

Lista nr 3

Prawdopodobieństwo warunkowe. Prawdopodobieństwo całkowite. Wzór Bayesa

Zad. 1. Wykazać, że dla dowolnych zdarzeń A i B ($P(B) > 0$) zachodzi nierówność $P(A|B) \geq 1 - \frac{P(A')}{P(B)}$.

Zad. 2. Wiadomo, że $P(A) = 0,9$, $P(B) = 0,8$. Wykazać, że $P(A|B) \geq 0,875$.

Zad. 3. Wykazać, że $\frac{P(A) + P(B) - 1}{P(B)} \leq P(A|B) \leq \frac{P(A)}{P(B)}$.

Zad. 4. W pewnym przedsiębiorstwie 96% wyprodukowanych wyrobów jest dobrych. Wśród 100 sztuk dobrych wyrobów 75 jest pierwszego gatunku. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że pewna sztuka wyprodukowana w tym przedsiębiorstwie jest pierwszego gatunku.

Zad. 5. Ktoś rzucił 3 razy monetą i poinformował nas, że wypadła nieparzysta liczba reszek. Jaka jest szansa, że wypadły 3 reszki?

Zad. 6. Rzucono dwa razy kostką. Obliczyć prawdopodobieństwo, że suma oczek będzie większa od 8, gdy

- a) w którymś rzucie wypadnie 5 oczek,
- b) za pierwszym razem wypadnie 5 oczek.

Zad. 7. Rzucamy trzema kostkami. Wiadomo, że na każdej kostce wypadła inna liczba oczek. Jakie jest prawdopodobieństwo, że

- a) na żadnej kostce nie wypadła szóstka,
- b) na pewnej kostce wypadła szóstka?

Zad. 8. Z talii 8 kart – czterech króli i czterech asów – wybieramy losowo dwie karty. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że wybrano 2 asy, jeśli wiemy, że:

- a) wybrano co najmniej jednego asa,
- b) wśród wybranych kart jest czerwony as,
- c) wśród wybranych kart jest as trefl.

Zad. 9. Na przenośnik taśmowy trafiają jednakowe produkty wytwarzane przez dwa automaty. Stosunek ilościowy produkcji pierwszego automatu do produkcji drugiego jest równy 3:2. Pierwszy automat wytwarza średnio 65% produktów pierwszej jakości, drugi zaś – 85%. Spośród produktów na przenośniku pobieramy losowo jeden produkt. Obliczyć prawdopodobieństwo, że będzie to produkt pierwszej jakości.

Zad. 10. Pewien towar produkują 3 zakłady. Wadliwość produkcji w poszczególnych zakładach wynosi odpowiednio 3%, 10% oraz 14%. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wzięty wyrób – spośród trzech sztuk pochodzących z różnych zakładów jest dobrej jakości.

Zad. 11. W sklepowym magazynie jest 1000 żarówek, przy czym 650 żarówek pochodzi z fabryki F1 a pozostałe z fabryki F2. Nie wiemy ile jest wśród nich żarówek dobrych, a ile wadliwych, wiemy natomiast, że wadliwość produkcji w fabryce F1 wynosi 5%, a w fabryce F2 wynosi 2%. Wybieramy w sposób losowy jedną żarówkę i niestety okazuje się, że jest to żarówka wadliwa. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pochodzi ona z fabryki F2?

Zad. 12. Koparka może pracować w warunkach normalnych albo trudnych odpowiednio z prawdopodobieństwami 0,8 oraz 0,2. Prawdopodobieństwo awarii koparki w czasie t wynosi 0,05 przy pracy w warunkach normalnych i 0,25 w warunkach trudnych. Ile wynosi prawdopodobieństwo awarii koparki pracującej przez czas t ? W ciągu czasu t koparka uległa uszkodzeniu, obliczyć prawdopodobieństwo tego, że pracowała wtedy w warunkach normalnych.

Zad. 13. Zakłady radiowe są zaopatrywane w lampy radiowe tylko przez dwu kooperantów K_1 i K_2 . Pierwszy z nich pokrywa zaopatrzenie zakładu w siedemdziesięciu procentach. Poza tym wiadomo, że kooperanci produkują średnio 90% i 80% lamp o małym rozrzucie parametrów (tj. dobrych lamp). Losowo wybrana lampa okazała się dobra, znaleźć prawdopodobieństwo tego, że lampa ta pochodzi od drugiego kooperanta.

Zad. 14. W nowej pracowni komputerowej pewnej firmy badawczej znajdują się monitory trzech typów: A, B, C. Różnią się one ceną, jakością obrazu i niezawodnością. Wiadomo, że monitory A psują się w okresie gwarancyjnym z prawdopodobieństwem 0,1 podczas gdy analogiczne prawdopodobieństwa dla pozostałych typów wynoszą odpowiednio 0,15 i 0,05. Monitorów typu A jest 20, a pozostałych po 30. Jakie jest prawdopodobieństwo, że monitor, który zostanie przydzielony Jurkowi nie zepsuje się w okresie gwarancyjnym?

No i stało się – monitor Jurka jest zepsuty. Jaka jest szansa, że był to monitor typu A?

Zad. 15. Średnio jedna osoba na tysiąc jest dotknięta pewną chorobą. Test na tę chorobę daje tzw. fałszywą pozytywną odpowiedź u 5% zdrowych (u chorego daje zawsze odpowiedź pozytywną). Jaka jest szansa, że osoba, u której test dał odpowiedź pozytywną jest faktycznie chora? Zakłada się, że nic nie wiadomo o innych możliwych objawach u badanej osoby.

Zad. 16. Pewna choroba występuje u 0,2% populacji zamieszkującej w pewnym kraju. Opracowano test, który wykrywa ją z 98% skutecznością. Niestety, z prawdopodobieństwem 1% może dać wynik pozytywny również u osób zdrowych.

Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba jest chora, jeśli wykonany przy okazji innych badań test dał wynik pozytywny.

Zad. 17. Zakład przemysłowy wyposażony jest w system alarmowy. W sytuacji zagrożenia system działa w 95% przypadków. Ponadto wiadomo, że z prawdopodobieństwem 0,02 system włączy się pomimo braku zagrożenia. Rzeczywiste zagrożenie pojawia się rzadko (jego prawdopodobieństwo wynosi 0,004). Obliczyć prawdopodobieństwo, że w przypadku odezwania się alarmu naprawdę istnieje zagrożenie.

Zad. 18. Prawdopodobieństwo tego, że wyrób wyprodukowany w pewnym zakładzie odpowiada wymaganiom normy wynosi 0,9. Każdy wyrób podlega dwuetapowej kontroli i opuszcza zakład tylko wtedy, gdy przejdzie z wynikiem pozytywnym oba etapy. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że wyrób przeznaczony do sprzedaży odpowiada wymaganiom normy, gdy prawdopodobieństwo pozytywnego przejścia przez poszczególne etapy kontroli jest takie samo dla obu etapów i wynosi 0,95 dla wyrobu odpowiadającego wymaganiom normy i 0,1 dla wyrobu niezgodnego z tymi wymaganiami.

Zad. 19. Telegraficzne przekazywanie informacji odbywa się metodą nadawania sygnałów kropka-kreska. Statystyczne właściwości zakłóceń są takie, że błędy następują przeciętnie w $\frac{2}{5}$ przypadków przy nadawaniu sygnału kropka i w $\frac{1}{3}$ przypadków przy nadawaniu sygnału kreska. Wiadomo, że ogólny stosunek ilości nadawanych sygnałów kropka do sygnałów kreska jest 5:3. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że przy przyjmowaniu sygnału a) kropka b) kreska w rzeczywistości te właśnie sygnały zostały nadane.

Zad. 20. Pewien producent gier komputerowych rozpoczął testy rynkowe dwóch nowych gier. Grupie ochotników zaproponowano wybór jednej z gier, a następnie poproszono, aby podzielili się wrażeniami po zapoznaniu się z grą. Grę nr 1 wybrało 70% ochotników, a na przetestowanie gry nr 2 zdecydowało się pozostałe 30% ochotników. Z gry nr 1 zadowolonych było 60% testujących, a 40% nie. Z kolei wśród testujących grę nr 2 80% odniosło pozytywne wrażenie, a 20% negatywne. Losowo wybrano jednego z graczy i zapytano go, czy był zadowolony z gry którą testował. Odpowiedział twierdząco. Zakładając, że gracz ten jest zadowolony obliczyć prawdopodobieństwo tego, że grał on w drugą grę.

Literatura

J. Jakubowski, R. Sztencel, *Rachunek prawdopodobieństwa dla (prawie) każdego*, Script, Warszawa 2006.

A. Plucińska, E. Pluciński, *Probabilistyka*, WNT, Warszawa 2000.