Lista nr 5

Zad. 1. Rzucamy dwiema sześciennymi kostkami do gry. Wyznaczyć funkcję prawdopodobieństwa oraz dystrybuantę zmiennej losowej (ZL) X, której wartościami są sumy oczek uzyskane na obydwu kostkach. Obliczyć $P(X<6)$.

Zad. 2. Rzucamy kostką sześcienną. Gdy wypadnie parzysta liczba oczek, wygrywamy 2 zł, gdy wypadnie nieparzysta większa niż 1 – przegrywamy 4 zł, gdy wypadnie jedno oczko, nic nie wygrywamy. Znaleźć rozkład określonej w ten sposób ZL. Wyznaczyć jej dystrybuantę.

Zad. 3. Zmienna losowa X ma następujący rozkład prawdopodobieństwa: $P(X=-4)=0{,}2$; $P(X=0)=0{,}1$; $P(X=1)=0{,}5$; $P(X=2)=0{,}2$. Wyznaczyć dystrybuantę F_X oraz naszkicować jej wykres. Obliczyć $E(X)$, $D^2(X)$.

Zad. 4. ZL X ma następujący rozkład prawdopodobieństwa: $P(X=-3)=0{,}1$; $P(X=-1)=0{,}2+2a$; $P(X=0)=0{,}25+a$; $P(X=2)=0{,}05$, $P(X=4)=0{,}25$. Wyznaczyć wartość stałej a. Obliczyć $E(X)$ oraz $D^2(X)$. Wyznaczyć dystrybuantę F_X, sporządzić wykres dystrybuanty. Wyznaczyć $P\left(-\frac{1}{2}\le X\le 3\right)$.

Zad. 5. Wyznaczyć takie stałe a i b, aby funkcja

$$F(x)=\begin{cases} a+2 & \text{gdy } x\le 0\\ 0{,}25 & \text{gdy } x\in(0,1]\\ 0{,}75 & \text{gdy } x\in(1,2]\\ b-4 & \text{gdy } x>2\end{cases}$$

była dystrybuantą pewnej ZL X. Podać rozkład prawdopodobieństwa ZL X, sporządzić wykres dystrybuanty ZL X. Obliczyć $E(X)$ oraz $D^2(X)$. Wyznaczyć $P\left(\frac{1}{4}\le X\le\frac{7}{4}\right)$.

Zad. 6. Wyznaczyć wartości parametrów *a*, *b*, *c*, *d* tak, aby poniższe funkcje były dystrybuantami pewnych rozkładów na prostej. Obliczyć wskazane prawdopodobieństwa:

a) $F_X(x)=\begin{cases} 0 & \text{gdy } x\le 0\\ ax^2 & \text{gdy } 0<x<1\\ 1 & \text{gdy } x\ge 1\end{cases}$, $P\left(X\in\left[\frac{1}{2},2\right)\right)$

b) $F_X(t)=a+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} t$, $P(X>1)$

c) $F_Z(x)=\begin{cases} 0 & \text{gdy } x\le 0\\ dx & \text{gdy } 0<x<2\\ 1 & \text{gdy } x\ge 2\end{cases}$, $P(Z\in(0,3])$

d) $F_Y(x)=\begin{cases} 0 & \text{gdy } x<-1\\ \frac{1}{2}\left(1-x^2\right) & \text{gdy } -1\le x<0\\ ax+b & \text{gdy } 0\le x<1\\ 1 & \text{gdy } x\ge 1\end{cases}$, $P(Y\in[-2,1))$

Zad. 7. Zmienna losowa X ma rozkład o dystrybuancie $F(x)$:

a) $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{gdy } x\le 2\\ \frac{x^2-4}{12} & \text{gdy } 2<x\le 4\\ 1 & \text{gdy } x>4\end{cases}$

b) $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{gdy } x\le 2\\ (x-2)^2 & \text{gdy } 2<x\le 3\\ 1 & \text{gdy } x>3\end{cases}$

Wyznaczyć: gęstość prawdopodobieństwa $f(x)$, $E(X)$, $D^2(X)$, $P(0 \le X \le 3)$ (podpunkt *a*), $P(1 < X < 2,5)$ (podpunkt *b*). Zbudować wykres $F(x)$.

Zad. 8. Dystrybuanta ZL ciągłej X ma postać $F(x) = A + B\operatorname{arctg} x$, gdzie $-\infty < x < \infty$. Znaleźć stałe A i B oraz wyznaczyć gęstość ZL X.

Zad. 9. Sprawdzić czy funkcja $f(x)$ określona w następujący sposób

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x < 0 \\ e^{-x} & \text{gdy } x \ge 0 \end{cases}$$

jest gęstością prawdopodobieństwa ZL X. Znaleźć dystrybuantę F. Obliczyć prawdopodobieństwa $P\left(X < \frac{1}{2}\right)$ oraz $P(1 \le X < 2)$. Zinterpretować te prawdopodobieństwa na wykresie gęstości i na wykresie dystrybuanty. Obliczyć $E(X)$ oraz $D^2(X)$.

Zad. 10. ZL X ma rozkład o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} 0 & dla\, x < 0 \\ xe^{-x} & dla\, x \ge 0 \end{cases}$$

Wyznaczyć jej dystrybuantę oraz $P(X \ge 2)$, $P(0 < X < \ln 2)$.

Zad. 11. ZL X ma rozkład o gęstości $f(x) = \begin{cases} x & \text{gdy } 0 \le x < 1 \\ 2 - x & \text{gdy } 1 \le x < 2 \\ 0 & \text{gdy } x \notin [0,2) \end{cases}$. Narysować wykres gęstości. Wyznaczyć i narysować dystrybuantę tego rozkładu. Obliczyć $P(0,5 < X < 1,5)$, $E(X)$ oraz $D(X)$.

Zad. 12. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej X jest postaci:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \le 0, \\ 2e^{-2x} & \text{gdy } x > 0. \end{cases}$$

Narysować wykres *f*, znaleźć dystrybuantę i narysować jej wykres. Obliczyć $P(X > 1)$, $P(0 < X \le \ln 3)$. Zinterpretować te prawdopodobieństwa na wykresie gęstości i na wykresie dystrybuanty. Obliczyć $E(X)$ oraz $D^2(X)$.

Zad. 13. W wielu sytuacjach można przyjąć, że czas X bezawaryjnego działania badanego urządzenia jest ZL ciągłą o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \le 0 \\ (1/\lambda)\exp(-x/\lambda) & \text{gdy } x > 0 \end{cases}$$

Niech $\lambda = 10$. a) Obliczyć prawdopodobieństwo $P(5 \le X \le 10)$; b) wyznaczyć dystrybuantę ZL X, c) zinterpretować obliczone prawdopodobieństwo za pomocą wykresów gęstości i dystrybuanty.

Zad. 14. Wyznaczyć wartości parametrów *a*, *b*, *c*, *d*, tak, aby poniższe funkcje były gęstościami rozkładów pewnych zmiennych losowych. Obliczyć wskazane prawdopodobieństwa. Obliczyć wartość oczekiwaną, wariancję oraz medianę. Zbudować wykres gęstości prawdopodobieństwa

a) $f(x) = \begin{cases} a(x+2), & x \in (-1;1); \\ 0, & x \notin (-1;1). \end{cases}$ $P(0 \le X \le 1)$

b) $f(x) = \begin{cases} ax - 1 & \text{gdy } x \in (2,4) \\ 0 & \text{gdy } x \notin (2,4) \end{cases}$, $P(1 \le X \le 3)$

c) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{gdy } x \in [0,d] \\ 0 & \text{gdy } x \notin [0,d] \end{cases}$, $P(X \ge 2)$

d) $h(x) = \begin{cases} bx^2 & \text{gdy } x \in [-1,3] \\ 0 & \text{gdy } x \notin [-1,3] \end{cases}$, $P(X \in [-2,2])$

e) $f(x)=\begin{cases} c\sin x & \text{gdy } x\in[0,\pi] \\ 0 & \text{gdy } x\notin[0,\pi] \end{cases}$, $P\left(X<\frac{\pi}{2}\right)$

f) $h(x)=\dfrac{a}{1+x^2}$, $P(X<1)$

Zad. 15. Niech X będzie liczbą oczek na wierzchniej, poziomej ścianie przy rzucaniu symetryczną kostką do gry, a Y - liczbą oczek na spodniej ścianie. Wyznaczyć rozkład ZL $Z=XY$ (dla każdej „prawidłowej" kostki do gry suma oczek na każdej parze przeciwległych ścian jest równa 7).

Zad. 16. Rzucamy dwiema kostkami sześciennymi: czerwoną i zieloną. Określamy dwie zmienne losowe X_1 i X_2 w sposób następujący: X_1 jest liczbą oczek na kostce czerwonej,

$$X_2=\begin{cases} 1, \text{gdy na kostce zielonej jest parzysta liczba oczek,} \\ 2, \text{w przypadku przeciwnym} \end{cases}$$

Niech $X_3=X_1+X_2$, $X_4=X_1\cdot X_2$. Obliczyć a) $P\{X_3>6\}$ oraz b) prawdopodobieństwo tego, że X_4 przyjmuje jako wartość liczbę nieparzystą.

Zad. 17. Na drodze ruchu pociągów znajdują się w znacznej odległości od siebie 4 semafory, z których każdy (wobec znacznej odległości od innych) zezwala na przejazd z prawdopodobieństwem $p=0{,}8$. Niech X oznacza liczbę semaforów zezwalających na przejazd i poprzedzających pierwsze zatrzymanie lub stację docelową. Znaleźć a) rozkład ZL X, b) dystrybuantę ZL X, c) prawdopodobieństwo $P(X\geq 2)$.

Zad. 18. ZL X ma następujący rozkład prawdopodobieństwa: $P(X=-1)=\frac{1}{4}$, $P(X=1)=\frac{3}{4}$. Znaleźć rozkład prawdopodobieństwa ZL $Y=2X+1$.

Zad. 19. ZL X ma następujący rozkład prawdopodobieństwa: $P(X=-1)=0{,}2$, $P(X=1)=0{,}3$, $P(X=3)=0{,}1$, $P(X=4)=0{,}4$ Znaleźć rozkład prawdopodobieństwa ZL $Y=X^2-5$.

Zad. 20. ZL X ma następujący rozkład prawdopodobieństwa:

x	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4
$P(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

Znaleźć rozkład prawdopodobieństwa ZL $Y=X^2-4$.

Zad. 21. Znaleźć gęstość prawdopodobieństwa f_Y zmiennej losowej $Y=2X$, jeśli gęstością f_X zmiennej losowej X jest

a) $f_X(x)=\begin{cases} 0 & \text{dla } x<1, \\ 1/2 & \text{dla } 1\leq x\leq 3, \\ 0 & \text{dla } x>3, \end{cases}$ b) $f_X(x)=\begin{cases} 0 & \text{dla } x<0, \\ 2e^{-2x} & \text{dla } x\geq 0. \end{cases}$

Zad. 22. ZL X ma rozkład jednostajny na odcinku $[0;1]$. Znaleźć gęstości następujących ZL:

a) $Y_1=2X+1$; b) $Y_2=-\ln(1-X)$; c) $Y_3=\mathrm{tg}(\pi(X\text{ -}1/2))$.

Zad. 23. Niech ZL X ma dystrybuantę $F(x)$ i gęstość $f(x)$. Znaleźć dystrybuantę i gęstość ZL $Y=aX+b,\ a\neq 0$.

Zad. 24. Znaleźć gęstość ZL $Y=X^2$, gdzie X jest ZL o dystrybuancie $F(x)$ i gęstości $f(x)$.