Calculs algébriques

Sommes et produits finis de complexes

I - Sommes :

I. I. Notations :

Soit E un sous-ensemble fini non vide de $\mathbb{C}$.

— On note $\sum\limits_{a\in E} a$ la somme de tous les éléments de E.

— Si $E=\{a_i / i\in I\}$ avec I un ensemble non vide, $\sum\limits_{a\in E} a$ se note aussi $\sum\limits_{i\in I} a_i$.

— Si $E=\{a_m,a_{m+1},\dots,a_n\}$ avec $m,n\in\mathbb{N}$ tels que $m\leq n$, $\sum\limits_{a\in E} a$ se note aussi $\sum\limits_{i=m}^{n} a_i$ ou $\sum\limits_{m\leq i\leq n} a_i$ ou $\sum\limits_{i\in\{m,\dots,n\}} a_i$ et on a

$$\sum_{a\in E} a=\sum_{i=m}^{n} a_i=\sum_{m\leq i\leq n} a_i=\sum_{i\in\{m,\dots,n\}} a_i=a_m+a_{m+1}+\cdots+a_n.$$

Exemples I.I

— Si $E=\{5,7,19,23\}$ alors $\sum\limits_{x\in E} x=5+7+19+23=54$.

— $\sum\limits_{p=0}^{5} 2^p=2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5=63$.

— $\sum\limits_{0\leq k\leq 6}(2k+1)=(2\times 0+1)+(2\times 1+1)+(2\times 2+1)+(2\times 3+1)+(2\times 4+1)+(2\times 5+1)+(2\times 6+1)=$ $1+3+5+7+9+11+13=49$.

Remarque I.I

On convient que $\sum\limits_{a\in\emptyset} a=0$.

Remarque I.2

La variable de sommation est muette ainsi $\sum\limits_{a\in E} a=\sum\limits_{x\in E} x$, $\sum\limits_{i\in I} a_i=\sum\limits_{j\in I} a_j$ et $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k=\sum\limits_{p=m}^{n} a_p$.

I. 2. Changements de variables classiques

— Translation : $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k=\sum\limits_{k=m-1}^{n-1} a_{k+1}=\sum\limits_{k=m+1}^{n+1} a_{k-1}$

— Symétrie : $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k=\sum\limits_{k=0}^{n} a_{n-k}$.

— Terme constant : $\sum\limits_{k=m}^{n} a=(n-m+1)a$. En particulier, $\sum\limits_{k=0}^{n} a=(n+1)a$.

— Plus généralemnt :
si $f:I\longrightarrow J=f(I)$ est une bijection alors $\sum\limits_{j\in J} a_j=\sum\limits_{i\in I} a_{f(i)}$

— $\sum\limits_{i\in I}(a_i+b_i)=\sum\limits_{i\in I} a_i+\sum\limits_{i\in I} b_i$, $\sum\limits_{i=m}^{n}(a_i+b_i)=\sum\limits_{i=m}^{n} a_i+\sum\limits_{i=m}^{n} b_i$.

Propriétés I.1

- $\sum_{a\in E}(\lambda a)=\lambda\sum_{a\in E}a \quad \sum_{i\in I}(\lambda a_i)=\lambda\sum_{i\in I}a_i \quad , \quad \sum_{i=m}^{n}(\lambda a_i)=\lambda\sum_{i=m}^{n}a_i.$
- $\sum_{a\in E\cup F}a_i=\sum_{a\in E}a+\sum_{a\in F}a-\sum_{a\in E\cap F}a.$
  En particulier, si $E\cap F=\emptyset$ alors $\sum_{a\in E\cup F}a=\sum_{a\in E}a+\sum_{a\in F}a.$
- De même, $\sum_{i\in I\cup J}a_i=\sum_{i\in I}a_i+\sum_{i\in J}a_i-\sum_{i\in I\cap J}a_i$ et si $I\cap J=\emptyset$ alors $\sum_{i\in I\cup J}a_i=\sum_{i\in I}a_i+\sum_{i\in J}a_i.$

Un programme Python qui permet de calculer la somme d'une famille de nombres complexes :

```
In [1]: E = 1, 6, 12, 38, 78, 109
In [2]: somme(E) Out[2]: 244
```

Remarque I.3

Python possède une commande *sum* qui permet de calculer la somme d'une famille de nombres complexes, lorsqu'il y a des erreurs d'arrondi, on utilise plutôt la commande *fsum* du **module** *math* pour avoir un résultat plus précis :

- Calcul de la somme des éléments de l'ensemble $E=\{1,6,12,38,78,109\}$:
  ```
  In [1]: sum(1, 6, 12, 38, 78, 109) Out[1]: 244
  ```
- Calcul de la somme $\sum_{k=0}^{10}k$:
  ```
  In [2]: sum(i for i in range(11)) Out[2]: 55
  ```
- Calcul de la somme $\sum_{k=0}^{20}\frac{1}{k}$:
  In [3] : from math import fsum
  ```
  In [4]: fsum(1/i for i in range(1,21)) Out[5]: 3.597739657143682
  ```
- Erreurs d'arrondi :
  ```
  In [6]: sum([0.1,0.1,0.1,0.1,0.1,0.1,0.1,0.1,0.1,0.1]) Out[6]: 0.9999999999999999
  In [7]: fsum([0.1,0.1,0.1,0.1,0.1,0.1,0.1,0.1,0.1,0.1]) Out[7]: 1.0
  ```

I. 3. Sommes télescopiques

Proposition I.1

Pour m,n entiers tel que $m\leq n$ si $a_m,a_{m+1},\dots,a_n$ est une famille de nombres complexes alors

$$\sum_{k=m}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_{n+1}-a_m$$

.

Preuve: En effet :

$$\sum_{k=m}^{n}(a_{k+1}-a_k)=\sum_{k=m}^{n}a_{k+1}-\sum_{k=m}^{n}a_k=\sum_{k=m+1}^{n+1}a_k-\sum_{k=m}^{n}a_k=a_{n+1}-a_m+\sum_{k=m}^{n}a_k-\sum_{k=m}^{n}a_k=a_{n+1}-a_m$$

Remarque I.4

$$\sum_{k=m}^{n}(a_k-a_{k-1})=a_n-a_{m-1}$$

Exemples I.2

Pour $n\in\mathbb{N}^*$.

- $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}.$
- $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sum_{k=0}^{n}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)=\sqrt{n+1}-\sqrt{0}=\sqrt{n+1}.$
- $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)^2-k^2\right)=(n+1)^2-0^2=(n+1)^2.$

Proposition I.2 ***Factorisation*** $a^n - b^n$ **:**

$$\forall a,b\in\mathbb{C},\forall n\in\mathbb{N}^*, a^n-b^n=(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^kb^{n-1-k}=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$$

Preuve: Pour $\forall k\in\{0,\dots,n-1\}$, on pose $c_k=a^kb^{n-k}$ donc :

$$\begin{aligned}(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^kb^{n-1-k} &= \sum_{k=0}^{n-1}(a-b)a^kb^{n-1-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(a^{k+1}b^{n-1-k}-a^kb^{n-k}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(a^{k+1}b^{n-(k+1)}-a^kb^{n-k}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(c_{k+1}-c_k)\\ &= c_n-c_0 \qquad \text{telescopie}\\ &= a^n-b^n\end{aligned}$$

Exemples I.3

Pour $a,b\in\mathbb{C}$.
- $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.
- $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.
- $a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$.

Remarque I.5

Si $a,b\in\mathbb{C}$ et $n\in\mathbb{N}$ **impair** alors :

$$a^n+b^n=a^n-(-b)^n=(a+b)\sum_{k=0}^{n-1}a^k(-b)^{n-1-k}=(a+b)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^ka^kb^{n-1-k}=(a+b)\left(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$$

Exemples I.4

Soient $a,b\in\mathbb{C}$.
- $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.
- $a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$.

Proposition I.3 ***Somme arithmetique :*** *Si (u_n) est une suite arithmetique alors*

$$\forall m,n\in\mathbb{N} \text{ tels que } m\le n, \sum_{k=m}^{n}u_k=\frac{(n-m+1)(u_m+u_n)}{2}$$

Proposition I.4 ***Somme géométrique :***
- *Si (v_n) est une suite géometrique de raison q alors*

$$\forall m,n\in\mathbb{N} \text{ tels que } m\le n, \sum_{k=m}^{n}v_k=\begin{cases}\dfrac{qv_n-v_m}{q-1}, & si\ q\neq 1\\ (n-m+1)v_m & si\ q=1\end{cases}$$

- *En particulier*

$$\forall q\in\mathbb{C},\forall m,n\in\mathbb{N} \text{ tels que } m\le n, \sum_{k=m}^{n}q^k=\begin{cases}\dfrac{q^{n+1}-q^m}{q-1}, & si\ q\neq 1\\ n-m+1 & si\ q=1\end{cases}$$

Exemples I.5

— $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1}-1.$

— $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1} = 1-\frac{1}{2^n}.$

I. 4. Sommes utiles

$\forall n \in \mathbb{N}$:

1. $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Preuve: Soit $n \in \mathbb{N}$

1) — Méthode 01 : On a : $\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=0}^{n}(n-k) = \sum_{k=0}^{n} n - \sum_{k=0}^{n} k = n(n+1) - \sum_{k=0}^{n} k$

donc : $2\sum_{k=0}^{n} k = n(n+1)$

d'où : $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

— Méthode 02 : Procécéder par récurrence sur n.

— Méthode 03 : On remarque que $\forall k \in \{0,\dots,n\}$: $\frac{k(k+1)}{2} - \frac{(k-1)k}{2} = k$ donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k(k+1)}{2}-\frac{(k-1)k}{2}\right)\\ &= \frac{n(n+1)}{2}-\frac{(0-1)0}{2} \qquad \text{somme télescopique}\\ &= \frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

2) — Méthode 01 : Précéder par récurrence sur n.

— Méthode 02 : On a $\forall k \in \{0,\dots,n\}$: $\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} - \frac{(k-1)k(2k-1)}{6} = k^2$

en effet $\frac{k}{6}\left((k+1)(2k+1)-(k-1)(2k-1)\right) = \frac{k}{6}(2k^2+3k+1-2k^2+3k-1) = k^2$

donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2 &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}-\frac{(k-1)k(2k-1)}{6}\right)\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{(0-1)0(2\times 0-1)}{6} \qquad \text{somme télescopique}\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$

3) — Méthode 01 : Précéder par récurrence sur n.

— Méthode 02 : On a $\forall k \in \{0,\dots,n\}$: $\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(k-1)k}{2}\right)^2 = k^3$

en effet $\frac{k^2}{4}\left((k+1)^2-(k-1)^2\right) = \frac{k^2}{4}(k^2+2k+1-k^2+2k-1) = k^3$

donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^3 &= \sum_{k=0}^{n}\left[\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{(k-1)k}{2}\right)^2\right]\\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{(0-1)0}{2}\right)^2 \qquad \text{car c'est une somme télescopique}\\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\end{aligned}$$

II - Sommes doubles :

Proposition 2.1

I et J deux ensembles finis.
Si $(a_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ est une famille finie doublement indexée dans $I\times J$ de nombres complexes alors :

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}a_{ij}=\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}a_{ij}$$

On note alors

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}a_{ij}=\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}a_{ij}=\sum_{(i,j)\in I\times J}a_{ij}$$

.

Preuve: On va procéder par récurrence sur le nombre n d'éléments de I.
Si $n=0$ alors $I=\emptyset$ donc $\displaystyle\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}a_{ij}=\sum_{i\in\emptyset}\sum_{j\in J}a_{ij}=0=\sum_{j\in J}0=\sum_{j\in J}\sum_{i\in\emptyset}a_{ij}$ d'où la relation est vraie pour $n=0$.
Supposons que $n\geq 1$ et que la relation est vraie pour tout ensemble à $n-1$ éléments. On a $n\geq 1$ donc $I\neq\emptyset$ d'où $\exists p\in I$. On pose $K=I\setminus\{p\}$ donc $I=K\cup\{p\}$ et K possède $n-1$ éléments.
On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}a_{ij} &= \sum_{i\in K\cup\{p\}}\sum_{j\in J}a_{ij}\\
&= \sum_{i\in K}\sum_{j\in J}a_{ij}+\sum_{i\in\{p\}}\sum_{j\in J}a_{ij}\\
&\overset{HP}{=} \sum_{j\in J}\sum_{i\in K}a_{ij}+\sum_{j\in J}a_{pj}\\
&= \sum_{j\in J}\sum_{i\in K}a_{ij}+\sum_{j\in J}\sum_{i\in\{p\}}a_{pj}\\
&= \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in K}a_{ij}+\sum_{i\in\{p\}}a_{pj}\right)\\
&= \sum_{j\in J}\sum_{i\in K\cup\{p\}}a_{ij}\\
&= \sum_{j\in J}\sum_{i\in I}a_{ij}
\end{aligned}$$

On déduit que la relation est vraie pour n donc la relation est vraie pour tout ensemble fini I.

Corollaire 2.1 ***Somme rectangulaire :***

- *Si $(a_{ij})_{m\leq i\leq n,p\leq j\leq q}$ est une famille de nombres complexes alors* $\displaystyle\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=p}^{q}a_{ij}=\sum_{j=p}^{q}\sum_{i=m}^{n}a_{ij}$.
- *Si $(a_i)_{m\leq i\leq n}$ et $(b_j)_{p\leq j\leq q}$ sont deux familles de nombres complexes alors* $\displaystyle\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=p}^{q}a_ib_j=\left(\sum_{i=m}^{n}a_i\right)\left(\sum_{j=p}^{q}b_j\right)$.

Notations :

- Si $(a_{ij})_{m\leq i\leq n,p\leq j\leq q}$ est une famille de nombres complexes alors $\displaystyle\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=p}^{q}a_{ij}$ se note $\displaystyle\sum_{\substack{m\leq i\leq n\\ p\leq j\leq q}}a_{ij}$.
- Si $(a_{ij})_{m\leq i,j\leq n}$ est une famille de nombres complexes. $\displaystyle\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=m}^{n}a_{ij}$ se note $\displaystyle\sum_{m\leq i,j\leq n}a_{ij}$.

Exemples 2.1

Pour $m, n \in \mathbb{N}$.

— On a :

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} ij = \left(\sum_{i=0}^{m} i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} j\right) = \frac{m(m+1)}{2}\frac{m(m+1)}{2} = \frac{mn(m+1)(n+1)}{4}$$

— On a :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}(i+j) &= \sum_{i=0}^{m}\left(\sum_{j=0}^{n} i + \sum_{j=0}^{n} j\right)\\ &= \sum_{i=0}^{m}\left((n+1)i + \frac{n(n+1)}{2}\right)\\ &= \sum_{i=0}^{m}(n+1)i + \sum_{i=0}^{m}\frac{n(n+1)}{2}\\ &= (n+1)\frac{m(m+1)}{2} + (m+1)\frac{n(n+1)}{2}\\ &= \frac{(n+1)(m+1)(m+n)}{2}\end{aligned}$$

Proposition 2.2 *Somme triangulaire :*

Si $(a_{ij})_{0\le i\le j\le n}$ est une famille de nombres complexes alors $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} a_{ij} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij}$.

Preuve: On pose :

$$\forall i, j \in \{0, \dots, n\}, b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{si } i \le j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}$$

donc $\forall j \in \{0, \dots, n\}, \displaystyle\sum_{i=0}^{n} b_{ij} = \sum_{i=0}^{j} a_{ij}$ et $\forall j \in \{0, \dots, n\}, \displaystyle\sum_{j=0}^{n} b_{ij} = \sum_{j=i}^{n} a_{ij}$ d'où :

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} a_{ij} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} b_{ij} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} b_{ij} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij}$$

Notation : Si $(a_{ij})_{0\le i\le j\le n}$ est une famille de nombres complexes alors $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} a_{ij}$ se note $\displaystyle\sum_{0\le i\le j\le n} a_{ij}$.

Exemple 2.1

On a pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{n}\frac{j}{j} = \sum_{j=1}^{n} 1 = n$$

III - Produits :

3. 1. Définitions et notations

Soit E un sous-ensemble fini non vide de $\mathbb{C}$.

— On note $\displaystyle\prod_{a\in E} a$ la produit de tous les éléments de E.

— Si $E=\{a_i/i\in I\}$ avec I un ensemble non vide, $\displaystyle\prod_{a\in E} a$ se note aussi $\displaystyle\prod_{i\in I} a_i$.

— Si $E=\{a_m,a_{m+1},\dots,a_n\}$ avec $m,n\in\mathbb{N}$ tels que $m\leq n$, $\displaystyle\prod_{a\in E} a$ se note aussi $\displaystyle\prod_{i=m}^{n} a_i$ ou $\displaystyle\prod_{m\leq i\leq n} a_i$ ou $\displaystyle\prod_{i\in\{m,\dots,n\}} a_i$

— On convient que $\displaystyle\prod_{a\in\emptyset} a=1$.

Exemples 3.1

— Si $E=\{5,7,19,23\}$ alors $\displaystyle\prod_{x\in E} x=5\times 7\times 19\times 23=15295$.

— $\displaystyle\prod_{p=0}^{5} 2^p=2^0\times 2^1\times 2^2\times 2^3\times 2^4\times 2^5=2^{0+1+2+3+4+5}=2^{15}=32768$.

— $\displaystyle\prod_{p=0}^{7}(2p+1)=(2\times0+1)\times(2\times1+1)\times(2\times2+1)\times(2\times3+1)\times(2\times4+1)\times(2\times5+1)\times(2\times6+1)\times(2\times7+1)=2027025$.

Remarques 3.1

La variable de multiplication est muette c'est à direon peut remplacer le symbol de la variable de multiplication par n'importe quelle autre sans changer la valeur du produit.Ainsi

$$\prod_{a\in E} a=\prod_{x\in E} x \quad , \quad \prod_{i\in I} a_i=\prod_{j\in I} a_j \quad \text{et} \quad \prod_{k=m}^{n} a_k=\prod_{p=m}^{n} a_p.$$

3. 2. Changements d'indices classiques

:

— Translation $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} a_k=\prod_{k=m-1}^{n-1} a_{k+1}=\prod_{k=m+1}^{n+1} a_{k-1}$

— symétrie $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} a_k=\prod_{k=0}^{n} a_{n-k}$

— Plus généralemnt

si $f:I\longrightarrow J=f(I)$ est une bijection alors $\displaystyle\prod_{j\in J} a_j=\prod_{i\in I} a_{f(i)}$

Propriétés 3.1

— $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} a=a^{n-m+1}$. En particulier, $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} a=a^{n+1}$.

— $\displaystyle\prod_{i\in I}(a_ib_i)=\left(\prod_{i\in I} a_i\right)\left(\prod_{i\in I} b_i\right)$ et $\displaystyle\prod_{i=m}^{n}(a_ib_i)=\left(\prod_{i=m}^{n} a_i\right)\left(\prod_{i=m}^{n} b_i\right)$.

— $\displaystyle\prod_{a\in E}(\lambda a_i)=\lambda^{card(E)}\prod_{a\in E} a$ avec $card(E)$ le nombre des éléments de E ainsi

$\displaystyle\prod_{i\in I}(\lambda a_i)=\lambda^{card(I)}\prod_{i\in I} a_i$

$\displaystyle\prod_{i=m}^{n}(\lambda a_i)=\lambda^{n-m+1}\prod_{i\in I} a_i$.

— Si $E\cup F\subset\mathbb{C}^*$, $\displaystyle\prod_{a\in E\cup F} a=\frac{\left(\prod_{a\in E} a\right)\left(\prod_{a\in F} a\right)}{\prod_{a\in E\cap F} a}$. En particulier, si $E\cap F=\emptyset$ alors $\displaystyle\prod_{a\in E\cup F} a_i=\left(\prod_{a\in E} a\right)\left(\prod_{a\in F} a\right)$.

De même les a_i sont tous non nuls $\displaystyle\prod_{t\in I\cup J} a_i=\frac{\left(\prod_{t\in I} a_t\right)\left(\prod_{t\in J} a_t\right)}{\prod_{i\in I\cap J} a_i}$ et si $I\cap J=\emptyset$ alors $\displaystyle\prod_{i\in I\cup J} a_i=\left(\prod_{t\in I} a_t\right)\left(\prod_{t\in J} a_t\right)$.

Un programme Python qui permet de calculer le produit d'une famille de nombres complexes :

```
def produit(E): P = 1 for a in E: P *=a P=P*a return(P)
```

— Produit des éléments de l'ensemble $E = 1, 6, 12, 38, 78, 109$:
```
In [1]: E = 1, 6, 12, 38, 78, 109
In [2]: produit(E) Out[2]: 23261472
```

— Produit du produit $\prod_{k=0}^{6} 2^k$:
```
In [3]: produit(2**k for k in range(7)) Out[3]: 2097152
```

— Produit du produit $\prod_{k=0}^{7}(2k+1)$:
```
In [4]: produit(2*k + 1 for k in range(8)) Out[4]: 2027025
```

Remarque 3.1

Python possède une commande *prod* du module *numpy* qui permet de calculer le produit d'une famille de nombres complexes :
In [1] : from *numpy* import *prod*
Calculons le produit $2 \times 6 \times 7 \times 9$:

```
In [2]: prod([2, 6, 7, 9]) Out[2]: 756
```

3. 3. Produit télescopique

Proposition 3.1

Si $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ est une famille de nombres complexes non nuls alors $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_m}$.

Preuve: On a :

$$\prod_{k=m}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\prod_{k=m}^{n} a_{k+1}}{\prod_{k=m}^{n} a_k} = \frac{\prod_{k=m+1}^{n+1} a_k}{\prod_{k=m}^{n} a_k} = \frac{a_{n+1} \prod_{k=m+1}^{n} a_k}{a_m \prod_{k=m+1}^{n} a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_m}$$

Remarque 3.2

Si $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ est une famille de nombres complexes non nuls alors $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_n}{a_{m-1}}$

Exemples 3.2

— Si $n \in \mathbb{N}^*$ alors :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{n+1}{1} = n+1$$

— Si $n \geq 2$ alors :

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} \prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{1}{n} \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}$$

IV - Factorielle, coefficients binomiaux :

4. 1. Défintion et notation

$$\forall n \in \mathbb{N}, n! = \begin{cases} \prod_{k=1}^{n} k & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

$n!$ se lit "n factorielle" ou "factorielle de n"

Exemples 4.1

— $0! = 1! = 1$
— $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$.
— $6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$.

Remarques 4.1

- $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)! = (n+1)n!$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)! = (n+2)(n+1)n!$.
- Généralement, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}^*, (n+k)! = (n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)n!$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, n! = n(n-1)!$.
- $\forall n \geq 2, n! = n(n-1)(n-2)!$.
- Généralement, $\forall n, k \in \mathbb{N}$ avec $n > k$, on a $n! = n(n-1)\cdots(k+1)k!$.

Factorielle sous Python :

- Programme itératif :

```
def factorielle_iterative(n):
.....P = 1
.....for i in range(1, n + 1):
..........P *= i
.....return(P)
In [1]: factorielleIterative(10)
Out[1]: 3628800
```

- Programme récursif :

```
def factorielleRecursive(n):
......if n == 0:
............ return(1)
......return(n * factorielle_recursive(n - 1))
In [1]: factorielleRecursive(10)
Out[1]: 3628800
```

Remarque 4.1

Python possède une commande *factorial* du module *math* qui permet de calculer la factorielle d'un entier naturel :
In [1] : from math import factorial

- Calcul de 7! :

```
In [2]: factorial(7)*
Out[2]: 5040
```

4. 2. Coefficients binomiaux, formule du binôme :

Définition 4.1

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \{0, \dots, n\}, \binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

$\binom{n}{p}$ se lit combinaison "p parmi n"

Exemples 4.2

- $\binom{8}{4} = \dfrac{8!}{4!(8-4)!} = \dfrac{8!}{4!4!} = 70$.
- $\binom{10}{3} = \dfrac{10!}{3!(10-3)!} = \dfrac{10!}{3!7!} = 120$.

Remarque 4.2

Python possède une commande *binomial* du module *sympy* qui permet de calculer le coefficient binomial de deux entiers naturels :
In [1] : from sympy import binomial

- Calcul de $\binom{38}{14}$:

```
In [1]: binomial(23, 14)
Out[1]: 817190
```

- Calcul de $\binom{26}{15}$:

```
Out[2]: 7726160
```

Propriétés 4.1

- $\forall n \in \mathbb{N}, \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \{0, \dots, n\}, \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
- $\forall n, p \in \mathbb{N}^*, \binom{n}{p} = \dfrac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$.

Remarque 4.3 *Soit* $n, p \in \mathbb{N}$*. Si* $n < p$*, on convient que* $\binom{n}{p} = 0$*.*

Un programme Python qui calcule le coefficient binomial de deux entiers à l'aide de la formule $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$:

```
def binomial(n, p):
......if p > n:
............return(0)
......if 2*p > n:
............n, p = n, n - p
......if p == 0:
............ return(1)
......return(binomial(n - 1, p - 1) * n // p)
```

— Calcul de $\binom{23}{14}$:

```
Out[1]: 817190
```

— Calcul de $\binom{26}{15}$:

```
Out[2]: 7726160
```

Proposition 4.1 *Triangle de Pascal :*
$\forall n, p \in \mathbb{N}, \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$

Preuve: Soit $n, p \in \mathbb{N}$.

— Si $n < p$ alors $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = 0 + 0 = 0 = \binom{n+1}{p+1}$.

— Si $n = p$ alors $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n}{n} + \binom{n}{n+1} = 1 + 0 = 1 = \binom{n+1}{n+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

— Si $n > p$ alors :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} &&= \frac{n!}{p!(n-p-1)!}\left(\frac{1}{n-p} + \frac{1}{p+1}\right) \\
&= \frac{n!}{p!(n-p-1)!}\left(\frac{p+1+n-p}{(n-p)(p+1)}\right) &&= \frac{n!(n+1)}{p!(p+1)(n-p-1)!(n-p)} \\
&= \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} &&= \frac{(n+1)!}{(p+1)!((n+1)-(p+1))!} \\
&= \binom{n+1}{p+1}
\end{aligned}$$

Un programme Python qui calcule le coefficient binomial de deux entiers à l'aide de la formule du triangle du Pascal :

```
def binomial(n, p):
.... if p > n:
........ return(0)
....if 2*p > n:
........p = n - p
....if p == 0:
........return(1)
....return(binomial(n - 1, p) + binomial(n - 1, p - 1))
```

— Calcul de $\binom{23}{14}$:

```
In [1]: binomiale(23, 14)
Out[1]: 817190
```

— Calcul de $\binom{26}{15}$:

```
In [2]: binomiale(26, 15)
Out[2]: 7726160
```

Proposition 4.2 *Formule du binôme :*
On convient que $\forall z \in \mathbb{C}, z^0 = 1$

$\forall a, b \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Preuve: Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On va procéder par récurrence sur n.

On a $(a+b)^n = (a+b)^0 = 1 = a^0 b^{0-0} = \sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} a^k b^{0-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ donc la relation est vraie pour $n = 0$.

Supposons que la relation est vraie pour n donc :

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&\overset{HR}{=} (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a+b)a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(a^{k+1}b^{n-k} + a^k b^{n-k+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} \\
&= \binom{n}{(n+1)-1}a^{n+1}b^{n+1-(n+1)} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0}a^0 b^{n+1-0} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right)a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
&\overset{T.Pascal}{=} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \qquad \text{car } \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k} \\
&= (a+b)^{n+1}
\end{aligned}
$$

d'où la relation est vraie pour $n+1$. On déduit, d'après *le principe de récurrence*, que la relation est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemples 4.3

$\forall a, b \in \mathbb{C}$:

— $(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^0 b^{2-0} + \binom{2}{1}a^1 b^{2-1} + \binom{2}{2}a^2 b^{2-2} = b^2 + 2ab + a^2$.

— $(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^0 b^{3-0} + \binom{3}{1}a^1 b^{3-1} + \binom{3}{2}a^2 b^{3-2} + \binom{3}{3}a^3 b^{3-3} = b^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + a^3$.

— $(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^0 b^{4-0} + \binom{4}{1}a^1 b^{4-1} + \binom{4}{2}a^2 b^{4-2} + \binom{4}{3}a^3 b^{4-3} + \binom{4}{4}a^4 b^{4-4} = b^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + a^4$.

— $(a+b)^5 = \binom{5}{0}a^0 b^{5-0} + \binom{5}{1}a^1 b^{5-1} + \binom{5}{2}a^2 b^{5-2} + \binom{5}{3}a^3 b^{5-3} + \binom{5}{4}a^4 b^{5-4} + \binom{5}{5}a^5 b^{5-5} = b^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + a^5$.

Corollaire 4.1

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n \qquad , \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{2k \leq n}\binom{n}{2k} = \sum_{2k+1 \leq n}\binom{n}{2k+1}$$

Preuve: Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après *la formule du binôme*, $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \times 1^k \times 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$.

$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \times (-1)^k \times 1^{n-k} = \sum_{2k \leq n}\binom{n}{2k} - \sum_{2k+1 \leq n}\binom{n}{2k+1}$.