

Reguła de L' Hospitala. Badanie funkcji

Literatura

- R. Grzymkowski, *Matematyka zadania i odpowiedzi*, Gliwice 2002
- W. Kryszicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach cz.I*, wydanie dowolne
- A. Leksińska, W. Leksiński, W. Żakowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy z zastosowaniami*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1974.
- M. Geweryt, Z. Skoczylas, *Analiza Matematyczna 1, Przykłady i zadania*. Wrocław 2002

1. Wykorzystując regułę de L'Hospitala obliczyć granice

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x)}{2x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln \cos x}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin x}{\ln \sin 2x}$ d) $\lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\pi - x} \right)$ e) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} - \ln x)$

f) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$ g) $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \ln \operatorname{ctg} \pi x$ h) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$ i) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$ j) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\pi - 2 \operatorname{arctg} x)$

2. Wyznaczyć asymptoty funkcji

a) $y = \frac{x^2}{x+3}$ b) $y = \frac{x^3}{2x^2 - 4x - 6}$ c) $y = xe^{\frac{2}{x}}$ d) $y = \frac{e^x}{e^x - 1}$ e) $y = x \ln(1 - x^2)$

f) $y = (x-1) \ln x$ g) $y = \frac{\ln x}{x}$ h) $y = x - 2 \operatorname{arctg} x$ i) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ j) $y = \frac{\sin x}{x}$

3. Wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstremum funkcji

a) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$ b) $y = e^{\frac{1}{3}x^3 - x^2}$ c) $f(t) = \ln \frac{e^t}{t+1}$ d) $f(x) = x^3 e^x$ e) $y = xe^{\frac{2}{x}}$

f) $f(x) = x\sqrt{1-x}$ g) $f(x) = \arcsin x + 2\sqrt{1-x^2}$ h) $y = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$

4. Korzystając z II warunku wystarczającego istnienia ekstremum znaleźć wszystkie ekstrema funkcji

a) $y = x^3 - 3x^2 + 2$ b) $y = (x-4)e^x$ c) $y = x(x-4)^3$

5. Wyznaczyć przedziały wypukłości, wklęsłości i punkty przegięcia wykresu funkcji

a) $f(x) = \frac{1}{x} + 4x^2$ b) $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

d) $f(u) = e^{\operatorname{arctg} u}$ e) $y = (x-1) \ln x$ f) $y = \frac{x}{\ln x}$

6. Wyznaczyć przedział, na którym funkcja

a) $f(x) = xe^{-x}$ jest jednocześnie malejąca i wypukła

b) $f(x) = x + \operatorname{arctg} x$ jest jednocześnie rosnąca i wklęsła

c) $f(x) = 2x^2 - \ln x$ jest jednocześnie rosnąca i wypukła

7. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

a) $y = \frac{x^2 - 5x + 10}{x-2}$ b) $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$ c) $y = x + \frac{1}{x}$ w przedziale $(0, 2)$

d) $y = \ln x + \frac{1}{\ln x}$ w przedziale $\langle e^{-2}, e^{-1/2} \rangle \cup \langle e^{1/2}, e^2 \rangle$

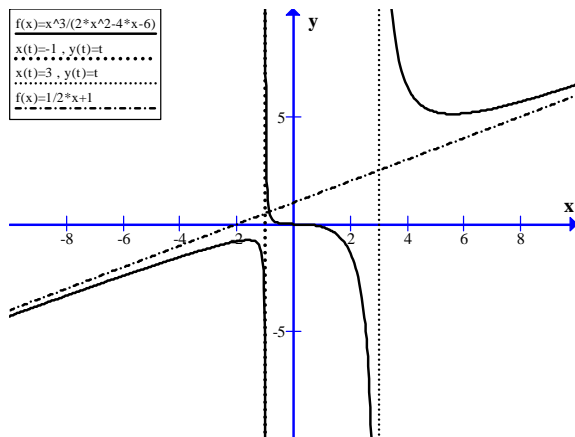
Dodatek (asymptoty funkcji –zadanie 2)

$$f(x) = x^3 / (2 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 6)$$

$$x(t) = -1, y(t) = t$$

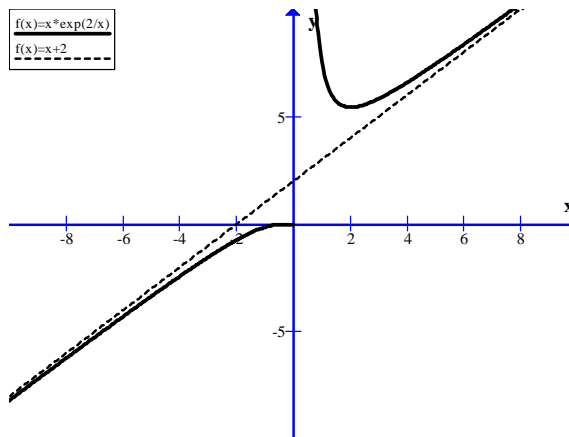
$$x(t) = 3, y(t) = t$$

$$f(x) = 1/2 \cdot x + 1$$



$$f(x) = x \cdot \exp(2/x)$$

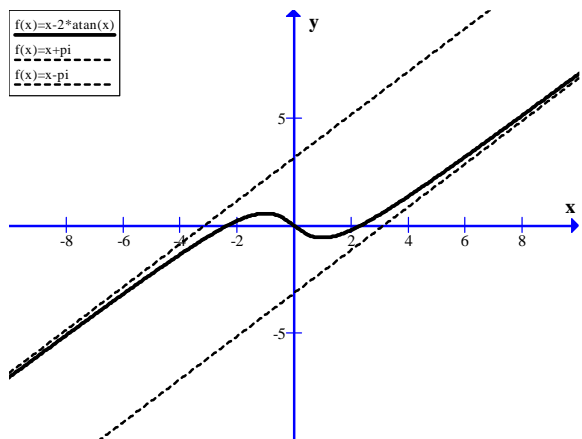
$$f(x) = x + 2$$



$$f(x) = x - 2 \cdot \arctan(x)$$

$$f(x) = x + \pi$$

$$f(x) = x - \pi$$



$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$f(x) = x$$

$$f(x) = -x$$

