilité

Théorème 3. Si $\Phi(t, x, h)$ vérifie la condition de Lipschitz par rapport à la variable x . C'est-à-dire il existe une constante M indépendante de h telle que

$$|\Phi(t, x, h) - \Phi(t, \bar{x}, h)| \leq M|x - \bar{x}| \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T], \quad \forall x, \bar{x} \in \mathbb{R} \quad \forall h \in [0, h_0]$$

Alors la méthode est stable.

Démonstration. Soient $\{x_n, n = 0, \dots, N-1\}$ et $\{z_n, n = 0, \dots, N-1\}$ deux suites qui vérifient $x_{n+1} = x_n + h_n \Phi(t_n, x_n, h_n)$ (resp. $z_{n+1} = z_n + h (\Phi(t_n, z_n, h_n) + \eta_n)$) pour $n = 0, \dots, N-1$.

En utilisant l'inégalité ci-dessus, on en déduit immédiatement

$$|x_{n+1} - z_{n+1}| \leq (1 + Mh_n) |x_n - z_n| + h_n |\eta_n|, \quad n = 0, \dots, N-1.$$

D'après [le lemme de Grönwall discret](#) suivant : Soit $(\theta_n)_{n \geq 0}$ et $(\mu_n)_{n \geq 0}$ deux suites de réels positifs ou nuls qui vérifient

$$\theta_{n+1} \leq (1 + h_n L) \theta_n + \mu_{n+1}, \quad n \geq 0$$

pour une certaine constante positive L . On a alors la majoration

$$\theta_n \leq e^{L(t_n - t_0)} \theta_0 + \sum_{i=1}^n e^{L(t_n - t_i)} \mu_i, \quad \forall n \geq 0.$$

On conclut que

$$\begin{aligned} |x_n - z_n| &\leq e^{M(t_n - t_0)} |x_0 - z_0| + h \left(\sum_{i=1}^n e^{M(t_n - t_i)} \right) \max_{i=1, \dots, n} |\eta_i| \\ &\leq e^{M(t_n - t_0)} |x_0 - z_0| + \frac{e^{M(t_n - t_0)} - 1}{M} \max_{i=1, \dots, n} |\eta_i| \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\max_{n=0, \dots, N} |x_n - z_n| \leq e^{MT} |x_0 - z_0| + \frac{e^{MT} - 1}{M} \max_{n=1, \dots, N} |\eta_n|.$$

La méthode est donc stable et on a $M_1 = e^{MT}$ et $M_2 = \frac{e^{MT} - 1}{M}$.

Ce qui achève la preuve. □

3.1.6 Ordre de la méthode à pas

Définition

La méthode à un pas est d'ordre p , ($p > 0$) si l'erreur de troncature est en $O(h^p)$, c'est-à-dire :

$$\max_{n=1, \dots, N} |\epsilon_n| = \max_{n=0, \dots, N-1} \left| \frac{1}{h_n} (x(t_{n+1}) - x(t_n)) - \Phi(t_n, x(t_n), h_n) \right| \leq Kh^p,$$

où K est une constante positive ne dépendant que de x et de Φ , cela pour toute solution x de l'équation différentielle, telle que $x \in C^{p+1}([t_0, t_0 + T])$.

Définition

Si $f \in C^p([t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R})$, on peut définir inductivement la fonction $f^{(k)}$, $0 \leq k \leq p$, sur $[t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} f^{(0)}(t, x) &= f(t, x) \\ f^{(1)}(t, x) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) f(t, x) \\ &\vdots \\ f^{(k)}(t, x) &= \frac{\partial f^{(k-1)}}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial f^{(k-1)}}{\partial x}(t, x) f(t, x). \end{aligned}$$

Si x est solution de l'équation différentielle, on a l'égalité

$$x^{(k+1)}(t) = f^{(k)}(t, x(t)) = \frac{d^k}{dt^k} f(t, x(t)). (\star)$$

Théorème 4. On suppose que $f \in C^p([t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R})$ et que les fonctions $\Phi, \partial\Phi/\partial h, \dots, \partial^p\Phi/\partial h^p$ existent et sont continues dans $[t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \times [0, h_0]$. Une condition nécessaire et suffisante pour que la méthode soit d'ordre p s'écrit

$$\forall (t, x) \in [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}, \begin{cases} \Phi(t, x, 0) &= f(t, x) \\ \frac{\partial\Phi}{\partial h}(t, x, 0) &= \frac{1}{2}f^{(1)}(t, x) \\ &\vdots \\ \frac{\partial^{p-1}\Phi}{\partial h^{p-1}}(t, x, 0) &= \frac{1}{p}f^{(p-1)}(t, x) \end{cases}$$

Démonstration. Soit x une solution de l'équation différentielle, $x \in C^{p+1}([t_0, t_0 + T])$. D'après la formule de Taylor, il existe $\xi_n \in]t_n, t_{n+1}[$ tel que

$$x(t_{n+1}) - x(t_n) = hx'(t_n) + \dots + \frac{h^p}{p!} x^{(p)}(t_n) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} x^{(p+1)}(\xi_n);$$

En utilisant l'égalité (\star) , on obtient

$$\begin{aligned} x(t_{n+1}) - x(t_n) &= hf(t_n, x(t_n)) + \frac{h^2}{2} f^{(1)}(t_n, x(t_n)) + \dots \\ &\quad \dots + \frac{h^p}{p!} f^{(p-1)}(t_n, x(t_n)) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p)}(\xi_n, x(\xi_n)). \end{aligned}$$

De même, il existe $\hat{h} \in]0, h_0]$ tel que

$$\begin{aligned} \Phi(t_n, x(t_n), h) = & \Phi(t_n, x(t_n), 0) + h \frac{\partial \Phi}{\partial h}(t_n, x(t_n), 0) + \dots + \frac{h^{p-1}}{(p-1)!} \frac{\partial^{p-1} \Phi}{\partial h^{p-1}}(t_n, x(t_n), 0) \\ & + \frac{h^p}{p!} \frac{\partial^p \Phi}{\partial h^p}(t_n, x(t_n), \hat{h}). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \epsilon_{n+1} = & (f(t_n, x(t_n)) - \Phi(t_n, x(t_n), 0)) + h \left(\frac{1}{2} f^{(1)}(t_n, x(t_n)) - \frac{\partial \Phi}{\partial h}(t_n, x(t_n), 0) \right) + \dots \\ & + \frac{h^{p-1}}{(p-1)!} \left(\frac{1}{p} f^{(p-1)}(t_n, x(t_n)) - \frac{\partial^{p-1} \Phi}{\partial h^{p-1}}(t_n, x(t_n), 0) \right) \\ & + \frac{h^p}{p!} \left(\frac{1}{p+1} f^{(p)}(\xi_n, x(\xi_n)) - \frac{\partial^p \Phi}{\partial h^p}(t_n, x(t_n), \hat{h}) \right) \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

4 Méthodes de Runge-Kutta

4.1 Description de la méthode de Runge-Kutta

Supposons qu'on travaille avec un pas h constant.

Soit la formule suivante :

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \overbrace{\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x(t)) dt}^{(a)}$$

l'objectif est de construire des méthodes d'ordre p , à partir des formules de quadrature pour le calcul de l'intégrale (a).

Par exemple :

- Si on utilise la méthode des rectangles à gauche.

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x(t)) dt \approx h \times f(t_n, x(t_n))$$

on obtient [la méthode d'Euler explicite](#) :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h f(t_n, x_n) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3)$$

- Si on utilise la méthode des rectangles à droite.

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x(t)) dt \approx h \times f(t_{n+1}, x(t_{n+1}))$$

on obtient [la méthode d'Euler implicite](#) :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h f(t_{n+1}, x_{n+1}) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (4)$$

- Si on utilise la méthode des trapèzes pour le calcul de l'intégrale.

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x(t)) dt \approx \frac{h}{2} \times (f(t_n, x(t_n)) + f(t_{n+1}, x(t_{n+1})))$$

on trouve [la méthode Crank-Nicolson](#) :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} (f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_{n+1})) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (5)$$

— L'intégrale peut être approchée en utilisant la règle du point milieu

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x(t)) dt \approx h \times f\left(t_n + \frac{h}{2}, x\left(t_n + \frac{h}{2}\right)\right)$$

et on remplace la valeur inconnue $x(t_n + \frac{h}{2})$ par son approximation obtenue par la méthode d'Euler. On obtient ainsi une méthode explicite nommée **la méthode d'Euler modifiée** :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \times f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2} f(t_n, x_n)\right) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (6)$$

— Dans la formule des trapèzes, pour obtenir un schéma explicite, on remplace $x(t_{n+1})$ par l'approximation obtenue par la méthode d'Euler explicite. On obtient **la méthode de Heun** :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} (f(t_n, x_n) + f(t_n + h, x_n + h f(t_n, x_n))) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (7)$$

On peut étendre ces résultats plus générales de cette façon :

On se donne pour commencer $0 \leq c_1 \leq \dots \leq c_q \leq 1$ des réels, et b_1, \dots, b_q (réels) et une formule de quadrature (a) sur l'intervalle $[0, 1]$ suivante :

$$\int_0^1 \varphi(s) ds = \sum_{j=1}^q b_j \varphi(c_j)$$

dont les c_j sont les nœuds et les b_j les poids.

On suppose que cette formule (a) est exacte¹ pour les fonctions constantes, c'est-à-dire que

$$\sum_{j=1}^q b_j = 1.$$

Les c_i servent à définir q instants intermédiaires $t_{n,i}$ entre t_n et t_{n+1}

$$t_{n,i} = t_n + c_i h \quad 1 \leq i \leq q$$

Pour chaque instant intermédiaire $t_{n,i}$, on choisit une formule de quadrature (b) utilisant les nœuds c_j de la façon suivante :

$$\int_0^{c_i} \varphi(s) ds = \sum_{j=1}^q a_{ij} \varphi(c_j)$$

qu'on supposera aussi exacte pour les constantes

$$\sum_{j=1}^q a_{ij} = c_i.$$

En intégrant l'EDO entre les instants t_n et $t_{n,i}$, on obtient

$$x(t_{n,i}) - x(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n,i}} f(t, x(t)) dt = h \int_0^{c_i} f(t_n + sh, x(t_n + sh)) ds$$

via le changement de variable qui s'impose, $t = t_n + sh$. On utilisons la formule de quadrature (b), on trouve

$$x(t_{n,i}) = x(t_n) + h \sum_{j=1}^q a_{ij} f(t_{n,j}, x(t_{n,j}))$$

On remplace alors les valeurs exactes $x(t_n)$ et $x(t_{n,i})$ que nous ne connaissons pas, par des approximations potentielles x_n et $x_{n,i}$, et l'on pose alors

1. On suppose que les formules de quadrature sont exactes pour les fonctions constantes pour qu'elles sont au moins d'ordre zéro.

$$x_{n,i} = x_n + h \sum_{j=1}^q a_{ij} f(t_{n,j}, x_{n,j}) \quad (8)$$

Donc il faut calculer les $x_{n,i}$ en résolvant un système non linéaire de q équations à q inconnues

$$\begin{pmatrix} x_{n,1} \\ \vdots \\ x_{n,q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + hA \begin{pmatrix} f(t_{n,1}, x_{n,1}) \\ \vdots \\ f(t_{n,q}, x_{n,q}) \end{pmatrix},$$

où $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq q}$ est une matrice de taille $q \times q$ que l'on s'est donnée. Les $x_{n,i}$, s'ils existent, sont donc fonction de x_n (et de t_n et de h , bien sûr).

En intégrant enfin l'EDO entre les instants t_n et t_{n+1} , on obtient

$$x(t_{n+1}) - x(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, x(t)) dt = h \int_0^1 f(t_n + sh, x(t_n + sh)) ds$$

On discrétise cette dernière intégrale par la formule de quadrature (a), on remplace les valeurs exactes par les approximations supposées et l'on obtient le schéma de [la méthode de Runge-Kutta](#) :

$$x_{n+1} = x_n + h \sum_{j=1}^q b_j f(t_{n,j}, x_{n,j})$$

Pour la simplification, on peut réécrire la méthode de Runge-Kutta de la manière suivante.

Définition

La formulation générale des méthodes de Runge-Kutta (RK) est définie comme le suit ;

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \sum_{i=1}^q b_i k_i \\ k_i = f\left(t_n + c_i h, x_n + h \sum_{j=1}^q a_{ij} k_j\right), \quad i = 1, \dots, q. \end{cases}$$

Sous les hypothèses

$$\sum_{j=1}^q b_j = 1.$$

et

$$\sum_{j=1}^q a_{ij} = c_i.$$

Remarques.

1- Un schéma de Runge-Kutta à q valeurs intermédiaires est donc déterminé par la donnée des q instants intermédiaires via les valeurs c_i et de la matrice A et des valeurs b_j qui donnent les poids des $q + 1$ formules de quadrature utilisées. Ces paramètres sont ajustés de façon à rendre les schémas d'ordre le plus élevé possible.

2- La méthode de Runge-Kutta est une méthode à un pas où :

$$\Phi(t_n, x_n, h) = \sum_{i=1}^q b_i f\left(t_n + c_i h, x_n + h \sum_{j=1}^q a_{ij} k_j\right) \quad (9)$$

Alors tous les résultats obtenus dans la section des méthodes à un pas sont valables pour les méthodes de RK.

Simplifions la formule précédente, on a :

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + h (b_1 k_1 + b_2 k_2 + \cdots + b_q k_q) \\k_1 &= f(t_n + c_1 h, x_n + h (a_{11} k_1 + a_{12} k_2 + \cdots + a_{1q} k_q)) \\k_2 &= f(t_n + c_2 h, x_n + h (a_{21} k_1 + a_{22} k_2 + \cdots + a_{2q} k_q)) \\&\vdots \\k_q &= f(t_n + c_q h, x_n + h (a_{q1} k_1 + a_{q2} k_2 + \cdots + a_{qq} k_q))\end{aligned}$$

On peut représenter les expressions précédentes par un tableau nommé **Tableau de Butcher**² comme suit :

c_1	a_{11}	a_{12}	\cdots	a_{1q}
c_2	a_{21}	a_{22}	\cdots	a_{2q}
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
c_q	a_{q1}	a_{q2}	\cdots	a_{qq}
	b_1	b_2	\cdots	b_q

Dans ce cas la méthode est appelée : **Méthode de Runge kutta Implicite**.

Si on prend le schéma suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \sum_{i=1}^q b_i k_i \\ k_i = f(t_n + c_i h, x_n + h \sum_{j=1}^i a_{ij} k_j), \quad i = 1, \dots, q \\ c_1 = 0 \quad a_{11} = 0 \end{cases}$$

La méthode est nommée : **Méthode de Runge kutta Explicite**.

C'est-à-dire

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_n, x_n) \\k_2 &= f(t_n + c_2 h, x_n + h a_{21} k_1) \\k_3 &= f(t_n + c_3 h, x_n + h (a_{31} k_1 + a_{32} k_2)) \\&\vdots \\k_q &= f(t_n + c_q h, x_n + h (a_{q1} k_1 + a_{q2} k_2 + \cdots + a_{q,q-1} k_{q-1}))\end{aligned}$$

On a alors le tableau de Butcher de la méthode Runge-Kutta explicite est :

0	0			
c_2	a_{21}			
c_3	a_{31}	a_{32}		
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	
c_q	a_{q1}	a_{q2}	\cdots	$a_{q,q-1}$
	b_1	b_2	b_3	\cdots
				b_q

Pour résumer tout ce qui précède, on entame la définition suivante.

Définition

Si A est strictement triangulaire inférieure alors la méthode de Runge-Kutta est dite explicite, sinon il s'agit d'une méthode implicite.

2. John Charles Butcher (1933-) est un mathématicien et informaticien néo-zélandais spécialisé dans les méthodes numériques pour la solution des équations différentielles ordinaires

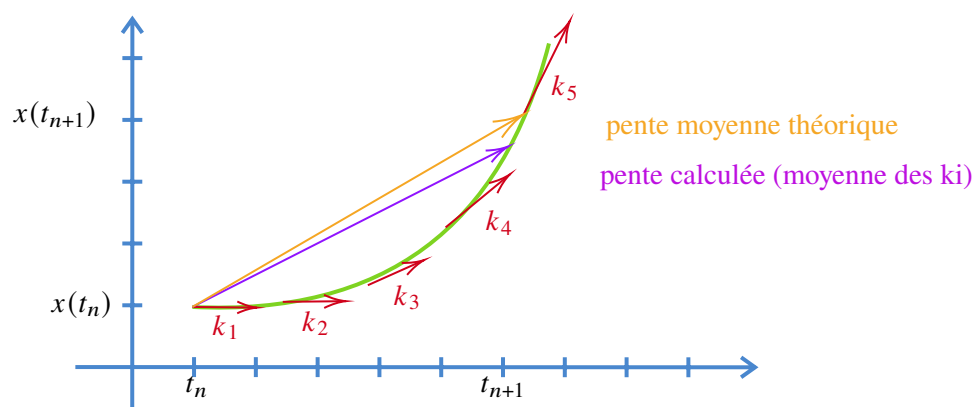
4.2 Principe fondamental des méthodes de Runge-Kutta

Le principe de base de la méthode de Runge-Kutta est similaire à celui de la méthode d'Euler. L'idée générale est de subdiviser l'intervalle d'étude en plusieurs petits intervalles et d'approximer la courbe à chaque étape par une certaine droite dont la pente est judicieusement choisie.

Dans la méthode d'Euler, la pente choisie est simplement la pente de la tangente au point initial de l'intervalle. Cependant, dans la méthode de Runge-Kutta, la pente est approximativement la pente moyenne entre deux points, x_n et x_{n+1} . (Voir le dessin ci-dessous où les k_i sont les pentes).

Cette pente moyenne donne une meilleure approximation de la valeur exacte de $x(t_{n+1})$ en partant de la valeur exacte de $x(t_n)$.

Interprétation géométrique :



Détails du processus de Runge-Kutta :

1. Choix de points intermédiaires : La méthode de Runge-Kutta consiste à prendre comme pente une valeur approchée de la pente moyenne entre t_n et t_{n+1} . Cette pente moyenne est calculée en choisissant judicieusement des points intermédiaires entre ces deux points.
2. Répartition des points intermédiaires : Les différentes variantes de la méthode de Runge-Kutta correspondent au choix du nombre de points intermédiaires pour le calcul de la pente moyenne et à la répartition de ces points dans l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$. Plus précisément, elles impliquent des calculs de pentes approchées en ces points intermédiaires, souvent réalisées à l'aide de méthodes de type Euler.
3. Moyennage des pentes : Une fois les pentes approximatives en chaque point intermédiaire obtenues, on effectue une moyenne pondérée de ces pentes pour obtenir une pente moyenne. Cette pente moyenne est ensuite utilisée pour avancer d'un pas supplémentaire dans la résolution de l'équation différentielle.

4.3 Existence de la solution et stabilité des méthodes de Runge-Kutta

Théorème 5. Soit $0 < h_0 < \frac{1}{L\|A\|_\infty}$,^a où $\|A\|_\infty$ désigne la norme matricielle subordonnée à la norme infinie sur \mathbb{R}^q . Alors pour tout $h \leq h_0$, le schéma de Runge-Kutta est bien défini. Il est en outre stable sous la même condition.

a. L est la constante de Lipschitz de la fonction f

Démonstration. Existence de la solution :

Revenons sur le calcul des valeurs intermédiaires. Le vecteur dont les composantes sont ces valeurs est

donc un point fixe de l'application de \mathbb{R}^q dans \mathbb{R}^q définie par

$$\psi : z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_q \end{pmatrix} \mapsto \psi(z) = x_n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + hA \begin{pmatrix} f(t_{n,1}, z_1) \\ \vdots \\ f(t_{n,q}, z_q) \end{pmatrix}.$$

Prolongeons cette fonction à x et t (qui sont des paramètres réels) quelconques en posant

$$\psi_x(z) = x \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + hA \begin{pmatrix} f(t + c_1 h, z_1) \\ \vdots \\ f(t + c_q h, z_q) \end{pmatrix} = xe + hAG(z)$$

La méthode de Runge-Kutta admet une solution unique si ψ_x admet un point fixe unique. On utilise le [principe de contraction de Banach](#) : Soit E un espace de Banach, ϕ une application continue de E dans E . On suppose qu'il existe $k \in]0, 1[$, tel que

$$\forall u, v \in E, \|\phi(u) - \phi(v)\| \leq k\|u - v\|,$$

alors l'application ϕ admet un point fixe unique.

Il est commode d'utiliser ici la norme infinie $\|z\|_\infty = \max_i |z_i|$ sur \mathbb{R}^q .

On note $\|A\|_\infty$ la norme matricielle subordonnée.³ Fixons x, t et h .

On a donc pour tous z et \tilde{z} dans \mathbb{R}^q ,

$$\begin{aligned} \|\psi_x(z) - \psi_x(\tilde{z})\|_\infty &= h\|A(G(z) - G(\tilde{z}))\|_\infty \\ &\leq h\|A\|_\infty\|G(z) - G(\tilde{z})\|_\infty \\ &= h\|A\|_\infty \max_{1 \leq i \leq q} |f(t + c_i h, z_i) - f(t + c_i h, \tilde{z}_i)| \\ &\leq h\|A\|_\infty L \max_{1 \leq i \leq q} |z_i - \tilde{z}_i| \\ &= hL\|A\|_\infty\|z - \tilde{z}\|_\infty. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour $h < \frac{1}{L\|A\|_\infty}$, l'application ψ_x est strictement contractante et admet donc un point fixe unique dans \mathbb{R}^q qui est le vecteur des valeurs intermédiaires recherché. Ceci montre que le schéma de Runge-Kutta est bien défini pour ces valeurs de h en prenant $x = x_n$ et $t = t_n$.

Stabilité : Pour démontrer la stabilité de la méthode de Runge-Kutta, il suffit de montrer que Φ vérifie une condition de Lipschitz en x . (pour $h \in [0, h_0]$).

Pour cela, notons $\text{int}(x) \in \mathbb{R}^q$ le vecteur des valeurs intermédiaires précédemment obtenu par point fixe.

on a

$$\Phi(t, x, h) = \sum_{j=1}^q b_j f(t + c_j h, \text{int}(x)_j),$$

3. $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$

d'où pour tout couple de réels (x, \tilde{x}) ,

$$\begin{aligned}
 |\Phi(t, x, h) - \Phi(t, \tilde{x}, h)| &\leq \sum_{j=1}^q |b_j| |f(t + c_j h, \text{int}(x)_j) - f(t + c_j h, \text{int}(\tilde{x})_j)| \\
 &\leq L \sum_{j=1}^q |b_j| |\text{int}(x)_j - \text{int}(\tilde{x})_j| \\
 &\leq L \max_j |\text{int}(x)_j - \text{int}(\tilde{x})_j| \sum_{j=1}^q |b_j| \\
 &= L \|b\|_1 \|\text{int}(x) - \text{int}(\tilde{x})\|_\infty
 \end{aligned}$$

Or, par la propriété de point fixe on a

$$\text{int}(x) = ye + hAG(\text{int}(x)) \text{ et } \text{int}(\tilde{x}) = \tilde{x}e + hAG(\text{int}(\tilde{x})).$$

Par conséquent,

$$\|\text{int}(x) - \text{int}(\tilde{x})\| \leq |x - \tilde{x}| + hL\|A\|_\infty \|\text{int}(x) - \text{int}(\tilde{x})\|,$$

D'où

$$\|\text{int}(x) - \text{int}(\tilde{x})\|_\infty \leq \frac{1}{1 - hL\|A\|_\infty} |x - \tilde{x}|$$

dès que $h < \frac{1}{L\|A\|_\infty}$. On en déduit alors que

$$|\Phi(t, x, h) - \Phi(t, \tilde{x}, h)| \leq \frac{L\|b\|_1}{1 - h_0 L\|A\|_\infty} |x - \tilde{x}|$$

Puisque $h \leq h_0 < \frac{1}{L\|A\|_\infty}$, d'où la stabilité.
Ce qui achève la démonstration. \square

4.4 Consistance des méthode de Runge-Kutta

Théorème 6. Les méthodes de Runge-Kutta sont consistantes.

Démonstration. Une condition nécessaire et suffisante pour que la méthode de Runge-Kutta soit consistante est que $\Phi(t, x, 0) = f(t, x)$, $t \in [t_0, t_0 + T]$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Or, } \Phi(t, x, 0) = \sum_{j=1}^q b_j f(t, x)$$

La méthode est donc consistante si et seulement si $\sum_{j=1}^q b_j = 1$ qui est vrai par hypothèse. \square

4.5 Ordre des méthodes de Runge-Kutta

Théorème 7. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une méthode de Runge-Kutta soit d'ordre 2 s'écrit

$${}^t\text{be} = 1 \quad \text{et} \quad {}^t\text{bCe} = {}^t\text{bAe} = \frac{1}{2}.$$

Démonstration. La méthode est consistante si et seulement si $\sum_{j=1}^q b_j = 1$ (autrement dit elle est d'ordre 1) et d'après (4), La méthode de Runge-Kutta est d'ordre 2 si on a de plus

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t, x; 0) = \frac{1}{2} f^{(1)}(t, x).$$

Par dérivation des relations (4.1) (formule 7) et (formule 8), on obtient

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t, x; h) = \sum_{i=1}^q b_i \left(c_i \frac{\partial f}{\partial t}(t + c_i h, x_i) + \frac{\partial f}{\partial x}(t + c_i h, x_i) \frac{\partial x_i}{\partial h} \right)$$

Or

$$\frac{\partial x_i}{\partial h}(t, x; h) = \sum_{j=1}^q a_{ij} f(t + c_j h, x_j) + h \sum_{j=1}^q a_{ij} \left(c_j \frac{\partial f}{\partial t}(t + c_j h, x_j) + \frac{\partial f}{\partial x}(t + c_j h, x_j) \frac{\partial x_j}{\partial h} \right)$$

d'où

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t, x; 0) = \sum_{i=1}^q b_i \left(c_i \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \left(\sum_{j=1}^q a_{ij} f(t, x) \right) \right).$$

La relation $\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t, x; 0) = \frac{1}{2} f^{(1)}(t, x)$ sera donc vérifiée pour toute fonction f de classe C^1 si et seulement si ${}^t\text{bCe} = \frac{1}{2}$ et ${}^t\text{bAe} = \frac{1}{2}$. \square

Théorème 8. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une méthode de Runge-Kutta soit d'ordre 3 s'écrit

$${}^t\text{be} = 1, {}^t\text{bCe} = \frac{1}{2}, {}^t\text{bC}^2\text{e} = \frac{1}{3}, {}^t\text{bACe} = \frac{1}{6}.$$

Elle sera d'ordre 4 si et seulement si les conditions supplémentaires suivantes sont satisfaites :

$${}^t\text{bC}^3\text{e} = \frac{1}{4}, {}^t\text{bAC}^2\text{e} = \frac{1}{12}, {}^t\text{bA}^2\text{Ce} = \frac{1}{24}, {}^t\text{bCACe} = \frac{1}{8}.$$

Démonstration. Voir la référence (1), pages 184, 185 et 186. \square

Remarque. On peut augmenter l'ordre des méthodes RK, mais par exemple si on veut obtenir l'ordre 9, il faut passer par 12 à 17 étapes et 486 relations algébriques sont à vérifier.

4.6 Exemples des méthodes de Runge-Kutta

Maintenant, on peut présenter les méthodes de Runge-Kutta classiques et connues :

- La θ -méthode est représentée dans le tableau suivant :

0	0	0
1	$1 - \theta$	θ
	$1 - \theta$	θ

Pour $\theta = 0$, c'est la méthode d'Euler explicite, pour $\theta = 1$, la méthode d'Euler implicite et pour $\theta = \frac{1}{2}$, on retrouve la méthode de Crank-Nicolson.

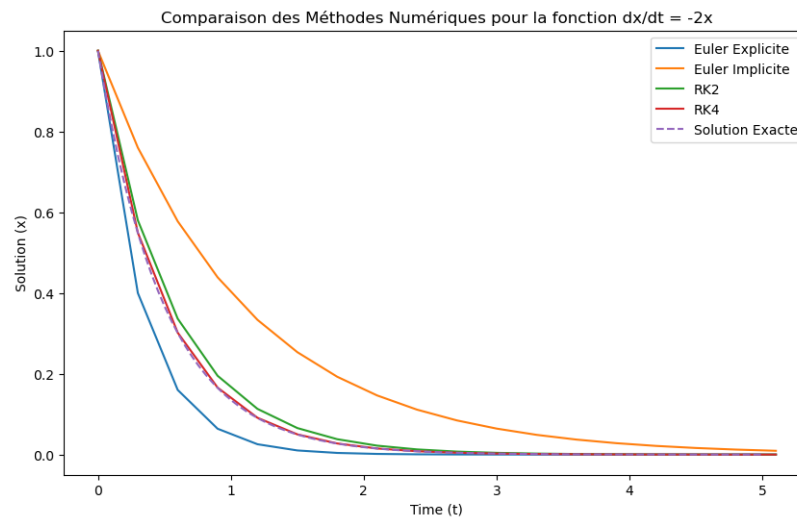
- La méthode de Runge-Kutta classique est représentée par le tableau suivant :

0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
1	0	0	1	0
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Elle est connue par méthode de Runge kutta 4 (d'ordre 4)

Avec :

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, x_n), \quad k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_2\right), \quad k_4 = f(t_n + h, x_n + hk_3), \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{aligned}$$



- En analysant le graphe ci-dessus des méthodes numériques pour résoudre l'équation différentielle $x' = -2x$, nous constatons que les méthodes de Runge-Kutta d'ordre 2 (RK2) et d'ordre 4 (RK4) démontrent une meilleure précision et stabilité par rapport aux méthodes d'Euler explicite et implicite.

- Il est également important de noter que le choix du pas de temps joue un rôle crucial dans la précision des résultats, et des pas de temps plus petits peuvent conduire à des solutions plus précises. (Dans le graphe, on a $h = 0.3$) ⁴

4. Pour les codes voir la section Annexes

5 Conclusion

En résumé, la méthode de Runge-Kutta améliore la méthode d'Euler en introduisant une meilleure estimation de la pente moyenne entre les points, ce qui conduit à une convergence plus rapide vers la solution exacte de l'équation différentielle. Les différentes versions de la méthode varient selon le nombre de points intermédiaires choisis et leur répartition.

6 Annexes

Voici le code traité pour la figure : Comparaison des méthodes numériques pour la fonction $\frac{dx}{dt} = -2x$ en Python.

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 # D finition de l' quation  diff rentielle
5 def ode_function(t, x):
6     return -2 * x
7
8 # D finition de la solution exacte
9 def exact_solution(t, x0):
10     return x0 * np.exp(-2 * t)
11
12 # Impl mentation de la m thode d'Euler explicite
13 def explicit_euler_method(f, x0, t0, tn, h):
14     t_values = np.arange(t0, tn + h, h)
15     x_values = [x0]
16
17     for t in t_values[:-1]:
18         x0 = x0 + h * f(t, x0)
19         x_values.append(x0)
20
21     return t_values, x_values
22
23 # Impl mentation de la m thode d'Euler implicite
24 def implicit_euler_method(f, x0, t0, tn, h):
25     t_values = np.arange(t0, tn + h, h)
26     x_values = [x0]
27
28     for t in t_values[:-1]:
29         # M thode d'Euler implicite : utilisation d'une it ration simple
30         x_guess = x0 + h * f(t, x0)
31         x0 = x0 + h * f(t + h, x_guess)
32         x_values.append(x0)
33
34     return t_values, x_values
35
36 # Impl mentation de la m thode de Runge-Kutta d'ordre 2 (RK2)
37 def rk2_method(f, x0, t0, tn, h):
38     t_values = np.arange(t0, tn + h, h)
39     x_values = [x0]
40
41     for t in t_values[:-1]:
42         k1 = h * f(t, x0)
43         k2 = h * f(t + h/2, x0 + k1/2)
44
45         x0 = x0 + k2
46         x_values.append(x0)
47
48     return t_values, x_values
49
50 # Impl mentation de la m thode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4)
51 def rk4_method(f, x0, t0, tn, h):
52     t_values = np.arange(t0, tn + h, h)
53     x_values = [x0]

```

```

54
55     for t in t_values[1:]:
56         k1 = h * f(t, x0)
57         k2 = h * f(t + h/2, x0 + k1/2)
58         k3 = h * f(t + h/2, x0 + k2/2)
59         k4 = h * f(t + h, x0 + k3)
60
61         x0 = x0 + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6
62         x_values.append(x0)
63
64     return t_values, x_values
65
66 # Conditions initiales
67 t0, tn = 0, 5
68 x0 = 1.0
69
70 # Pas commun pour toutes les methodes
71 h = 0.3
72
73 # Calcul des solutions numériques
74 euler_explicit_t, euler_explicit_x = explicit_euler_method(ode_function, x0
75     ↪ , t0, tn, h)
76 euler_implicit_t, euler_implicit_x = implicit_euler_method(ode_function, x0
77     ↪ , t0, tn, h)
78 rk2_t, rk2_x = rk2_method(ode_function, x0, t0, tn, h)
79 rk4_t, rk4_x = rk4_method(ode_function, x0, t0, tn, h)
80
81 # Calcul de la solution exacte
82 exact_t = np.linspace(t0, tn, 100)
83 exact_x = exact_solution(exact_t, x0)
84
85 # Affichage des résultats
86 plt.figure(figsize=(10, 6))
87
88 plt.plot(euler_explicit_t, euler_explicit_x, label='Euler_Explicite')
89 plt.plot(euler_implicit_t, euler_implicit_x, label='Euler_Implicite')
90 plt.plot(rk2_t, rk2_x, label='RK2')
91 plt.plot(rk4_t, rk4_x, label='RK4')
92 plt.plot(exact_t, exact_x, label='Solution_Exacte', linestyle='--')
93
94 plt.title('Comparaison des Methodes Numériques pour la fonction dx/dt = -2x')
95 plt.xlabel('Time (t)')
96 plt.ylabel('Solution (x)')
97 plt.legend()
98 plt.show()

```

Références

- [1] https://www.pearson.fr/resources/titles/27440100319490/extras/7352_chap03.pdf
- [2] GRIFFITH, David F. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations Initial Value Problem. 2010.