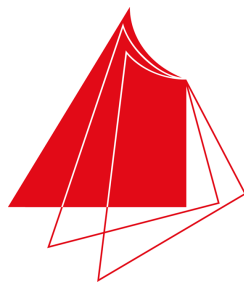


# Systemtheorie Teil A

- Zeitkontinuierliche Signale und Systeme -

Manfred Strohrmann, Urban Brunner,  
Frieder Keller, Jürgen Weizenecker



Hochschule Karlsruhe  
Technik und Wirtschaft

UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES



## Änderungsindex

Version	Datum	Verfasser	Änderungen
14	15.03.2020	M. Strohrmann, F. Keller, J. Weizenecker	Korrektur von Fehlern, insbesondere bei Anfangs- und Übergangsbedingungen
13	15.03.2017	M. Strohrmann, U. Brunner	Korrektur von Fehlern
12	15.03.2016	M. Strohrmann, U. Brunner	Ausgabe für Systemtheorie Online
11	15.03.2015	M. Strohrmann, U. Brunner	Trennung von Text, Übungsaufgaben und Musterlösungen, Erweiterung um Modellbildung, Änderung Spektrum eines Signals, Ausgabe für Vorlesung SS 2015
10	15.03.2014	M. Strohrmann, U. Brunner	Erweiterung um Zustandsraumdarstellung, Ausgabe für Vorlesung SS 2014
9	01.10.2013	M. Strohrmann, U. Brunner	Erweiterung um Grundlagen des Filterentwurfs, Ausgabe für Vorlesung WS 2013/14
8	18.03.2013	M. Strohrmann, U. Brunner	Erweiterung um Übertragungsglieder der analogen Signalverarbeitung, Ausgabe für Vorlesung SS 2013
7	30.10.2012	M. Strohrmann, U. Brunner	Erweiterung Frequenzgang von Systemen, Ausgabe für Vorlesung WS 2012/13
6	12.09.2007	M. Strohrmann	Erweiterung zu Fourierreihen, Fehlerkorrekturen
5	09.03.2007	M. Strohrmann	Fehlerkorrektur
4	02.07.2006	M. Strohrmann	Einarbeiten von Übungsaufgaben mit Musterlösungen
3	10.03.2006	M. Strohrmann	Didaktische Überarbeitung
2	06.07.2005	M. Strohrmann	Korrektur und Erweiterung zur digitalen Signalverarbeitung
1	01.03.2005	M. Strohrmann	Erstausgabe



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Strukturierung des Buchs . . . . .	2
1.2	Ergänzungen zum Buch . . . . .	4
1.3	Danksagung . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Zeitkontinuierliche Signale</b>	<b>9</b>
2.1	Klassen von Signalen . . . . .	9
2.2	Rechnen mit Sprung- und Impulsfunktion . . . . .	17
2.3	Funktionsalgebra . . . . .	26
2.4	Funktionen zur Beschreibung von Einschwingvorgängen . . . . .	32
2.5	Normierung von Signalen . . . . .	40
2.6	Literatur . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich</b>	<b>44</b>
3.1	Beschreibung zeitkontinuierlicher Systeme mit Differentialgleichungen . . . . .	44
3.2	Grundlegende Eigenschaften zeitkontinuierlicher Systeme . . . . .	51
3.3	Lösung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	61
3.4	Berechnung der Systemantwort über das Faltungsintegral . . . . .	75
3.5	Simulation linearer, zeitinvarianter Systeme . . . . .	86
3.6	Literatur . . . . .	97
<b>4</b>	<b>Laplace-Transformation zeitkontinuierlicher Signale</b>	<b>98</b>
4.1	Grundlagen der Laplace-Transformation . . . . .	98
4.2	Rechenregeln der Laplace-Transformation . . . . .	106
4.3	Rücktransformation . . . . .	120
4.4	Laplace-Transformation mit MATLAB . . . . .	127
4.5	Literatur . . . . .	132

# 1 Einleitung

Steigende Anforderungen an die Produktqualität und immer kürzer werdende Entwicklungszeiten erfordern stetige Verbesserungen im Produktentstehungsprozess. Eine Schlüsselrolle kommt dabei der Systembeschreibung und der Systemsimulation zu. Systemsimulationen lassen sich erheblich schneller und reproduzierbarer umsetzen als der Aufbau von Musterteilen. Aus diesem Grund steigt in der Produktentwicklung der Anteil von Simulationsaufgaben an. Ingenieure benötigen damit ein interdisziplinäres Systemverständnis, mit dem komplexe Systeme erfasst, beschrieben und simuliert werden können.

Unter einem System wird die Abstraktion eines Prozesses oder Gebildes verstanden, das mehrere Signale zueinander in Verbindung setzt. Systeme sind dabei oft interdisziplinär, sie erstrecken sich über mehrere Fachrichtungen. Einige dieser Systeme lassen sich direkt mit algebraischen Gleichungen beschreiben. Ein Beispiel für ein solches System ist ein Spannungsteiler, bei dem sich Ausgangsspannung direkt aus der Eingangsspannung und dem Widerstandsverhältnis ergibt. Oftmals finden bei praktischen Anwendungen aber Einschwingvorgänge statt. Sie ergeben sich aus Energiespeichern, deren Zustand sich durch eine Anregung zeitabhängig ändert. Ein Beispiel für ein System mit Energiespeicher ist ein Kondensator, der über einen Widerstand aufgeladen wird. Die Ausgangsspannung des Kondensators ist zeitabhängig. Systeme mit Energiespeichern werden als dynamische Systeme bezeichnet. Andere bekannte Beispiele für dynamische Systeme sind Pendelbewegungen, das Verhalten elektrischer Schaltungen mit Kondensatoren und Spulen sowie thermische und chemische Prozesse. Es wird sich zeigen, dass die Systembeschreibung bei dynamischen Systemen aus einer oder mehreren Differentialgleichungen besteht.

Die Systemtheorie liefert eine Theorie zur einheitlichen Beschreibung von dynamischen Systemen, die sehr unterschiedlicher Natur sein können. Insbesondere für regelungstechnische Anwendungen ist die Systemtheorie damit eine wesentliche Voraussetzung, da sie Systeme in einer einheitlichen Weise beschreibt. Weitere Anwendungen in der Ingenieurwissenschaft sind die Automatisierungstechnik, Nachrichtentechnik, Messtechnik, Verfahrenstechnik, Informatik sowie die klassische Elektrotechnik. In aller Regel werden abstrakte Systembeschreibungen mit Verzicht auf das Detail eingesetzt. Teilweise werden die Systembeschreibungen durch detaillierte Modelle kritischer Teilsysteme ergänzt. Durch die abstrakte Beschreibungsform bleibt der Überblick über das System erhalten.

## 1.1 Strukturierung des Buchs

In der Systemtheorie werden Systeme und ihre Wirkung auf Signale beschrieben. Deshalb werden in Kapitel 2 zunächst wesentliche Beschreibungsformen für Signale im Zeitbereich wiederholt. Es werden sogenannte Sprung- und Impulsfunktionen definiert, die bevorzugte Testsignale dynamischer Systeme sind. Das Einschwingverhalten wird in vielen Fällen durch abklingende harmonische Schwingungen beschrieben, die als komplexe Exponentialfunktionen beschrieben werden.

Einführende Beispiele in Kapitel 3 zeigen, dass viele zeitkontinuierliche Systeme über Differentialgleichungen beschrieben werden. Eine besondere Stellung nehmen dabei lineare, zeitinvariante Systeme ein. Ihre Systemreaktion lässt sich im Zeitbereich auf verschiedene Arten bestimmen. Neben der direkten Lösung der Differentialgleichung wird die Berechnung der Systemantwort über das Superpositionsprinzip und Faltungsintegral bestimmt. Die Zweiteilung von Signalen und Systemen zieht sich weiter durch das Buch.

Zur Lösung von Differentialgleichungen wird in Kapitel 4 die Laplace-Transformation eingeführt. Nach der Diskussion der Laplace-Transformation für Signale werden in Kapitel 5 Differentialgleichungen mithilfe der Laplace-Transformation gelöst, und es wird der Begriff der Übertragungsfunktion zeitkontinuierlicher Systeme eingeführt. An der Übertragungsfunktion können wichtige Systemeigenschaften direkt abgelesen werden, ohne die Systemantwort ausrechnen zu müssen. Die Interpretation der Übertragungsfunktion wird beschrieben und an Beispielen angewendet. In der Elektrotechnik kommt der Beschreibung von RLC-Schaltkreisen eine besondere Bedeutung kommt zu. Sie wird als eine Anwendung der Laplace-Transformation ausführlich diskutiert.

Die Fourier-Reihe beschreibt periodische Signale näherungsweise mit einer Grundschiwingung und ihren Oberschwingungen. Mit ihr wird in Kapitel 6 der Begriff des Spektrums eingeführt. Es wird darüber hinaus gezeigt, wie mithilfe der Fourier-Transformation nichtperiodische Signale im Frequenzbereich beschrieben werden können. Dabei werden die Parallelen zwischen Fourier-Reihe und Fourier-Transformation sowie Laplace- und Fourier-Transformation herausgearbeitet. Anschließend wird in Kapitel 7 die Fourier-Transformation zur Interpretation von Systemen im Frequenzbereich herangezogen. Durch den Einsatz von Filtern werden in der Elektrotechnik erwünschte Spektralanteile von unerwünschten Spektralanteilen getrennt. Die Grundlagen zum Entwurf und zur Realisierung von Filterschaltungen werden in Kapitel 8 erarbeitet. Dabei wird allgemein auf die Zielsetzung der Filterentwicklung eingegangen, und es werden spezielle Filterentwurfverfahren vorgestellt. Außerdem werden aktive und passive Schaltungen für die Realisierung unterschiedlicher Filterentwürfe angegeben.

Die lineare Systemtheorie ermöglicht die Systembeschreibung durch Strukturschaubilder, die aus vernetzten Übertragungsgliedern bestehen. Die dabei verwendeten Übertragungsglieder werden insbesondere in der Regelungstechnik eingesetzt. Wesentliche Übertragungsglieder werden in Kapitel 9 vorgestellt und ihr Zeit- und Frequenzverhalten zusammengefasst.

In der modernen Regelungstechnik werden Systeme im sogenannten Zustandsraum beschrieben. Dabei ist jeder Koordinate des Zustandsraums eine Zustandsgröße zugeordnet, die den Zustand eines Energiespeichers des Systems beschreibt. Die Eingangs- und Ausgangssignale sowie die Zustandsgrößen sind Funktionen der Zeit. Diese Darstellung kommt damit der praktischen Vorstellung näher als ihre Darstellung im Laplace- oder Fourier-Bereich. Die Darstellung von Systemen im Zustandsraum wird in Kapitel 10 eingeführt.

Kapitel 11 beschreibt einen Leitfaden zur Modellbildung von Systemen. Es wird aufgezeigt, wie mit dem gewonnenen Wissen auch komplexere Systeme über mathematische Gleichungen beschrieben werden können. Parameter der Gleichungen werden mit Methoden der Parameteridentifikation bestimmt. Das Vorgehen wird an einem praktischen Beispiel illustriert.

In der Elektrotechnik steigt der Trend, analoge Größen durch geeignete Sensoren zu erfassen und dann digital weiterzuverarbeiten. Teil B dieser Buchreihe widmet sich daher zeitdiskreten Signalen und Prozessen.

In der Praxis gibt es Signale, die nicht durch analytische Funktionen beschrieben werden können. Teil C behandelt deshalb stochastische Signale und Prozesse. Es wird auf die statistischen Grundlagen sowie ihr Einsatz in der Signalverarbeitung eingegangen.

In diesem Buch werden wesentliche Zusammenhänge am Ende jedes Abschnittes in Tabellenform zusammengefasst. Die sich daraus ergebende Formelsammlung ist im Download-Bereich als separates File

verfügbar.

Die Darstellungen in diesem Buch werden mit Beispielen illustriert. Beispiele beginnen mit einem grauen Balken und enden mit einem kleinen Quadrat.

#### Beispiel:

Erläuterung des Beispiels

Wesentlicher Erfolgsfaktor für das Verständnis und den praktischen Umgang mit den Methoden der Systemtheorie ist das selbstständige Bearbeiten von Übungsaufgaben. Aus diesem Grund werden auf der Plattform *Systemtheorie Online* Übungsaufgaben mit umfangreichen Musterlösungen angeboten, die eine semesterbegleitende Vertiefung ermöglichen.



## 1.2 Ergänzungen zum Buch

Das Fach Systemtheorie führt zu interdisziplinären Systembeschreibungen und bietet damit die Option, unterschiedliche Disziplinen und Fachrichtungen miteinander zu verbinden. Dies ist vor allem bei größeren Entwicklungsprojekten in Industrie und Wirtschaft von strategischer Bedeutung. Leider steht der hohen Bedeutung oft eine Abneigung der Studierenden gegenüber, die das Fach Systemtheorie als theoretisch und abstrakt empfinden. In einem Projekt Systemtheorie Online, das von der Hochschule Karlsruhe und dem Land Baden-Württemberg gefördert wurde, wurden unterschiedliche Elemente entwickelt, mit denen die Praxisrelevanz des Stoffes verdeutlicht und die Motivation der Studierenden gesteigert werden soll.

### 1.2.1 Systemtheorie-Online

Eine Maßnahme ist die Online-Plattform Systemtheorie-Online. Bei der Online-Plattform handelt es sich um ein Internet-Portal zur Unterstützung des Vorlesungsbetriebs. Die Studierenden haben dort die Möglichkeit, das Buch als PDF-Dokument herunterzuladen oder es online mit mehreren Zusatzfunktionen durchzuarbeiten. Zu den präsentierten Inhalten werden themenbezogenen Links zu Praxisbeispielen und Übungsaufgaben sowie sogenannte Applikationen und sogenannte virtuelle Versuche bereitgestellt.

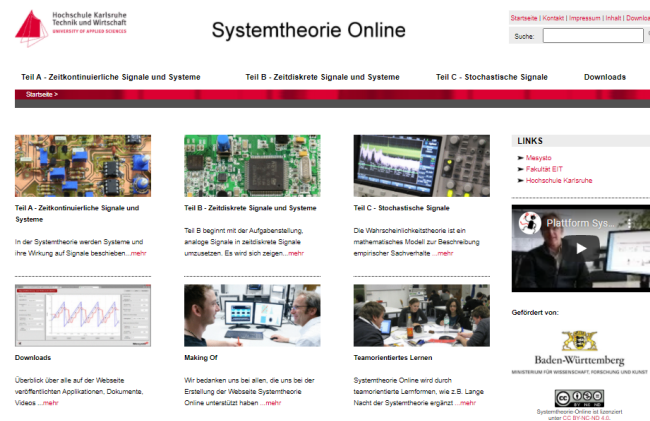


Bild 1.1: Systemtheorie Online ([www.hs-karlsruhe.de/mesysto](http://www.hs-karlsruhe.de/mesysto))

### Applikationen zur Systemtheorie

Für Sachverhalte und Zusammenhänge, die sich die Studierenden nur schwer vorstellen können, werden Applikationen zur Verfügung gestellt. Bei den Applikationen können Parameter beispielsweise per Schieberegler verändert und die Folgen dieser Modifikationen auf die Ausgabesignale beobachtet werden. Die Applikationen erlauben es, im Rahmen des spielerischen Ausprobierens ein Gefühl für Zusammenhänge und Abhängigkeiten verschiedener Systemparameter zu bekommen. In Video-Tutorials werden die Studierende in den Umgang mit den Applikationen eingeführt. Sie sollen dabei vor der Manipulation von Parametern Hypothesen über zu erwartende Effekte auf das Gesamtsystem abgeben, bevor das Ergebnis-Feedback bezüglich des Zutreffens des eigenen Vorhersagen erfolgt.

Das Vorgehen bei den grafischen Animationen kann kurz an einem Beispiel erläutert werden: Ein sogenanntes PT2-Glied ist von den Parametern Zeitkonstante  $T$ , Dämpfung  $d$  und Verstärkung  $k$  abhängig (Bild 1.2). Die grafische Animation zeigt parallel die Eigenschaften des Systems im Zeit-, Laplace- und Frequenzbereich. Die Parameter können dabei durch Schieberegler variiert werden, sodass die Studierenden spielend ein Fingerspitzengefühl für das Übertragungsverhalten bekommen. Durch die Bereitstellung als Silverlight-Applikation benötigen die Studierenden keine zusätzliche Software, um das Programm auszuführen.

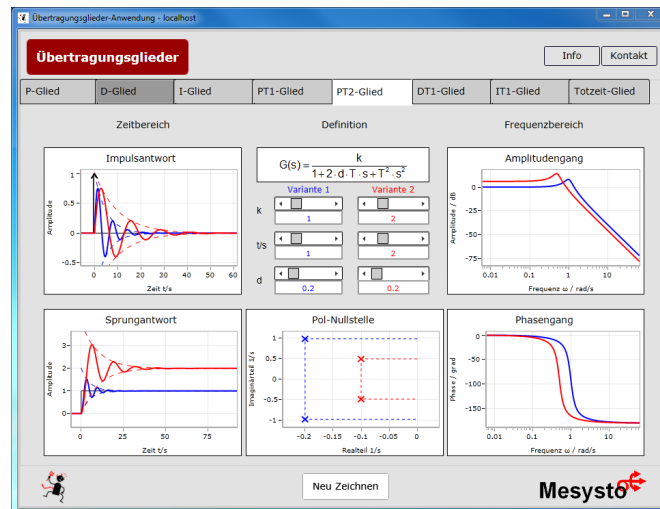


Bild 1.2: Darstellung des Verhaltens eines sogenannten PT2-Gliedes als Silverlight-Applikation

Da Microsoft die Wartung von Silverlight eingestellt hat, werden die verfügbaren Applikationen derzeit neu implementiert. Bild 1.3 zeigt eine erste Applikation, die unabhängig vom Betriebssystem lauffähig ist.

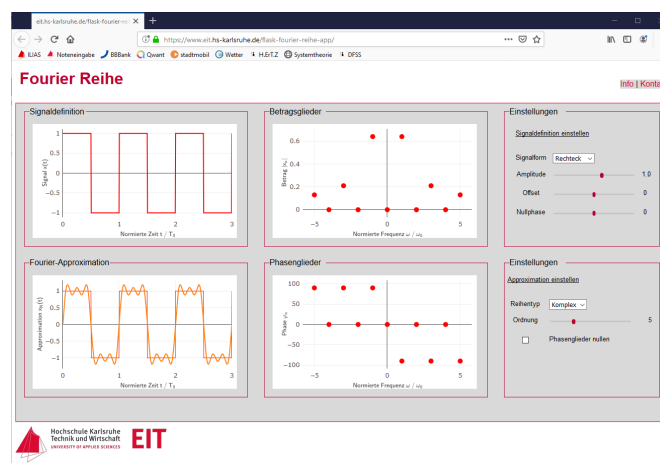


Bild 1.3: Applikation Fourier-Reihe

Bis zur kompletten Umsetzung können die Silverlight Applikationen mit dem Microsoft Internet Explorer weiterverwendet werden.

### Virtuelle Versuche zur Systemtheorie

Darüber hinaus ermöglicht die Online-Plattform die Durchführung virtueller Experimente. Passend zu den Themen des Skripts werden Versuche mit dem Laborwagen auf Video aufgezeichnet und diese auf der Online-Plattform gemeinsam mit den entsprechenden Datensätzen zur Verfügung gestellt. Zusätzliche Erläuterungen zur Durchführung der Versuche und Auswertung der Daten fördern ein Grundverständnis für das wissenschaftliche Denken und Arbeiten.

Als Experimente zur Demonstration stehen bereits einige Versuche mit dem Laborwagen zur Verfügung.

Bild 1.4 zeigt zum Beispiel einen Versuch zur Beschreibung des Einschwingverhaltens eines Lautsprechers. Weitere Experimente insbesondere zu den Themen zeitdiskrete Systeme und stochastische Systeme wurden aufgebaut und gefilmt, die Videos stehen als Datei zur Verfügung. Die Studierenden erhalten aber nicht nur den Video-Stream, sondern auch die einzelnen Versuchsergebnisse in Form von Daten-Files und können bei Interesse eigene Versuchsauswertungen erstellen

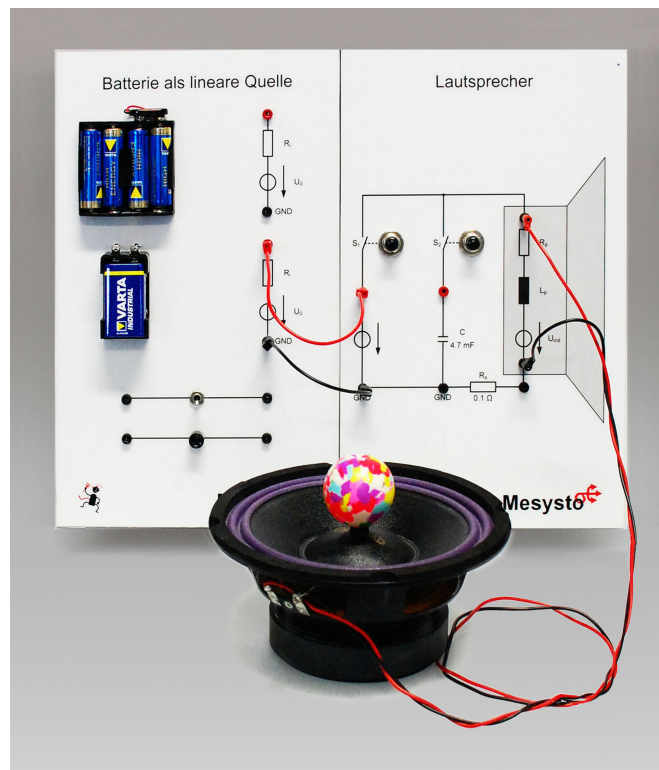


Bild 1.4: Versuchsaufbau zum Einschwingverhalten eines Lautsprechers

Das Portal Systemtheorie-Online bietet den Studierenden damit die Möglichkeit, theoretische Sachverhalte auf eine anschauliche Art aufbereitet und erklärt zu bekommen. Damit wird eine Forderung aus der Evaluation aufgegriffen, mehr Versuche in der Systemtheorie einzusetzen. Darüber hinaus haben die Studierenden die Möglichkeit, selbst aktiv zu werden und Versuche selbstständig auszuwerten und daran ihren eigenen Lernerfolg zu messen. Das Projekt bietet damit einen Beitrag zur praxisnahen Ausbildung von Studierenden und stellt wegen des freien Zugangs ein Weiterbildungsangebot dar, das Mitarbeitern aus Industrie und Wirtschaft offensteht. Der Aufbau dieses Portals wurde im Rahmen von Pro-Studium aus Studiengebühren und aus Mitteln des Landes Baden-Württemberg im Rahmen des Programms Willkommen in der Wissenschaft finanziert.

### 1.2.2 Teamorientierte Lehrmethoden

Parallel zu den Online-Aktivitäten wird die Vorlesung um unterschiedliche teamorientierte Lehrmethoden ergänzt. Kooperative Lernformen fördern den Zusammenhalt und tragen sozialen Bedürfnissen Rechnung. Sie wirken der sozialen Isolation entgegen, die Studierenden fühlen sich eingebunden. Nicht zuletzt spiegelt die Teamarbeit auch berufliche Anforderungen wider. Die Methoden des teamorientierten Lernens sind auf der Online-Plattform ausführlich dokumentiert

### Lange Nächte der Systemtheorie

Lange Nächte sind abendliche Veranstaltungen zur Vertiefung des Vorlesungsstoffs, passend zu einem bestimmten Vorlesungsthema. In entspannter Atmosphäre werden Übungsaufgaben und Experimente mit dem Laborwagen miteinander kombiniert. Der verfügbare Zeitrahmen erlaubt eine Beschäftigung mit komplexeren Fragestellungen. In erster Linie ist dieser Baustein als offener Lernraum konzipiert,

in dem Wissen stressfrei vermittelt und vertieft wird. Erste lange Nächte wurden von den Studierenden sehr positiv bewertet. Besonders gelobt wurden das gemeinschaftliche Lernen in der Gruppe, das angenehme Arbeitsklima sowie der Praxisbezug und die Arbeit mit realen Messdaten

### **Großer Preis der Systemtheorie**

In Anlehnung an die Fernsehsendung "Der große Preis" wird mit den Studierenden eine Quiz-Show veranstaltet. Dabei bearbeiten die Studierenden in Gruppen Fragen zu Themenblöcken der Vorlesung. Die Punktzahl ist abhängig von Schwierigkeitsgrad. Die Abschätzung eines Einsatzes bei sogenannten RisikoFragen erfordert die Selbsteinschätzung der Studierenden. Durch sogenannte Glücksfragen zu fachfremden Themen können auch Gruppen mit mäßigem Fachwissen gewinnen. Die traditionelle Rangordnung innerhalb der Vorlesung wird aufgebrochen und die Motivation der Studierenden steigt. Studierenden zeigten bei der ersten Durchführung eine extrem hohe Motivation und hohes Engagement.

### **Zirkeltraining Systemtheorie**

Erfolgreiches Lernen setzt ein Gleichgewicht zwischen Anspannung und Entspannung voraus. Zielsetzung dieses Zirkeltrainings ist es deshalb, sportliche Übungen oder Geschicklichkeitsspiele in den Lernprozess zu integrieren. Dazu wird ein Parkour aufgebaut, bei dem sich Übungsaufgaben und Spielstationen abwechseln. Bei der Veranstaltung stehen die Motivation und der Spaß an vorderster Stelle. Es wird eine angenehme Atmosphäre geschaffen, in der der Druck beim Bewältigen von Übungsaufgaben durch spielerische Anteile entlastet wird. Wegen des erforderlichen Platzbedarfs eignet sich das Zirkeltraining Systemtheorie insbesondere für die Sommermonate.

Die Evaluationsergebnisse zur Vorlesung zeigen, dass es durch den Einsatz teamorientierter Lehrmethoden gelungen ist, diese Abneigung gegen das Fach Systemtheorie zumindest teilweise abzubauen

### 1.3 Danksagung

Wir bedanken uns bei den Studierenden und Assistenten Andreas Kühn, Erik Seiter, Sebastian Stiegler, Philipp Fetzer, Jaruwan Limsukhakorn, Doraemon Dedkum, Georg Bauer, Jochen Lang, Alex Schwin und Michael Holz für die Gestaltung und Ausarbeitung des wesentlichen Teils der Übungsaufgaben, Applikationen und Versuche.

Unserer besonderer Dank gilt außerdem den Kollegen Prof. Dr. Beucher, Prof. Dr. Dussel, Prof. Dr. Quint und Prof. Dr. Weizenecker, die die inhaltliche und mathematische Darstellung in die-sem Buch kritisch hinterfragt und damit zur besseren Verständlichkeit beigetragen haben.

In das Buch sind viele Hinweise von Studierenden der Hochschule Karlsruhe eingegangen. Wir haben versucht, den Hinweisen gerecht zu werden, die meisten Hinweise sind bereits in Überar-beitungen Korrekturen eingeflossen. Über weitere Hinweise zur mangelhaften Verständlichkeit und auf Fehler würden wir uns freuen.

Karlsruhe, 15.03.2020

## 2 Zeitkontinuierliche Signale

Die Systemtheorie beschreibt Systeme unter anderem durch den Zusammenhang von Signalen am Systemeingang und - Ausgang. Dabei können Signale und Systeme von unterschiedlichster Natur sein. Ein System ist zum Beispiel ein elektrisches Netzwerk, das durch Eingangs- und Ausgangsspannung beschrieben werden kann. Ein weiteres System ist ein Regler, der den Füllstand eines Behälters regelt. Er besitzt ein elektrisches Eingangssignal, das die Füllstandshöhe repräsentiert. Mit seinem Ausgangssignal wird ein Stellwerk angesteuert, das den Zufluss in den Behälter steuert.

Signale können über unterschiedliche Merkmale klassifiziert werden. Aus der Einteilung in zeitkontinuierliche Signale (Teil A), zeitdiskrete Signale (Teil B) und stochastische Signale (Teil C) ergibt sich die Struktur dieser Buchreihe. Darüber hinaus werden andere Klassifizierungsmerkmale vorgestellt.

Für die Charakterisierung von Systemen werden Testfunktionen eingesetzt werden, die eine besonders anschauliche Interpretation des Ausgangssignals ermöglichen. Dazu gehören Sprungfunktionen, Rampenfunktionen und Impulsfunktionen. Diese Funktionen werden diskutiert und das Rechnen mit diesen Testfunktionen an Beispielen erläutert. In einem Experiment am Ende des Kapitels wird der Begriff der Impulsfunktion verdeutlicht.

Sogenannte lineare, zeitinvariante Systeme zeichnen sich dadurch aus, dass für sie das sogenannte Superpositionsprinzip gilt. Kann ein Eingangssignal aus einer Linearkombination bekannter Signale beschrieben werden, ergibt sich das Ausgangssignal aus derselben Linearkombination der zugehörigen Ausgangssignale. Deshalb wird die Signalalgebra vorgestellt, die die Zerlegung von Signalen in elementare Signale ermöglicht.

Das Ausgangssignal oder die Reaktion eines Systems kann vielfach über Kosinus- und Exponentialfunktionen beschrieben werden. Beide Funktionen können zu komplexen Exponentialfunktionen zusammengefasst werden. Komplexe Exponentialfunktionen werden dazu verwendet, das Einschwingverhalten von Systemen effizient zu beschreiben. Das Rechnen mit komplexen Exponentialfunktionen wird eingeführt und geübt.

Werden physikalische Größen auf Einheiten und typische Größenordnungen bezogen, ergeben sich übersichtlichere Zahlenwerte und vereinfachte Darstellungen. Im letzten Teil des Kapitels wird gezeigt, wie Signale normiert werden.

### 2.1 Klassen von Signalen

#### 2.1.1 Kontinuierliche und diskrete Signale

Signale lassen sich zunächst hinsichtlich ihres Verlaufes in kontinuierliche und diskrete Signale einteilen. So ist zum Beispiel der Spannungsverlauf an einem Mikrofon ein zeitkontinuierliches Signal, das zu jedem beliebigen Zeitpunkt  $t$  definiert ist. Sein Wertevorrat ist ebenfalls kontinuierlich, sodass von einem zeitkontinuierlichen und wertkontinuierlichen Signal gesprochen wird.

Wird dieselbe analoge Spannung mit einem Analog-Digital-Wandler digitalisiert, so wird das Signal zu definierten Zeitpunkten einer endlichen Anzahl von Quantisierungsstufen zugeordnet. Das Signal wird also in zweierlei Hinsicht diskretisiert. Nach der Digitalisierung liegt ein zeit- und wertdiskretes Signal vor.

Ein Beispiel für ein zeitdiskretes und wertkontinuierliches Signal ist die Messung einer wertkontinuierlichen Größe, die jeden Tag zu einer bestimmten Uhrzeit durchgeführt wird. Die Messgröße ist kontinuierlich, aber sie ist zwischen den einzelnen Messzeitpunkten nicht bekannt.

Ein wertdiskretes und zeitkontinuierliches Signal ist zum Beispiel der Lagerbestand eines Bauteils. Es

können nur ganze Bauelemente dem Lager entnommen werden, sodass der Lagerbestand wertediskret ist. Es ist aber zu jedem Zeitpunkt bekannt, wie viele Bauelemente eines bestimmten Typs vorhanden sind. Das Signal ist zeitkontinuierlich.

Bild 2.1 stellt ein Signal in allen möglichen Kombinationen der Diskretisierung in Zeit und Wertevorrat an einem Signal dar.

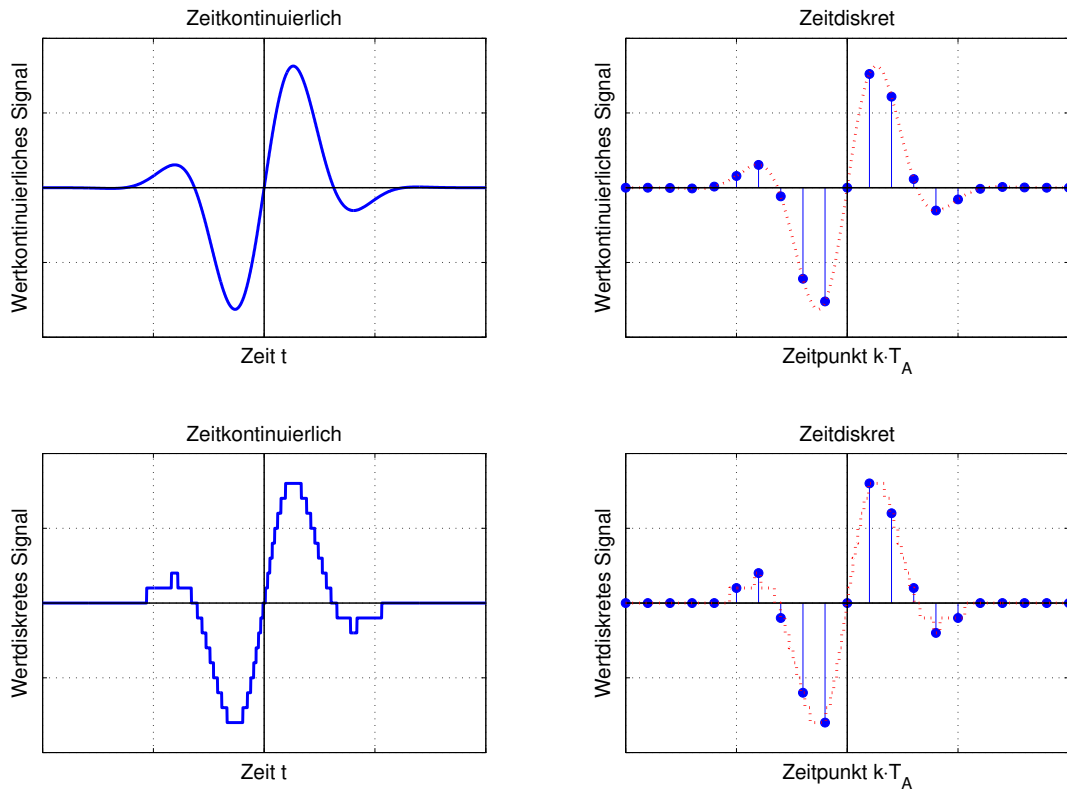


Bild 2.1: Darstellung wertkontinuierlicher und wertdiskreter Signale in zeitkontinuierlicher und zeitdiskreter Form

In den folgenden Kapiteln beschränken sich die Darstellungen auf werte- und zeitkontinuierliche Signale. Der Übergang zu diskreten Signalen erfolgt mit dem Abtasttheorem im Teil B dieser Buchreihe.

### 2.1.2 Determinierte und zufällige Signale

Determinierte Signale lassen sich durch eine mathematische Vorschrift in ihrem zeitlichen Verlauf angeben. Sie können implizit oder explizit definiert sein. Bei einem explizit definierten Signal lässt sich der zu einem Zeitpunkt  $t$  gehörende Wert direkt ablesen. Ein Beispiel dafür ist eine abklingende Sinusfunktion.

$$x(t) = 10 \cdot e^{-a \cdot t^2} \cdot \sin(b \cdot t) \quad (2.1)$$

Bei der impliziten Definition eines Signals ist der Signalwert zwar eindeutig bestimmt, er muss aber zunächst durch weitere Umformungen bestimmt werden. Ein Beispiel für ein implizit definiertes Signal ist eine Differentialgleichung.

$$\frac{dx}{dt} + 3 \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = 5 \cdot x(t) + \sin(\omega \cdot t) \quad (2.2)$$

mit der Anfangsbedingung  $y(t = 0) = y_0$ . Unabhängig von der Art der Definition ist der Wert eines determinierten Signals zu jedem Zeitpunkt exakt definiert.

Zufällige Signale können nicht exakt angegeben werden, für sie sind lediglich statistische Eigenschaften bekannt. Beispiele für zufällige Signale sind Rauschsignale, Fernsehsignale oder Sprachsignale. Information, die übertragen werden soll, ist zufällig. Wäre das Signal bekannt, müsste es nicht mehr übertragen werden. Deshalb sind zufällige Signale in der Nachrichtentechnik von entscheidender Bedeutung. Bild 2.2 zeigt jeweils ein Beispiel für ein determiniertes und ein zufälliges Signal.

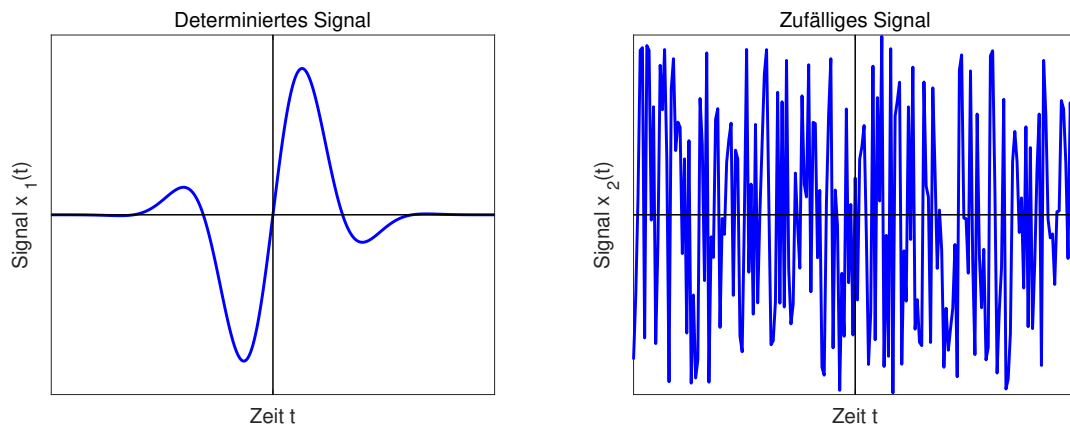


Bild 2.2: Beispiele für determinierte und zufällige Signale

In den Teilen A und B dieser Buchreihe werden determinierte Signale betrachtet. Zufällige Signale werden im Teil C dieser Buchreihe behandelt.

### 2.1.3 Zeitlich begrenzte und kausale Signale

In der Systemtheorie wird oft mit zeitlich begrenzten Signalen gearbeitet. Ein Grund dafür liegt in dem begrenzten Zeitraum, in dem ein System beobachtet werden kann. Ein weiterer Grund ist, dass für die Charakterisierung von Systemen teilweise Testsignale verwendet werden, die Sprünge aufweisen. Auch diese Signale sind zumindest einseitig zeitbegrenzt. Bild 2.3 zeigt zeitlich begrenzte Signale.

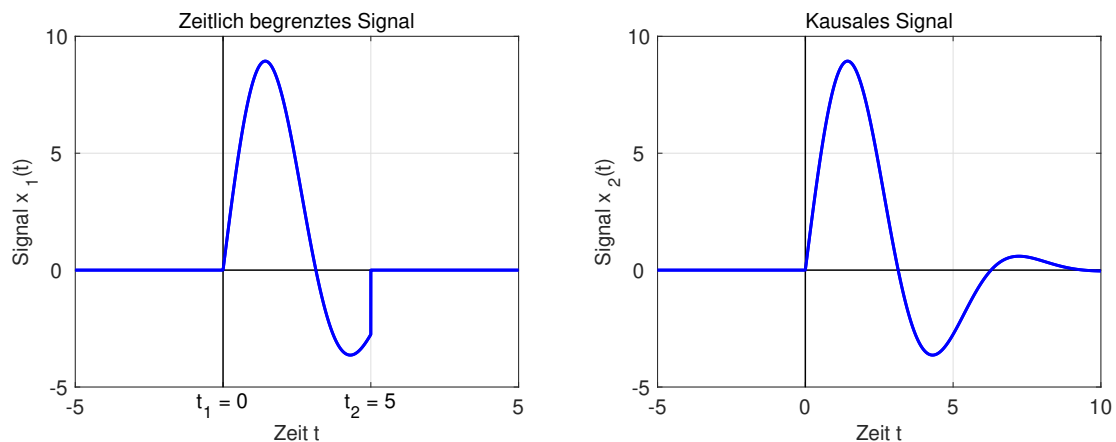


Bild 2.3: Darstellung eines beidseitig zeitbegrenzten und eines kausalen Signals

Signale sind beidseitig zeitbegrenzt, wenn sie nur für einen Zeitraum  $t_1 \leq t \leq t_2$  von null verschieden sind. Einige Signale sind nur einseitig begrenzt, zum Beispiel ist ein zum Zeitpunkt  $t = t_1$  stattfindender Spannungssprung von 0 V auf 1 V nur einseitig zeitbegrenzt. Da diese Signale rechts auf dem Zeitstrahl von null verschieden sind, werden sie als rechtsseitige Signale bezeichnet.

Ein kausales Signal ist ein spezielles rechtsseitiges Signal, für das gilt:

$$x(t) = 0 \quad \text{für } t < 0 \quad (2.3)$$

Auf die Bedeutung des Begriffes eines kausalen Signals wird bei der Diskussion von kausalen Systemen näher eingegangen.



### 2.1.4 Quadratisch integrierbare Signale

Für die Existenz von uneigentlichen Integralen zum Beispiel bei der Fourier-Transformation sind die Begriffe der Leistungs- und Energiesignale wesentlich. Zur Begriffsdefinition wird von der Vorstellung ausgegangen, dass die an einem Widerstand umgesetzte Leistung  $p_{EL}(t)$  proportional zum Quadrat der anliegenden Spannung  $u(t)$  ist.

$$p_{EL}(t) = \frac{u^2(t)}{R} = i^2(t) \cdot R \quad (2.4)$$

Die in dem Widerstand umgesetzte Energie ergibt sich aus dem Integral der umgesetzten Leistung über der Zeit.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} p_{EL}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^2(t)}{R} dt = \int_{-\infty}^{\infty} i^2(t) \cdot R dt \quad (2.5)$$

Für den Vergleich von Systemen sind vielfach Leistungsverhältnisse von Bedeutung, sodass auf einen konstanten Faktor verzichtet wird. Verallgemeinernd wird die Energie eines Signals definiert als

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (2.6)$$

### Energiesignale

Energiesignale haben in dem Intervall von  $-\infty < t < \infty$  eine von Null verschiedene und endliche Gesamtenergie. Die mathematische Bedingung für Energiesignale lautet:

$$0 < \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (2.7)$$

Diese Bedingung ist für jedes zeitbegrenzte und amplitudenbegrenzte Signal erfüllt. Signale, die gleichzeitig zeit- und amplitudenbegrenzt sind, sind damit immer Energiesignale. Die Forderung nach gleichzeitiger Begrenzung von Zeitbereich und Amplitude ist hinreichend, aber nicht unbedingt notwendig.

#### Beispiel: Energiesignal

Für das Signal  $x(t)$  mit  $a > 0$  soll geprüft werden, ob es sich um ein Energiesignal handelt.

$$x(t) = e^{-|a \cdot t|} \quad (2.8)$$

Das Signal  $x(t)$  ist für alle  $t$  mit  $-\infty < t < \infty$  definiert und ungleich null. Mit Gleichung 2.8 errechnet sich die Energie des Signals zu

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-|a \cdot t|}|^2 dt = 2 \cdot \int_0^{\infty} e^{-2 \cdot a \cdot t} dt = 2 \cdot \left. \frac{e^{-2 \cdot a \cdot t}}{-2 \cdot a} \right|_0^{\infty} = 2 \cdot \frac{0 - 1}{-2 \cdot a} = \frac{1}{a} \quad (2.9)$$

Die Energie des Signals ist endlich, das Signal  $x(t)$  ist demnach ein Energiesignal, das zeitlich nicht begrenzt ist.

Bei vielen technischen Aufgabenstellungen weisen Signale eine endliche Energie auf, sodass diese Signale in der Systemtheorie von großer Bedeutung sind. Aus mathematischer Sicht handelt es sich bei den Energiesignalen um die Klasse der in dem Intervall von  $-\infty < t < \infty$  quadratisch integrierbaren Funktionen.

### Leistungssignale

Leistungssignale haben im Intervall  $-\infty < t < \infty$  eine von Null verschiedene und endliche mittlere Leistung. Mathematisch ergibt sich folgende Definition für Leistungssignale:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (2.10)$$

Für Signale mit einer begrenzten Amplitude bedeutet das, dass sie nicht zeitbegrenzt sein müssen. Ihre Energie ist zwar unendlich, ihre Energie im Zeitintervall T ist aber begrenzt.

### Beispiel: Leistungssignal

Ein Beispiel für ein Leistungssignal ist das konstante Signal  $x(t)$ .

$$x(t) = c \quad (2.11)$$

Einsetzen der Funktion in die Bedingung für Leistungssignale ergibt

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} |c|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot T \cdot |c|^2 = |c|^2 < \infty \quad (2.12)$$

Der Wert des Integrals ist endlich, sodass das Signal  $x(t)$  ein Leistungssignal ist. Die Energie des Signals ist unendlich, sodass das konstante Signal kein Energiesignal ist.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} c^2 dt = c^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} 1 dt = \infty \quad (2.13)$$

Ein Vergleich der Definitionen von Leistungs- und Energiesignalen zeigt, dass ein Energiesignal stets ein Leistungssignal ist. Ist die Energie eines Signals endlich, gilt die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (2.14)$$

Daraus folgt für die Leistung des Signals

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = 0 \quad (2.15)$$

Signale, die weder Energie- noch Leistungssignale sind, spielen in der Systemtheorie nur in Sonderfällen eine Rolle, da die Systemtheorie technische Vorgänge beschreibt, die grundsätzlich mit einer endlichen Leistung verbunden sind.

#### 2.1.5 Symmetrieeigenschaften zeitkontinuierlicher Signale

Die Interpretation von Signalen vereinfacht sich, wenn ihre Symmetrieeigenschaften bekannt sind. Gerade und ungerade Signale weisen eine derartige Symmetrie auf. Gerade Signale sind für alle  $t$  symmetrisch zur Achse  $t = 0$ , also zur Ordinatenachse. Für ein gerades Signal gilt deshalb die Bedingung:

$$x(t) = x(-t) \quad (2.16)$$

Ein kosinusförmiges Signal ist Beispiel für ein gerades Signal, denn es gilt:

$$x_1(t) = \cos(\omega \cdot t) = \cos(-\omega \cdot t) = x_1(-t) \quad (2.17)$$

Ungerade Signale sind für alle  $t$  punktsymmetrisch zu dem Koordinatenursprung. Diese Bedingung kann mathematisch ausgedrückt werden als

$$x(t) = -x(-t) \quad (2.18)$$

Ein sinusförmiges Signal ist ein Beispiel für ein ungerades Signal, denn es gilt:

$$x_2(t) = \sin(\omega \cdot t) = -\sin(-\omega \cdot t) = -x_2(-t) \quad (2.19)$$

Bild 2.4 zeigt Kosinus- und Sinusfunktionen als Beispiele für gerade und ungerade Signale. Die Bedingung für gerade und ungerade Signale ist rot gestrichelt eingezeichnet.

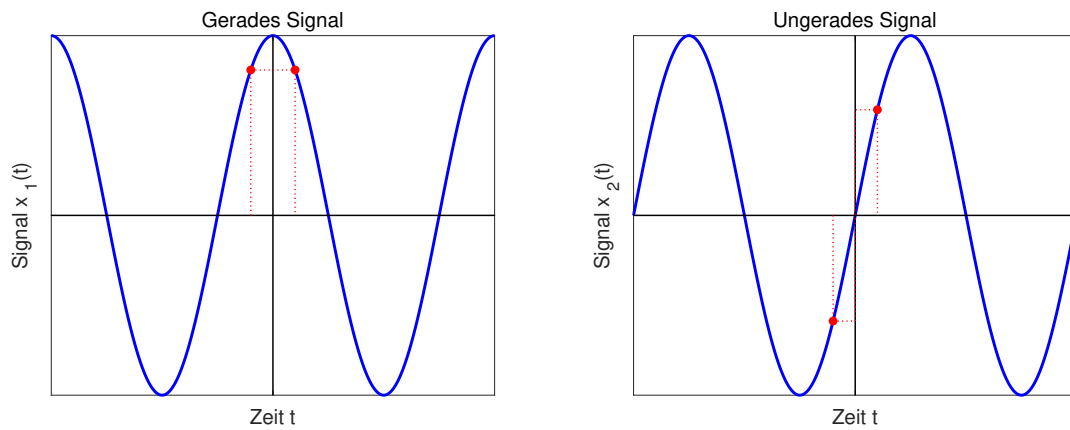


Bild 2.4: Kosinus- und Sinusfunktionen als Beispiele für gerade und ungerade Signale

Es existieren Signale, die weder gerade, noch ungerade sind, sie weisen keine Symmetrie auf. Jedes beliebige Signal lässt sich aber in einen geraden Signalanteil  $x_G(t)$  und einen ungeraden Signalanteil  $x_U(t)$  aufspalten.

$$x(t) = x_G(t) + x_U(t) \quad (2.20)$$

wobei sich die beiden Anteile ergeben aus

$$x_G(t) = \frac{1}{2} \cdot (x(t) + x(-t)) \quad (2.21)$$

und

$$x_U(t) = \frac{1}{2} \cdot (x(t) - x(-t)) \quad (2.22)$$

Bild 2.5 verdeutlicht die Zerlegung eines Signals in einen geraden und einen ungeraden Anteil an einem Beispiel.

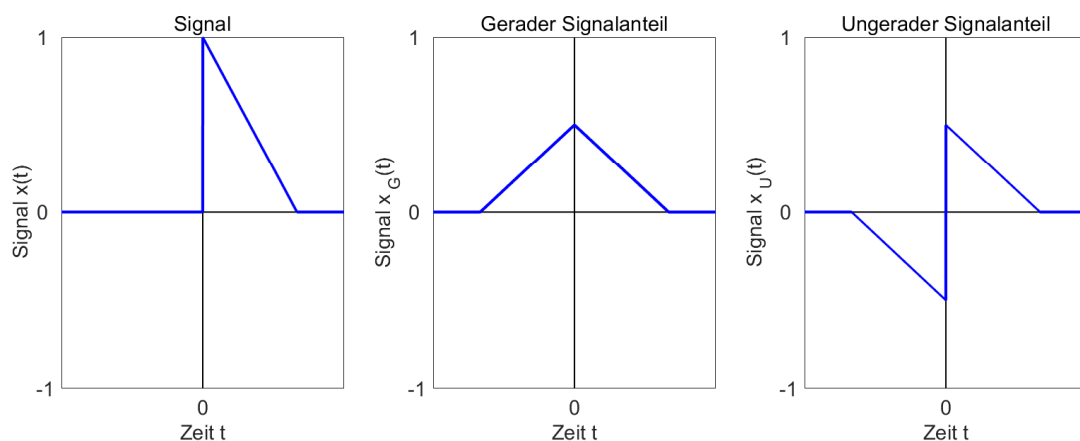


Bild 2.5: Zerlegung eines Signals in geraden und ungeraden Anteil

Neben der Symmetrie reeller Signale wird zum Beispiel bei der Fourier-Transformation ein konjugiert symmetrisches Signal  $x^*(t)$  verwendet. Ein Signal ist konjugiert symmetrisch, wenn die Beziehung

$$x(t) = x^*(-t) \quad (2.23)$$

gilt.

### 2.1.6 Zusammenfassung Signaleigenschaften

Zur besseren Übersicht sind in die Signaleigenschaften für zeit- und wertkontinuierliche Signale dargestellt.

Tabelle 2.1: Tabellarische Übersicht über Signaleigenschaften für zeit- und wertkontinuierliche Signale

Signaleigenschaft	Mathematische Beschreibung
Explizit definiertes Signal	Funktionswert kann direkt abgelesen werden, zum Beispiel $x(t) = 10 \cdot e^{-a \cdot t^2} \cdot \sin(b \cdot t)$
Implizit definiertes Signal	Funktionswert muss unter Berücksichtigung von Anfangsbedingungen berechnet werden, zum Beispiel $\frac{dx}{dt} + 3 \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2} = 5 \cdot x(t) + \sin(\omega \cdot t)$
Begrenztes Signal	$x(t) = 0 \quad \text{für } t < t_1 \text{ und/oder } t > t_2$
Kausales Signal	$x(t) = 0 \quad \text{für } t < 0$
Energiesignal	$0 < \int_{-\infty}^{\infty}  x(t) ^2 dt < \infty$
Leistungssignal	$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2}  x(t) ^2 dt < \infty$
Gerades Signal	$x(t) = x(-t)$
Ungerades Signal	$x(t) = -x(-t)$
Gerader Signalanteil	$x_G(t) = \frac{1}{2} \cdot (x(t) + x(-t))$
Ungerader Signalanteil	$x_U(t) = \frac{1}{2} \cdot (x(t) - x(-t))$
Konjugiert symmetrisches Signal	$x(t) = x^*(-t)$

## 2.2 Rechnen mit Sprung- und Impulsfunktion

### 2.2.1 Allgemein

Die Beschreibung und Interpretation von Systemen kann unter anderem über die Systemreaktion auf standardisierte Eingangssignale erfolgen. Deshalb werden in diesem Abschnitt Sprung- und Impulsfunktionen vorgestellt, weitere Funktionen daraus abgeleitet und das Rechnen mit Impulsfunktionen vertieft.

### 2.2.2 Sprungfunktion

Die Sprungfunktion  $\sigma(t)$  ist als Grenzwert einer Funktion  $\sigma_\varepsilon(t)$  definiert, die ihren Funktionswert in einem Zeitraum der Länge  $\varepsilon$  von 0 auf 1 wechselt. Die Funktion  $\sigma_\varepsilon(t)$  wird im Folgenden als verallgemeinerte Sprungfunktion  $\sigma_\varepsilon(t)$  bezeichnet. Sie ist abschnittsweise definiert als

$$\sigma_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < -\varepsilon/2 \\ \frac{1}{\varepsilon} \cdot t + \frac{1}{2} & \text{für } -\varepsilon/2 < t < \varepsilon/2 \\ 1 & \text{für } \varepsilon/2 \leq t \end{cases} \quad (2.24)$$

Ihr Funktionsverlauf ist Bild 2.6 dargestellt.

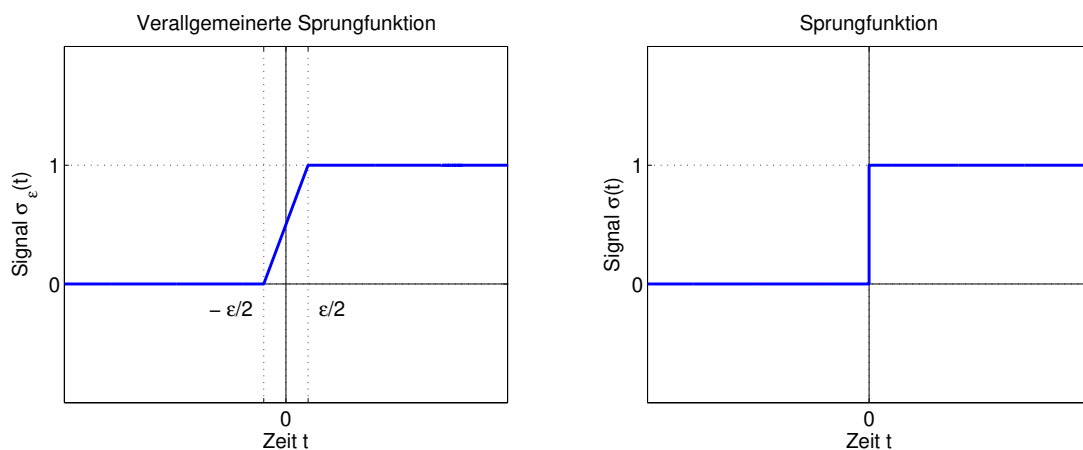


Bild 2.6: Verallgemeinerte Sprungfunktion  $\sigma_\varepsilon(t)$

Mit kleiner werdender Breite  $\varepsilon$  wird der Übergang immer steiler. Über eine Grenzwertbetrachtung  $\varepsilon \rightarrow 0$  geht die Funktion  $\sigma_\varepsilon(t)$  in die Sprungfunktion  $\sigma(t)$  über, die an der Stelle  $t = 0$  von 0 auf 1 springt. Die Sprungfunktion  $\sigma(t)$  ist abschnittsweise definiert als

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

Für den Zeitpunkt  $t = 0$  existieren in der Literatur unterschiedliche Definitionen. Im Hinblick auf diskrete Signale wird hier für den Zeitpunkt  $t = 0$  der Funktionswert  $\sigma(t = 0) = 1$  gewählt.

Bei der Diskussion der Sprungstelle wird oftmals von rechtsseitigem und linksseitigem Grenzwert gesprochen. Der linksseitige Grenzwert wird als  $\sigma(0_-)$  bezeichnet. Er hat den Wert der Funktion kurz vor dem Sprung  $\sigma(0_-) = 0$ . Der rechtsseitige Grenzwert wird als  $\sigma(0_+)$  bezeichnet. Er hat den Wert der Funktion kurz nach dem Sprung  $\sigma(0_+) = 1$ .

Die Sprungfunktion wird auch als Heaviside-Funktion bezeichnet. Sie wird zum Beispiel dafür verwendet, Einschaltvorgänge zu beschreiben. Die Sprungfunktion ist zeitlich nicht begrenzt, und sie ist kein Energiesignal. Wegen ihrer konstanten Amplitude ist die Bedingung für ein Leistungssignal erfüllt. Da die Sprungfunktion für  $t < 0$  null ist, ist sie eine kausale Funktion.

### 2.2.3 Rechteckfunktion

Die Rechteckfunktion ist abschnittsweise definiert als

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < -T \\ 1 & \text{für } -T \leq t < T \\ 0 & \text{für } T \leq t \end{cases} \quad (2.26)$$

Die Rechteckfunktion ist eine Funktion mit endlicher Amplitude und endlicher Dauer. Die Bedingung für ein Energiesignal ist deshalb erfüllt. Die Funktion repräsentiert damit ein Energie- und Leistungssignal. Sie ist nach Gleichung 2.26 aber keine kausale Funktion, da sie für  $t < 0$  nicht null ist. Durch eine Verschiebung um den Zeitraum  $T$  nach rechts kann die Rechteckfunktion in eine kausale Funktion überführt werden. Beide Funktionen sind in Bild 2.7 dargestellt.

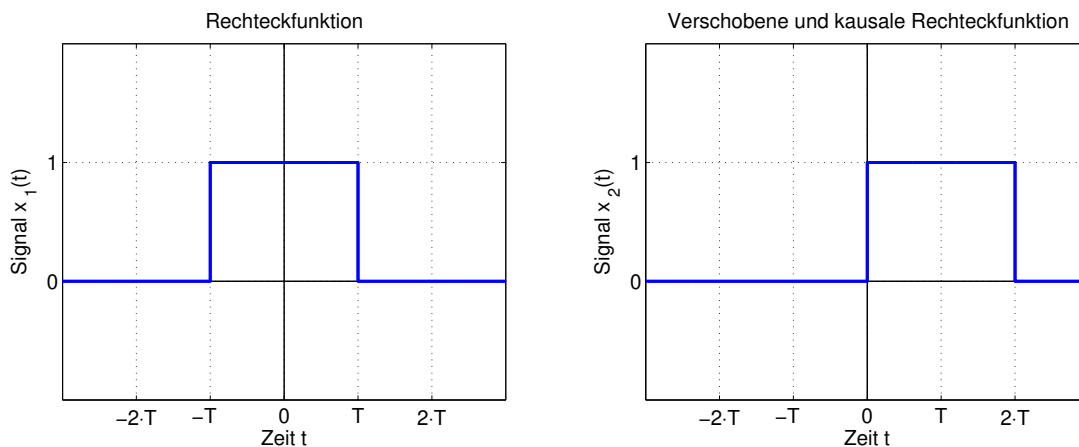


Bild 2.7: Rechteckfunktion und verschobene Rechteckfunktion

Die Rechteckfunktion kann neben der abschnittswiseen Definition auch als Summe zweier Sprungfunktionen dargestellt werden, die um  $-T$  beziehungsweise  $+T$  verschoben sind.

$$x_1(t) = \sigma(t + T) - \sigma(t - T) \quad (2.27)$$

Entsprechend gilt für die kausale Rechteckfunktion

$$x_2(t) = \sigma(t) - \sigma(t - T) \quad (2.28)$$

### 2.2.4 Signum-Funktion

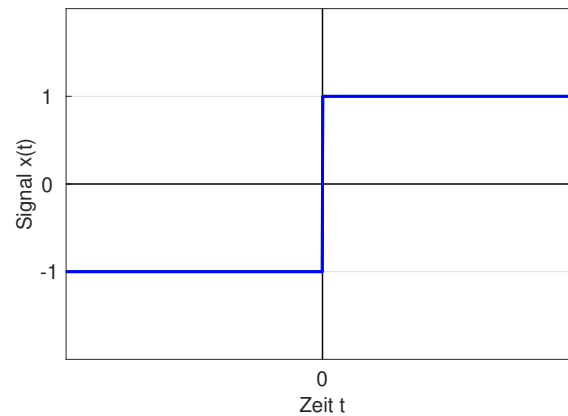
Die Signum-Funktion  $\text{sgn}(t)$  ist abschnittsweise definiert als

$$x(t) = \text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } t < 0 \\ +1 & \text{für } 0 \leq t \end{cases} \quad (2.29)$$

Auch die Signum-Funktion kann mithilfe der Sprungfunktion dargestellt werden.

$$x(t) = \text{sgn}(t) = 2 \cdot \sigma(t) - 1 \quad (2.30)$$

Bild 2.8 stellt die Signum-Funktion grafisch dar. Sie ist unendlich lange ungleich null und ist kein Energiesignal. Wegen ihrer konstanten Amplitude ist die Bedingung für ein Leistungssignal erfüllt. Die Signum-Funktion ist nicht kausal und kann durch eine zeitliche Verschiebung auch nicht in ein kausales Signal überführt werden.

Bild 2.8: Signum-Funktion  $\text{sgn}(t)$ 

### 2.2.5 Rampenfunktion

Ideale Sprung-, Rechteck- und Signum-Funktionen werden als Testsignale verwendet. Praktisch lassen sie sich wegen der unendlich großen Signaländerung an den Unstetigkeitsstellen allerdings nur näherungsweise realisieren. Außerdem können Systeme, die mit einem sprunghaftem Signal angeregt werden, zerstört werden. Zum Beispiel werden die Schaufeln eines Turbinenrades, das sprunghaft mit einem großen Volumenstrom beaufschlagt wird, brechen. Die Rampenfunktion bietet einen stetigen Übergang der Funktionswerte für den Zeitraum  $t < 0$  und den Zeitraum  $t \geq 0$ . Die Rampenfunktion ist definiert als

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ t & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

Bild 2.9 stellt die Rampenfunktion grafisch dar.

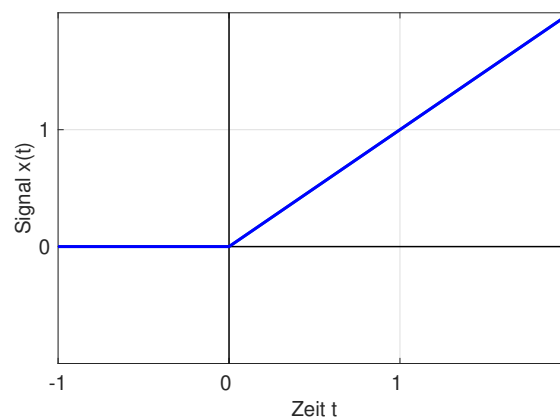


Bild 2.9: Rampenfunktion

Die Rampenfunktion kann sowohl als Integral der Sprungfunktion

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \sigma(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ t & \text{für } 0 \leq t \end{cases} \quad (2.32)$$

als auch als Produkt von Sprungfunktion und Zeit  $t$  dargestellt werden.

$$x(t) = t \cdot \sigma(t) \quad (2.33)$$

Die Rampenfunktion hat weder eine begrenzte Amplitude, noch eine begrenzte Zeitdauer, sie ist weder Energie- noch Leistungssignal. Eine ideale Rampenfunktion kann in realen Systemen deshalb nur für



einen begrenzten Zeitraum realisiert werden. Da die Rampenfunktion für  $t < 0$  null ist, beschreibt sie ein kausales Signal.

### 2.2.6 Dreieckfunktion

Die Dreieckfunktion ist in Bild 1.10 dargestellt und definiert als

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < -T \\ 1 + t/T & \text{für } -T \leq t < 0 \\ 1 - t/T & \text{für } 0 \leq t < T \\ 0 & \text{für } T \leq t \end{cases} \quad (2.34)$$

Bild 2.10 stellt eine Dreieckfunktion und eine verschobene Dreieckfunktion grafisch dar.

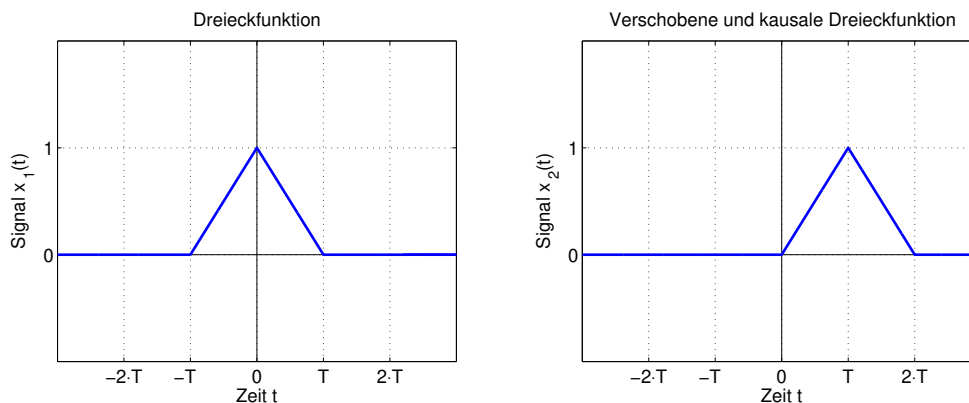


Bild 2.10: Dreieckfunktion und verschobene Dreieckfunktion

Die Dreieckfunktion ist eine Funktion mit endlicher Amplitude und endlicher Dauer. Die Bedingung für ein Energiesignal ist erfüllt. Die Dreieckfunktion ist damit ein Energie- und Leistungssignal. Wie die Rechteckfunktion beginnt die Dreieckfunktion bereits für  $t = -T$ . Sie ist deshalb nicht kausal, kann aber durch Verschiebung um den Zeitraum  $T$  nach rechts in ein kausales Signal überführt werden. Die Dreieckfunktion kann auf unterschiedliche Art aus den bereits dargestellten Funktionen gewonnen werden, zum Beispiel durch Überlagerung von drei Rampenfunktionen.

### 2.2.7 Impulsfunktion

Von großer Bedeutung für die theoretische Charakterisierung von Systemen ist die Impulsfunktion  $\delta(t)$ . Die Impulsfunktion ist als Grenzwert einer Rechteckfunktion  $\delta(t)$  definiert, die eine Breite  $\epsilon$  und der Höhe  $1/\epsilon$  aufweist. Bild 2.11 zeigt den Rechteckimpuls.

$$\delta_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon} \cdot \left( \sigma\left(t + \frac{\epsilon}{2}\right) - \sigma\left(t - \frac{\epsilon}{2}\right) \right) \quad (2.35)$$

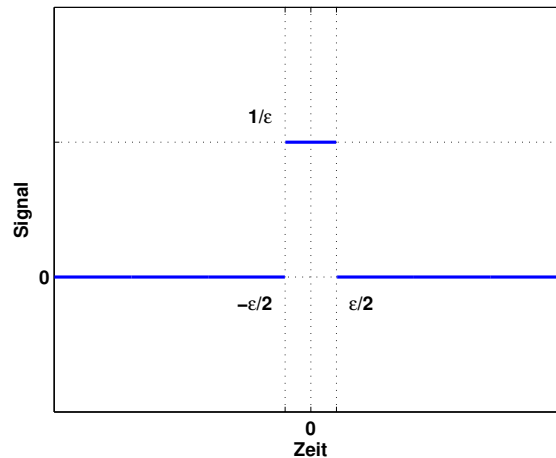


Bild 2.11: Rechteckfunktion mit endlicher Breite  $\epsilon$  zur Annäherung der Impulsfunktion

Mit kleiner werdender Breite  $\epsilon$  wird der das Rechteck immer schmaler, aber auch höher, so dass die Fläche des Rechtecks immer gleich 1 bleibt. Über eine Grenzwertbetrachtung  $\epsilon \rightarrow 0$  geht diese Rechteckfunktion  $\delta(t)$  in die Impulsfunktion  $\delta(t)$  über.

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & \text{für } t < -\epsilon/2 \\ 1/\epsilon & \text{für } -\epsilon/2 < t < \epsilon/2 \\ 0 & \text{für } \epsilon/2 \leq t \end{cases} \quad (2.36)$$

Bei der Impulsfunktion  $\delta(t)$  handelt sich um einen unendlich kurzen Impuls an der Stelle  $t = 0$ , der eine unendlich große Höhe hat. Die Größe wird durch einen Pfeil der Länge 1 an der Stelle  $t = 0$  dargestellt, weil die Fläche unter der Impulsfunktion den Flächeninhalt 1 aufweist.

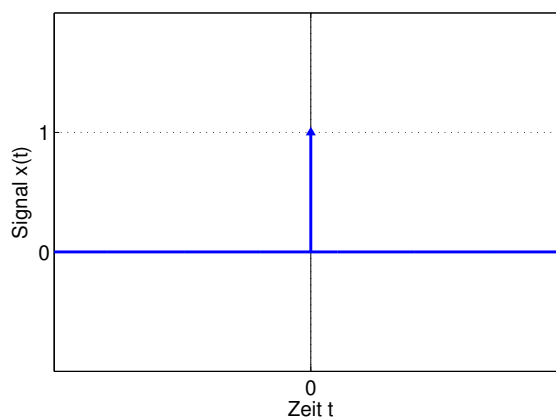


Bild 2.12: Impulsfunktion  $\delta(t)$

Die Impulsfunktion ist eine gerade Funktion, denn es gilt die Beziehung

$$\delta(t) = \delta(-t). \quad (2.37)$$

Die Impulsfunktion ist eine kausale Funktion, da sie für  $t < 0$  den Wert null besitzt, und sie ist ein Energiesignal, da sie eine begrenzte Energie besitzt.

Die Impulsfunktion wird aus Dirac-Impuls bezeichnet und ist als Grenzwert einer gewöhnlichen Funktion beschrieben. Neben der dargestellten Herleitung über die Rechteckfunktion wird in einem Projekt am Ende dieses Kapitels die Gaußfunktion zur Näherung des Impulses verwendet. In dem Projekt wird der Impuls anschaulich verglichen mit einem Hammerschlag auf ein schwingungsfähiges System, zum Beispiel einer Glocke. Das System wird für eine extrem kurze Zeit mit großer Leistung angeregt. Die Glocke antwortet auf die Anregung mit einer Schwingung, die charakteristisch für sie ist. Es wird sich zeigen, dass bestimmte Systeme durch ihre Antwort auf einen Impuls am Eingang vollständig charakterisiert sind.

### 2.2.8 Rechnen mit Impulsfunktionen

Die Impulsfunktion ist Gegenstand der Distributionstheorie [Gelf60]. Hier soll auf Basis der vorgestellten Grenzwertbetrachtung eine anwendungsorientierte Anschauung vermittelt werden, die nicht weiter auf die Distributionstheorie eingeht. Die Gleichung 2.35 beschreibt den Impuls über eine Rechteckfunktion.

$$\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left( \sigma\left(t + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \sigma\left(t - \frac{\varepsilon}{2}\right) \right) \quad (2.38)$$

#### Integral der Impulsfunktion

Das Integral der Funktion von  $t = -\infty$  bis  $+\infty$  berechnet sich zu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} 1/\varepsilon dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left( \frac{\varepsilon}{2} - \left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) \right) = \left( \frac{\varepsilon}{2 \cdot \varepsilon} - \left(-\frac{\varepsilon}{2 \cdot \varepsilon}\right) \right) = 1 \quad (2.39)$$

Das Integral über die Impulsfunktion ist demnach 1. Das Integral der Impulsfunktion wird als Gewicht der Impulsfunktion bezeichnet und wie in Bild 2.12 mit einem Pfeil der Länge 1 dargestellt.

#### Stammfunktion der Impulsfunktion

Die Stammfunktion der Impulsfunktion wird über die Näherung für die Impulsfunktion bestimmt. Sie ergibt sich mit der Rechteckfunktion  $\delta(t)$  aus

$$\int_{-\infty}^t \delta_\varepsilon(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & \text{für } t < -\varepsilon/2 \\ \frac{1}{\varepsilon} \cdot t + \frac{1}{2} & \text{für } -\varepsilon/2 < t < \varepsilon/2 \\ 1 & \text{für } \varepsilon/2 \leq t \end{cases} \quad (2.40)$$

Diese Funktion ist die in Bild 2.6 dargestellte verallgemeinerte Sprungfunktion  $\sigma(t)$ . Für die hier vorgestellte Grenzwertbetrachtung ergibt sich für die Ableitung der verallgemeinerten Sprungfunktion  $\sigma(t)$

$$\frac{d\sigma_\varepsilon}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{für } t < -\varepsilon/2 \\ \frac{1}{\varepsilon} & \text{für } -\varepsilon/2 < t < \varepsilon/2 \\ 0 & \text{für } \varepsilon/2 \leq t \end{cases} = \delta_\varepsilon(t) \quad (2.41)$$

Für den Grenzwert  $\varepsilon \rightarrow 0$  ergibt sich die Ableitung der Sprungfunktion

$$\frac{d\sigma}{dt} = \delta(t) \quad (2.42)$$

und umgekehrt die Stammfunktion der Impulsfunktion

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \sigma(t) \quad (2.43)$$

### Ausblendeigenschaft der Impulsfunktion

Aus der Auswertung des folgenden Integrals ergibt sich eine weitere wichtige Eigenschaft der Impulsfunktion, nämlich die Ausblendeigenschaft der Impulsfunktion. Ausgangspunkt ist die Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot x(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} x(t) dt \quad (2.44)$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein  $t_0$  mit  $a < t_0 < b$ , für das gilt:

$$\int_a^b x(t) dt = (b-a) \cdot x(t_0) \quad (2.45)$$

Damit ergibt sich für Gleichung 2.44

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot x(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} x(t) dt = x(0) \quad (2.46)$$

Mit dieser Rechenvorschrift lässt sich der Abtastwert der Funktion  $x(t)$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  beschreiben. Die Methode kann für beliebige Zeitpunkte  $t_0$  verallgemeinert werden zu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot x(t + t_0) dt = x(t_0) \quad (2.47)$$

Die Ausblendeigenschaft der Impulsfunktion wird in Bild 2.13 grafisch veranschaulicht.

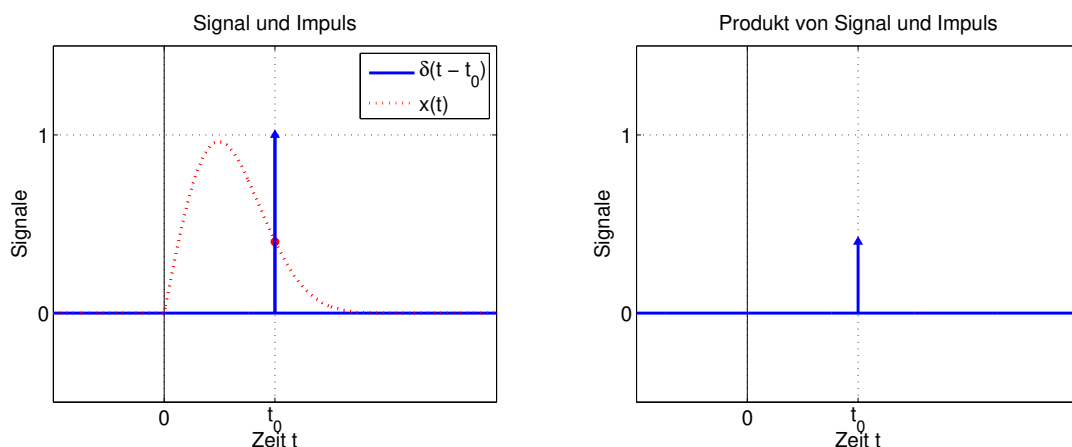


Bild 2.13: Grafische Darstellung der Ausblendeigenschaft

Die Funktion  $x(t)$  und die Impulsfunktion an der Stelle  $t_0$  sind im Bild links dargestellt. Beide Funktionen werden miteinander multipliziert, das Produkt besteht aus einem Impuls an der Stelle  $t_0$  mit dem Gewicht  $x(t_0)$ . Er wird im rechten Bildteil gezeigt. Da das Gewicht des Impulses eine Konstante ist, kann sie aus dem Integral gezogen werden. Übrig bleibt das Integral über eine Impulsfunktion, das nach den diskutierten Rechenregeln den Wert eins aufweist.

### Ableitung der Impulsfunktion

Die Ableitung der Impulsfunktion ist nur bei der Auswertung von Integralen von Bedeutung. In diesem Fall kann die Ableitung durch Anwendung der partiellen Integration umgangen werden.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\delta}{dt} \cdot x(t) dt = \delta(t) \cdot x(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot \frac{dx}{dt} dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot \frac{dx}{dt} dt = - \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0} \quad (2.48)$$

### Zeitliche Skalierung

Wird die Impulsfunktion skaliert, ergibt sich die Funktion

$$x(t) = \delta(a \cdot t) \quad (2.49)$$

Mit  $a > 0$  errechnet sich das Integral in Gleichung 2.49 nach Substitution zu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(a \cdot t) dt = \frac{1}{a} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(a \cdot t) d(a \cdot t) = \frac{1}{a} \quad (2.50)$$

Für negative Werte  $a$  muss zusätzlich die Integrationsreihenfolge geändert werden, und es ergibt sich ein negatives Vorzeichen. Allgemein gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(a \cdot t) dt = \frac{1}{|a|} \quad (2.51)$$

Eine mit  $a$  skalierte Impulsfunktion weist demnach das Gewicht  $1/|a|$  auf.

### 2.2.9 Zusammenfassung Testfunktionen

In Tabelle 2.2 sind die wesentlichen Testfunktionen und in Tabelle 2.3 die Eigenschaften der Impulsfunktion zusammengefasst.

Tabelle 2.2: Tabellarische Zusammenfassung von Testfunktionen

Testfunktion	Mathematische Beschreibung
Sprungfunktion	$x(t) = \sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } 0 \leq t \end{cases}$
Rechteckfunktion der Länge $2 \cdot T$	$x(t) = \sigma(t + T) - \sigma(t - T)$
Signum-Funktion	$x(t) = 0 \text{ für } t < 0$
Rampenfunktion	$x(t) = \int_{-\infty}^t \sigma(\tau) d\tau = t \cdot \sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ t & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$
Impulsfunktion	$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_{\varepsilon}(t)$

Tabelle 2.3: Tabellarische Zusammenfassung der wesentlichen Eigenschaften der Impulsfunktion

Testfunktion	Mathematische Beschreibung
Stammfunktion der Impulsfunktion	$x(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \sigma(t)$
Ausblendeigenschaft der Impulsfunktion	$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot x(t + t_0) dt = x(t_0)$
Integral über die Impulsfunktion	$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$
	$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(a \cdot t) dt = \frac{1}{ a }$

## 2.3 Funktionsalgebra

Die Berechnung des Ausgangssignals eines linearen Systems kann auf bekannte Ausgangssignale zurückgeführt werden, wenn sich das Eingangssignal auf die entsprechenden Eingangssignale zurückführen lässt. Dieses Prinzip wird in Abschnitt 3.3.5 als Superpositionsprinzip eingeführt. Zur Anwendung des Superpositionsprinzips ist es notwendig, Signale mithilfe der in diesem Abschnitt dargestellten Funktionsalgebra umrechnen zu können.

### 2.3.1 Operationen mit kontinuierlichen Funktionen

Für die Umrechnung von Signalen sind mathematische Operationen notwendig. Die wichtigsten elementaren Operationen sind im Folgenden zusammengefasst.

#### Skalierung der Amplitude

Das Signal  $a \cdot x(t)$  ist gegenüber dem Signal  $x(t)$  verstärkt ( $a > 1$ ) beziehungsweise gedämpft ( $0 < a < 1$ ). Bild 2.14 zeigt ein Signal  $x(t)$  und das um einen Faktor 2 verstärkte Signal  $2 \cdot x(t)$ .

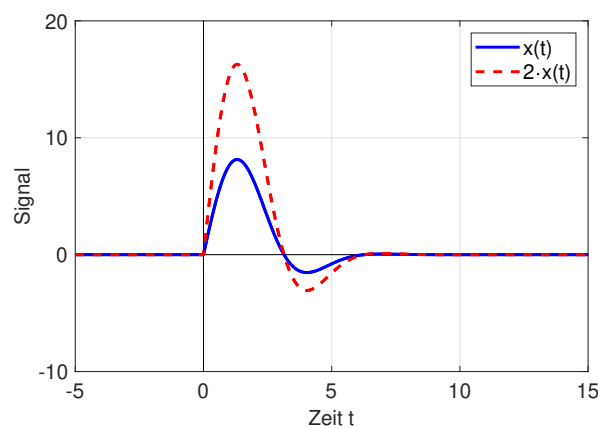


Bild 2.14: Darstellung eines Signals  $x(t)$  und eines verstärkten Signals  $2 \cdot x(t)$

#### Zeitliche Verschiebung

Das Signal  $x(t - t_0)$  ist gegenüber dem Signal  $x(t)$  nach rechts ( $t_0 > 0$ ) beziehungsweise nach links ( $t_0 < 0$ ) verschoben. Bild 2.15 zeigt ein Signal  $x(t)$  und ein um  $t_0 = 5$  nach rechts verschobenes Signal  $x(t - 5)$ .

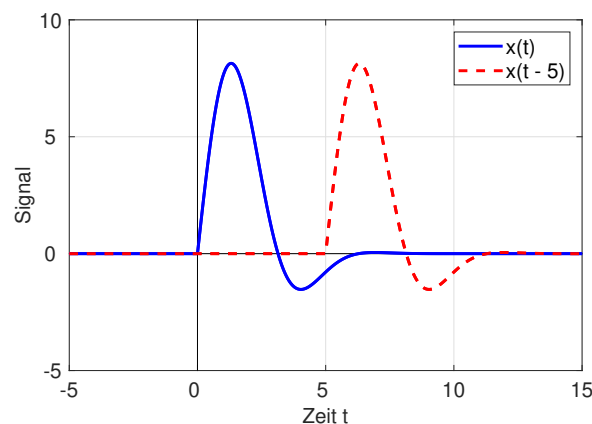


Bild 2.15: Darstellung eines Signals  $x(t)$  und des um  $t_0 = 5$  nach rechts verschobenen Signals  $x(t - 5)$

Das Vorgehen wird am einfachsten deutlich, wenn das Argument der Funktion analysiert wird. Die Funktion  $x(t)$  weist zum Zeitpunkt  $t = 3$  den Funktionswert 0 auf. Da in dem Zeitargument der Funktion  $x(t - 5)$  das Argument um 5 verringert wird, weist die Funktion  $x(t - 5)$  erst an der Stelle  $t = 8$  den entsprechenden Funktionswert auf.

### Zeitliche Spiegelung

Die Spiegelung eines Signals  $x(t)$  an der Stelle  $t = 0$  kann mathematisch durch den Ausdruck  $x(-t)$  dargestellt werden. Bild 2.16 zeigt ein Signal  $x(t)$  und das gespiegelte Signal  $x(-t)$ .

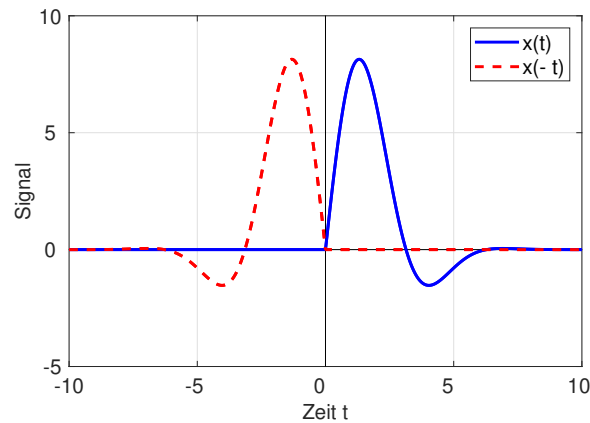


Bild 2.16: Darstellung eines Signals  $x(t)$  und des an  $t = 0$  gespiegelten Signals  $x(t)$

Auch hier kann das Zeitargument der Funktion analysiert werden. Die Funktion  $x(t)$  weist zum Zeitpunkt  $t = 1$  den Funktionswert 8 auf. Die Funktion  $x(-t)$  besitzt denselben Funktionswert an der Stelle  $t = -1$ .

### Zeitliche Skalierung

Das Signal  $x(a \cdot t)$  ist gegenüber dem Signal  $x(t)$  gestaucht ( $a > 1$ ) beziehungsweise gedehnt ( $0 < a < 1$ ). Bild 2.17 zeigt ein Signal  $x(t)$  und ein Signal  $x(2 \cdot t)$ .

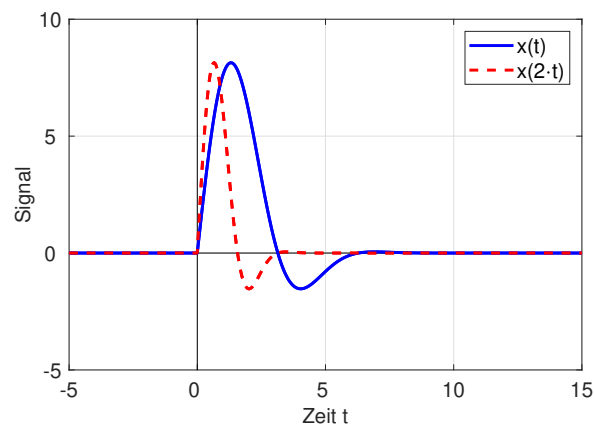


Bild 2.17: Darstellung eines Signals  $x(t)$  und eines gestauchten Signals  $x(2 \cdot t)$

Auch Stauchung und Dehnung werden am einfachsten deutlich, wenn das Zeitargument der Funktion  $x(a \cdot t)$  analysiert wird.



### 2.3.2 Darstellung abschnittsweise definierter Funktionen mit Sprungfunktionen

Die vorgestellten Sprung- und Impulsfunktionen ermöglichen in Kombination mit den vorgestellten Rechenregeln die Synthese weiterer Testfunktionen. An einem Beispiel wird das Rechnen mit Sprungfunktionen verdeutlicht. Das Signal aus Bild 2.18 soll durch eine Kombination von Sprungfunktionen geschlossen also ohne Fallunterscheidung dargestellt werden.

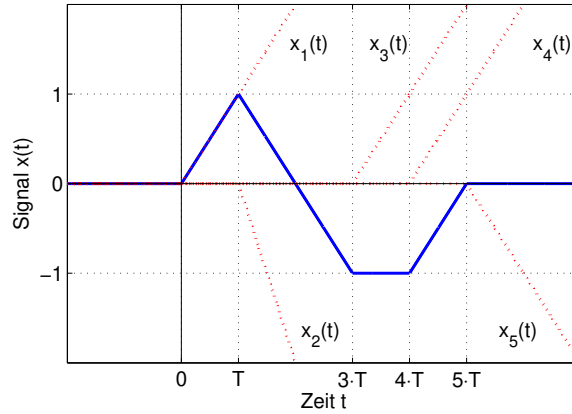


Bild 2.18: Darstellung eines Signals  $x(t)$  als Summe von Funktionen

Bei der Beschreibung des Signals  $x(t)$  sind insbesondere die Stellen von Bedeutung, an denen sich die Steigung des Signals ändert. Aus Bild 2.18 kann abgelesen werden, dass das die Stellen 0, T, 3·T, 4·T und 5·T sind.

Zum Zeitpunkt  $t = 0$  beginnt die Funktion, mit einer Steigung  $1/T$  zu steigen. Die Funktion  $x_1(t)$ , die dieses Verhalten beschreibt, ist die Rampenfunktion

$$x_1(t) = \frac{1}{T} \cdot t \cdot \sigma(t) \quad (2.52)$$

Zum Zeitpunkt  $t = T$  ändert sich die Steigung der Funktion um  $-2/T$ . Der Faktor 2 ergibt sich dabei aus der Kompensation der vor diesem Zeitpunkt vorhandenen Steigung  $+1/T$  und der nach dem Zeitpunkt gewünschten Steigung  $-1/T$ . Zu der Funktion  $x_1(t)$  muss die Funktion  $x_2(t)$  addiert werden, die aber erst ab dem Zeitpunkt  $t = T$  einen Einfluss haben darf. Um die Funktion für  $t < T$  auszublenden, wird die Sprungfunktion verwendet.

$$x_2(t) = -\frac{2}{T} \cdot (t - T) \cdot \sigma(t - T) \quad (2.53)$$

Das Vorgehen wiederholt sich mit unterschiedlichen Steigungsänderungen zu den Zeitpunkten 3·T, 4·T und 5·T, und es ergeben sich die Funktionen

$$x_3(t) = \frac{1}{T} \cdot (t - 3 \cdot T) \cdot \sigma(t - 3 \cdot T) \quad (2.54)$$

$$x_4(t) = \frac{1}{T} \cdot (t - 4 \cdot T) \cdot \sigma(t - 4 \cdot T) \quad (2.55)$$

$$x_5(t) = -\frac{1}{T} \cdot (t - 5 \cdot T) \cdot \sigma(t - 5 \cdot T) \quad (2.56)$$

Das Signal  $x(t)$  kann damit als Überlagerung der Teilfunktionen  $x_1(t)$  bis  $x_5(t)$  dargestellt werden.

$$x(t) = \frac{t}{T} \cdot \sigma(t) - 2 \cdot \frac{t - T}{T} \cdot \sigma(t - T) + \frac{t - 3 \cdot T}{T} \cdot \sigma(t - 3 \cdot T) + \frac{t - 4 \cdot T}{T} \cdot \sigma(t - 4 \cdot T) - \frac{t - 5 \cdot T}{T} \cdot \sigma(t - 5 \cdot T) \quad (2.57)$$

Durch den Einsatz der Sprungfunktionen ist gewährleistet, dass die Funktion erst ab einem definierten Zeitpunkt wirkt. Sprungfunktionen ermöglichen damit die sukzessive Synthese des Signals  $x(t)$ .

### 2.3.3 Verallgemeinerte Ableitung

Die klassischen Differentiationsregeln erlauben die Berechnung von Ableitungen für stetige Funktionen. In der Systemtheorie werden aber Testfunktionen eingesetzt, die an einer oder mehreren Stellen Sprünge aufweisen können. Um auch für diese Funktionen Ableitungen angeben zu können, wird ein Vorgehen zur Bestimmung einer verallgemeinerten Ableitung von Funktionen mit Sprüngen definiert. Dazu wird die Funktion mit einem Sprung an der Stelle  $t = t_0$  in eine stetige Funktion  $x_s(t)$  und einen idealen Sprung der Höhe  $\Delta x$  an der Stelle  $t_0$  zerlegt.

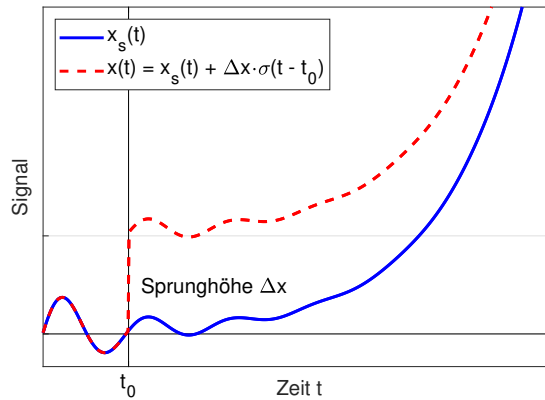


Bild 2.19: Zerlegung der Funktion  $x(t)$  in einen stetigen Anteil  $x_s(t)$  und einen idealen Sprung der Höhe  $\Delta x$

Die Höhe  $\Delta x$  des Sprungs ergibt sich aus der Differenz des rechtsseitigen Grenzwertes  $x(t_{0+})$  und linksseitigen Grenzwertes  $x(t_{0-})$  zu

$$\Delta x = x(t_{0+}) - x(t_{0-}) \quad (2.58)$$

Aufgrund der Linearität der Ableitungsoperation und der Ableitung der Sprungfunktion

$$\frac{d\sigma}{dt} = \delta(t) \quad (2.59)$$

errechnet sich die Ableitung der Funktion  $x(t)$  zu

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dx_s}{dt} + \frac{d}{dt} (\sigma(t - t_0) \cdot (x(t_{0+}) - x(t_{0-}))) = \frac{dx_s}{dt} + \frac{d}{dt} (\sigma(t - t_0) \cdot \Delta x) \\ &= \frac{dx_s}{dt} + \delta(t - t_0) \cdot \Delta x \end{aligned} \quad (2.60)$$

Die verallgemeinerte Ableitung ergibt sich damit aus der Ableitung der stetigen Funktion  $x_s(t)$  und einem Impuls an der Sprungstelle  $t_0$  mit dem Gewicht der Sprunghöhe  $\Delta x$ . Im Folgenden wird bei der zeitlichen Ableitung immer die verallgemeinerte zeitliche Ableitung angewendet.

### Beispiel: Funktionsalgebra

Gegeben ist folgender Signalverlauf  $x(t)$ . Für  $t > 6$  hat das Signal den Wert null.

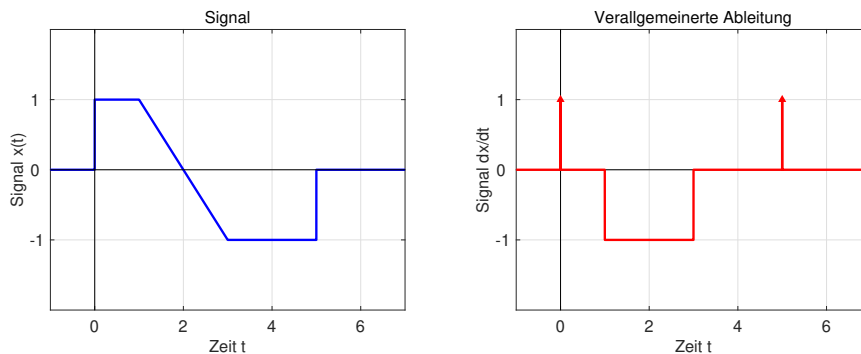


Bild 2.20: Signalverlauf eines Signals  $x(t)$  und verallgemeinerte Ableitung des Signalverlaufs

Das Signal setzt sich aus einem Sprung an der Stelle  $t = 0$ , einer Rampe mit negativer Steigung beginnend an der Stelle  $t = 1$  zusammen. Die negative Steigung wird an der Stelle  $t = 3$  kompensiert, an der Stelle  $t = 5$  weist das Signal einen positiven Sprung auf. Mathematisch ergibt sich

$$x(t) = \sigma(t) - (t-1) \cdot \sigma(t-1) + (t-3) \cdot \sigma(t-3) + \sigma(t-5) \quad (2.61)$$

Die Ableitung des Signals erfolgt nach den Rechenregeln der Differentiation mit dem Zusatz der Ableitung von Sprüngen. Mit der Produktregel der Differentiation ergibt sich

$$\frac{dx}{dt} = \delta(t) - ((t-1) \cdot \delta(t-1) + \sigma(t-1)) + ((t-3) \cdot \delta(t-3) + \sigma(t-3)) + \delta(t-5) \quad (2.62)$$

In dem Ausdruck treten Terme der Form

$$y(t) = (t-t_0) \cdot \delta(t-t_0) = 0 \quad (2.63)$$

auf. Da immer einer der beiden Faktoren null ist, ist das Produkt insgesamt null. Damit kann die Ableitung vereinfacht werden zu

$$\frac{dx}{dt} = \delta(t) - \sigma(t-1) + \sigma(t-3) + \delta(t-5) \quad (2.64)$$

Die verallgemeinerte Ableitung ist in Bild 2.20 rechts dargestellt.



Im Online-Portal *Systemtheorie Online* verdeutlicht die Applikation *Komplexe Exponentialfunktion* den Zusammenhang zwischen der Lage des Wertes  $\lambda = \delta + j \cdot \omega_0$  in der komplexen Ebene und dem Verhalten der Schwingung.

### 2.3.4 Zusammenfassung Funktionsalgebra

In Tabelle 2.4 sind die besprochenen Rechenregeln zusammengefasst. Die Anwendung dieser Regeln ist die Zerlegung von Signalen in bekannte Signale. Das Rechnen mit Funktionen ist Grundlage für eine erfolgreiche Anwendung von Korrespondenztabeln der Laplace- und Fourier-Transformation, die in Kapitel 4 und 6 beschrieben werden

Tabelle 2.4: Tabellarische Zusammenfassung von Testfunktionen

Testfunktion	Mathematische Beschreibung
Skalierung der Amplitude	$y(t) = a \cdot x(t)$
Zeitliche Verschiebung um $t_0$	$y(t) = x(t - t_0)$
Zeitliche Spiegelung	$y(t) = x(-t)$
Zeitliche Skalierung	$y(t) = x(a \cdot t)$
Verallgemeinerte Ableitung einer Funktion $x(t)$ mit Sprung $\Delta x$ an der Stelle $t_0$	$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_S}{dt} + \delta(t - t_0) \cdot \Delta x$

## 2.4 Funktionen zur Beschreibung von Einschwingvorgängen

### 2.4.1 Periodische und harmonische Funktionen

Periodische Funktionen sind dadurch gekennzeichnet, dass sich der Funktionswert periodisch nach einer Zeitdauer  $T_0$  wiederholt. Bild 2.21 zeigt ein einfaches periodisches Signal.

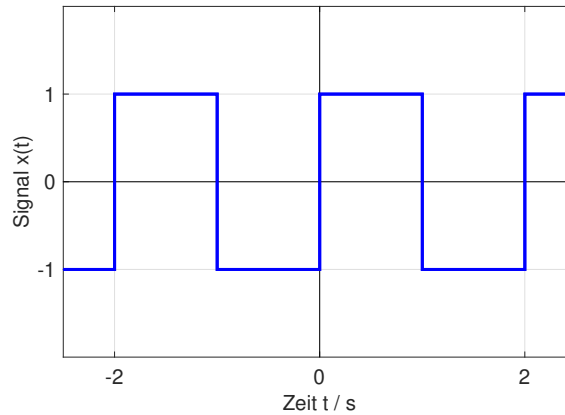


Bild 2.21: Beispiel für ein periodisches Signal mit einer Periodendauer  $T_0 = 2$  s

Für periodische Funktionen und ganzzahlige Werte  $k$  gilt:

$$x(t) = x(t + k \cdot T_0) \quad (2.65)$$

Neben den bereits diskutierten Testfunktionen, die das Ein-, Aus- oder Umschalten modellieren, sind in der Systemtheorie periodische, harmonische Signale von großer Bedeutung. Als Beispiel soll hier eine Kosinusfunktion diskutiert werden. Sie ist definiert als

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot (t + t_0)) \quad (2.66)$$

mit

$$t_0 = \frac{\varphi}{\omega_0} \quad (2.67)$$

wobei  $A$  die Amplitude der Schwingung,  $\varphi$  der Nullphasenwinkel und  $\omega_0$  die Kreisfrequenz ist.

$$\omega_0 = \frac{2 \cdot \pi}{T_0} = 2 \cdot \pi \cdot f_0 \quad (2.68)$$

Die Frequenz  $f_0$  der Funktion  $x(t)$  ist der Kehrwert der Periodendauer  $T_0$  der Schwingung.

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2 \cdot \pi} \quad (2.69)$$

Bild 2.22 verdeutlicht diese Definitionen an einem Beispiel:

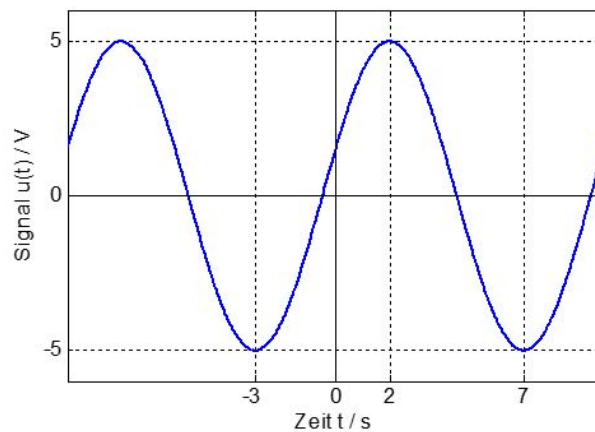


Bild 2.22: Kosinusfunktion mit einer Periodendauer  $T_0 = 10$  s, einer Amplitude von 5 V und einem Nullphasenwinkel von  $-2/5 \cdot \pi$

In dem Beispiel beträgt die Amplitude 5 V. Die Kosinusfunktion hat zwei aufeinanderfolgende Minima bei  $t = -3$  s und  $t = 7$  s, woraus sich eine Periodendauer von  $T_0 = 10$  s ergibt. Die Nullphase  $\varphi$  ist nicht unmittelbar aus dem Diagramm ablesbar. Die Kosinusfunktion ist in Bild 2.22 um 2 s nach rechts verschoben. Es liegt demnach eine zeitliche Verzögerung von  $t_0 = -2$  s vor. Über den Zusammenhang

$$t_0 = \frac{\varphi}{2 \cdot \pi \cdot f_0} = \frac{\varphi}{2 \cdot \pi} \cdot T_0 = -2 \text{ s} \quad (2.70)$$

kann der Nullphasenwinkel  $\varphi$  berechnet werden zu

$$\varphi = -\frac{2 \cdot \pi \cdot 2 \text{ s}}{10 \text{ s}} = -\frac{2 \cdot \pi}{5} \quad (2.71)$$

### Überlagerung harmonischer Signale

Harmonische Signale mit Nullphasenwinkel können mithilfe der Additionstheoreme als Summe von einer Sinus- und einer Kosinusfunktion dargestellt werden.

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cdot \cos(b) + \cos(a) \cdot \sin(b) \quad (2.72)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a) \cdot \cos(b) - \cos(a) \cdot \sin(b) \quad (2.73)$$

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b) \quad (2.74)$$

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b) \quad (2.75)$$

Eine Kosinusfunktion mit dem Nullphasenwinkel  $\varphi$  kann also als Summe einer Kosinus- und Sinusfunktion mit Nullphasenwinkel  $\varphi = 0$  dargestellt werden.

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi) \\ &= A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot \cos(\varphi) - A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \cdot \sin(\varphi) \\ &= a \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) - b \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \end{aligned} \quad (2.76)$$

wobei sich deren Amplituden durch einen Koeffizientenvergleich ergeben zu

$$a = A \cdot \cos(\varphi) \quad (2.77)$$

$$b = A \cdot \sin(\varphi) \quad (2.78)$$

Umgekehrt können eine Kosinus- und eine Sinusfunktion gleicher Frequenz addiert werden zu einer resultierenden Schwingung mit Amplitude A und Nullphasenwinkel  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) - b \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \\ &= A \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) - A \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \\ &= A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi) \end{aligned} \quad (2.79)$$

Dabei ergeben sich Amplitude und Nullphasenwinkel aus

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (2.80)$$

$$\tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{b}{a} \quad (2.81)$$

Aus einer Überlagerung von Sinus- und Kosinusfunktionen gleicher Frequenz resultiert eine Sinus- oder Kosinusfunktion mit derselben Frequenz, aber unterschiedlicher Amplitude und Nullphase.

### Zeigerdarstellung harmonischer Signalen

In der Elektrotechnik hat sich für die Berechnung von harmonisch angeregten Schaltungen die Zeigerdarstellung durchgesetzt. Sie beruht auf der Eulerschen Formel.

$$e^{j \cdot \varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi) \quad (2.82)$$

Damit kann eine Kosinusfunktion der Form

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi) \quad (2.83)$$

als Realteil einer komplexen Funktion

$$z(t) = A \cdot e^{j \cdot (\omega_0 \cdot t + \varphi)} = A \cdot e^{j \cdot \varphi} \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} = A \cdot (\cos(\omega_0 \cdot t + \varphi) + j \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi)) \quad (2.84)$$

aufgefasst werden. Diese mathematische Darstellung kann durch einen Zeiger der Länge A verdeutlicht werden, der in der komplexen Ebene um den Koordinatenursprung rotiert. Die Zeit für eine volle Umdrehung ist die Periodendauer  $T_0$ . Die eigentlich interessierende Größe ist die Projektion des Zeigers auf die reelle Achse, sie stellt die Funktion  $x(t)$  dar. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  gilt

$$z(0) = A \cdot e^{j \cdot \varphi} = A \cdot \cos(\varphi) + j \cdot A \cdot \sin(\varphi) = \underline{A} \quad (2.85)$$

$\underline{A}$  wird als komplexe Amplitude der komplexen Funktion  $z(t)$  bezeichnet. Ein Vergleich der Koeffizienten mit Gleichung 2.76 zeigt, dass die komplexe Amplitude  $\underline{A}$  dargestellt werden kann, als

$$\underline{A} = a + j \cdot b \quad (2.86)$$

Zur Verdeutlichung der komplexen Amplitude  $\underline{A}$  zeigt Bild 2.23 eine Zeigerdarstellung in der komplexen Ebene. Sie illustriert die Projektion des komplexen Zeigers auf die reelle Achse als Zeitfunktion  $x(t)$ .

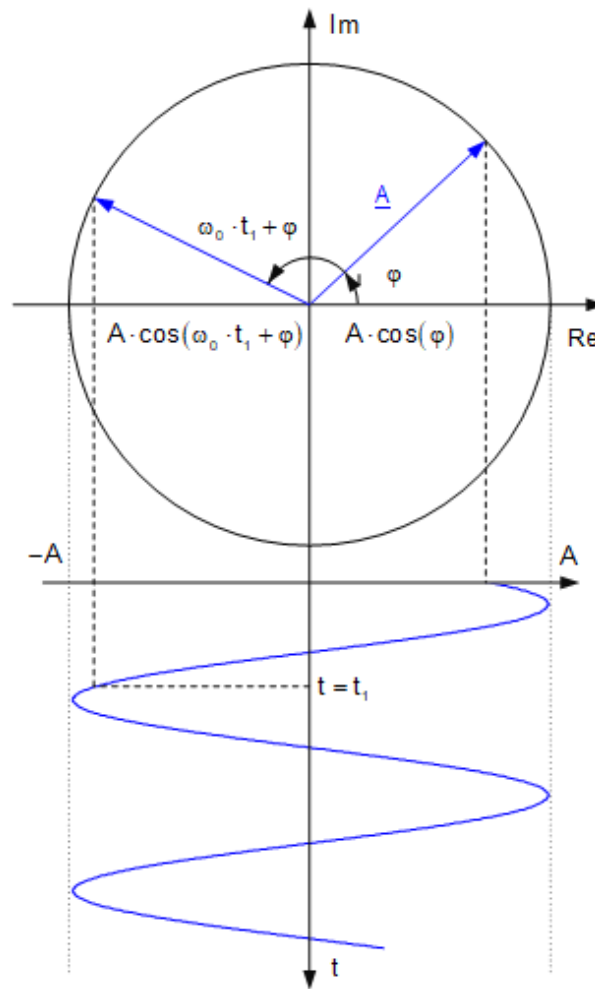


Bild 2.23: Darstellung einer harmonischen Schwingung als Zeigerdiagramm

### Darstellung harmonischer Signale als Überlagerung komplexer Schwingungen

Durch Umformung von Gleichung 2.82 ergibt sich für Sinus- und Kosinusfunktionen die Darstellung

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot (e^{j \cdot \varphi} + e^{-j \cdot \varphi}) \quad (2.87)$$

$$\sin(\varphi) = \frac{1}{2 \cdot j} \cdot (e^{j \cdot \varphi} - e^{-j \cdot \varphi}) = -\frac{1}{2} \cdot j \cdot (e^{j \cdot \varphi} - e^{-j \cdot \varphi}) \quad (2.88)$$

Werden in Gleichung 2.79 die reellen Sinus- und Kosinusfunktionen durch Summen komplexer Funktionen nach Gleichung 2.87 und 2.88 ersetzt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) - b \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \\ &= a \cdot \frac{1}{2} \cdot (e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t}) - b \cdot \frac{1}{2 \cdot j} \cdot (e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} - e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (a + j \cdot b) \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} + \frac{1}{2} \cdot (a - j \cdot b) \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} \end{aligned} \quad (2.89)$$

Der erste Summand beschreibt einen komplexen Zeiger, der sich in der komplexen Ebene mit einer Periodendauer  $T_0$  in mathematisch positiver Richtung dreht. Der zweite Summand beschreibt einen zweiten komplexen Zeiger, der zu jedem Zeitpunkt konjugiert komplex zum Ersten ist. Er dreht sich mit derselben Winkelgeschwindigkeit wie der erste Zeiger, aber in entgegengesetzter Richtung.

Aus den komplexen Koeffizienten

$$\underline{c} = \frac{a + j \cdot b}{2} \quad (2.90)$$



$$\underline{c}^* = \frac{a - j \cdot b}{2} \quad (2.91)$$

errechnen sich die Amplitude  $A$  und der Nullphasenwinkel  $\varphi$  zu

$$A = 2 \cdot |\underline{c}| \quad (2.92)$$

$$\varphi = \arg(\underline{c}) \quad (2.93)$$

Die komplexe Exponentialfunktion stellt reelle Funktionen mithilfe komplexer Zahlen dar. Es ist eine effiziente Beschreibungsform, die gleichermaßen Amplitude und Phase beschreibt. Physikalisch gesehen existieren komplexe Signale nicht.

### 2.4.2 Exponentialfunktion

Bei der Diskussion von Systemen wird sich zeigen, dass die Exponentialfunktion

$$x(t) = A \cdot e^{\lambda \cdot t} \cdot \sigma(t) \quad (2.94)$$

die Einschwingvorgänge vieler physikalischer Vorgänge beschreiben kann. Bild 2.24 stellt das Verhalten der Exponentialfunktion für unterschiedliche reelle Parameter  $\lambda$  im Zeitraum  $t > 0$  dar.

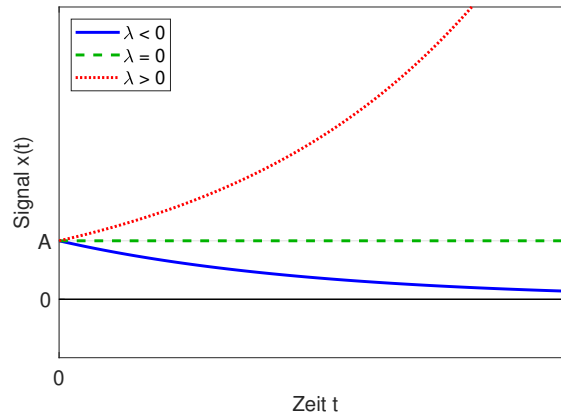


Bild 2.24: Darstellung der Exponentialfunktion für unterschiedliche Parameter  $\lambda$

Die Exponentialfunktion beginnt für alle Parameter  $\lambda$  an der Stelle  $x(t=0) = A$ . Für reelle Parameter  $\lambda > 0$  steigt die Exponentialfunktion mit wachsender Zeit  $t$ . Bei negativem reellen Parameter  $\lambda < 0$  nähert sich die Exponentialfunktion der Asymptote  $x = 0$ . Für  $\lambda = 0$  bleibt die Exponentialfunktion konstant bei  $x = A$ .

Im vorangegangenen Abschnitt wird auf Exponentialfunktionen mit rein imaginären Werten von  $\lambda$  verwiesen, und es wird aufgezeigt, dass sie harmonische Schwingungen beschreiben können. Außer reellen und imaginären Argumenten können bei Exponentialfunktionen auch komplexe Argumente  $\lambda$  auftreten. In diesem Fall kann die Exponentialfunktion in zwei Faktoren zerlegt werden:

$$e^{\lambda \cdot t} = e^{(\delta_0 + j \cdot \omega_0) \cdot t} = e^{\delta_0 \cdot t} \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} \quad (2.95)$$

Damit kann eine Kosinusfunktion mit exponentiell abklingender Amplitude als Summe zweier Exponentialfunktionen mit jeweils konjugiert komplexen Koeffizienten  $\lambda$  dargestellt werden.

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cdot e^{\delta_0 \cdot t} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot \sigma(t) = \frac{1}{2} \cdot A \cdot e^{\delta_0 \cdot t} \cdot (e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t}) \cdot \sigma(t) \\ &= \frac{1}{2} \cdot A \cdot (e^{(\delta_0 + j \cdot \omega_0) \cdot t} + e^{(\delta_0 - j \cdot \omega_0) \cdot t}) \cdot \sigma(t) \end{aligned} \quad (2.96)$$

Die Kosinusfunktion mit exponentiell abklingender Amplitude ist in Bild 2.25 dargestellt. Dabei sind die Einhüllenden der Kosinusfunktion als gestrichelte Linie eingezeichnet.

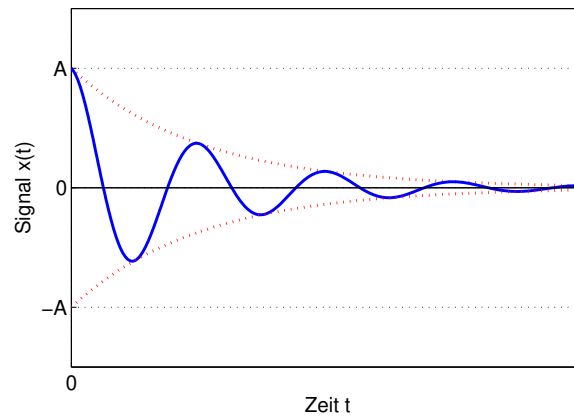


Bild 2.25: Darstellung einer Exponentialfunktion mit abklingender Amplitude

Bild 2.26 zeigt eine räumliche Darstellung der komplexen Exponentialfunktion und die Projektion der Funktion auf die Realteil-Zeit-Ebene.

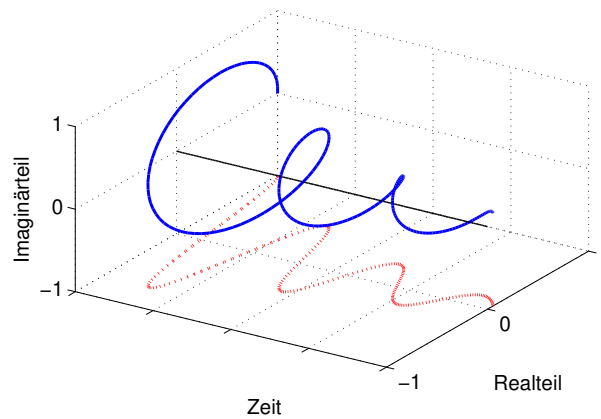


Bild 2.26: Räumliche Darstellung der komplexen Exponentialfunktion und Projektion der Funktion auf die Realteil-Zeit-Ebene

Die Projektion der komplexen Exponentialfunktion auf die Realteil-Zeit-Ebene ergibt die abklingende harmonische Schwingung.

$$x(t) = A \cdot e^{\delta_0 \cdot t} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot \sigma(t) \quad (2.97)$$

Je nach Lage des Wertes  $\lambda = \delta_0 + j \cdot \omega_0$  in der komplexen Ebene, ergibt sich ein charakteristisches Verhalten der komplexen Exponentialfunktion. Bei der Diskussion von Systemeigenschaften linearer Systeme wird die Interpretation reeller und komplexer Exponentialfunktionen weiter vertieft.



Im Online-Portal *Systemtheorie Online* verdeutlicht die Applikation *Komplexe Exponentialfunktion* den Zusammenhang zwischen der Lage des Wertes  $\lambda = \delta + j \cdot \omega_0$  in der komplexen Ebene und dem Verhalten der Schwingung.

### 2.4.3 Zusammenfassung zur Beschreibung von Einschwingvorgängen

Die Systemreaktion linearer Systeme ist in vielen Anwendungen eine abklingende harmonische Schwingung. In Tabelle 2.5 werden die wesentlichen Funktionen für die mathematische Beschreibung der Einschwingvorgänge zusammengestellt.

Tabelle 2.5: Funktionen zur Beschreibung von Einschwingvorgängen

Funktion	Mathematische Beschreibung
Periodische Funktion der Periodendauer $T$	$x(t) = x(t + k \cdot T_0)$
Harmonische Funktion	$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot (t + t_0))$
Additionstheoreme für harmonische Funktionen	$\begin{aligned} \sin(a + b) &= \sin(a) \cdot \cos(b) + \cos(a) \cdot \sin(b) \\ \sin(a - b) &= \sin(a) \cdot \cos(b) - \cos(a) \cdot \sin(b) \\ \cos(a + b) &= \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b) \\ \cos(a - b) &= \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b) \end{aligned}$
Eulersche Darstellung	$e^{j \cdot \varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)$
Darstellung der Kosinusfunktion über die Eulersche Formel	$\cos(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot (e^{j \cdot \varphi} + e^{-j \cdot \varphi})$
Darstellung der Sinusfunktion über die Eulersche Formel	$e^{j \cdot \varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)$
Exponentialfunktion mit komplexem Argument	$e^{\lambda \cdot t} = e^{(\delta_0 + j \cdot \omega_0) \cdot t} = e^{\delta_0 \cdot t} \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t}$
Beschreibung einer gedämpften Schwingung über eine Exponentialfunktion mit komplexem Argument	$\begin{aligned} x(t) &= A \cdot e^{\delta_0 \cdot t} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot \sigma(t) \\ &= \frac{1}{2} \cdot A \cdot e^{\delta_0 \cdot t} \cdot (e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t}) \cdot \sigma(t) \\ &= \frac{1}{2} \cdot A \cdot (e^{(\delta_0 + j \cdot \omega_0) \cdot t} + e^{(\delta_0 - j \cdot \omega_0) \cdot t}) \cdot \sigma(t) \end{aligned}$

## 2.5 Normierung von Signalen

In den Beispielen der vorangegangenen Abschnitte sind die Einheiten der Signale mitgeführt. Das hat den Vorteil, dass durch eine Umrechnung der Einheiten eine Konsistenzprüfung durchgeführt werden kann. In komplexeren Anwendungen und Beispielen steigt der Aufwand für das Mitführen von Einheiten aber schnell an. Durch eine Normierung der physikalischen Größen lassen sich die Ausdrücke oft stark vereinfachen. Dieser Vorteil wird jedoch durch die nicht mehr mögliche Plausibilisierung der Rechenergebnisse anhand von Einheiten erkauft. Als Hintergrundinformation für das Rechnen ohne Einheiten wird die Methode der Normierung von Signalen vorgestellt. Sie teilt sich in zwei Schritte auf:

### Amplitudennormierung

Bei der Amplitudennormierung werden alle Signale als dimensionsloses Vielfaches einer Bezugsgröße ausgedrückt. Die einfachste Art der Normierung ist der Bezug der jeweiligen Größe auf die SI-Einheit. Wegen der Kohärenz des SI-Einheitensystems bleibt bei dieser Art der Normierung der Zahlenwert aller Größen gleich. Die Normierung physikalischer Größen mit den jeweiligen SI-Einheiten ist einfach, die dabei entstehenden Größen sind jedoch oft unhandlich.

### Zeitnormierung

Eine Zeitnormierung bedeutet, dass alle Zeitangaben als dimensionsloses Vielfaches einer Bezugszeit ausgedrückt werden. Insbesondere bei Systemen, die in festen Zeitintervallen abgetastet werden, bietet sich eine Zeitnormierung mit dieser Abtastzeit an.

Die Amplituden- und Zeitnormierung von Signalen hat auch Konsequenzen für die Bauelemente, was im Folgenden für elektrische Systeme hergeleitet wird. Der Index N wird bei dieser Darstellung für normierte Größe verwendet. Eine Amplitudennormierung mit der Spannung  $U_0$  beziehungsweise dem Strom  $I_0$  führt zu einer normierten Spannung  $U_N$

$$U_N = \frac{U}{U_0} \quad (2.98)$$

beziehungsweise einem normierten Strom  $I_N$

$$I_N = \frac{I}{I_0} \quad (2.99)$$

Eine Zeitnormierung normiert die Zeit  $t$  auf eine Bezugszeit  $T_0$ , und es ergibt sich eine normierte Zeit  $t_N$

$$t_N = \frac{t}{T_0} \quad (2.100)$$

Mit der Normierung der Zeit geht auch eine Normierung der Frequenz einher. Die normierte Frequenz  $f_N$  berechnet sich aus

$$f_N = \frac{1}{t_N} = \frac{T_0}{t} = f \cdot T_0 \quad (2.101)$$

Aus der Normierung von Amplituden und Zeit ergibt sich eine Normierung der Bauelemente. Unmittelbar deutlich wird das an dem ohmschen Widerstand  $R$ .

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U_N \cdot U_0}{I_N \cdot I_0} = R_N \cdot R_0 \quad (2.102)$$

Ein normierter ohmscher Widerstand  $R_N$  berechnet sich damit aus

$$R_N = \frac{R}{R_0} = R \cdot \frac{I_0}{U_0} \quad (2.103)$$

In einer vergleichbaren Weise könnte hergeleitet werden, was die Normierung für Induktivität und Kapazität bedeutet. Besonders anschaulich wird dies bei der Umrechnung von Zeitkonstanten eines RC-Glieds.

$$T = R \cdot C \quad (2.104)$$

Die Kapazität  $C$  berechnet sich durch Umstellen der Gleichung zu

$$C = \frac{T}{R} = \frac{T_N \cdot T_0}{R_N \cdot R_0} = C_N \cdot C_0 \quad (2.105)$$

Die normierte Kapazität  $C_N$  beträgt damit

$$C_N = \frac{C}{C_0} = C \cdot \frac{R_0}{T_0} \quad (2.106)$$

Eine vergleichbare Herleitung führt zu der normierten Induktivität

$$L_N = \frac{L}{L_0} = L \cdot \frac{1}{R_0 \cdot T_0} \quad (2.107)$$

### Beispiel: Normierung RC-Glied

Die Normierung von Größen soll anhand des RC-Netzwerks aus Bild 2.27 durchgeführt werden.

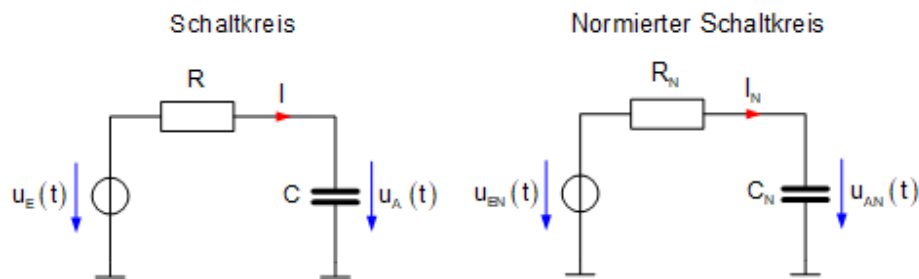


Bild 2.27: Beispiel RC-Netzwerk, normierte und nicht normierte Darstellung

Die Kapazität hat einen Wert von  $C = 1 \mu\text{F}$  und der Widerstand beträgt  $R = 1 \text{ k}\Omega$ . Das System wird normiert mit den Größen

$$U_0 = 1 \text{ V} \quad (2.108)$$

$$I_0 = 1 \text{ mA} \quad (2.109)$$

$$t_0 = 1 \text{ ms} \quad (2.110)$$

Die normierten Bauelemente haben damit die Werte

$$R_N = \frac{R \cdot I_0}{U_0} = \frac{1 \text{ k}\Omega \cdot 1 \text{ mA}}{1 \text{ V}} = 1 \quad (2.111)$$

und

$$C_N = C \cdot \frac{R_0}{T_0} = 1 \mu\text{F} \cdot \frac{1 \text{ k}\Omega}{1 \text{ ms}} = 1 \quad (2.112)$$

Das Ersatzschaltbild des normierten Systems ist in Bild 2.27 rechts dargestellt.

### Zusammenfassung Normierung von Signalen

Im Folgenden werden Beispiele normiert berechnet, um die Darstellung kompakter zu halten. Nur in Einzelfällen werden die Einheiten zur Herleitung von Zeitkonstanten, Grenzfrequenzen oder anderen charakteristischen Größen mitgeführt. Die Schritte zur Normierung von Signalen sind in Tabelle 2.6 zusammengefasst.

Tabelle 2.6: Schritte zur Normierung von Signalen

Normierung	Mathematische Beschreibung
Amplitudennormierung	$U_N = \frac{U}{U_0}$
Zeitnormierung	$t_N = \frac{t}{T_0}$

In der Regelungstechnik wird statt der hier dargestellten Normierung von Signalen eine Skalierung vorgenommen. Bei der Skalierung werden die Amplituden der Signale geeignet normiert, eine Zeitnormierung findet nicht statt.

## 2.6 Literatur

### 2.6.1 Literaturstellen zur mathematischen Darstellung

- [Papu11] Papula, Lothar: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1 - 3, Springer Fachmedien Wiesbaden, 2011
- [Bron79] Bronstein, Ilja: Taschenbuch der Mathematik, Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2008

### 2.6.2 Weiterführende Literatur

- [Saue12] R. Sauer, I. Szabo (Hrsg.): Mathematische Hilfsmittel des IngenieursSpringer-Verlag, 2012
- [Gelf67] Gelfand, Israel: Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen): Verallgemeinerte Funktionen und das Rechnen mit IhnenVEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (Ost), 1967.
- [Foel11] Föllinger, Otto: Laplace-, Fourier- und z-Transformation. 10., überarbeitete AuflageV-DE Verlag GmbH, Berlin, Offenbach 2011
- [Giro05] Girod, Bernd: Einführung in die Systemtheorie. 3. AuflageB.G. Teubner Stuttgart, 2005



### 3 Zeitkontinuierliche Systeme im Zeitbereich

Die Systemtheorie beschäftigt sich mit der Analyse und Synthese von Systemen. Sie erlaubt das Systemverhalten zu prognostizieren, Stabilitätsaussagen zu treffen und die Kopplung verschiedener Teilsysteme zu beschreiben.

Ein System kann ein oder mehrere Ein- und Ausgangssignale aufweisen, die in dem Eingangsvektor  $\underline{u}$  beziehungsweise dem Ausgangsvektor  $\underline{y}$  zusammengefasst sind. Die Eingangssignale  $\underline{u}$  werden von dem System nicht beeinflusst, sie existieren auch ohne das System und das System hat keine Rückwirkung auf sie. Eingangssignale sind damit zum Beispiel Leerlaufspannungen idealer Spannungsquellen. Aufgrund der Anregung durch die Eingangssignale  $\underline{u}$  kann sich die in dem System gespeicherte Energie ändern. In der Systemtheorie wird davon gesprochen, dass sich damit der Zustand des Systems geändert hat. Zum Beispiel ändert sich bei einem RC-Tiefpass die in dem Kondensator gespeicherte elektrische Energie und damit der Zustand des Systems, wenn die Eingangsspannung variiert wird. Die Ausgangssignale  $\underline{y}$  ergeben sich aus dem aktuellen Systemzustand und den aktuellen Eingangssignalen. Die Ausgangssignale werden auch Reaktion des Systems oder Systemantwort genannt.

Ein System kann mit folgendem Blockschaltbild dargestellt werden. Systeme mit mehreren Ein- und Ausgangsvariablen werden als Mehrgrößensysteme bezeichnet. Im Rahmen dieser Vorlesung werden bevorzugt Eingrößensysteme behandelt, die eine Eingangsgröße  $u$  und eine Ausgangsgröße  $y$  besitzen.

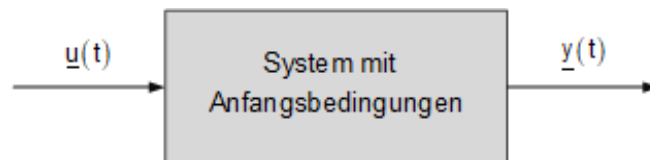


Bild 3.1: System mit Ein- und Ausgangssignalen

Einige Systeme lassen sich direkt mit algebraischen Gleichungen beschreiben. Ein Beispiel für ein solches System ist ein Spannungsteiler, bei dem sich die Ausgangsspannung direkt aus der Eingangsspannung und dem Widerstandsverhältnis ergibt. Systeme, die sich über algebraische Gleichungen beschreiben lassen, besitzen keine Energiespeicher. Oftmals finden bei praktischen Anwendungen aber Einschwingvorgänge statt. Ursache für diese Einschwingvorgänge sind Energiespeicher, deren Zustände sich durch eine Anregung ändern. Ein Beispiel für ein System mit Energiespeicher ist ein RC-Tiefpass, bei dem ein Kondensator über einen Widerstand aufgeladen wird. Die Ausgangsspannung des Kondensators ist eine Funktion der Zeit. Systeme mit Energiespeichern werden als dynamische Systeme bezeichnet. Dynamische Systeme beschreiben viele aus dem Alltag bekannte Prozesse. Beispiele sind Pendelbewegungen, das Verhalten elektrischer Schaltungen mit Kondensatoren und Spulen sowie thermische und chemische Prozesse. Es wird sich zeigen, dass die Systembeschreibung dynamischer Systeme aus einer oder mehreren Differentialgleichungen besteht.

Auf Basis der mathematischen Beschreibung werden in diesem Kapitel wesentliche Systemeigenschaften eingeführt. Diese Diskussion führt zur Untergruppe linearer, zeitinvarianter Systeme. Viele Vorgänge oder Prozesse lassen sich zumindest näherungsweise als lineare, zeitinvariante Systeme beschreiben. Die Eigenschaften Linearität und Zeitinvarianz erlauben eine vergleichsweise übersichtliche Beschreibung und vergleichsweise einfache Berechnung der Systemantwort. Dazu werden unterschiedliche Verfahren vorgestellt.

An einem Projekt mit Feder-Masse-Systemen werden lineare und nichtlineare Systeme theoretisch und experimentell miteinander verglichen.

#### 3.1 Beschreibung zeitkontinuierlicher Systeme mit Differentialgleichungen

Viele Systeme lassen sich über lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschreiben. In diesem Abschnitt werden einige einführende Beispiele vorgestellt.

### 3.1.1 Beispiel RC-Netzwerk

Die Beschreibung elektrischer Systeme erfolgt unter anderem über mathematische Gleichungen für die beteiligten passiven Bauelemente. Tabelle 3.1 stellt die Bauelemente-Gleichungen für Widerstand, Kapazität und Induktivität zusammen [Alba04, ühr06].

Tabelle 3.1: Thermische Bauelemente und ihre mathematische Beschreibung

Bauelement	Bauelemente-Gleichungen	
Widerstand	$U_R(t) = R \cdot i_R(t)$	$i_R(t) = \frac{1}{R} \cdot U_R(t)$
Kapazität	$U_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau$	$i_C(t) = C \cdot \frac{dU_C}{dt}$
Induktivität	$U_L(t) = L \cdot \frac{di_L}{dt}$	$i_L(t) = \frac{1}{L} \cdot \int_{-\infty}^t U_L(\tau) d\tau$

Darüber hinaus werden ideale Strom- und/oder Spannungsquellen angesetzt, die unabhängig von ihrer Belastung immer definierte Ausgangssignale liefern. Abweichungen von diesen als ideal angenommenen Quellen werden über diskrete Bauelemente wie Innenwiderstände beziehungsweise Innenleitwerte modelliert.

Die Beschreibung eines Verbundes von Bauelementen erfolgt über Bilanzen und Nebenbedingungen. Für elektrische Schaltungen ist die Bilanzgleichung bekannt als Knotengleichung.

$$\sum_{m=1}^M i_m(t) = 0 \quad (3.1)$$

Die Maschengleichung stellt die entsprechende Nebenbedingung dar.

$$\sum_{n=1}^N U_n(t) = 0 \quad (3.2)$$

Bild 3.2 zeigt ein einfaches Netzwerk bestehend aus einer Spannungsquelle  $U_E(t)$ , einem Widerstand  $R$  und einem Kondensator mit der Kapazität  $C$ .

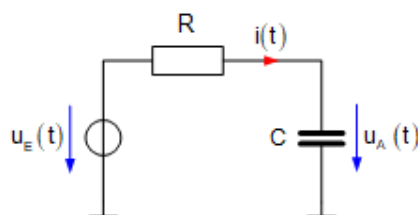


Bild 3.2: Schaltbild für das Beispiel RC-Netzwerk

Für das Einschalten einer Konstant-Spannungsquelle  $U_E(t)$  soll die Spannung  $U_A(t)$  am Kondensator berechnet werden. Die Spannung  $U_A(t)$  wird zum Einschaltzeitpunkt  $t = 0$  zu  $U_A(t) = 0$  angenommen. Dieser Zustand wird als Anfangszustand bezeichnet.

Bei der Anordnung lädt ein Strom  $i(t)$  die Kapazität  $C$  auf. Der Strom wird solange fließen, bis die Spannungsdifferenz an dem Widerstand  $R$  zu null wird. Sind die Spannungsdifferenzen ausgeglichen, befindet sich das System im Gleichgewicht. Zur mathematischen Beschreibung wird die Knotengleichung

$$i_R(t) = i_C(t) = i(t) \quad (3.3)$$

Und die Maschengleichung

$$U_E(t) - U_R(t) - U_A(t) = U_E(t) - i_R(t) \cdot R - U_A(t) = 0 \quad (3.4)$$

aufgestellt. Wird der Strom  $i_R(t)$  durch den Strom  $i_C(t)$  ausgedrückt, ergibt sich

$$i_R(t) = i_C(t) = C \cdot \frac{dU_A}{dt} \quad (3.5)$$

Einsetzen in die Maschengleichung führt nach Umstellen zu der linearen Differentialgleichung

$$U_E(t) = R \cdot C \frac{dU_A}{dt} + U_A(t) \quad (3.6)$$

Bei der Differentialgleichung handelt es sich um eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die Lösung dieser Differentialgleichung kann über eine sogenannte Vier-Schritt-Methode berechnet werden, auf die in Abschnitt 3.3 ausführlich eingegangen wird. Bei Anregung des Systems mit einem Spannungssprung der Höhe  $U_0$  am Eingang ergibt sich das Ausgangssignal zu

$$U_A(t) = U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \cdot \sigma(t) \quad (3.7)$$

Bild 3.3 zeigt das Einschwingverhalten der Ausgangsspannung  $U_A(t)$  für eine zum Zeitpunkt  $t = 0$  eingeschaltete Spannung  $U_0 = 5 \text{ V}$ , einen Widerstand von  $R = 5 \text{ k}\Omega$  und eine Kapazität von  $C = 4 \text{ nF}$ .

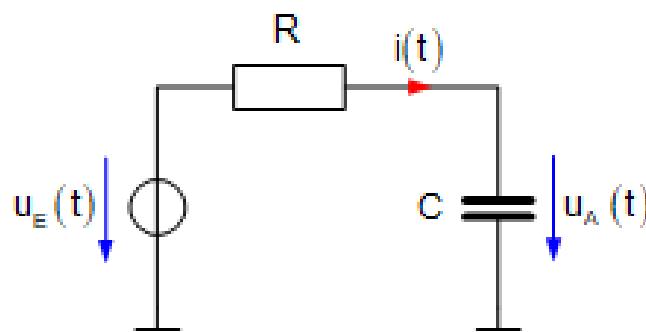


Bild 3.3: Einschwingverhalten der Ausgangsspannung  $U_A(t)$  eines RC-Netzwerks bei Anregung mit einem Spannungssprung von 0 auf 5 V

### 3.1.2 Beispiel Aufheizvorgang Wasserbad

Ein Behälter, der ein Volumen  $V$  und eine Oberfläche  $A$  besitzt, ist mit Wasser gefüllt. Vereinfachend wird angenommen, dass der Wärmeaustausch mit der Umgebung nur als Wärmeleitung über die Oberfläche  $A$  stattfindet. Bild 3.4 beschreibt den Versuchsaufbau.

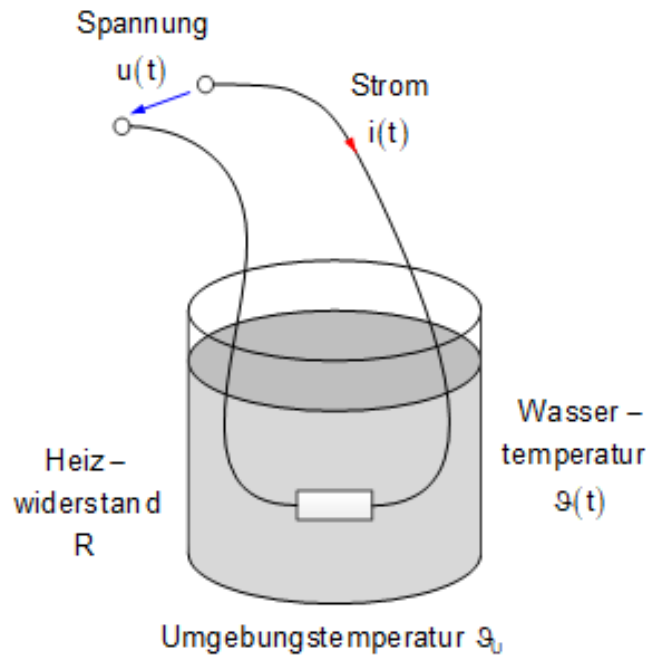


Bild 3.4: Aufbau für das Beispiel Tauchsieder

Bis zu dem Zeitpunkt  $t = 0$  entspricht die Wassertemperatur  $\vartheta_0$  der Umgebungstemperatur  $\vartheta_U$ . Zum Zeitpunkt  $t = 0$  wird ein Tauchsieder in das Wasser getaucht, der eine konstante elektrische Leistung  $p_{EL}(t)$  umsetzt. Der Behälter tauscht wegen seiner steigenden Temperatur  $\vartheta(t) \neq \vartheta_U$  über die Oberfläche  $A$  Wärme mit der Umgebung aus. Die Temperatur des Wassers wird sich solange erhöhen, bis sich ein Gleichgewicht zwischen der zugeführten Leistung  $p_{EL}(t)$  und des über die Fläche  $A$  abgeführten Wärmestroms  $p_A(t)$  einstellt. Zur Modellierung werden die Bauelemente-Gleichungen für das System aufgestellt. Bei einer Temperaturdifferenz  $\Delta\vartheta$  an einer Fläche  $A$  mit der Wärmeübergangszahl  $\alpha$  strömt durch die Oberfläche  $A$  der Wärmestrom  $p_A$

$$\Delta\vartheta(t) = \vartheta(t) - \vartheta_U = \frac{1}{\alpha \cdot A} \cdot p_A(t) \quad (3.8)$$

Diese Beschreibung ist vergleichbar zum Ohmschen Gesetz. Der elektrischen Spannung  $u(t)$  entspricht bei Wärmebilanzen die Temperaturdifferenz  $\Delta\vartheta(t)$ , dem elektrischen Strom  $i(t)$  entspricht der Wärmestrom  $p_A(t)$ . Daraus resultiert die Definition des thermischen Widerstandes  $R_{TH}$  zu

$$R_{TH} = \frac{\Delta\vartheta(t)}{p_A(t)} = \frac{1}{\alpha \cdot A} \quad (3.9)$$

Auch die Wärmekapazität  $C_{TH}$  ist in Anlehnung an die elektrische Kapazität definiert als der Quotient aus zugeführter Leistung  $dp_C$  und der damit verbundenen Temperaturänderung  $d\vartheta$

$$C_{TH} = \frac{dp_C}{d\vartheta} \quad (3.10)$$

Wird Gleichung (3.10) nach  $d\vartheta$  aufgelöst und eine Integration über die Zeit vorgenommen, so ergibt sich für die Temperaturänderung  $\Delta\vartheta$  des Wassers

$$\Delta\vartheta(t) = \frac{1}{C_{TH}} \cdot \int_{-\infty}^t p_C(\tau) d\tau \quad (3.11)$$

Tabelle 3.2 fasst die thermischen Bauelemente und ihre Bauelemente-Gleichungen zusammen.

Tabelle 3.2: Thermische Bauelemente und ihre mathematische Beschreibung

Bauelement	Bauelemente-Gleichungen	
Wärmewiderstand	$\Delta\vartheta(t) = R_{TH} \cdot p_A(t) = \frac{1}{\alpha \cdot A} \cdot p_A(t)$	$p_A(t) = \alpha \cdot A \cdot \Delta\vartheta(t)$
Wärmekapazität	$U_R(t) = R \cdot i_R(t)$	$U_R(t) = R \cdot i_R(t)$

Für die Bilanzen gelten sinngemäß die gleichen Beziehungen wie bei den elektrischen Größen. Die Maschenregel der Temperaturdifferenzen lautet

$$\sum_{n=1}^N \Delta\vartheta_n(t) = 0 \quad (3.12)$$

und der Knotengleichung entspricht die Leistungsbilanz

$$\sum_{m=1}^M p_m(t) = 0 \quad (3.13)$$

Zur Verknüpfung der elektrischen und thermischen Größen wird eine Leistungsbilanz erstellt. Die elektrische Leistung  $p_{EL}(t)$  wird dem System von außen zugeführt. Über die Oberfläche gibt das System eine thermische Leistung  $p_A(t)$  ab, sobald die Wassertemperatur über die Umgebungstemperatur steigt. Die Differenz beider Leistungen  $p_C(t)$  wird dazu verwendet, die Wassertemperatur zu erhöhen.

$$p_C(t) = p_{EL}(t) - p_A(t) \quad (3.14)$$

Einsetzen der Bauelement-Gleichungen ergibt die Differentialgleichung

$$C_{TH} \cdot \frac{d\Delta\vartheta}{dt} = p_{EL}(t) - \alpha \cdot A \cdot \Delta\vartheta(t) \quad (3.15)$$

beziehungsweise

$$\frac{C_{TH}}{\alpha \cdot A} \cdot \frac{d\Delta\vartheta(t)}{dt} + \Delta\vartheta(t) = \frac{p_{EL}(t)}{\alpha \cdot A} \quad (3.16)$$

Sie ist eine Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten und entspricht in ihrer Struktur der Differentialgleichung des RC-Netzwerks. Die Lösung dieser Differentialgleichung ergibt sich nach der Vier-Schritt-Methode zu

$$\Delta\vartheta(t) = \vartheta_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T}}) \quad (3.17)$$

mit der Zeitkonstanten

$$T = \frac{C_{TH}}{\alpha \cdot A} \quad (3.18)$$

und der Temperatur  $\vartheta_0$  von

$$\vartheta_0 = \frac{p_{EL}(t)}{\alpha \cdot A} \quad (3.19)$$

Bild 3.5 stellt das Einschwingverhalten für eine Zeitkonstante  $T = 5 \text{ s}$  und einen Temperatursprung  $\vartheta_0$  von 20 K dar. Es entspricht grundsätzlich dem Einschwingverhalten des RC-Netzwerks.

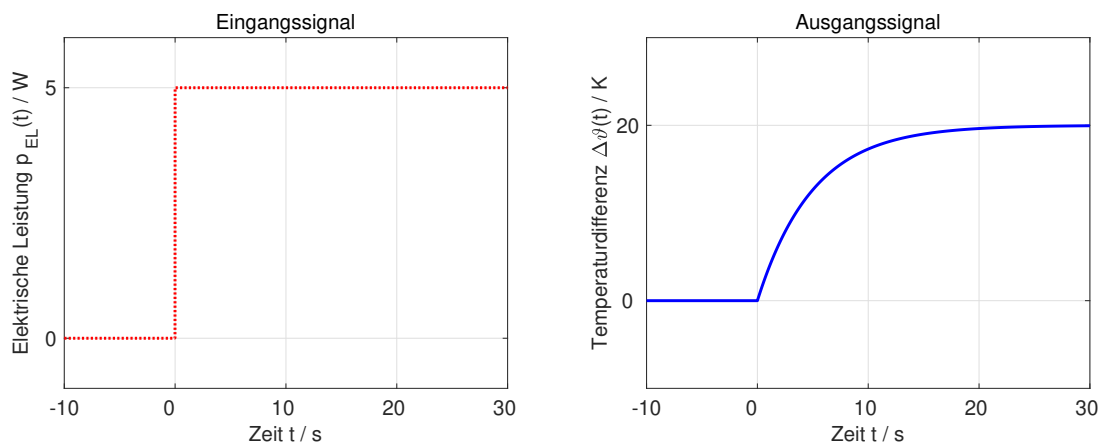


Bild 3.5: Einschwingverhalten der Temperaturdifferenz bei einer sprunghörmigen Anregung mit einer konstanten elektrischen Leistung

### 3.1.3 Beispiel Feder-Masse-Dämpfer-System

Als weiteres Beispiel wird ein Feder-Masse-Dämpfer-System betrachtet, auf das eine äußere Kraft  $F_E$  ausgeübt wird. Bild 3.6 zeigt schematisch die Anordnung. Die Kraft  $F_E$  greift an einem Körper der Masse  $m$  an und bewegt den Körper. Der Bewegung stehen die Trägheits-, Dämpfungs- und Rückstellkraft der Feder entgegen. Für die Anordnung soll die Auslenkung  $x$  berechnet werden, die sich bei einer sprunghörmig aufgebrachten Kraft  $F_E$  an der Feder ergibt.

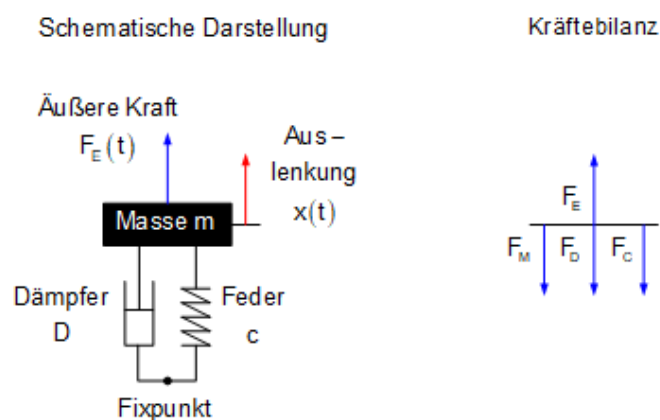


Bild 3.6: Beispiel Feder-Dämpfer-System

Genau wie bei dem elektrischen System lassen sich die mechanischen Bauelemente isoliert beschreiben. Tabelle 3.3 fasst mechanisch translatorische Bauelemente und ihre mathematische Beschreibung zusammen.

Tabelle 3.3: Thermische Bauelemente und ihre mathematische Beschreibung

Bauelement	Bauelemente-Gleichungen	
Feder mit Federkonstante $c$	$F_C(t) = c \cdot \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau = c \cdot x(t)$	$v(t) = \frac{1}{c} \cdot \frac{dF_C}{dt}$
Masse $m$	$F_M(t) = m \cdot a(t) = m \cdot \frac{dv}{dt}$	$v(t) = \frac{1}{m} \cdot \int_{-\infty}^t F_M(\tau) d\tau$
Viskose Reibung / Dämpfer $D$	$F_D(t) = D \cdot v(t) = D \cdot \frac{dx}{dt}$	$v(t) = \frac{1}{D} \cdot F_D(t)$
Gleitreibung	$F_G(t) = \mu \cdot F_N(t) \cdot \text{sgn}(v(t))$	keine Invertierung möglich

Auch in der Mechanik werden Gleichungen angesetzt, die den Maschen- und Knotenregeln entsprechen. Der Maschenregel entspricht die Kräftesumme

$$\sum_{n=1}^N F_n(t) = 0 \quad (3.20)$$

Durch mechanische Kopplung lässt sich eine Aussage über die Auslenkung der verschiedenen Bauelemente des Systems machen. In diesem Beispiel sind Masse, Feder und Dämpfer starr miteinander gekoppelt. Die Auslenkungen  $x(t)$  für Masse, Feder und Dämpfer sind damit identisch. Die Anwendung der Kräftebilanz ergibt unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Krafrichtungen

$$F_E(t) - F_M(t) - F_D(t) - F_C(t) = F_E(t) - m \cdot a(t) - D \cdot v(t) - c \cdot x(t) = 0 \quad (3.21)$$

und der Zusammenhang zwischen der Auslenkung  $x(t)$  und der angreifenden Kraft  $F_E(t)$  kann als Differentialgleichung dargestellt werden.

$$F_E(t) = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + D \cdot \frac{dx}{dt} + c \cdot x(t) \quad (3.22)$$

Es handelt sich wieder um eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Die Ordnung der Differentialgleichung entspricht der höchsten Ableitung, in diesem Beispiel ist die Ordnung  $N = 2$ . Die Lösung der Differentialgleichung kann für ein definiertes Eingangssignal und eine definierte Anfangsbedingung wie bei dem elektrischen System mit der Vier-Schritt-Methode erfolgen. Für ein System, das sich zum Zeitpunkt  $t = 0$  in Ruhelage befindet und mit einem Kraftsprung am Eingang

$$F_E(t) = F_0 \cdot \sigma(t) \quad (3.23)$$

angeregt wird, ergibt sich bei geringer Dämpfung  $D$  die Lösung

$$x(t) = \frac{F_0}{c} \cdot \left( 1 + \frac{e^{-\frac{D}{2m} \cdot t}}{\sqrt{1 - \left( \frac{D}{2 \cdot \sqrt{m \cdot c}} \right)^2}} \cdot \sin \left( \sqrt{\frac{c}{m} - \left( \frac{D}{2 \cdot m} \right)^2} \cdot t - \varphi \right) \right) \cdot \sigma(t) \quad (3.24)$$

Auf die Berechnung dieses inschwingverhaltens wird später noch genauer eingegangen. Das Einschwingverhalten ist in Bild 3.7 für eine Federkonstante von  $c = 100 \text{ N/m}$ , eine Dämpfung von  $D = 0.5 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ , eine Masse  $m = 10 \text{ g}$  und eine Kraft  $F_0 = 0.2 \text{ N}$  dargestellt.

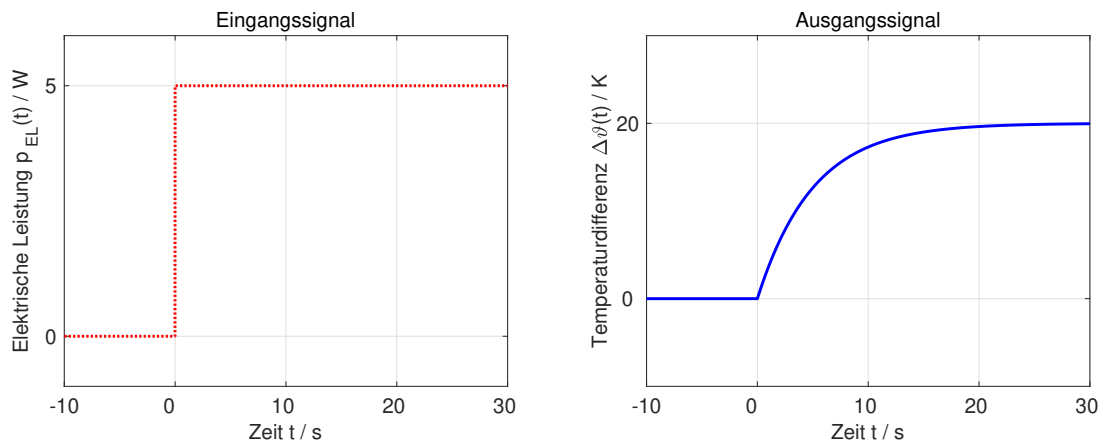


Bild 3.7: Einschwingverhalten des Feder-Masse-Dämpfer-Systems bei einer sprungförmigen Anregung mit einer Kraft von  $F_0 = 0.2\text{ N}$

### 3.1.4 Resümee zu den Beispielen

Viele Systeme lassen sich wie die hier diskutierten Systeme zumindest in guter Näherung durch lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschreiben.

$$a_0 \cdot y(t) + a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + a_2 \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \dots + a_n \cdot \frac{d^N y}{dt^N} = b_0 \cdot u(t) + b_1 \cdot \frac{du}{dt} + b_2 \cdot \frac{d^2u}{dt^2} + \dots + b_m \cdot \frac{d^M u}{dt^M} \quad (3.25)$$

Die Beschreibung des Systems mit Differentialgleichungen wird als Modellbildung bezeichnet. Sie ist für praktische Aufgabenstellungen anspruchsvoll und oft nur mit Erfahrung zu lösen. Auf die Modellbildung wird in Kapitel **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.** ausführlich eingegangen, und es wird ein Leitfaden zur Modellierung von Systemen vorgestellt.

## 3.2 Grundlegende Eigenschaften zeitkontinuierlicher Systeme

Im Abschnitt 3.1 werden unterschiedliche Systeme beschrieben. Die mathematische Modellierung führt bei diesen Beispielen zu linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. In diesem Abschnitt werden grundlegende Eigenschaften von Systemen diskutiert. Es wird sich zeigen, dass lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten lineare, zeitinvariante Systeme beschreiben.

### 3.2.1 Linearität

Für den Linearitätsnachweis eines Systems müssen die Systemantworten  $y_1(t)$  und  $y_2(t)$  auf die linear unabhängigen Eingangssignale  $u_1(t)$  und  $u_2(t)$  bekannt sein. Ein System ist linear, wenn es auf eine Linearkombination von Eingangssignalen

$$u_t = v_1 \cdot u_1(t) + v_2 \cdot u_2(t) \quad (3.26)$$

mit derselben Linearkombination der entsprechenden Kombination von Ausgangssignalen reagiert.

$$y_t = v_1 \cdot y_1(t) + v_2 \cdot y_2(t) \quad (3.27)$$

Der Nachweis der Linearität erfolgt über Einsetzen der Gleichungen in die Differentialgleichung.

#### Beispiel: Linearität eines RC-Netzwerks

Ein RC-Netzwerk mit der Differentialgleichung

$$U_E(t) = R \cdot C \cdot \frac{dU_A(t)}{dt} + U_A(t) \quad (3.28)$$



soll auf Linearität untersucht werden. Die Systemantworten  $U_{A1}(t)$  und  $U_{A2}(t)$  ergeben sich mit der Differentialgleichung 3.28 zu

$$U_{E1}(t) = R \cdot C \cdot \frac{dU_{A1}(t)}{dt} + U_{A1}(t) \quad (3.29)$$

beziehungsweise

$$U_{E2}(t) = R \cdot C \cdot \frac{dU_{A2}(t)}{dt} + U_{A2}(t) \quad (3.30)$$

Wird das System mit der Linearkombination

$$U_E(t) = v_1 \cdot U_{E1}(t) + v_2 \cdot U_{E2}(t) \quad (3.31)$$

angeregt, ergibt sich

$$\begin{aligned} u_E(t) &= v_1 \cdot u_{E1}(t) + v_2 \cdot u_{E2}(t) \\ &= v_1 \cdot \left( R \cdot C \cdot \frac{du_{A1}(t)}{dt} + u_{A1}(t) \right) + v_2 \cdot \left( R \cdot C \cdot \frac{du_{A2}(t)}{dt} + u_{A2}(t) \right) \\ &= R \cdot C \cdot \left( v_1 \cdot \frac{du_{A1}(t)}{dt} + v_2 \cdot \frac{du_{A2}(t)}{dt} \right) + (v_1 \cdot u_{A1}(t) + v_2 \cdot u_{A2}(t)) \\ &= R \cdot C \cdot \frac{du_A(t)}{dt} + u_A(t) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Das Ausgangssignal  $U_A(t)$  weist dieselbe Linearkombination auf wie das Eingangssignal.

#### Beispiel: Nichtlineares System

Der Strom  $i_D(t)$  durch eine Diode als Funktion der anliegenden Spannung wird über die Shockley-Gleichung berechnet.

$$i_D(t) = I_S \cdot (e^{\frac{U_D(t)}{n \cdot U_T}} - 1) \quad (3.33)$$

Die Diode soll auf Linearität untersucht werden. Die Systemantworten  $i_{D1}(t)$  und  $i_{D2}(t)$  ergeben sich mit der Shockley-Gleichung zu

$$i_{D1}(t) = I_S \cdot (e^{\frac{U_{D1}(t)}{n \cdot U_T}} - 1) \quad (3.34)$$

beziehungsweise

$$i_{D2}(t) = I_S \cdot (e^{\frac{U_{D2}(t)}{n \cdot U_T}} - 1) \quad (3.35)$$

Wird das System mit der Linearkombination

$$U_D(t) = k_1 \cdot U_{D1}(t) + k_2 \cdot U_{D2}(t) \quad (3.36)$$

angeregt, ergibt sich der Diodenstrom

$$\begin{aligned} i_D(t) &= I_S \cdot \left( e^{\frac{U_D(t)}{n \cdot U_T}} - 1 \right) = I_S \cdot \left( e^{\frac{v_1 \cdot U_{D1}(t) + v_2 \cdot U_{D2}(t)}{n \cdot U_T}} - 1 \right) = I_S \cdot \left( e^{\frac{v_1 \cdot U_{D1}(t)}{n \cdot U_T}} \cdot e^{\frac{v_2 \cdot U_{D2}(t)}{n \cdot U_T}} - 1 \right) \\ &\neq v_1 \cdot I_S \cdot \left( e^{\frac{U_{D1}(t)}{n \cdot U_T}} - 1 \right) + v_2 \cdot I_S \cdot \left( e^{\frac{U_{D2}(t)}{n \cdot U_T}} - 1 \right) = v_1 \cdot i_{D1}(t) + v_2 \cdot i_{D2}(t) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Der Strom  $i_D(t)$  durch die Diode ist nichtlinear zur Spannung  $u_D(t)$ , die an der Diode anliegt. Eine Diode ist damit ein nichtlineares Bauteil.

Die Linearität von Systemen kann auch daran abgelesen werden, dass alle Signale und Ableitungen nur in linearen Summen auftreten. Ist ein System linear, kann ein Ausgangssignal dadurch berechnet werden, dass die Eingangssignale zerlegt, ihre jeweiligen Systemantworten berechnet und anschließend

addiert werden. Dieses Prinzip wird als Superpositionsprinzip bezeichnet. Bild 3.8 zeigt Ein- und Ausgangssignale eines linearen Systems, das mit den Signalen  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  und  $u_1(t) + u_2(t)$  angeregt wird. Das Ausgangssignal  $y(t)$  setzt sich aus der Summe der Ausgangssignale  $y_1(t)$  und  $y_2(t)$  zusammen.

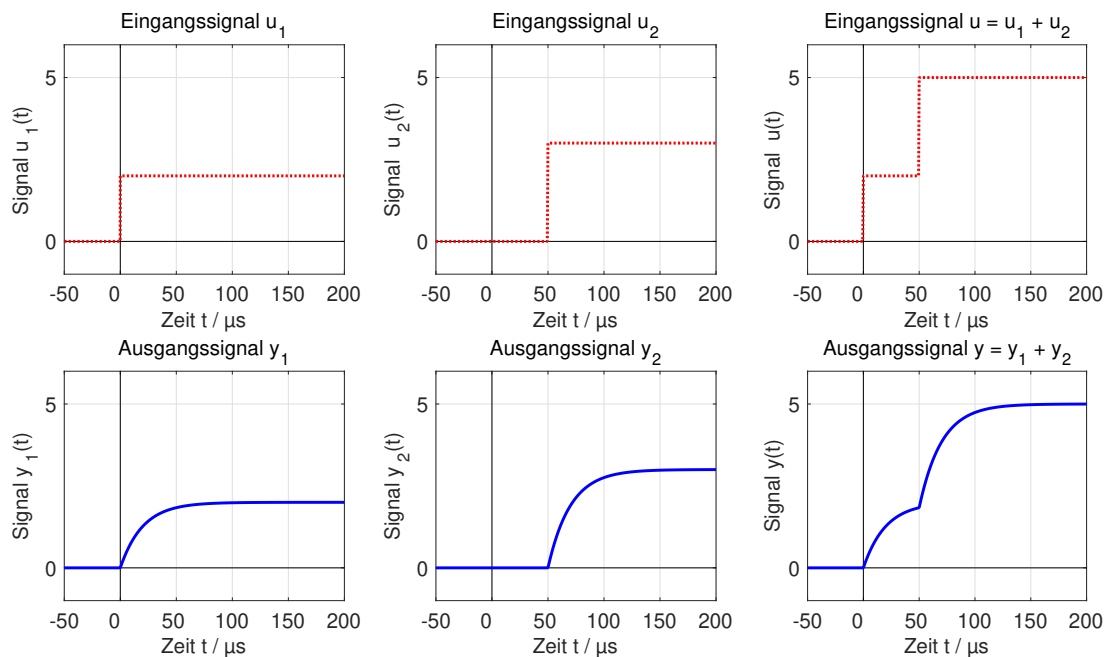


Bild 3.8: Reaktion eines linearen Systems auf die Anregung mit einer Linearkombination von Signalen

Linearität ist eine idealisierte Eigenschaft eines Systems, zum Beispiel wird sich der Widerstand  $R$  nichtlinear verhalten, wenn in ihm eine hohe Verlustleistung umgesetzt wird, und er sich erhitzt. In der Praxis werden viele Prozesse oder Systeme linear beschrieben, obwohl diese idealisierte Annahme nur in definierten Grenzen gilt. Andererseits können auch nichtlineare Systeme näherungsweise linear beschrieben werden. Dazu wird in dem nichtlinearen System ein Arbeitspunkt definiert und kleine Abweichungen aus dem Arbeitspunkt werden als linear angenommen.

#### Beispiel: Linearisierung einer Diodenkennlinie im Arbeitspunkt

Das nichtlineare Verhalten des Diodenstroms  $i_D(t)$  als Funktion der Diodenspannung  $u_D(t)$  soll in einem Arbeitspunkt mit der Spannung  $u_0$  und dem Strom  $i_0$  linearisiert werden. Bild 3.9 verdeutlicht die Linearisierung um einen Arbeitspunkt grafisch.

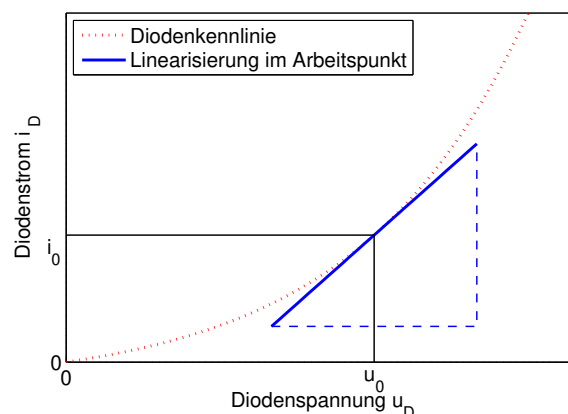


Bild 3.9: Linearisierung um einen Arbeitspunkt am Beispiel der Diodenkennlinie

In dem Arbeitspunkt  $(u_0|i_0)$  wird durch Ableitung der Shockley-Gleichung die Steigung der Tangente bestimmt.

$$m = \left. \frac{di_D}{du_D} \right|_{u_D=u_0} = \frac{I_S}{n \cdot U_T} \cdot e^{\frac{u_D(t)}{n \cdot U_T}} \bigg|_{u_D=u_0} = \frac{I_S}{n \cdot U_T} \cdot e^{\frac{u_0}{n \cdot U_T}} \quad (3.38)$$

Das Systemverhalten im Arbeitspunkt ergibt sich dann aus der Geradengleichung

$$i_D(t) - i_0 = \frac{I_S}{n \cdot U_T} \cdot e^{\frac{u_0}{n \cdot U_T}} \cdot (u_D(t) - u_0) = m \cdot (u_D(t) - u_0) \quad (3.39)$$

Mit den Bezeichnungen

$$\Delta i_D(t) = i_D(t) - i_0 \quad (3.40)$$

$$\Delta U_D(t) = U_D(t) - U_0 \quad (3.41)$$

ergibt sich die lineare Beschreibungsform

$$\Delta i_D(t) = m \cdot \Delta U_D(t) \quad (3.42)$$

Gleichung 3.42 stellt eine lineare Näherung für das nichtlineare System Diode im Arbeitspunkt  $(u_0|i_0)$  dar. Bild 3.9 macht jedoch deutlich, dass diese Linearisierung nur für sehr kleine Werte  $\Delta u_D$  ausreichend präzise ist.

### 3.2.2 Zeitinvarianz

Ein System reagiert auf ein Eingangssignal  $u(t)$  mit einer Systemantwort  $y(t)$ . Ist das System zeitinvariant, so reagiert das System auf das zeitlich verschobene Eingangssignal  $u(t - t_0)$  mit dem verschobenen Ausgangssignal  $y(t - t_0)$ . Zeitinvariante Systeme reagieren also unabhängig vom Startzeitpunkt der Anregung auf gleiche Eingangssignale mit gleichen Ausgangssignalen.

#### Beispiel: Zeitinvarianz eines Feder-Masse-Dämpfer Systems

Das Feder-Masse-Dämpfer System mit der Differentialgleichung

$$F_E(t) = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + D \cdot \frac{dx}{dt} + c \cdot x(t) \quad (3.43)$$

soll auf Zeitinvarianz untersucht werden. Dazu werden alle Ausdrücke  $t$  durch den Ausdruck  $t - t_0$  ersetzt. Unter der Annahme, dass die Koeffizienten  $m$ ,  $D$  und  $c$  nicht ändern, ergibt sich die Differentialgleichung

$$F_E(t - t_0) = m \cdot \frac{d^2 x(t - t_0)}{dt^2} + D \cdot \frac{dx(t - t_0)}{dt} + c \cdot x(t - t_0) \quad (3.44)$$

Wird das Eingangssignal um  $t_0$  verschoben, wird auch das Ausgangssignal um  $t_0$  verschoben.

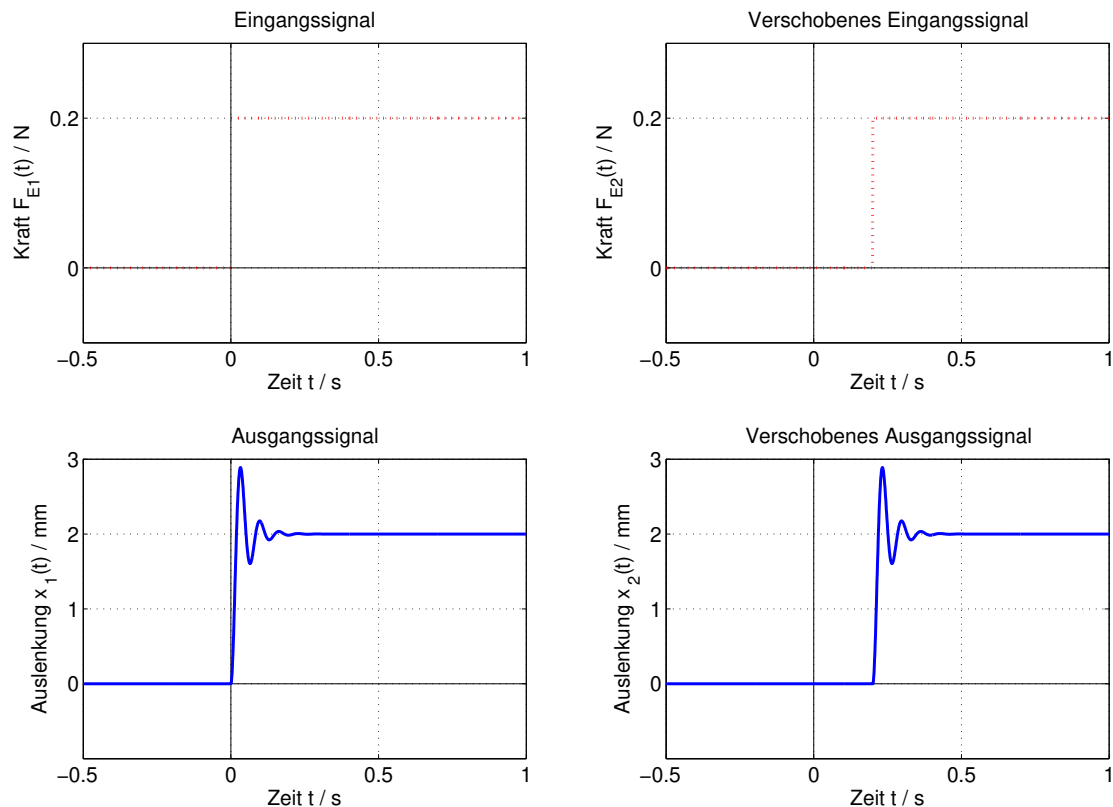


Bild 3.10: Reaktion eines zeitinvarianten Systems auf die Anregung mit einem um  $t_0 = 0.2\text{s}$  zeitverschobenen Signal

Wird ein System mit einer linearen Differentialgleichung beschrieben, die konstante Koeffizienten aufweist, ist das Systemverhalten von der Zeit unabhängig, und das System ist zeitinvariant. Ändern sich die Koeffizienten der Differentialgleichung als Funktion der Zeit  $t$ , verändert sich das System mit der Zeit. Es ist zeitvariant.

Auch die Zeitinvarianz ist eine Eigenschaft, die oft nur näherungsweise erfüllt ist. Zum Beispiel werden bei einem linearen RLC-Netzwerk die Bauelemente-Parameter über die Lebensdauer geringfügig driften. Damit wird aus einem konstanten Widerstand  $R$  ein von der Zeit abhängiger Widerstand  $R(t)$ , das System verändert sich. Typischerweise sind diese Änderungsprozesse aber viel langsamer als die Signaländerungen der Schaltung, die berechnet werden sollen, und können deshalb vernachlässigt werden.

### 3.2.3 Lineare, zeitinvariante Systeme (LTI-Systeme)

Systeme, die sowohl linear, als auch zeitinvariant sind, werden als LTI-Systeme bezeichnet. Die Bezeichnung leitet sich von dem englischen Begriff *Linear-Time-Invariant-System* ab. Bild 3.11 stellt die beiden Forderungen nach Linearität und Zeitinvarianz grafisch zusammen:

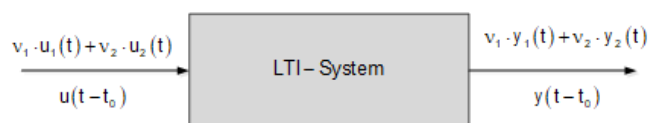


Bild 3.11: Lineares zeitinvariantes System

Für LTI-Systeme sind vergleichsweise anschauliche und einfach zu interpretierende Lösungs- und Interpretationsmethoden im Zeit- und Frequenzbereich vorhanden. Die Darstellungen in diesem Buch beschränken sich bis auf wenige Ausnahmen auf LTI-Systeme.

Systeme, die mit einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten beschrieben werden können, erfüllen die Bedingungen nach Linearität und Zeitinvarianz. Ausgehend von der allgemeinen Differentialgleichung

$$a_0 \cdot y(t) + a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + a_2 \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \dots + a_n \cdot \frac{d^N y}{dt^N} = b_0 \cdot u(t) + b_1 \cdot \frac{du}{dt} + b_2 \cdot \frac{d^2u}{dt^2} + \dots + b_m \cdot \frac{d^M u}{dt^M} \quad (3.45)$$

beziehungsweise ihrer Darstellung als Summenformel

$$\sum_{n=0}^N a_n \cdot \frac{d^n y}{dt^n} = \sum_{m=0}^M b_m \cdot \frac{d^m u}{dt^m} \quad (3.46)$$

werden die Eigenschaften der Linearität und Zeitinvarianz nachgewiesen.

### Linearität

Ausgangspunkt für den Beweis der Linearität sind zwei Signalkombinationen  $u_1(t)$  und  $y_1(t)$  sowie  $u_2(t)$  und  $y_2(t)$ , für die gilt:

$$\sum_{n=0}^N a_n \cdot \frac{d^n y_1}{dt^n} = \sum_{m=0}^M b_m \cdot \frac{d^m u_1}{dt^m} \quad (3.47)$$

$$\sum_{n=0}^N a_n \cdot \frac{d^n y_2}{dt^n} = \sum_{m=0}^M b_m \cdot \frac{d^m u_2}{dt^m} \quad (3.48)$$

Ist das System linear, muss die Differentialgleichung bei einer Kombination von Eingangssignalen

$$u(t) = v_1 \cdot u_1(t) + v_2 \cdot u_2(t) \quad (3.49)$$

mit derselben Linearkombination der Ausgangssignale

$$y(t) = v_1 \cdot y_1(t) + v_2 \cdot y_2(t) \quad (3.50)$$

erfüllt sein. Einsetzen der Gleichungen führt zu

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N a_n \cdot \frac{d^n y}{dt^n} &= \sum_{n=0}^N a_n \cdot \frac{d^n (v_1 \cdot y_1(t) + v_2 \cdot y_2(t))}{dt^n} = \sum_{n=0}^N a_n \cdot v_1 \cdot \frac{d^n y_1}{dt^n} + a_n \cdot v_2 \cdot \frac{d^n y_2}{dt^n} + \\ &= v_1 \cdot \sum_{n=0}^N a_n \cdot \frac{d^n y_1}{dt^n} + v_2 \cdot \sum_{n=0}^N a_n \cdot \frac{d^n y_2}{dt^n} = v_1 \cdot \sum_{m=0}^M b_m \cdot \frac{d^m u_1}{dt^m} + v_2 \cdot \sum_{m=0}^M b_m \cdot \frac{d^m u_2}{dt^m} \\ &= \sum_{m=0}^M b_m \cdot v_1 \cdot \frac{d^m u_1}{dt^m} + b_m v_2 \cdot \frac{d^m u_2}{dt^m} = \sum_{m=0}^M b_m \cdot \frac{d^m (v_1 \cdot u_1(t) + v_2 \cdot u_2(t))}{dt^m} \\ &= \sum_{m=0}^M b_m \cdot \frac{d^m u}{dt^m} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Eine Linearkombination von Eingangssignalen führt damit zu der identischen Linearkombination von Ausgangssignalen, sodass das System ein lineares System ist.

### Zeitinvarianz

Das System wird mit einer Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten beschrieben. Damit ist das Systemverhalten von der Zeit unabhängig, und das System ist zeitinvariant.

### 3.2.4 Kausalität

Hängt das Ausgangssignal  $y(t)$  eines Systems zu einem Zeitpunkt  $t_1$  nur von Eingangswerten  $u(t)$  mit  $t \leq t_1$  ab, wird das System als kausales System bezeichnet. Physikalisch sinnvolle und realisierbare Systeme sind wegen des Ursachewirkungsprinzips kausal.

#### Beispiel: Aufheizvorgang Wasserbad

Aus der Erfahrung im Umgang mit Aufheizvorgängen ist bekannt, dass sich die Temperatur in einem Wasserbad erst dann erhöht, wenn eine Heizung eingeschaltet wird. Die Kausalität ergibt sich auch aus der mathematischen Beschreibung.

$$\frac{C_{TH}}{\alpha \cdot A} \cdot \frac{\Delta \vartheta(t)}{dt} + \Delta \vartheta(t) = \frac{p_{EL}(t)}{\alpha \cdot A} \quad (3.52)$$

Erst wenn elektrische Leistung  $p_{EL}(t)$  in das System eingespeist wird, ändert sich die Temperatur  $\Delta \vartheta(t)$ .

#### Beispiel: Differenzierer als nicht kausales System

Die Differentiation eines Signals  $u(t)$  kann mathematisch beschrieben werden als

$$y(t) = \frac{du}{dt} \approx \frac{u(t + \Delta t) - u(t - \Delta t)}{2 \cdot \Delta t} \quad (3.53)$$

Zur Berechnung der Ableitung werden Eingangssignale verwendet, die in der Zukunft liegen. Ein Differenzierer ist damit kein kausales System.

### 3.2.5 Stabilität

Zur Erklärung des Begriffes der Stabilität wird von einem physikalischen Gedankenexperiment ausgegangen. Eine Kugel liegt auf einer Fläche, die unterschiedliche Krümmungen aufweist. In allen Fällen liegt die Kugel zunächst in einer Ruhelage, die mit  $x = 0$  bezeichnet wird. Die Kugel wird aus dieser Ruhelage um  $x_0$  ausgelenkt und danach sich selber überlassen.

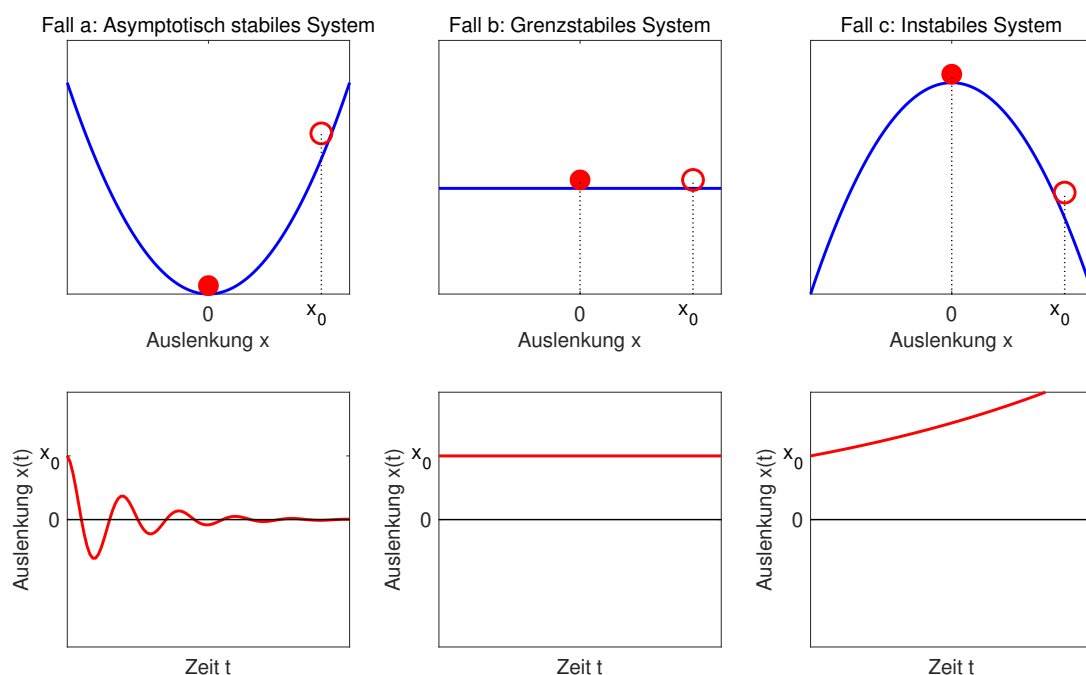


Bild 3.12: Gedankenmodell zur Erklärung des Stabilitätsbegriffes

Im Fall a wirkt auf die Kugel nach der Auslenkung eine tangentielle Kraftkomponente, die sie in Richtung der Ruhelage beschleunigt. In der Stelle  $x = 0$  wird die Kraftkomponente zu null, die Kugel besitzt jedoch eine Geschwindigkeit  $v_0$  und überstreicht die Ruhelage. Lageenergie wird in kinetische Energie gewandelt und umgekehrt. Aufgrund der Reibung und des Luftwiderstandes gibt die Kugel Energie an die Umgebung ab, die Auslenkung wird kleiner und schließlich gelangt die Kugel wieder in die Ruhelage  $x = 0$ . Das System wird als asymptotisch stabil bezeichnet. Im Fall b wird die Kugel nach einer einmaligen Auslenkung  $x_0$  dort liegen bleiben, da sie keine Kraft erfährt, die tangential auf sie wirkt. Da die Kugel nicht mehr in ihre Ruhelage zurückkehrt, ist das System nicht asymptotisch stabil, die Auslenkung der Kugel steigt aber auch nicht an. Das System wird deshalb als grenzstabil bezeichnet. Im Fall c wird die Kugel nach einer Auslenkung um  $x_0$  die Fläche herunterrollen, mit steigender Auslenkung nimmt die tangentielle Kraftkomponente zu. Wegen der steigenden Auslenkung wird das System als instabil bezeichnet.

Aus diesem Gedankenexperiment ergibt sich eine physikalische Stabilitätsdefinition: Ein System ist asymptotisch stabil, wenn es nach einer Anregung mit endlicher Energie wieder seine Ruheposition erreicht. Es ist grenzstabil, wenn es nach Anregung mit endlicher Energie zu einem konstanten Ausgangswert konvergiert, und es ist instabil, wenn es auf eine Anregung endlicher Energie mit divergierendem Ausgangssignal reagiert.

Diese physikalische Stabilitätsdefinition ist zwar anschaulich, jedoch praktisch schlecht auszuwerten. Deshalb wird der Stabilitätsbegriff bei der Diskussion der charakteristischen Gleichung in Abschnitt 3.3.2 und des Faltungsintegrals in Abschnitt 3.4.5 erneut aufgegriffen.

### 3.2.6 Systeme mit und ohne Ausgleich

Zur Interpretation von Systemen ist die Frage wichtig, ob das vorliegende System ein System mit oder ohne Ausgleich ist. Zur Einführung wird das Beispiel des Aufheizvorgangs aufgegriffen. Der Aufheizvorgang wird über die Differentialgleichung

$$p_{EL}(t) = C_{TH} \cdot \frac{\Delta\vartheta(t)}{dt} + \alpha \cdot A \cdot \Delta\vartheta(t) \quad (3.54)$$

beschrieben. Bei Einschalten des Tauchsieders wird elektrische Leistung  $p_{EL}(t)$  in Wärme umgewandelt. Es ergibt sich eine Temperaturerhöhung  $\Delta\vartheta(t)$ . Diese Temperaturerhöhung führt wiederum zu einer größeren Wärmeabgabe an die Umgebung. Es stellt sich ein stationärer Betriebspunkt ein. Er ist dadurch gekennzeichnet, dass die zugeführte und die abgeführte Wärme gleich groß sind. Mathematisch ergibt sich das stationäre Gleichgewicht dadurch, dass alle Ableitungen nach der Zeit zu null werden. Für den Aufheizprozess gilt in diesem Fall der Zusammenhang

$$p_{EL}(t) = C_{TH} \cdot 0 + \alpha \cdot A \cdot \Delta\vartheta(t) = \alpha \cdot A \cdot \Delta\vartheta(t) \quad (3.55)$$

Allgemein wird ein System, das bei Anregung mit einem konstant begrenzten Eingangssignal mit einem konstant begrenzten Ausgangssignal reagiert, als System mit Ausgleich bezeichnet. Alle in Abschnitt 3.1 diskutierten Systeme sind System mit Ausgleich. Generell findet ein Ausgleich statt, wenn ein Eingangssignal  $u(t)$  durch ein Ausgangssignal  $y(t)$  kompensiert wird. Dazu muss in der Differentialgleichung

$$a_0 \cdot y(t) + a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + a_2 \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \dots + a_n \cdot \frac{d^N y}{dt^N} = b_0 \cdot u(t) + b_1 \cdot \frac{du}{dt} + b_2 \cdot \frac{d^2u}{dt^2} + \dots + b_m \cdot \frac{d^M u}{dt^M} \quad (3.56)$$

die Bedingung  $a_0 \neq 0$  gelten. Wird bei Anregung des Systems mit konstant begrenztem Signal kein stationäres Gleichgewicht erreicht, handelt es sich um ein System ohne Ausgleich. Systeme mit integrierendem Verhalten wie bewegte Massen oder Flüssigkeitsbehälter sind Beispiele für Systeme ohne Ausgleich.

#### Beispiel: System ohne Ausgleich

In Bild 3.13 ist ein zylindrischer Behälter der Grundfläche  $A$  ohne Auslauf dargestellt. In den Behälter fließt ein Volumenstrom  $Q(t)$ . Bild 3.13 zeigt schematisch den Aufbau.

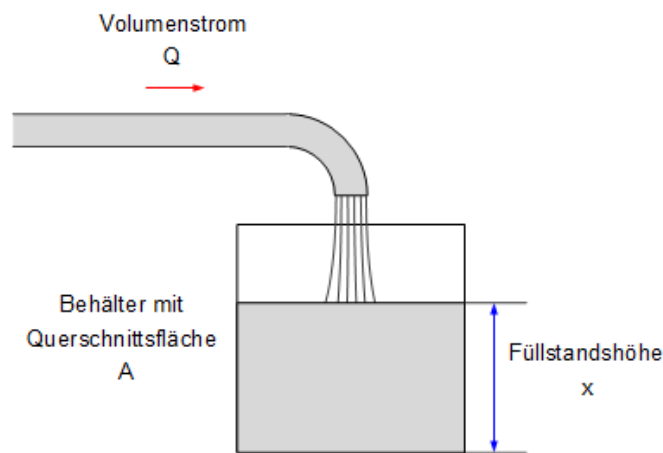


Bild 3.13: Behälter ohne Auslauf als Beispiel für ein System ohne Ausgleich

Die Füllstandshöhe  $h(t)$  wird über die Gleichung

$$x(t) = \frac{1}{A} \cdot \int_0^t Q(\tau) d\tau + X_0 \quad (3.57)$$

beschrieben. Ableiten von Gleichung (3.57) führt zu der Differentialgleichung

$$0 \cdot x(t) + \frac{dx}{dt} = \frac{1}{A} \cdot Q(t) \quad (3.58)$$

Es existiert kein stationäres Gleichgewicht, da im stationären Gleichgewicht die Ableitung  $dh/dt$  zu null würde. Gleichung (3.58) kann in diesem Fall nicht erfüllt werden, da der Koeffizient  $a_0 = 0$  ist. Gleichung (3.57) zeigt, dass die Füllstandshöhe  $h$  kontinuierlich ansteigt. Das Systemverhalten ist in Bild 3.14 für eine Querschnittsfläche  $A = 10 \text{ m}^2$  und einen Anfangszustand  $x_0 = 2 \text{ m}$  dargestellt.

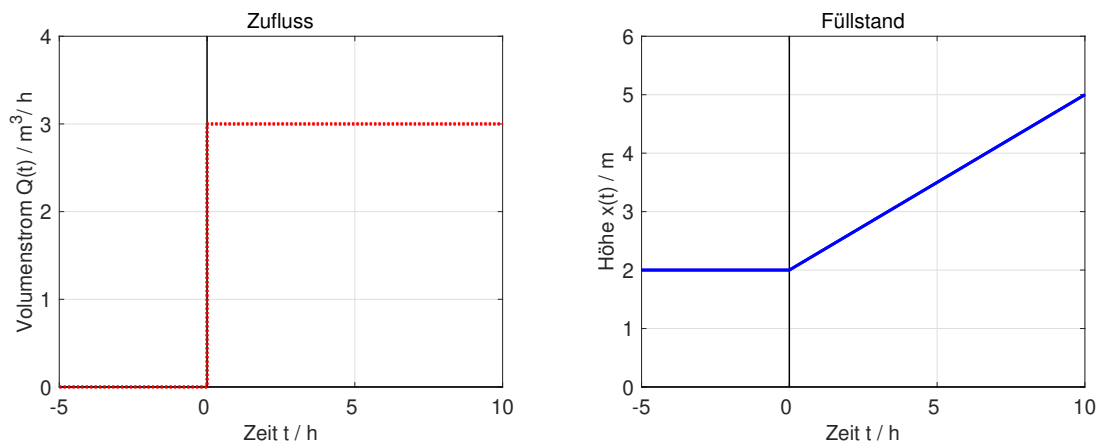


Bild 3.14: Anregung eines Tanks ohne Auslauf mit einem konstanten Volumenstrom

Ein Volumenstrom  $Q(t) > 0$  führt zu einem Anstieg der Füllstandshöhe. Es findet kein Ausgleich statt. Es handelt sich demnach um ein System ohne Ausgleich.



### 3.2.7 Zusammenfassung grundlegender Systemeigenschaften

Tabelle 3.4 fasst die diskutierten Systemeigenschaften und ihre Bedeutung zusammen.

Tabelle 3.4: Zusammenfassung von Systemeigenschaften und ihrer Bedeutung

Eigenschaft	Bedeutung
Linearität	System reagiert auf Linearkombination von Eingangssignalen $u(t) = v_1 \cdot u_1(t) + v_2 \cdot u_2(t)$ mit derselben Linearkombination von Ausgangssignalen $y(t) = v_1 \cdot y_1(t) + v_2 \cdot y_2(t)$
Zeitinvarianz	System reagiert auf ein verzögertes Eingangssignal $u(t - t_0)$ mit einem Ausgangssignal $y(t - t_0)$
Kausalität	System reagiert auf ein Eingangssignal erst nach Beginn der Anregung
Asymptotische Stabilität	System erreicht nach einer Anregung mit endlicher Energie wieder seine Ruheposition
Grenzstabilität	System bleibt nach einer Anregung mit endlicher Energie in dem aktuellen Zustand
Instabilität	System reagiert nach einer Anregung mit endlicher Energie mit einer divergierenden Systemantwort
System mit Ausgleich	Differentialgleichung mit dem Koeffizienten $a_0 \neq 0$

### 3.3 Lösung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Zur Charakterisierung von Systemen werden oftmals Sprung- und Impulsantworten verwendet. Sie lassen sich bei linearen, zeitinvarianten Systemen im Zeitbereich mit der Vier-Schritt-Methode berechnen.

#### 3.3.1 Lösung von Anfangswertproblemen mit der Vier-Schritt-Methode

Bei technischen Anwendungen werden lineare, zeitinvariante Systeme durch lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschrieben.

$$a_0 \cdot y(t) + a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + a_2 \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \dots + a_n \cdot \frac{d^Ny}{dt^N} = b_0 \cdot u(t) + b_1 \cdot \frac{du}{dt} + b_2 \cdot \frac{d^2u}{dt^2} + \dots + b_m \cdot \frac{d^Mu}{dt^M} \quad (3.59)$$

Zur Charakterisierung dieser Systeme kann das Einschwingverhalten  $y(t)$  unter Berücksichtigung von Anfangswerten des Signals  $y(t = 0)$  bestimmt werden. Diese Aufgabenstellungen werden in der Mathematik als Anfangswertprobleme bezeichnet. Die Lösung dieser Anfangswertprobleme erfolgt mit der Vier-Schritt-Methode. Grundlage für das Lösungsverfahren ist, zunächst alle sogenannten homogenen Lösungen der Differentialgleichung zu finden und sie dann mit einer sogenannten partikulären Lösung zu kombinieren. Aus der Menge dieser Lösungen wird abschließend diejenige ausgewählt, die die Anfangsbedingungen der Aufgabenstellung erfüllt. Die Vier-Schritt-Methode umfasst damit folgende Schritte:

- Berechnung der allgemeinen homogenen Lösungen
- Berechnung einer partikulären Lösung
- Superposition von homogener und partikulärer Lösung
- Bestimmung der Konstanten über Anfangsbedingungen

Eine ausführliche Darstellung der Vier-Schritt-Methode mit unterschiedlichen Lösungsvarianten ist in [Papu11] und [Goeb11] zu finden. Hier wird eine Lösungsmöglichkeit beschrieben und am Beispiel des RC-Netzwerks angewendet.

#### Berechnung der allgemeinen homogenen Lösungen

Die lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten (3.59) beschreibt den Zusammenhang zwischen Eingangssignal  $u(t)$  und Ausgangssignal  $y(t)$ . Zur Bestimmung der homogenen Differentialgleichungen wird das Eingangssignal  $u(t)$  zu null gesetzt.

$$a_0 \cdot y_H(t) + a_1 \cdot \frac{dy_H}{dt} + a_2 \cdot \frac{d^2y_H}{dt^2} + \dots + a_n \cdot \frac{d^Ny_H}{dt^N} = 0 \quad (3.60)$$

Die Gleichung besteht aus einer mit den Koeffizienten an gewichteter Summe der Funktion  $y_H(t)$  und ihren Ableitungen. Zur Lösung dieser Gleichung wird eine Exponentialfunktion angesetzt.

$$y_H(t) = Y_0 \cdot e^{\lambda \cdot t} \quad (3.61)$$

Sie hat die Eigenschaft, dass ihre Ableitungen selbst wieder Exponentialfunktionen sind.

$$\frac{d^ny_H}{dt^n} = \lambda^n \cdot e^{\lambda \cdot t} \quad (3.62)$$

Durch Einsetzen in die homogene Differentialgleichung ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 \cdot y_H(t) + a_1 \cdot \frac{dy_H}{dt} + a_2 \cdot \frac{d^2y_H}{dt^2} + \dots + a_N \cdot \frac{d^Ny_H}{dt^N} \\ &= a_0 \cdot Y_0 \cdot e^{\lambda \cdot t} + a_1 \cdot \lambda \cdot Y_0 \cdot e^{\lambda \cdot t} + a_2 \cdot \lambda^2 \cdot Y_0 \cdot e^{\lambda \cdot t} + \dots + a_N \cdot \lambda^N \cdot Y_0 \cdot e^{\lambda \cdot t} \\ &= (a_0 + a_1 \cdot \lambda + a_2 \cdot \lambda^2 + \dots + a_N \cdot \lambda^N) \cdot Y_0 \cdot e^{\lambda \cdot t} \end{aligned} \quad (3.63)$$

Die Gleichung ist für  $Y_0 = 0$  erfüllt. Dieser Fall ist jedoch technisch weniger von Interesse, da er den Ruhezustand des Systems beschreibt. Für  $Y_0 \neq 0$  kann die Gleichung vereinfacht werden zu

$$0 = a_0 + a_1 \cdot \lambda + a_2 \cdot \lambda^2 + \dots + a_N \cdot \lambda^N \quad (3.64)$$

Mit der Gleichung werden die Werte  $\lambda_n$  bestimmt, für die die Exponentialfunktion die vorliegende homogene Differentialgleichung löst. Die Gleichung wird deshalb auch charakteristische Gleichung des Systems genannt. Ein Polynom N-ter Ordnung weist N Nullstellen auf, sodass die Nullstellen  $\lambda_1 \dots \lambda_N$  Lösungen der charakteristischen Gleichung sind. Es kann gezeigt werden, dass sich die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung  $y_H(t)$  bei einfachen Nullstellen  $\lambda_n$  aus der Linearkombination

$$y_H(t) = Y_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + Y_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} + \dots + Y_N \cdot e^{\lambda_N \cdot t} \quad (3.65)$$

ergibt [Goeb11]. Die Lösungen der charakteristischen Gleichung müssen jedoch nicht die Vielfachheit von eins haben. Existiert eine P-fache Nullstelle  $\lambda_1$ , ergibt sich die homogene Lösung

$$y_H(t) = Y_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + Y_2 \cdot t \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + \dots + Y_P \cdot t^{P-1} \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + Y_{P+1} \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} + Y_{P+2} \cdot e^{\lambda_3 \cdot t} + \dots + Y_N \cdot e^{\lambda_{N-P+1} \cdot t} \quad (3.66)$$

### Beispiel: Einschwingverhalten eines RC-Netzwerks

Als Beispiel wird das Einschaltverhalten des RC-Netzwerks aus Bild 3.2 berechnet. Die Ausgangsspannung des RC-Netzwerks wird über die Differentialgleichung

$$R \cdot C \cdot \frac{dU_A}{dt} + U_A(t) = U_E(t) \quad (3.67)$$

beschrieben. Die zugehörige homogene Differentialgleichung lautet

$$R \cdot C \cdot \frac{dU_{AH}}{dt} + U_{AH}(t) = 0 \quad (3.68)$$

Einsetzen der Exponentialfunktion

$$u_{AH}(t) = U_H \cdot e^{\lambda \cdot t} \quad (3.69)$$

führt mit  $U_H \neq 0$  zu der charakteristischen Gleichung

$$0 = U_{AH}(t) = R \cdot C \cdot \lambda U_H \cdot e^{\lambda \cdot t} + U_H \cdot e^{\lambda \cdot t} = (R \cdot C \cdot \lambda + 1) \cdot U_H \cdot e^{\lambda \cdot t} \quad (3.70)$$

mit der Lösung

$$\lambda = -\frac{1}{R \cdot C} \quad (3.71)$$

Damit ergibt sich die Lösung der homogenen Differentialgleichung zu

$$u_{AH}(t) = U_H \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t} \quad (3.72)$$

Die Konstante  $U_H$  ist zunächst unbekannt, sie wird später über die Anfangsbedingungen des Systems bestimmt.

### Berechnung einer partikulären Lösung

Im zweiten Schritt wird eine partikuläre oder spezielle Lösung der Differentialgleichung bestimmt. Dabei wird von der Differentialgleichung

$$a_0 \cdot y(t) + a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + a_2 \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \dots + a_n \cdot \frac{d^N y}{dt^N} = b_0 \cdot u(t) + b_1 \cdot \frac{du}{dt} + b_2 \cdot \frac{d^2u}{dt^2} + \dots + b_m \cdot \frac{d^M u}{dt^M} \quad (3.73)$$

mit  $u(t) \neq 0$  ausgegangen, und es wird für  $t \geq 0$  eine Lösung gesucht. Wesentlich ist, dass eine beliebige partikuläre Lösung ausreicht, da sie durch Kombination mit der allgemeinen homogenen Lösung das Anfangswertproblem beschreibt. Eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung kann auf verschiedene Arten bestimmt werden [Goeb11]. Hier wird die Lösung durch Lösungsansätze vorgestellt. Die Lösungsansätze sind im Allgemeinen von der Ordnung der Differentialgleichung abhängig und können in [Papu01] oder [Goeb11] nachgeschlagen werden. Für die hier relevanten Fälle einer konstanten Anregung oder einer harmonischen Anregung sind die Lösungsansätze jedoch von der Ordnung der Differentialgleichung unabhängig. Sie sind in Tabelle 3.5 zusammengefasst.

Tabelle 3.5: Lösungsansätze für die partielle Lösung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Eingangssignal $u(t)$ für $t \geq 0$	Lösungsansatz $y_p(t)$
Konstantes Eingangssignal $u(t) = U$	Konstantes Ausgangssignal $y_p(t) = Y$
Harmonisches Eingangssignal $u(t) = U \cdot \cos(\omega t + \mu_x)$	Harmonisches Ausgangssignal $y_p(t) = Y \cdot \cos(\omega t + \mu_y)$ wenn $j \cdot \omega$ keine Lösung der charakteristischen Gleichung ist
Exponentielles Eingangssignal $u(t) = U \cdot e^{c \cdot t}$	Exponentielles Ausgangssignal $y_p(t) = Y \cdot e^{c \cdot t}$ wenn $c$ keine Lösung der charakteristischen Gleichung ist

Die freien Parameter des Lösungsansatzes ergeben sich aus dem vorliegenden Eingangssignal sowie der vorliegenden Differentialgleichung. Dies wird am einfachsten an einem konkreten Beispiel deutlich.

#### Beispiel: Einschwingverhalten eines RC-Netzwerks

Zur Berechnung der Systemreaktion auf ein konstantes Eingangssignal der Größe  $U_{E0}$  wird für  $t \geq 0$  das Eingangssignal

$$u_E(t) = U_{E0} \quad (3.74)$$

in die Differentialgleichung eingesetzt.

$$R \cdot C \cdot \frac{du_{AP}}{dt} + u_{AP}(t) = U_{E0} \quad (3.75)$$

Der Ansatz für die partikuläre Lösung bei einer konstanten Anregung ist wieder eine Konstante.

$$u_{AP}(t) = U_{A0} \quad (3.76)$$

Ihre Ableitung ist null. Einsetzen in die Differentialgleichung führt zu

$$R \cdot C \cdot 0 + U_{A0} = U_{E0} \quad (3.77)$$

Die beiden Konstanten  $U_{E0}$  und  $U_{A0}$  sind demnach identisch, sodass die partikuläre Lösung für  $t \geq 0$  lautet:

$$u_{AP}(t) = U_{E0} \quad (3.78)$$

Das hier vorgestellte Verfahren führt zu einem stetigen Ausgangssignal. Es versagt, wenn das Ausgangssignal Sprünge oder Impulse aufweist. Für die korrekte Berechnung der Systemantwort muss in dem

Fall eine sogenannte Übergangsbedingung berücksichtigt werden. Das entsprechende Verfahren wird in Abschnitt 3.3.2 beschrieben..

### Superposition von homogener und partikulärer Lösung

Sind die allgemeine homogene Lösung und eine partikuläre Lösung bekannt, ergibt sich die Lösung der Differentialgleichung aus deren Summe.

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) \quad (3.79)$$

Dabei weist die homogene Lösung noch unbekannte Parameter auf, die später über Anfangsbedingungen zu bestimmen sind.

#### Beispiel: Einschwingverhalten eines RC-Netzwerks

Bei dem Einschaltverhalten eines RC-Netzwerks ergibt sich die Lösung aus der Summe von homogener Lösung

$$u_{AH}(t) = U_H \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t} \quad (3.80)$$

und partikulärer Lösung

$$u_{AP}(t) = U_{E0} \quad (3.81)$$

zu

$$u_A(t) = U_H \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t} + U_{E0} \quad (3.82)$$

Dabei ist die Konstante  $U_H$  noch unbekannt.

### Bestimmung der Konstanten über Anfangsbedingungen

Die Summe aus homogener und partikulärer Lösung weist Parameter auf, die bestimmt werden müssen. Es kann gezeigt werden, dass bei einer Differentialgleichung N-ter Ordnung N Parameter zu bestimmen sind. Dazu werden N Bedingungen benötigt. Bei Anfangswertproblemen sind diese Bedingungen die Anfangswerte der Funktion  $y(t)$  und ihrer  $N - 1$  Ableitungen an der Stelle  $t = 0$ .

#### Beispiel: Einschwingverhalten eines RC-Netzwerks

Bei dem RC-Netzwerk handelt es sich um ein System, das mit einer Differentialgleichung erster Ordnung beschrieben wird. Die allgemeine Lösung lautet

$$u_A(t) = U_H \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t} + U_{E0} \quad (3.83)$$

Zur Bestimmung des Parameters  $U_H$  wird die Ausgangsspannung  $u_A(0)$  verwendet. Es ergibt sich

$$u_A(0) = U_H \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot 0} + U_{E0} = U_H + U_{E0} \quad (3.84)$$

beziehungsweise

$$U_H = u_A(0) - U_{E0} \quad (3.85)$$

Daraus ergibt sich die Lösung des Anfangswertproblems in Abhängigkeit der Ausgangsspannung  $u_A(0)$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  zu

$$u_A(t) = (u_A(0) - U_{E0}) \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t} + U_{E0} = u_A(0) \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t} + U_{E0} \cdot (1 - e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}) \quad (3.86)$$

Die Ausgangsspannung setzt sich aus zwei Termen zusammen. Der erste Term beschreibt das Abklingen der Anfangsbedingung, der zweite Term beschreibt die Reaktion des Systems auf einen Spannungssprung am Eingang. Bild 3.15 zeigt das Einschwingverhalten der Kondensatorspannung  $u_A(t)$  für eine

Spannung  $U_{E0} = 5 \text{ V}$ , einen Widerstand von  $5 \text{ k}\Omega$  und eine Kapazität von  $4 \text{ nF}$  bei unterschiedlichen Anfangswerten.

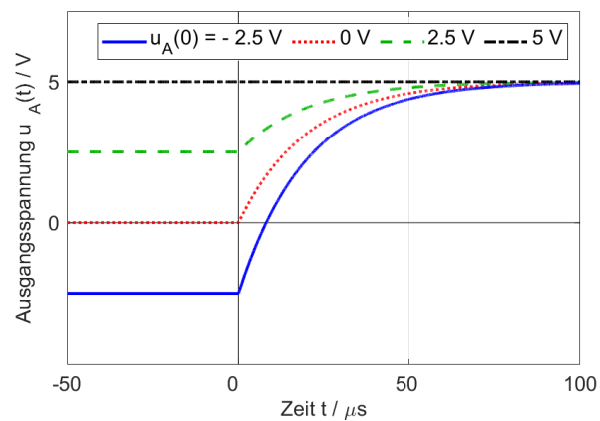


Bild 3.15: Einschwingverhalten der Kondensator Spannung  $u_A(t)$  bei Anregung mit einem Spannungssprung von  $5 \text{ V}$  und verschiedenen Anfangsbedingungen  $u_A(0)$

Das Ausgangssignal schwingt abhängig von dem Anfangswert auf den Endwert von  $u_A = 5 \text{ V}$  ein.

## Zusammenfassung

Das Vorgehen bei der Vierschrittmethod zur Lösung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ist in Tabelle 3.6 zusammengefasst.

Tabelle 3.6: Lösungsansätze für die partielle Lösung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Schritt	Beschreibung
1	<p>Lösung der homogenen Differentialgleichung</p> $a_0 \cdot y_H(t) + a_1 \cdot \frac{dy_H}{dt} + a_2 \cdot \frac{d^2 y_H}{dt^2} + \dots + a_N \cdot \frac{d^N y_H}{dt^N} = 0$ <p>über Ansatz</p> $y_H(t) = Y_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$ <p>durch Lösen der charakteristischen Gleichung</p> $0 = a_0 + a_1 \cdot \lambda + a_2 \cdot \lambda^2 + \dots + a_N \cdot \lambda^N$ <p>Allgemeine Lösung in Abhängigkeit der Vielfachheit</p> $y_H(t) = Y_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + Y_2 \cdot t \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + \dots + Y_P \cdot t^{P-1} \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + Y_{P+1} \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} + Y_{P+2} \cdot e^{\lambda_3 \cdot t} + \dots + Y_N \cdot e^{\lambda_{N-P+1} \cdot t}$
2	Bestimmung einer partikulären Lösung $y_p(t)$ über einen Lösungsansatz je nach Eingangssignal
3	Superposition von allgemeiner homogener und partikulärer Lösung
	$y(t) = y_H(t) + y_p(t)$
4	Bestimmung der unbekannten Konstanten über Anfangsbedingungen

### 3.3.2 Exkurs zu Übergangsbedingungen bei linearen Differentialgleichungen

Die in Abschnitt 3.3.1 beschriebene Vier-Schritt-Methode eignet sich zur Lösung linearer Differentialgleichung, bei denen das Ausgangssignal stetig ist. Deshalb wird die Vier-Schritt-Methode stufenweise ergänzt, um Sprünge oder allgemein Singularitäten berücksichtigen zu können.

#### Lösung linearer Differentialgleichungen bei stetigem Ausgangssignal ( $N > P$ )

Ist das Ausgangssignal stetig, sind rechter und linker Grenzwert an der Stelle  $t = 0$  identisch.

$$y(0_+) = y(0_-) \quad (3.87)$$

Die Rechnung erfolgt in diesem Fall wie in Abschnitt 3.3.1. Zur Überleitung wird dieser Fall noch einmal aufgegriffen und hinsichtlich der Anfangsbedingung intensiver interpretiert.

#### Beispiel: Lineare Differentialgleichung und stetiges Ausgangssignal

Als einführendes Beispiel wird das Ausgangssignal für ein System mit der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dt} + 6 \cdot y(t) = u(t) \quad (3.88)$$

berechnet. Das Eingangssignal ist

$$\frac{dy}{dt} + 6 \cdot y(t) = u(t) \quad (3.89)$$

und die Anfangsbedingung lautet  $y(0_-) = U_1$ . Zur Berechnung des Ausgangssignals  $y(t)$  wird zunächst für  $t > 0$  die homogene Differentialgleichung

$$\frac{dy_H}{dt} + 6 \cdot y_H(t) = 0 \quad (3.90)$$

mit dem Ansatz

$$y_H(t) = Y_H \cdot e^{\lambda \cdot t} \cdot \sigma(t) \quad (3.91)$$

gelöst. Für  $t > 0$  ergibt sich über durch Einsetzen

$$\lambda \cdot Y_H \cdot e^{\lambda \cdot t} + 6 \cdot Y_H \cdot e^{\lambda \cdot t} = 0 \quad (3.92)$$

die charakteristische Gleichung

$$\lambda + 6 = 0 \quad (3.93)$$

Sie besitzt die Lösung  $\lambda = -6$ . Damit lautet für  $t > 0$  die allgemeine homogene Lösung

$$y_H(t) = Y_H \cdot e^{-6 \cdot t} \cdot \sigma(t) \quad (3.94)$$

Da das Eingangssignal für  $t > 0$  konstant ist, ist die Konstante  $y_P(t) = Y_P$  eine partikuläre Lösung. Einsetzen in die Differentialgleichung führt zu

$$0 + 6 \cdot Y_P = U_0 \quad (3.95)$$

beziehungsweise

$$Y_P = \frac{1}{6} \cdot U_0 \quad (3.96)$$

Damit lautet die Lösung der Differentialgleichung

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = \left( Y_H \cdot e^{-6 \cdot t} + \frac{1}{6} \cdot U_0 \right) \cdot \sigma(t) \quad (3.97)$$

Das Eingangssignal  $u(t)$  ist an der Stelle  $t = 0$  nicht stetig, es springt. Um die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dt} + 6 \cdot y(t) = u(t) \quad (3.98)$$

erfüllen zu können, muss auch das Ausgangssignal  $y(t)$  oder eine Ableitung des Ausgangssignals springen.  $\frac{dy}{dt} + 6 \cdot y(t) = u(t)$  Würde  $y(t)$  springen, wäre  $dy/dt$  ein Impuls. Dieser Impuls hat kein entsprechendes Pendant auf der Eingangsseite. Deshalb muss  $dy/dt$  an der Stelle  $t = 0$  springen. Das Signal  $y(t)$  ist damit an der Stelle  $t = 0$  stetig und springt nicht.

$$y(0_+) = y(0_-) = U_1 \quad (3.99)$$

Mit diesen Anfangswerten wird die Unbekannte  $Y_H$  bestimmt.

$$y(0_+) = Y_H + \frac{1}{6} \cdot U_0 = U_1 \quad (3.100)$$

Die Konstante  $Y_H$  errechnet sich zu

$$Y_H = U_1 - \frac{1}{6} \cdot U_0 \quad (3.101)$$

Damit lautet die Lösung der Differentialgleichung für  $t > 0$

$$y(t) = \left( \left( U_1 - \frac{1}{6} \cdot U_0 \right) \cdot e^{-6 \cdot t} + \frac{1}{6} \cdot U_0 \right) \cdot \sigma(t) \quad (3.102)$$

Liegt bei dem Eingangssignal  $u(t)$  ein Sprung an der Stelle  $t = 0$  vor, führt diese Unstetigkeit in Kombination mit einer Ableitung  $du/dt$  des Eingangssignals zu einem Impuls an der Stelle  $t = 0$ . Damit kann die Aufgabenstellung mit der in Abschnitt 3.3.1 beschriebenen Vier-Schritt-Methode alleine nicht gelöst werden. Auch bei höheren Ableitungen des Eingangssignals  $u(t)$  in Kombination mit unstetigen



Eingangssignalen versagt die Vier-Schritt-Methode. Ein impulsförmiges Eingangssignal  $u(t) = \delta(t)$  führt ebenfalls zu einer Aufgabenstellung, die mit der Vier-Schritt-Methode alleine nicht gelöst werden kann.

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{d^2\sigma}{dt^2} \quad (3.103)$$

die Ordnung  $P = 2$  auf. Um eine Differentialgleichung für Eingangssignale mit Singularitäten zu lösen, müssen auf beiden Seiten der Differentialgleichung alle Ordnungen der Singularitäten dasselbe Gewicht haben.  $a_n \cdot \frac{d^n y}{dt^n} = \sum_{m=0}^M b_m \cdot \frac{d^m u}{dt^m}$  In dem Beispiel oben hat diese Abschätzung dazu geführt, dass das Ausgangssignal  $y(t)$  stetig ist. Auch bei der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 5 \cdot \frac{dy}{dt} + 6 \cdot y(t) = \frac{du}{dt} \quad (3.104)$$

und einem Eingangssignal

$$u(t) = U_0 \cdot \sigma(t) \quad (3.105)$$

wäre das Ausgangssignal stetig. Das Eingangssignal weist unter Berücksichtigung der Ableitung eine Singularität der Ordnung  $P = 1$  auf. Deshalb muss die zweite Ableitung von  $y(t)$  einen Impuls aufweisen und die erste Ableitung einen Sprung besitzen. Damit ist  $y(t)$  stetig. Dieser Ansatz führt deshalb immer dann zum Ergebnis, wenn die Ordnung  $N$  der Differentialgleichung größer ist als die Ordnung  $P$  der Singularität.

$$N > P \quad (3.106)$$

### Lösung linearer Differentialgleichungen bei springendem Ausgangssignal ( $N = P$ )

Sind die Ordnungen der Differentialgleichung  $N$  und der Singularität  $P$  gleich groß, weist das Ausgangssignal einen Sprung auf. Die Anfangsbedingung  $y(0_-)$  ist deshalb nicht identisch zu  $y(0_+)$  und kann nicht zur Bestimmung der Konstante in der homogenen Lösung verwendet werden. Zur Lösung dieser Aufgabenstellungen wird deshalb eine Übergangsbedingung benötigt, die das Verhalten an der Stelle  $t = 0$  beschreibt. Dazu wird die Lösung  $y(t)$  in einen linken Bereich ( $t < 0$ ) und einen rechten Bereich ( $t > 0$ ) aufgeteilt.

$$y(t) = y_L(t) \cdot \sigma(-t) + y_R(t) \cdot \sigma(t) \quad (3.107)$$

Zwischen den beiden Bereichen findet der Sprung des Ausgangssignals statt, der mit Hilfe der Ausblendeeigenschaft der Impulsfunktion bestimmt wird. Das Vorgehen wird wieder an einem Beispiel beschrieben.

#### Beispiel: Lineare Differentialgleichung und stetiges Ausgangssignal

Um zu untersuchen, wie Differentialgleichungen mit springendem Ausgangssignal berechnet werden, wird die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dt} + 6 \cdot y(t) = \frac{du}{dt} \quad (3.108)$$

bei einem Eingangssignal

$$u(t) = U_0 \cdot \sigma(t) \quad (3.109)$$

und der Anfangsbedingung  $y(0_-) = U_1$  betrachtet. Auf der rechten Seite wird der Sprung am Eingang abgeleitet, es liegt also eine Singularität erster Ordnung ( $P = 1$ ) vor. Die höchste Ableitung auf der linken Seite ist die erste Ableitung des Ausgangssignals ( $N = 1$ ). Um der Singularität auf der rechten Seite zu

entsprechen, muss das Ausgangssignal  $y(t)$  einen Sprung aufweisen. Es gibt für das Ausgangssignal also eine Lösung  $y_R(t)$  für  $t > 0$  und eine Lösung  $y_L(t)$  für  $t < 0$ .

$$y(t) = y_L(t) \cdot \sigma(-t) + y_R(t) \cdot \sigma(t) \quad (3.110)$$

Formell berechnet sich die erste Ableitung zu

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -y_L(t) \cdot \delta(-t) + \frac{dy_L}{dt} \cdot \sigma(-t) + y_R(t) \cdot \delta(t) + \frac{dy_R}{dt} \cdot \sigma(t) \\ &= \frac{dy_R}{dt} \cdot \sigma(t) + \frac{dy_L}{dt} \cdot \sigma(-t) + (y_R(t) - y_L(t)) \cdot \delta(t) \end{aligned} \quad (3.111)$$

Einsetzen in die Differentialgleichung führt zu

$$\frac{dy_R}{dt} \cdot \sigma(t) + \frac{dy_L}{dt} \cdot \sigma(-t) + (y_R(t) - y_L(t)) \cdot \delta(t) + 6 \cdot (y_L(t) \cdot \sigma(-t) + y_R(t) \cdot \sigma(t)) = \frac{du}{dt} \quad (3.112)$$

Für die Übergangsbedingung ist nur das Verhalten an der Stelle  $t = 0$  relevant. Zur Berechnung der Übergangsbedingung wird davon ausgegangen, dass die Lösungen für  $t < 0$  und  $t > 0$  existieren.

$$\frac{dy_L}{dt} + 6 \cdot y_L(t) = 0 \quad (3.113)$$

$$\frac{dy_R}{dt} + 6 \cdot y_R(t) = 0 \quad (3.114)$$

Damit kann Gleichung (3.112) vereinfacht werden zu

$$(y_R(t) - y_L(t)) \cdot \delta(t) = \frac{du}{dt} = U_0 \cdot \delta(t) \quad (3.115)$$

Integrieren der Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} (y_R(t) - y_L(t)) \cdot \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} U_0 \cdot \delta(t) dt \quad (3.116)$$

führt mit der Ausblendeigenschaft der Impulsfunktion zu

$$y_R(0) - y_L(0) = U_0 \quad (3.117)$$

Damit lautet der rechtseitige Anfangswert

$$y(0_+) = y_R(0) = U_0 + y_L(0) = U_0 + y(0_-) = U_0 + U_1 \quad (3.118)$$

An der Lösung der homogenen Differentialgleichung für  $t > 0$  ändert sich nichts.

$$y_H(t) = Y_H \cdot e^{-6 \cdot t} \cdot \sigma(t) \quad (3.119)$$

Da das Eingangssignal  $u_E(t) = U_0$  für  $t > 0$  konstant ist, ist die Ableitung null und  $y_P(t) = 0$  ist eine partikuläre Lösung. Damit lautet die Lösung der Differentialgleichung

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = Y_H \cdot e^{-6 \cdot t} \cdot \sigma(t) + 0 = Y_H \cdot e^{-6 \cdot t} \cdot \sigma(t) \quad (3.120)$$

Die Konstante  $Y_H$  wird über den berechneten Anfangswert bestimmt

$$Y_H = y(0_+) = U_0 + U_1 \quad (3.121)$$

und die Lösung der Differentialgleichung lautet

$$y(t) = (U_0 + U_1) \cdot e^{-6 \cdot t} \cdot \sigma(t) \quad (3.122)$$

Sie springt erwartungsgemäß an der Stelle  $t = 0$ .

### Lösung linearer Differentialgleichungen mit impulsförmigen Ausgangssignal ( $N < P$ )

Ist die Ordnung der Differentialgleichung  $N$  kleiner als die Ordnung der Singularität  $P$ , kann das Ausgangssignal einen Impuls und Ableitungen davon aufweisen. Wie bei dem Beispiel mit  $N = P$  muss die Anfangsbedingung  $y(0_-)$  nicht identisch zu  $y(0_+)$  sein. Zusätzlich sind bei der Lösung ein Impuls an der Stelle  $t = 0$  und seine Ableitungen mit unbekanntem Gewicht zu berücksichtigen. Je höher die Differenz der Singularität  $P$  im Vergleich zur Ordnung der Differentialgleichung ist, desto höhere Ableitungen der Impulse sind zu berücksichtigen. Im Allgemeinen lautet damit die Lösung der Differentialgleichung

$$y(t) = y_L(t) \cdot \sigma(-t) + y_R(t) \cdot \sigma(t) + \sum_{p=0}^{P-N-1} Y_p \cdot \frac{d^p \delta}{dt^p} \quad (3.123)$$

Zur Bestimmung der Hilfe der Gewichte  $Y_p$  und der Sprunghöhe an der Stelle  $t = 0$  wird auf Eigenschaften der Impulsfunktion zurückgegriffen, wie das folgende Beispiel zeigt.

#### Beispiel: Lineare Differentialgleichung und stetiges Ausgangssignal

Ausgangspunkt ist wie bei den Beispielen oben eine Differentialgleichung erster Ordnung.

$$\frac{dy}{dt} + 6 \cdot y(t) = \frac{du}{dt} \quad (3.124)$$

Das Eingangssignal ist in diesem Beispiel

$$u(t) = U_0 \cdot \delta(t) \quad (3.125)$$

und die Anfangsbedingung ist wieder  $y(0_-) = U_1$ .

Auf der rechten Seite wird der Impuls am Eingang abgeleitet, es liegt also eine Singularität zweiter Ordnung ( $P = 2$ ) vor. Die höchste Ableitung auf der linken Seite ist die erste Ableitung des Ausgangssignals ( $N = 1$ ). Um der Singularität auf der rechten Seite zu entsprechen, muss das Ausgangssignal  $y(t)$  einen Impuls aufweisen. Das Ausgangssignal setzt sich nach Gleichung (3.123) damit zusammen aus einer Lösung  $y_R(t)$  für  $t > 0$ , einer Lösung  $y_L(t)$  für  $t < 0$  und einem Impuls mit unbekanntem Gewicht an der Stelle  $t = 0$ .

$$y(t) = y_L(t) \cdot \sigma(-t) + y_R(t) \cdot \sigma(t) + Y_0 \cdot \delta(t) \quad (3.126)$$

Formell berechnet sich die erste Ableitung zu

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -y_L(t) \cdot \delta(-t) + \frac{dy_L}{dt} \cdot \sigma(-t) + y_R(t) \cdot \delta(t) + \frac{dy_R}{dt} \cdot \sigma(t) + Y_0 \cdot \frac{d\delta}{dt} \\ &= \frac{dy_R}{dt} \cdot \sigma(t) + \frac{dy_L}{dt} \cdot \sigma(-t) + (y_R(t) - y_L(t)) \cdot \delta(t) + Y_0 \cdot \frac{d\delta}{dt} \end{aligned} \quad (3.127)$$

Einsetzen in die Differentialgleichung führt zu

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{dy_R}{dt} \cdot \sigma(t) + \frac{dy_L}{dt} \cdot \sigma(-t) + (y_R(t) - y_L(t)) \cdot \delta(t) + Y_0 \cdot \frac{d\delta}{dt} \\ &+ 6 \cdot (y_L(t) \cdot \sigma(-t) + y_R(t) \cdot \sigma(t) + Y_0 \cdot \delta(t)) \end{aligned} \quad (3.128)$$

Für die Übergangsbedingung ist nur das Verhalten an der Stelle  $t = 0$  relevant. Wieder wird davon ausgegangen, dass die Lösungen für  $t < 0$  und  $t > 0$  existieren.

$$\frac{dy_L}{dt} + 6 \cdot y_L(t) = 0 \quad (3.129)$$

$$\frac{dy_R}{dt} + 6 \cdot y_R(t) = 0 \quad (3.130)$$

Damit kann Gleichung (3.128) vereinfacht werden zu

$$(y_R(t) - y_L(t)) \cdot \delta(t) + Y_0 \cdot \frac{d\delta}{dt} + 6 \cdot Y_0 \cdot \delta(t) = \frac{du}{dt} = U_0 \cdot \frac{d\delta}{dt} \quad (3.131)$$

Da in der Gleichung sowohl ein Impuls als auch seine Ableitung vorkommt, kann die Ausblendeigenschaft nicht alleine zur Auflösung genutzt werden Stattdessen wird die Gleichung (3.131) mit einer Funktion  $f(t)$  multipliziert und integriert.

$$\int_{0_-}^{0_+} \left( (y_R(t) - y_L(t)) \cdot \delta(t) + Y_0 \cdot \frac{d\delta}{dt} + 6 \cdot Y_0 \cdot \delta(t) \right) \cdot f(t) dt = \int_{0_-}^{0_+} U_0 \cdot \frac{d\delta}{dt} \cdot f(t) dt \quad (3.132)$$

Mit Hilfe der partiellen Integration kann das Integral über die Ableitung der Impulsfunktion umgerechnet werden.

$$\int_{0_-}^{0_+} \frac{d\delta}{dt} \cdot x(t) dt = \delta(0_+) \cdot x(0_+) - \delta(0_-) \cdot x(0_-) - \int_{0_-}^{0_+} \delta(t) \cdot \frac{dx}{dt} dt \quad (3.133)$$

Da die Impulsfunktion nur an der Stelle  $t = 0$  von null verschieden ist, gilt mit der Ausblendeigenschaft der Impulsfunktion

$$\int_{0_-}^{0_+} \frac{d\delta}{dt} \cdot x(t) dt = - \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} \quad (3.134)$$

Wird dieses Verfahren in Kombination mit der Ausblendeigenschaft auf Gleichung (3.135) angewendet, ergibt sich

$$(y_R(0) - y_L(0)) \cdot f(0) - Y_0 \cdot \left. \frac{df}{dt} \right|_{t=0} + 6 \cdot Y_0 \cdot f(0) = -U_0 \cdot \left. \frac{df}{dt} \right|_{t=0} \quad (3.135)$$

Um diese Gleichung für beliebige Funktion  $f(t)$  zu erfüllen, müssen die Koeffizienten von  $f(0)$  und  $df/dt$  an der Stelle  $t = 0$  übereinstimmen. Es ergeben sich als zwei Gleichungen für zwei Unbekannte.

$$(y_R(0) - y_L(0)) + 6 \cdot Y_0 = 0 \quad (3.136)$$

$$-Y_0 = -U_0 \quad (3.137)$$

Damit ist  $Y_0 = U_0$  und der Anfangswert  $y(0_+)$  berechnet sich zu

$$y(0_+) = y_R(0) = y_L(0) - 6 \cdot Y_0 = y(0_-) - 6 \cdot Y_0 = U_1 - 6 \cdot U_0 \quad (3.138)$$

An der Lösung der homogenen Differentialgleichung für  $t > 0$  ändert sich nichts.

$$y_H(t) = Y_H \cdot e^{-6 \cdot t} \cdot \sigma(t) \quad (3.139)$$

Da das Eingangssignal  $u_E(t)$  für  $t > 0$  null ist, ist  $y_P(t) = 0$  eine partikuläre Lösung. Damit lautet die Lösung der Differentialgleichung

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) + Y_0 \cdot \delta(t) = Y_H \cdot e^{-6 \cdot t} \cdot \sigma(t) + 0 + U_0 \cdot \delta(t) \quad (3.140)$$

Die Konstante  $Y_H$  wird über die oben bestimmte Anfangsbedingungen bestimmt.

$$y(0_+) = U_1 - 6 \cdot U_0 = Y_H \cdot e^{-6 \cdot t} \quad (3.141)$$

Damit lautet die Lösung

$$y(t) = (U_1 - 6 \cdot U_0) \cdot e^{-6 \cdot t} \cdot \sigma(t) + U_0 \cdot \delta(t) \quad (3.142)$$

Das Verfahren wird in den Beispielen oben mit der Übersicht halber mit Differentialgleichungen erster Ordnung durchgeführt. Anhand eines komplexeren Beispiels wird in Übungsaufgabe 3.10 gezeigt, dass das Verfahren auch für Systeme höherer Ordnung verwendet werden kann.

Die Beispiel verdeutlichen, wie die Übergangsbedingungen für die Berechnung der Konstanten in der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung genutzt wird. Weiterführende Literatur ist in [Bart89] zu finden.

### 3.3.3 Stabilität und charakteristische Gleichung eines Systems

Bei der Einführung des Begriffes der Stabilität in Abschnitt 3.2.3 wird gezeigt, dass stabile Systeme nach einer Anregung mit endlicher Energie wieder in ihren Ausgangszustand zurückkehren. Das Verhalten des Systems nach der Anregung wird durch die homogene Lösung der Differentialgleichung beschrieben, die in Abschnitt 3.3.1 berechnet wird. Sie setzt sich bei einfachen Nullstellen  $\lambda_n$  aus einer Linearkombination von Exponentialfunktionen zusammen.

$$y_H(t) = Y_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + Y_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} + \dots + Y_N \cdot e^{\lambda_N \cdot t} \quad (3.143)$$

Damit die homogene Lösung für  $t \rightarrow \infty$  zu null wird, müssen die Nullstellen  $\lambda_n$  einen Realteil  $\text{Re}(\lambda_n) < 0$  aufweisen. Besitzt ein Wert  $\lambda_n$  einen positiven Realteil, divergiert der entsprechende Summand aus Gleichung (3.143). Folglich divergiert auch die Lösung der homogenen Differentialgleichung.

Liegt mit  $\lambda_1$  eine P-fache Lösung der charakteristischen Gleichung vor, weisen die zugehörigen Summanden der homogenen Lösung Terme der Form

$$y_H(t) = Y_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + Y_2 \cdot t \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + \dots + Y_P \cdot t^{P-1} \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} \quad (3.144)$$

auf. Da die Exponentialfunktion schneller fällt und wächst als jede Potenz von  $t$ , konvergiert diese Summe ebenfalls für einen negativen Realteil  $\text{Re}(\lambda_1) < 0$ . Sie divergiert für einen positiven Realteil  $\text{Re}(\lambda_1) > 0$ . Dabei ist es unerheblich, ob die Lösungen  $\lambda_n$  reell oder komplex sind.

Einen Sonderfall stellen Lösungen mit einem Realteil  $\text{Re}(\lambda_n) = 0$  dar.

$$\begin{aligned} y_H(t) &= Y_1 \cdot e^{0 \cdot t} + Y_2 \cdot e^{(0+j\omega_0) \cdot t} + Y_3 \cdot e^{(0-j\omega_0) \cdot t} + \dots \\ &= Y_1 + Y_2 \cdot e^{j\omega_0 \cdot t} + Y_3 \cdot e^{-j\omega_0 \cdot t} + \dots \end{aligned} \quad (3.145)$$

Die Lösungen sind konstant beziehungsweise schwingen mit konstanter Amplitude. Für den Fall einfacher Lösungen liegt damit weder eine konvergente, noch eine divergente Lösung vor. Der Fall entspricht dem diskutierten Fall der Grenzstabilität des zugehörigen Systems.

Besitzt eine Lösung mit  $\text{Re}(\lambda_n) = 0$  eine Vielfachheit von  $P > 1$ , entstehen Terme der Form

$$\begin{aligned} y_H(t) &= Y_1 + Y_2 \cdot t + Y_3 \cdot t^2 + \dots \\ &\quad + Y_4 \cdot e^{j\omega_0 \cdot t} + Y_5 \cdot t \cdot e^{j\omega_0 \cdot t} + Y_6 \cdot t^2 \cdot e^{j\omega_0 \cdot t} + \dots \\ &\quad + Y_7 \cdot e^{-j\omega_0 \cdot t} + Y_8 \cdot t \cdot e^{-j\omega_0 \cdot t} + Y_9 \cdot t^2 \cdot e^{-j\omega_0 \cdot t} \end{aligned} \quad (3.146)$$

Da die Exponentialfunktion die Terme  $t^n$  nicht dämpft, divergieren diese Ausdrücke und damit die gesamte homogene Lösung. Das System ist instabil. Aus dieser Diskussion ergibt sich der in Tabelle 3.7 beschriebene Zusammenhang zwischen der Stabilität von linearen, zeitinvarianten Systemen und den Lösungen der charakteristischen Gleichung.

Tabelle 3.7: Zusammenhang zwischen Lösungen der charakteristischen Gleichung und der Stabilität von LTI-Systemen, die sich über lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschreiben lassen

Eigenschaft	Beschreibung
Asymptotisch stabiles System	Alle Lösungen $\lambda_n$ besitzen einen negativen Realteil $\text{Re}(\lambda_n) < 0$
Grenzstabiles System	Es liegt mindestens eine einfache Lösung $\lambda_n$ mit $\text{Re}(\lambda_n) = 0$ vor, alle anderen Lösungen $\lambda_n$ besitzen einen negativen Realteil $\text{Re}(\lambda_n) < 0$
Instabiles System	Es existiert mindestens eine Lösung $\lambda_n$ mit positivem Realteil $\text{Re}(\lambda_n) > 0$ oder eine mehrfache Lösung mit $\text{Re}(\lambda_n) = 0$

### 3.3.4 Sprung- und Impulsantwort eines Systems

Entsprechend den Ausführungen im letzten Abschnitt errechnet sich die Systemantwort des RC-Netzwerks auf einen Spannungssprung am Eingang des Systems zu

$$u_A(t) = u_A(0) \cdot e^{-\frac{1}{RC} \cdot t} + U_{E0} \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}\right) \quad (3.147)$$

Das Ausgangssignal ist von der Anfangsspannung  $u_A(0)$  abhängig. Ist diese Spannung  $u_A(0) = 0$ , ist die in dem Kondensator gespeicherte Energie null, das System ist energiefrei. Die Reaktion eines energiefreien Systems auf eine sprungförmige Anregung  $\sigma(t)$  wird als Sprungantwort  $h(t)$  bezeichnet.

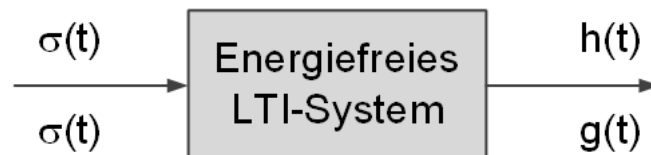


Bild 3.16: Sprungantwort  $h(t)$  und Impulsantwort  $g(t)$  als Ausgangssignal eines energiefreien LTI-Systems

Für das Beispiel des RC-Netzwerks ergibt sich die Antwort auf einen Sprung der Höhe  $U_{E0} = 1$  mit der Bedingung  $u_A(0) = 0$  zu

$$h(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \cdot \sigma(t) \quad (3.148)$$

Wie bereits in Bild 3.16 dargestellt ist die Impulsantwort  $g(t)$  eines Systems die Reaktion eines energiefreien Systems auf eine Anregung mit einem Impuls  $\delta(t)$ . Im Kapitel Signale wird gezeigt, dass die Impulsfunktion  $\delta(t)$  als Ableitung der Sprungfunktion  $\sigma(t)$  gedeutet werden kann.

$$\delta(t) = \frac{d\sigma}{dt} \quad (3.149)$$

Für lineare, zeitinvariante Systeme ergibt sich die Systemreaktion auf einen Impuls am Eingang aus der Ableitung der Sprungantwort.

$$g(t) = \frac{dh}{dt} \quad (3.150)$$

Bei bekannter Sprungantwort  $h(t)$  kann mit Gleichung (3.150) die Impulsantwort  $g(t)$  durch Ableiten bestimmt werden. Zum Beispiel ergibt sich die Systemantwort eines RC-Netzwerks auf einen Impuls mit dem Gewicht  $U_{E0} = 1$  mit der Produktregel zu

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{dh}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \cdot \sigma(t) \right) = \frac{1}{R \cdot C} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \cdot U_{E0} \cdot \sigma(t) - \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \cdot \delta(t) \\ &= \frac{1}{R \cdot C} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \cdot U_{E0} \cdot \sigma(t) \end{aligned} \quad (3.151)$$

### 3.3.5 Berechnung der Systemantwort durch Superposition

Aufgrund der Linearität eines LTI-Systems kann die Systemantwort auf ein aus grundlegenden Funktionen zusammengesetztes Eingangssignal durch die entsprechende Kombination der Ausgangssignale bestimmt werden. Wird zum Beispiel das RC-Netzwerk aus Bild 3.2 mit einer Rechteckfunktion der Länge  $t_0$  und der Höhe  $U_{E0}$  beaufschlagt, kann das Eingangssignal als Summe zweier Sprungfunktionen dargestellt werden

$$u_E(t) = U_{E0} \cdot (\sigma(t) - \sigma(t - t_0)) = U_{E0} \cdot \sigma(t) - U_{E0} \cdot \sigma(t - t_0) \quad (3.152)$$

Damit ergibt sich das Ausgangssignal  $u_A$  aus der Summe der beiden Sprungantworten

$$u_A(t) = U_{E0} \cdot (h(t) - h(t - t_0)) = U_{E0} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \cdot \sigma(t) - U_{E0} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{RC}}\right) \cdot \sigma(t - t_0) \quad (3.153)$$

Bild 3.17 stellt das Superpositionsprinzip für das Beispiel des RC-Netzwerks bei Anregung mit einem rechteckförmigen Signal dar.

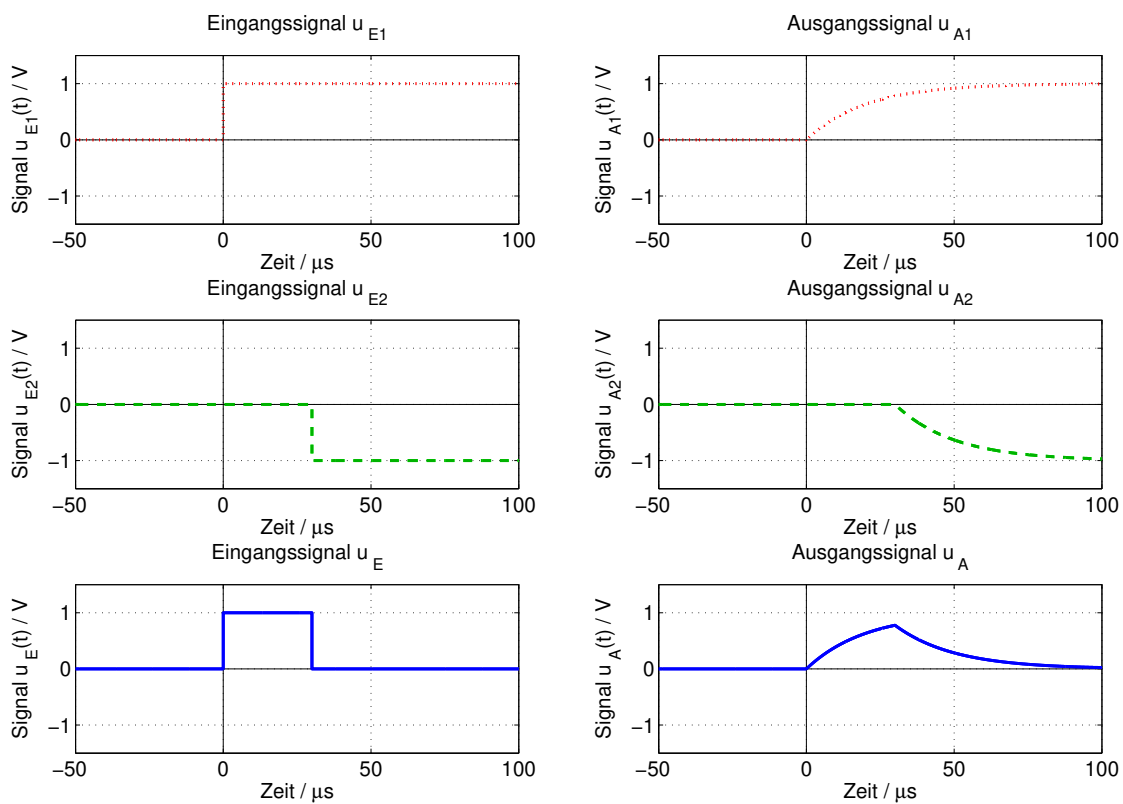


Bild 3.17: Überlagerung der Systemreaktion  $u_A = u_{A1} + u_{A2}$  bei überlagertem Eingangssignal  $u_E = u_{E1} + u_{E2}$

Mit der Kenntnis der Sprungantwort eines Systems kann demnach für grundlegende Eingangssignale, die sich über die Sprungfunktion darstellen lassen, eine Systemantwort berechnet werden.

### 3.4 Berechnung der Systemantwort über das Faltungsintegral

In dem vorangegangenen Abschnitt werden mit der Linearitätseigenschaft und Zeitinvarianz eines Systems sowie der Sprungantwort  $h(t)$  Systemantworten auf andere Eingangssignale bestimmt. Die Näherung einer beliebigen Eingangsfunktion durch eine große Anzahl kleiner Impulse führt zur Bestimmung der Systemantwort über das Faltungsintegral, das im Folgenden hergeleitet wird.

#### 3.4.1 Herleitung des Faltungsintegrals

Ein lineares, zeitinvariantes System antwortet auf einen Impuls  $\delta(t)$  am Eingang mit der Impulsantwort  $g(t)$ . Entsprechend antwortet es auf eine Linearkombination von Impulsen

$$u(t) = v_1 \cdot \delta(t) + v_2 \cdot \delta(t - 3) \quad (3.154)$$

mit der gleichen Linearkombination von Impulsantworten

$$y(t) = v_1 \cdot g(t) + v_2 \cdot g(t - 3) \quad (3.155)$$

Dieser Zusammenhang kann auf beliebige Eingangssignale verallgemeinert werden. Wegen der Ausblendeigenschaft der Impulsfunktion kann ein beliebiges Eingangssignal  $u(t)$  dargestellt werden als

$$u(t) = u(t) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau \quad (3.156)$$

Anschaulich kann die Gleichung als Superposition unendlich vieler Impulse  $\delta(t - \tau)$  mit dem Gewicht  $u(\tau)$  interpretiert werden, die zusammen das Signal  $u(t)$  darstellen. Jeder einzelne Impuls  $\delta(t - \tau)$  besitzt die Systemantwort  $g(t - \tau)$ . Damit ergibt sich das Ausgangssignal  $y(t)$  aus der Superposition unendlich vieler Systemantworten  $g(t - \tau)$  mit dem Gewicht  $u(\tau)$ .

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau = u(t) * g(t) \quad (3.157)$$

Bei bekannter Impulsantwort  $g(t)$  kann das Ausgangssignal  $y(t)$  für eine beliebige Systemanregung  $u(t)$  aus der Integralgleichung (3.157) berechnet werden. Das Integral wird als Faltungsintegral bezeichnet. Abkürzend wird die Faltungsoperation mit einem  $*$ -Symbol dargestellt.

#### 3.4.2 Grafische Interpretation des Faltungsintegrals

Das Faltungsintegral erscheint zunächst kompliziert und wenig griffig. Es kann aber grafisch interpretiert werden. Dazu wird das Faltungsintegral umgeformt zu

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot g(-(\tau - t)) d\tau \quad (3.158)$$

Das Faltungsintegral wird für einen festen Zeitpunkt  $t$  ausgewertet. Es ist die Fläche unter einer Funktion, die sich aus dem Produkt zweier Teilfunktionen ergibt. Eine Teilfunktion ist das bekannte Eingangssignal  $u(\tau)$ . Die zweite Teilfunktion ist die berechnete Impulsantwort  $g(\tau)$ , die jedoch an der Achse  $\tau = 0$  gespiegelt und um  $t$  nach rechts verschoben ist.

Aus dieser Interpretation ergibt sich folgendes Vorgehen zur grafischen Auswertung des Faltungsintegrals:

- Skizzieren der Funktion  $u(\tau)$
- Skizzieren der Funktion  $g(-(\tau - t))$  durch Spiegeln der Funktion  $g(\tau)$  und Verschiebung um  $t$  nach rechts



- Berechnen des Produktes der beiden Funktionen  $u(\tau) \cdot g(-(\tau - t))$
- Auswertung der Fläche unter der Kurve  $u(\tau) \cdot g(-(\tau - t))$

Das Verständnis der grafischen Faltung ist Grundlage für die Berechnung von Ausgangssignalen im Zeitbereich mit dem Faltungsintegral.

### Beispiel: Grafische Faltung zweier Rechteckfunktionen

Das Vorgehen wird an der Faltung zweier Rechteckfunktionen verdeutlicht.

$$u(t) = \sigma(t) - \sigma(t - 2) \quad (3.159)$$

$$g(t) = 2 \cdot (\sigma(t) - \sigma(t - 4)) \quad (3.160)$$

Zur grafischen Auswertung des Integrals werden beide Funktionen als Funktion der Variablen  $\tau$  dargestellt, nach der integriert werden soll.

$$u(\tau) = \sigma(\tau) - \sigma(\tau - 2) \quad (3.161)$$

$$g(\tau) = 2 \cdot (\sigma(\tau) - \sigma(\tau - 4)) \quad (3.162)$$

Die Funktion  $g$  wird an der Achse  $\tau = 0$  gespiegelt

$$g(-\tau) = 2 \cdot (\sigma(-\tau) - \sigma(-(\tau - 4))) \quad (3.163)$$

und anschließend um  $t$  nach rechts verschoben.

$$g(t - \tau) = g(-(\tau - t)) = 2 \cdot (\sigma(-(\tau - t)) - \sigma(-(\tau - t - 4))) \quad (3.164)$$

Bild 3.18 stellt die Funktionen für unterschiedliche Zeitpunkte  $t$  dar. Das Integral der Faltungsfunktion berechnet sich aus der Fläche, die unter dem Produkt der beiden Funktionen  $u(\tau)$  und  $g(t - \tau)$  liegt. Für  $t = 0$  überschneiden sich die Funktionsbereiche, die ungleich null sind, nicht. Das Produkt der beiden Funktionen ist für  $t = 0$  null. Für negative Werte von  $t$  ist das ebenfalls der Fall, wie an dem Beispiel für  $t = -1$  deutlich wird. Für positive Werte von  $t$  überschneiden sich die Funktionsbereiche, in den die Funktionen ungleich null sind. Das gilt für den Bereich  $0 \leq t < 6$ . Für den Bereich  $2 \leq t < 4$  überdecken sich die Funktionen komplett, hier ergibt sich ein konstanter Wert des Faltungsintegrals von 4, da die Fläche in diesem Bereich konstant bleibt. Für  $t > 6$  liegt wieder keine Überschneidung vor, das Produkt der Funktionen ist für alle  $\tau$  null.

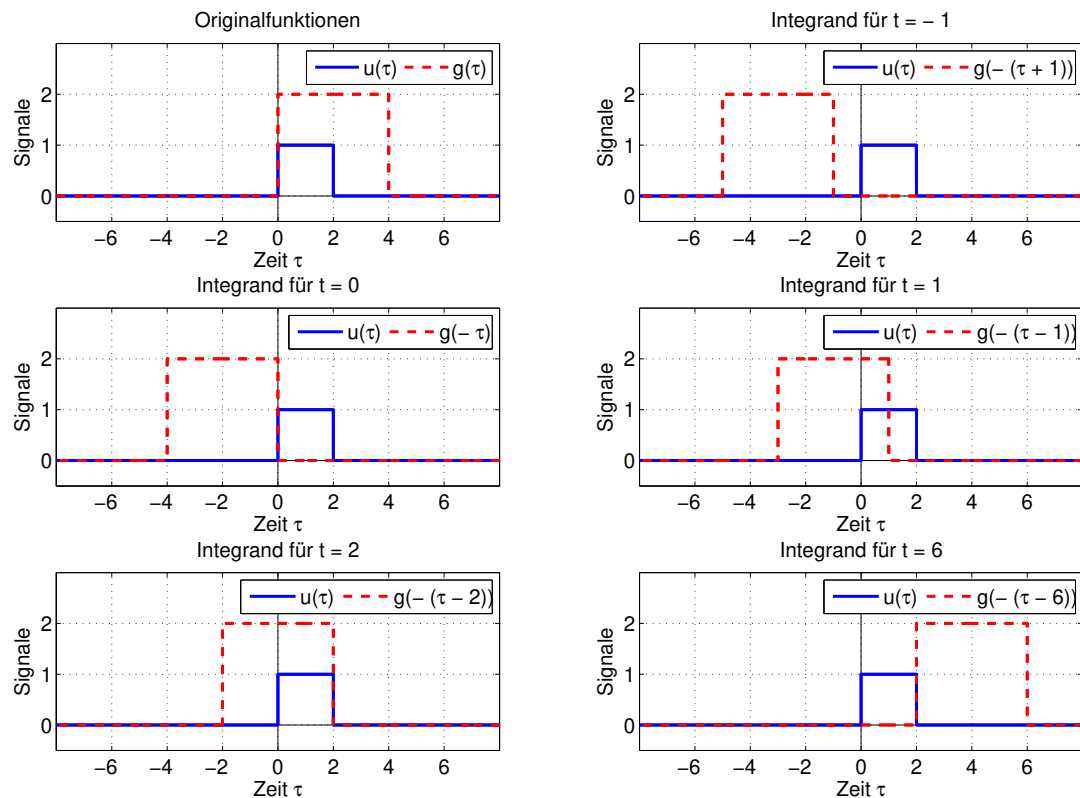


Bild 3.18: Darstellung der Schritte zur grafischen Faltung am Beispiel zweier Rechtecke

Für einen festen Zeitpunkt  $t$  ergibt sich der Wert des Faltungsintegrals aus der Fläche unter der Rechteckfunktion. Durch Verschiebung der Funktion  $g$  ändert sich die Fläche, und es ergibt sich der in Bild 3.19 dargestellte Verlauf des Faltungsintegrals.

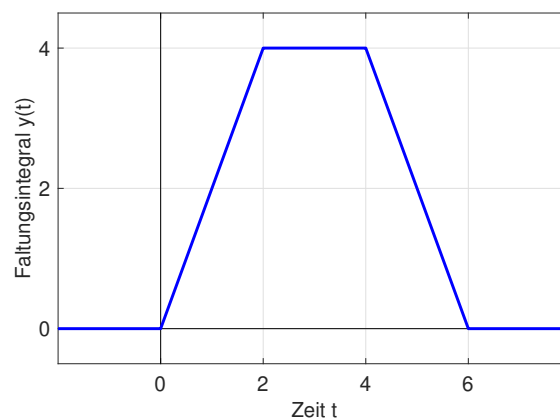


Bild 3.19: Darstellung des Faltungsintegrals für das Beispiel zweier Rechtecke



Im Online-Portal *Systemtheorie Online* verdeutlicht die Applikation *Komplexe Exponentialfunktion* den Zusammenhang zwischen der Lage des Wertes  $\lambda = \delta + j\omega_0$  in der komplexen Ebene und dem Verhalten der Schwingung.

### 3.4.3 Rechenregeln zum Faltungsintegral

Zur Berechnung des Faltungsintegrals existieren verschiedene Rechenregeln, die im Folgenden zusammengefasst werden. Die Herleitungen beruhen auf den Rechenregeln für Integrale und sind zum Beispiel in [Foel11] zu finden. Hier werden das Kommutativgesetz sowie die Rechenregeln zur Faltung mit einem Impuls und die Faltung zweier kausaler Signale hergeleitet.

#### Kommutativgesetz der Faltung

In einigen Fällen ergeben sich Rechenvorteile, wenn das Kommutativgesetz der Faltung genutzt werden kann. Die Herleitung beginnt mit der Definitionsgleichung des Faltungsintegrals.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau \quad (3.165)$$

Mit der Substitution

$$\tau = t - x \quad (3.166)$$

und der Ableitung

$$\frac{d\tau}{dx} = -1 \quad (3.167)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau = - \int_{\infty}^{-\infty} u(t - x) \cdot g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} u(t - x) \cdot g(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t - \tau) \cdot g(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.168)$$

Das Ergebnis ist wieder ein Faltungsintegral. Allerdings wird bei diesem Faltungsintegral die Funktion  $u(t)$  an der Achse  $\tau = 0$  gespiegelt und um  $t$  verschoben. Es gilt das Kommutativgesetz.

$$u(t) * g(t) = g(t) * u(t) \quad (3.169)$$

Der Integrand ist an allen Stellen null, nur nicht an der Stelle  $\tau = t_0$ . Damit kann das Integral umgeformt werden zu

$$u(t) * \delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t - \tau) \cdot \delta(\tau - t_0) d\tau \quad (3.170)$$

Der Integrand ist an allen Stellen null, nur nicht an der Stelle  $\tau = t_0$ . Damit kann das Integral umgeformt werden zu

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t - \tau) \cdot \delta(\tau - t_0) d\tau = u(t - t_0) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t_0) d\tau \quad (3.171)$$

Da das Integral über eine Impulsfunktion immer eins ist, ergibt sich

$$u(t) * \delta(t - t_0) = u(t - t_0) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t_0) d\tau = u(t - t_0) \quad (3.172)$$

Die Faltung eines Signals  $u(t)$  mit einem Impuls an der Stelle  $t_0$  verschiebt das Signal an die Stelle des Impulses.

### Beispiel: Grafische Faltung eines Signals mit einem Impuls

Bild 3.20 stellt die Faltung eines Signals mit einem um  $t_0 = 6$  verschobenen Impuls dar. Das Ergebnis kann so hergeleitet werden, dass der Impuls  $\delta(t - 6 - \tau)$  an dem Signal  $u(\tau)$  vorbei geschoben wird. Das Produkt der beiden Signale ist nur in dem Bereich  $4 \leq t < 8$  ungleich null, in den anderen Bereichen ist mindestens eine der beiden Funktionen null.

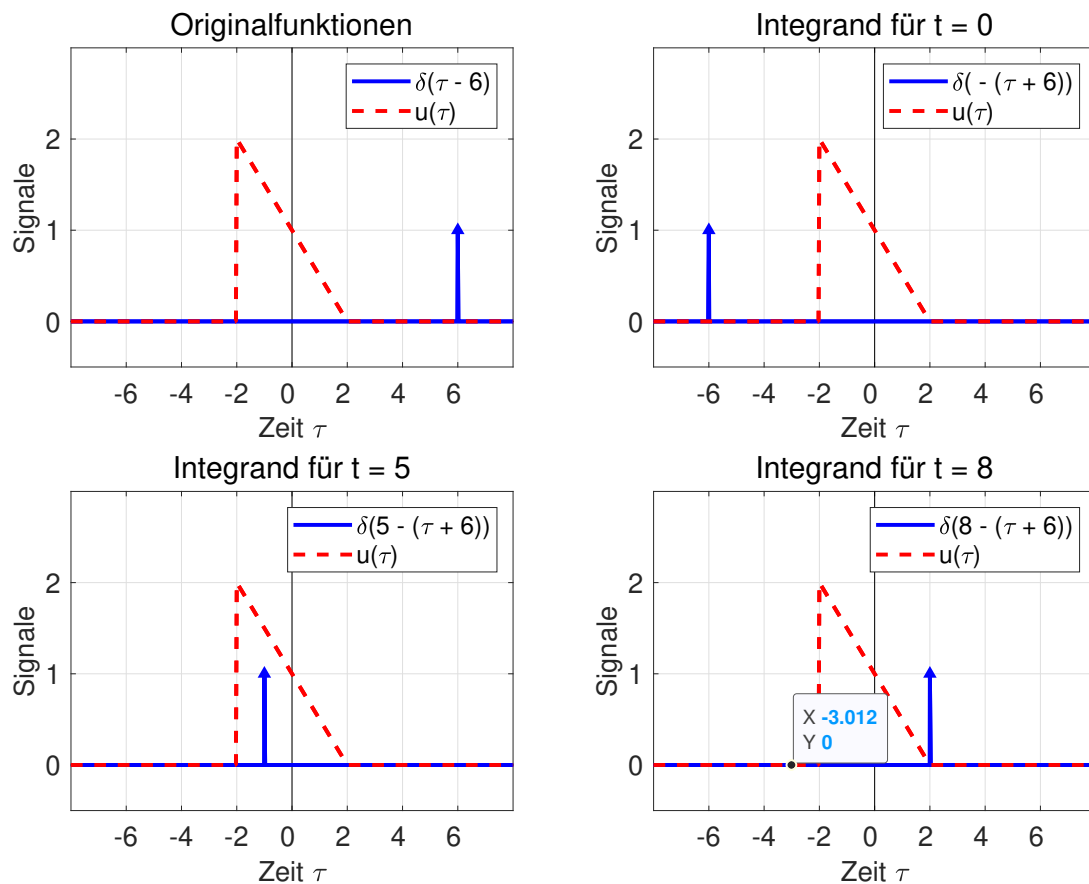


Bild 3.20: Grafische Faltung eines Signals  $u(t)$  mit einem Impuls an der Stelle  $t_0 = 6$

Die Auswertung der grafischen Faltung ist in Bild 3.21 dargestellt. Die Funktion  $u(t)$  ist um  $t_0$  nach rechts verschoben worden.

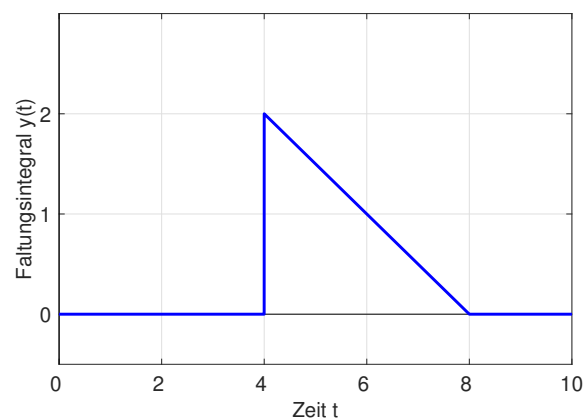


Bild 3.21: Ergebnis der grafischen Faltung eines Signals  $u(t)$  mit einem Impuls an der Stelle  $t_0 = 6$

### Faltung kausaler Funktionen

Sind die Funktionen  $g(t)$  und  $u(t)$  kausale Funktionen, reduziert sich das Faltungsintegral auf den Bereich von  $0 \dots t$ . Dieses Ergebnis ergibt sich unmittelbar aus der grafischen Faltung.

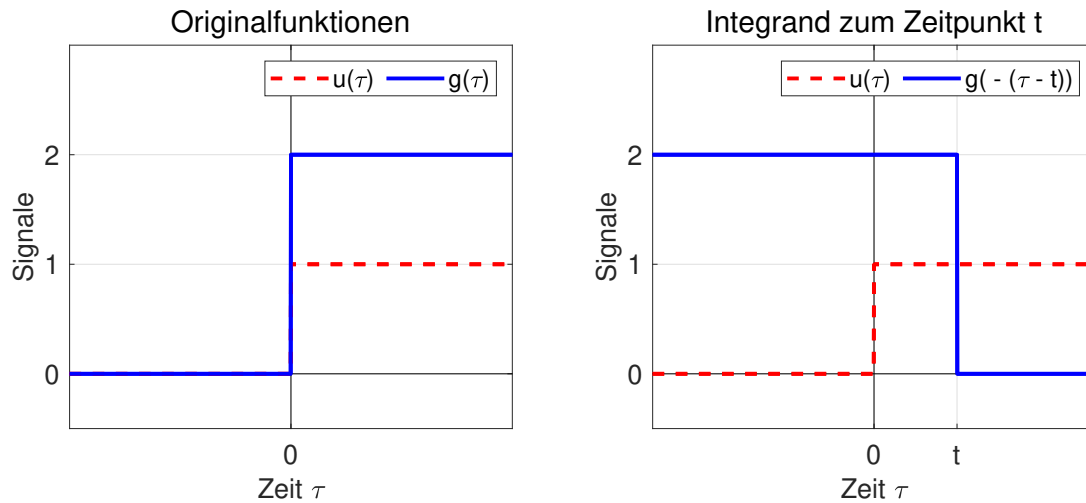


Bild 3.22: Faltung kausaler Funktionen

Die Funktion  $u(\tau)$  ist für den Bereich  $\tau < 0$  null, die Funktion  $g(t - \tau)$  ist für den Bereich  $\tau > t$  null. Damit ist das Produkt der beiden Funktionen nur in dem Bereich von  $0 \dots t$  von null verschieden. Für kausale Funktionen gilt deshalb

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau = \int_0^t u(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau \quad (3.173)$$

### Zusammenfassung der Rechenregeln zum Faltungsintegral

Die wesentlichen Rechenregeln für das Faltungsintegral sind in Tabelle 3.8 zusammengefasst.

Tabelle 3.8: Zusammenhang zwischen Lösungen der charakteristischen Gleichung und der Stabilität von LTI-Systemen, die sich über lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschreiben lassen

Gesetz	Mathematische Beschreibung
Kommutativgesetz	$u(t) * g(t) = g(t) * u(t)$
Assoziativgesetz	$(x(t) * u(t)) * g(t) = x(t) * (u(t) * g(t))$
Distributivgesetz	$(u_1(t) + u_2(t)) * g(t) = u_1(t) * g(t) + u_2(t) * g(t)$
Faltung kausaler Signale	$\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau = \int_0^t u(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$
Faltung mit einem Impuls an der Stelle $t_0$	$u(t) * \delta(t - t_0) = u(t - t_0)$

#### 3.4.4 Anwendung des Faltungsintegrals am Beispiel des RC-Netzwerks

Die Berechnung des Faltungsintegrals wird an einem RC-Netzwerk vertieft, das mit einem recht-eckförmigen Signal angeregt wird. Das Ergebnis wird anschließend mit dem Ergebnis verglichen, das sich bei Anwendung des Superpositionsprinzips ergeben hat. Die Impulsantwort  $g(t)$  des RC-Netzwerks lautet

$$g(t) = \frac{1}{R \cdot C} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \cdot \sigma(t) \quad (3.174)$$

Das Eingangssignal ist definiert als

$$u_E(t) = \begin{cases} U_{E0} & \text{für } 0 \leq t < t_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.175)$$

Beide Signale sind kausal, sodass sich das Ausgangssignal  $u_A(t)$  ergibt

$$u_A(t) = \int_0^t u_E(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau \quad (3.176)$$

Zur Auswertung des Integrals muss analysiert werden, wann sich die beiden Funktionen  $g(t - \tau)$  und  $u_E(\tau)$  überlappen. Dazu zeigt Bild 3.23 die Funktionen  $g(t - \tau)$  und  $u_E(\tau)$  für unterschiedliche Zeitpunkte  $t$ .

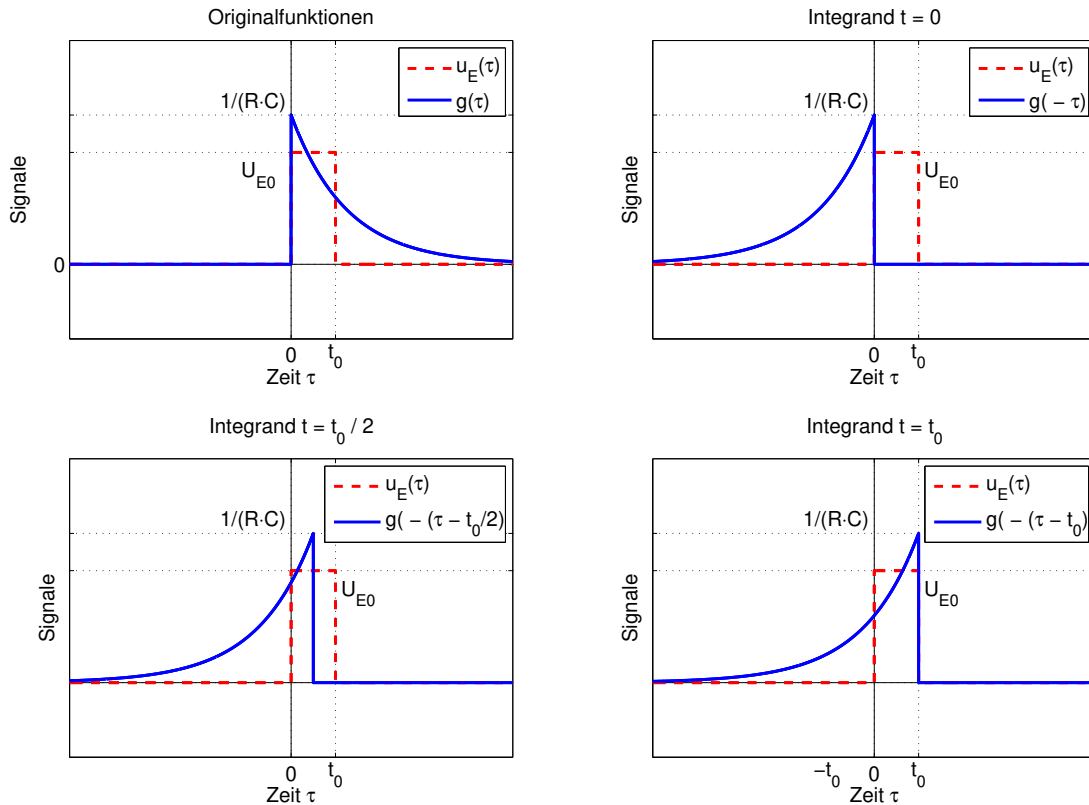


Bild 3.23: Darstellung der Funktionen  $g(t - \tau)$  und  $u_E(\tau)$  zur Berechnung des Faltungsintegrals für verschiedene Zeitpunkte  $t$

### Zeitraum $t < 0$

Für alle  $\tau$  ist zumindest eine der beiden Funktionen null, das Faltungsintegral ist damit für  $t < 0$  null.

$$u_A(t) = 0 \quad (3.177)$$

### Zeitraum $0 < t < t_0$

Die beiden Funktionen überlappen sich in dem Bereich  $0 \leq \tau \leq t$ , sodass das Integral in diesem Bereich ausgeführt wird.

$$\begin{aligned}
 u_A(t) &= \int_0^t g(t - \tau) \cdot U_{E0} d\tau = \int_0^t U_{E0} \cdot \frac{1}{R \cdot C} \cdot e^{-\frac{t-\tau}{RC}} d\tau = e^{-\frac{t}{RC}} \cdot \int_0^t U_{E0} \cdot \frac{1}{R \cdot C} \cdot e^{\frac{\tau}{RC}} d\tau \\
 &= U_{E0} \cdot \frac{1}{R \cdot C} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \cdot R \cdot C \cdot e^{\frac{t}{RC}} \Big|_0^t = U_{E0} \cdot \frac{1}{R \cdot C} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \cdot R \cdot C \cdot (e^{\frac{t}{RC}} - e^{\frac{0}{RC}}) \\
 &= U_{E0} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}})
 \end{aligned} \quad (3.178)$$

**Zeitraum  $t \geq t_0$** 

Jetzt überlappen sich die beiden Funktionen ganz und die Integration erstreckt sich von 0 bis  $t_0$ .

$$u_A(t) = \int_0^{t_0} g(t-\tau) \cdot U_{E0} d\tau = \int_0^{t_0} U_{E0} \cdot \frac{1}{R \cdot C} \cdot e^{-\frac{t-\tau}{RC}} d\tau = U_{E0} \cdot \frac{1}{R \cdot C} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \cdot R \cdot C \cdot e^{\frac{\tau}{RC}} \Big|_0^{t_0} \quad (3.179)$$

$$= U_{E0} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \cdot (e^{\frac{t_0}{RC}} - 1) = U_{E0} \cdot (1 - e^{-\frac{t_0}{RC}}) \cdot e^{-\frac{t-t_0}{RC}}$$

Damit kann  $u_A(t)$  zusammengefasst werden als

$$u_A(t) = \begin{cases} U_{E0} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) & \text{für } 0 \leq t < t_0 \\ U_{E0} \cdot (1 - e^{-\frac{t_0}{RC}}) \cdot e^{-\frac{t-t_0}{RC}} & \text{für } t \geq t_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.180)$$

Das Ergebnis stimmt erwartungsgemäß mit dem Ergebnis in Gleichung (3.153) überein

**Zusammenfassung Faltungsintegral**

Die in diesem Beispiel dargestellte Methode zur Berechnung des Faltungsintegrals besteht aus folgenden Schritten:

Tabelle 3.9: Vorgehen bei der Berechnung der Systemantwort über das Faltungsintegral

Schritt	Beschreibung
1	Berechnung der Impulsantwort
2	Skizze von Eingangssignal $u(\tau)$ und Impulsantwort $g(\tau)$
3	Skizze von einem der Signale $u(t-\tau)$ oder $g(t-\tau)$ über Spiegelung an der Achse $\tau = 0$ und Verschiebung um $t$ nach rechts
4	Aufteilen des Faltungsintegrals in sinnvolle Zeitbereiche (Überlappungsbereiche, Sprungstellen, Definitionsgrenzen, ...)
5	Lösen der Integrale und Superposition der Ergebnisse

Die Berechnung des Faltungsintegrals ist aufwendig. Es wird sich zeigen, dass die Berechnung eines Ausgangssignals im Laplace-Bereich deutlich einfacher ist als im Zeitbereich.

**3.4.5 Impulsantwort und Stabilität**

In Abschnitt 3.2.3 wird die Stabilität von Systemen aus physikalischer Sicht definiert. Mit dem Wissen, dass sich bei einem LTI-System die Systemantwort  $y(t)$  aus dem Faltungsintegral ergibt, kann die Stabilitätsbewertung auf die Impulsantwort  $g(t)$  zurückgeführt werden. Dabei wird davon ausgegangen, dass das System in einem Zeitraum  $0 < t \leq t_0$  angeregt wird. Zur Stabilitätsbewertung wird das Ausgangssignal nach der Anregung  $t \geq t_0$  analysiert. In diesem Zeitraum gilt:

$$y(t) = \int_0^{t_0} u(\tau) \cdot g(t-\tau) d\tau \quad (3.181)$$

Aus der physikalischen Bedingung an asymptotische Stabilität leitet sich die Forderung ab, dass bei einer zeitlich begrenzten Anregung das Ausgangssignal den Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t)| = 0 \quad (3.182)$$



aufweisen muss. Ist der Betrag des Eingangssignals beschränkt, kann er mit  $|u(\tau)| < u_{MAX}$  abgeschätzt werden, und der Betrag des Ausgangssignals ergibt sich zu

$$|y(t)| \leq \int_0^{t_0} |u(\tau)| \cdot |g(t-\tau)| d\tau < u_{MAX} \cdot \int_0^{t_0} |g(t-\tau)| d\tau \quad (3.183)$$

Es handelt sich um ein endliches Integral, das zu null wird, wenn die Impulsantwort  $g(t)$  gegen null konvergiert.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0 \quad (3.184)$$

Ein System ist damit asymptotisch stabil, wenn die Impulsantwort gegen null konvergiert. Aus der physikalischen Bedingung an grenzstabile Systeme leitet sich die Forderung ab, dass bei einer zeitlich begrenzten Anregung das Ausgangssignal den Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t)| = y_0 < \infty \quad (3.185)$$

aufweisen muss. Das Ausgangssignal  $y(t)$  errechnet sich für Impulsantworten  $g(t)$ , die für  $t \rightarrow \infty$  einem konstanten Wert  $g_0$  zustreben, über

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \int_0^{t_0} u(\tau) \cdot g(t-\tau) d\tau = g_0 \cdot \int_0^{t_0} u(\tau) d\tau = y_0 \neq 0 \quad (3.186)$$

Das Ausgangssignal konvergiert für  $t \geq t_0$  gegen einen konstanten Wert. Systeme, deren Impulsantworten  $g(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  einem konstanten Wert  $g_0$  zustreben, entsprechen damit den Bedingungen grenzstabiler Systeme. Dasselbe gilt für Systeme, deren Impulsantwort für  $t \rightarrow \infty$  mit konstanter Amplitude schwingt. Der Nachweis wird in eine Übungsaufgabe erbracht. Aus Gleichung (3.183) wird deutlich, dass das Ausgangssignal  $y(t)$  bei divergierender Impulsantwort ebenfalls divergiert. Systeme mit divergierender Impulsantwort sind damit instabil. Der Zusammenhang zwischen Impulsantwort und Stabilität linearer, zeitinvarianter Systeme ist in Tabelle 3.10 zusammengefasst.

Tabelle 3.10: Zusammenhang zwischen Lösungen der charakteristischen Gleichung und der Stabilität von LTI-Systemen, die sich über lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschreiben lassen

Eigenschaft	Bedeutung
Asymptotisch stabiles System	$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$
Grenzstabiles System	$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = g_0 \neq 0$ oder harmonische Schwingung mit konstanter Amplitude
Instabiles System	$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t)$ ist divergent

Zur Stabilitätsbewertung von Systemen im Zeitbereich muss die Impulsantwort bekannt sein. Es wird sich zeigen, dass eine Bewertung der Stabilität im Laplace-Bereich praktikabler vorgenommen werden kann.

#### Beispiel: RC-Netzwerk als stabiles System

b

Das diskutierte RC-Netzwerk weist eine Impulsantwort

$$g(t) = \frac{1}{R \cdot C} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \cdot \sigma(t) \quad (3.187)$$

auf. Die Impulsantwort wird auf absolute Integrierbarkeit geprüft.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{R \cdot C} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \cdot \sigma(t) dt = \frac{1}{R \cdot C} \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{R \cdot C}} dt = -\frac{R \cdot C}{R \cdot C} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} \Big|_0^{\infty} = -(0 - 1) = 1 < \infty \quad (3.188)$$

Die Impulsantwort ist absolut integrierbar, das System ist demnach stabil. Das zeigt sich auch an dem Ausgangssignal des RC-Glieds auf eine Anregung mit einem Rechtecksignal.

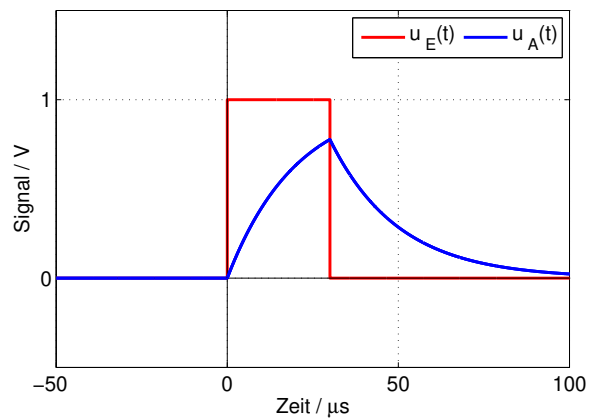


Bild 3.24: Anregung eines RC-Glieds mit einem Rechtecksignal

Nach der Anregung klingt das Ausgangssignal ab und erreicht für  $t \rightarrow \infty$  den Wert null.

#### Beispiel: Integrierer als grenzstabiles System

Als Beispiel für ein grenzstabiles System wird ein Integrierer hinsichtlich seiner Stabilität bewertet. Er besitzt die Impulsantwort

$$g(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) \tau = \sigma(t) \quad (3.189)$$

Die Impulsantwort besitzt für  $t \rightarrow \infty$  den konstanten Wert  $g_0 = 1$ , das System ist demnach grenzstabil. Wird als Eingangssignal ein Rechtecksignal

$$u(t) = \sigma(t) - \sigma(t-2) \quad (3.190)$$

gewählt, ergibt sich das Ausgangssignal durch grafische Faltung zu

$$y(t) = t \cdot \sigma(t) - (t-2) \cdot \sigma(t-2) \quad (3.191)$$

Bild 3.25 zeigt die Antwort  $y(t)$  des Integrierers auf das Rechteck-Signal am Eingang.

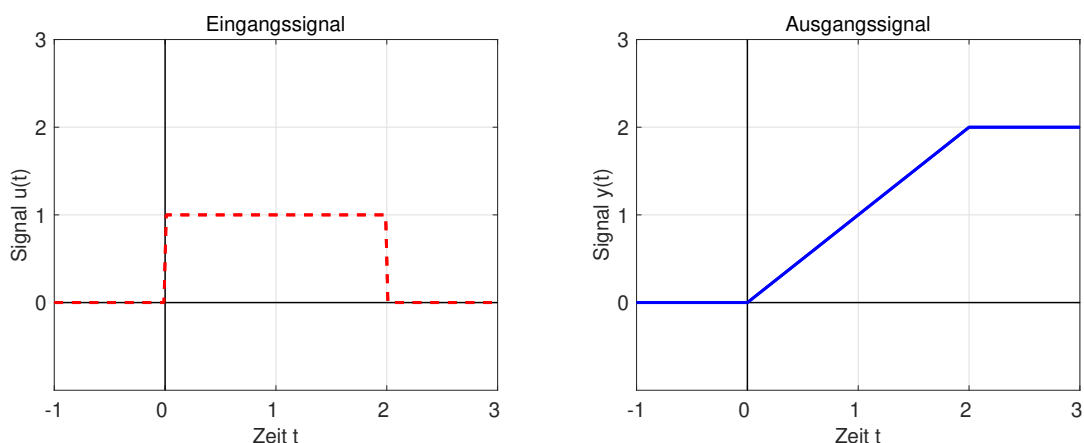


Bild 3.25: Verhalten eines Integrierers als Beispiel für ein grenzstabiles System

Wird das Eingangssignal zeitlich begrenzt, besitzt der Integrierer ein endliches Ausgangssignal. Damit ist bestätigt, dass der Integrierer ein grenzstabiles System ist.

### 3.5 Simulation linearer, zeitinvarianter Systeme

Die Beschreibung dynamischer Systeme kann über mathematische Funktionen erfolgen. Die analytische Berechnung von Systemreaktionen ist wichtig, um Systeme zu interpretieren und zu charakterisieren. Ihre Berechnung wird bei Systemen höherer Ordnung jedoch zumindest aufwendig. Neben der analytischen Berechnung werden deshalb numerische Verfahren zur Simulation des Systemverhaltens eingesetzt.

Eine zeitdiskrete Approximation zeitkontinuierlicher Systeme wird in Teil B dieser Buchreihe behandelt. Dort werden nach Einführung des Abtasttheorems das Forward- und Backward-Euler-Verfahren sowie die bilineare Transformation beschrieben. Um vorab das Verhalten zeitkontinuierlicher Systeme simulieren zu können, werden Systeme mit Blockdiagrammen beschrieben und ihre Systemreaktion mit MATLAB / Simulink berechnet.

#### 3.5.1 Beschreibung von Systemen mit Blockdiagrammen

Die Systembeschreibung mit Blockdiagrammen geht von einer Differentialgleichung der Form

$$a_0 \cdot y(t) + a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + a_2 \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \dots + a_n \cdot \frac{d^N y}{dt^N} = b_0 \cdot u(t) + b_1 \cdot \frac{du}{dt} + b_2 \cdot \frac{d^2u}{dt^2} + \dots + b_m \cdot \frac{d^M u}{dt^M} \quad (3.192)$$

mit entsprechenden Anfangsbedingungen aus. Eine Möglichkeit der Realisierung ergibt sich durch eine Darstellung mit Differenzierern. Diese Darstellungsform hat drei entscheidende Nachteile:

- Das Eingangssignal muss bei einigen Anwendungen abgeleitet werden. Handelt es sich um einen Signalsprung am Eingang, ist die Ableitung ein Impuls. Er lässt sich numerisch nicht realisieren.
- Ein idealer Differenzierer ist kein kausales System und kann deshalb nicht realisiert werden.
- Reale analoge Signale weisen Rauschen auf, das typischerweise schnell veränderliche Anteile besitzt. Differenzierer verstärken diese schnell veränderlichen Rauschanteile. Eine Systemrealisierung mit Differenzierern ist deshalb wenig robust.

Im Gegensatz zu Differenzierern wirken Integrierer glättend. Eine Darstellung von dynamischen Systemen mit Integrieren führt damit zu besseren und robusteren Realisierungen, was insbesondere bei der späteren Umsetzung der Systembeschreibung in reale Systeme von Bedeutung ist. Deshalb werden zur Beschreibung von Systemen mit Blockdiagrammen Integrierer eingesetzt. Ausgehend von der Systembeschreibung mit einer Differentialgleichung wird im Folgenden ein entsprechendes Blockschaltbild auf zwei unterschiedlichen Wegen hergeleitet. Bei beiden Varianten wird davon ausgegangen, dass das System kausal ist. Für kausale Systeme gilt die Bedingung  $N \geq M$ .

#### Grafisch motivierte Herleitung des Blockschaltbildes von LTI-Systemen

Um die Differentialgleichung in eine Integralgleichung zu überführen, muss eine N-fache Integration der Differentialgleichung (3.192) durchgeführt werden.

$$\begin{aligned} & a_0 \cdot \int_{-\infty}^t \dots \int_{-\infty}^{\tau_3} \int_{-\infty}^{\tau_2} y(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_N + a_1 \cdot \int_{-\infty}^t \dots \int_{-\infty}^{\tau_3} \int_{-\infty}^{\tau_2} y(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_{N-1} + \dots + a_N \cdot y(t) \\ & = 0 \cdot \int_{-\infty}^t \dots \int_{-\infty}^{\tau_3} \int_{-\infty}^{\tau_2} u(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_N + \dots + b_M \cdot \int_{-\infty}^t \dots \int_{-\infty}^{\tau_3} \int_{-\infty}^{\tau_2} u(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_{N-M} \end{aligned} \quad (3.193)$$

Die Gleichung kann nach  $y(t)$  aufgelöst werden. Es ergibt sich die Systemdarstellung

$$y(t) = \frac{1}{a_N} \cdot \left( b_0 \cdot \int_{-\infty}^t \dots \int_{-\infty}^{\tau_3} \int_{-\infty}^{\tau_2} u(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_N + \dots + b_M \cdot \int_{-\infty}^t \dots \int_{-\infty}^{\tau_3} \int_{-\infty}^{\tau_2} u(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_{N-M} \right) \\ + \frac{1}{a_N} \cdot \left( -a_0 \cdot \int_{-\infty}^t \dots \int_{-\infty}^{\tau_3} \int_{-\infty}^{\tau_2} y(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_N - \dots - a_{N-1} \cdot \int_{-\infty}^t y(\tau_1) d\tau_1 \right) \quad (3.194)$$

In Gleichung (3.194) wird von einer Integration ausgegangen, die bei  $t = -\infty$  beginnt. Numerische Simulationen beginnen jedoch an einem festen Zeitpunkt  $t_0$ , typischerweise zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$ . Damit müssen bei der Integration die Anfangsbedingungen berücksichtigt werden.

$$y(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{t_0} u(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau + y(t_0) = \int_0^t u(\tau) d\tau + y(0) \quad (3.195)$$

Die Anfangsbedingung wird bei der Simulation auf Englisch als sogenannte *Initial Condition* angegeben.

#### Beispiel: Beschreibung eines Feder-Masse-Dämpfer-Systems in integraler Form

Die N-fache Integration einer Differentialgleichung führt zu unübersichtlichen Gleichungen. Deshalb wird das Verfahren an einem Feder-Masse-Dämpfer-System veranschaulicht, das zum Zeitpunkt  $t = 0$  die Auslenkung  $x_0$  und die Geschwindigkeit  $v_0$  besitzt. Eingangsgröße ist die Kraft  $F_E(t)$ , Ausgangsgröße ist die Auslenkung  $x(t)$ .

$$F_E(t) = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + D \cdot \frac{dx}{dt} + c \cdot x(t) \quad (3.196)$$

Integration nach der Zeit führt mit  $t_0 = 0$  zu dem Ausdruck

$$F_E(t) = \text{LONG} \quad (3.197)$$

Bei erneuter Integration ergibt sich die Gleichung

$$\text{LONG} \quad (3.198)$$

Auflösen nach  $x(t)$  ergibt die Systembeschreibung des Feder-Masse-Dämpfer-Systems in Integralform

$$\text{LONG} \quad (3.199)$$

Die Systembeschreibung in Integralform kann als Blockdiagramm dargestellt werden. Dabei wird eine Verstärkung mit einem Zahlenwert an der Linie dargestellt, Summationspunkte über Kreise und einzelne Übertragungsglieder in einem Rechteck. Das Rechteck mit einem Integralzeichen stellt einen idealen Integrierer dar. Pfeile geben die Flussrichtung des Signals an. Bild 3.26 stellt das lineare zeitinvariante System als Blockschaltbild in der sogenannten Direktstruktur dar.

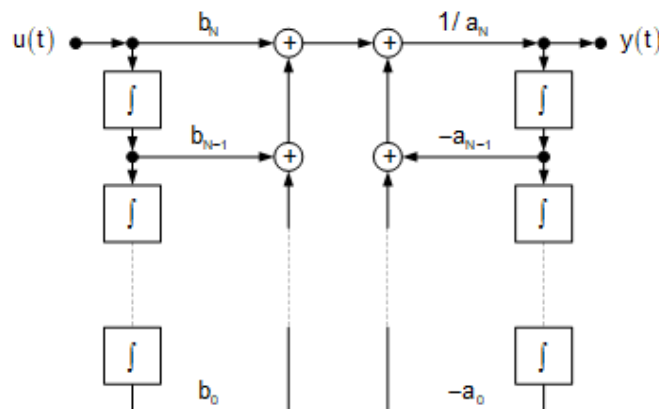


Bild 3.26: Blockschaltbild eines linearen, zeitinvarianten Systems

Die Direktstruktur ergibt sich unmittelbar aus der Differentialgleichung (3.194), die Koeffizienten  $a_n$  und  $b_m$  entsprechen denen der Differentialgleichung. Bei dieser Darstellung ergibt sich das Problem, dass  $2 \cdot N$  Integrierer zur Systemrealisierung notwendig sind. Unter der Voraussetzung, dass das System ein lineares, zeitinvariantes System ist, ist eine Vertauschung der Funktionsblöcke möglich. Dieser Sachverhalt wird nach der Beschreibung von LTI-Systemen im Laplace-Bereich noch einmal aufgegriffen. Nach Austauschen der Reihenfolge der Strukturen ergibt sich das in Bild 3.27 3.27 dargestellte Blockschaltbild.

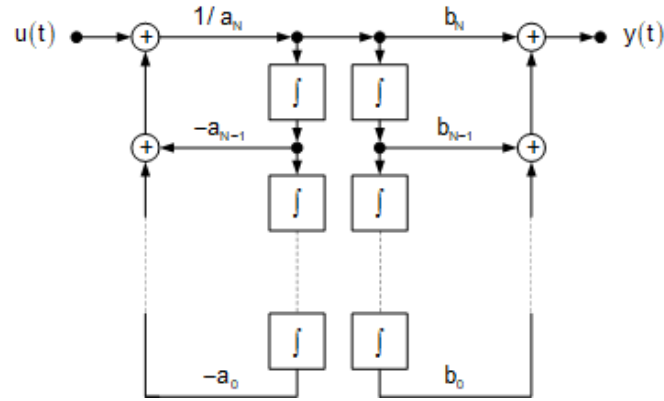


Bild 3.27: Blockschaltbild eines linearen, zeitinvarianten Systems mit vertauschter Blockreihenfolge

Die beiden Pfade der Integrierer haben dieselben Eingangssignale, sie können ohne Veränderung der Systemfunktion zusammengefasst werden. Es ergibt sich das in Bild 3.28 dargestellte Blockschaltbild.

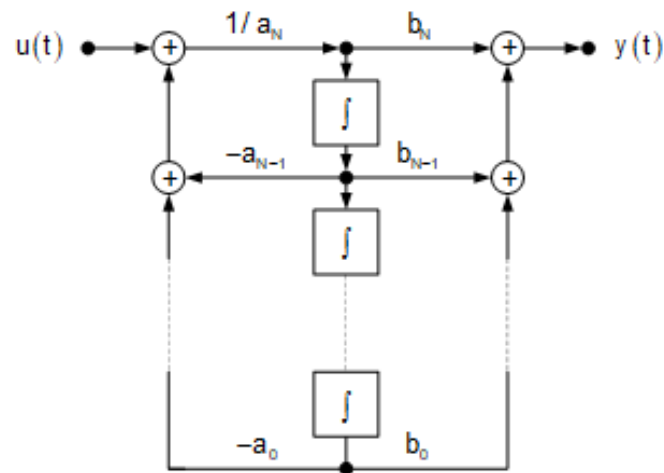


Bild 3.28: Kanonisches Blockschaltbild eines linearen, zeitinvarianten Systems

Das System wird mit  $N$  Integrierern beschrieben. Es kann gezeigt werden, dass das System nicht mit weniger als  $N$  Integrierern realisiert werden kann. Die Darstellung wird deshalb als kanonisches Blockschaltbild bezeichnet.

### Mathematische motivierte Herleitung des Blockschaltbildes von LTI-Systemen

Auch die mathematisch orientierte Herleitung von Blockschaltbildern basiert auf der Differentialgleichung

$$a_0 \cdot y(t) + a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + a_2 \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \dots + a_n \cdot \frac{d^N y}{dt^N} = b_0 \cdot u(t) + b_1 \cdot \frac{du}{dt} + b_2 \cdot \frac{d^2u}{dt^2} + \dots + b_m \cdot \frac{d^M u}{dt^M} \quad (3.200)$$

mit den entsprechenden Anfangsbedingungen. Das System kann in zwei Anteile zerlegt werden, die Eingangsgröße  $u(t)$  und ihre Ableitungen sowie die Ausgangsgröße  $y(t)$  und ihre Ableitungen. Die Glei-

chung kann in zwei Stufen aufgeteilt werden. Zunächst werden Linearkombinationen der Eingangsgröße und ihren Ableitungen gebildet.

$$x(t) = b_0 \cdot u(t) + b_1 \cdot \frac{du}{dt} + b_2 \cdot \frac{d^2u}{dt^2} + \dots + b_M \cdot \frac{d^M u}{dt^M} \quad (3.201)$$

Anschließend wird eine Linearkombination der Ausgangsgröße  $y(t)$  und ihren Ableitungen berechnet und  $x(t)$  gleichgesetzt.

$$a_0 \cdot y(t) + a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + a_2 \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \dots + a_n \cdot \frac{d^N y}{dt^N} = x(t) \quad (3.202)$$

Grafisch sind diese Operationen in Bild 3.29 dargestellt.

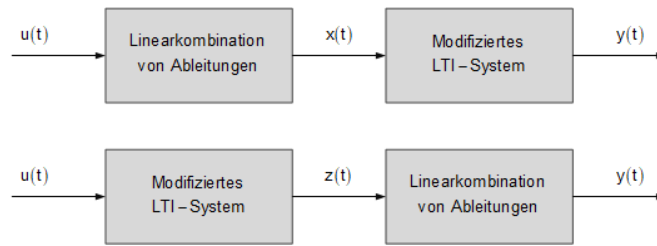


Bild 3.29: Zerlegung eines Systems in zwei Teilsysteme bei variiert Reihenfolge der Funktionsblöcke

Für das LTI-System ist die Reihenfolge der beiden Funktionsblöcke unerheblich, sodass die beiden Darstellungen in Bild 3.29 äquivalent sind. Bei geänderter Reihenfolge gelten mit den Bezeichnungen in Bild 3.29 die Gleichungen

$$a_0 \cdot z(t) + a_1 \cdot \frac{dz}{dt} + a_2 \cdot \frac{d^2z}{dt^2} + \dots + a_n \cdot \frac{d^N z}{dt^N} = u(t) \quad (3.203)$$

und

$$y(t) = b_0 \cdot z(t) + b_1 \cdot \frac{dz}{dt} + b_2 \cdot \frac{d^2z}{dt^2} + \dots + b_M \cdot \frac{d^M z}{dt^M} \quad (3.204)$$

Die N-fache Integration von Gleichung (3.203)

$$\begin{aligned} & a_0 \cdot \int_{-\infty}^t \dots \int_{-\infty}^{t_3} \int_{-\infty}^{t_2} z(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_N + a_1 \cdot \int_{-\infty}^t \dots \int_{-\infty}^{t_3} \int_{-\infty}^{t_2} z(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_{N-1} + \dots + a_N \cdot z(t) \\ &= \int_{-\infty}^t \dots \int_{-\infty}^{t_3} \int_{-\infty}^{t_2} u(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_N \end{aligned} \quad (3.205)$$

und Auflösen nach  $z(t)$  führt zu dem Ausdruck

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{1}{a_N} \cdot \int_{-\infty}^t \dots \int_{-\infty}^{t_3} \int_{-\infty}^{t_2} u(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_N \\ &\quad - \frac{a_0}{a_N} \cdot \int_{-\infty}^t \dots \int_{-\infty}^{t_3} \int_{-\infty}^{t_2} z(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_N - \dots - \frac{a_{N-1}}{a_N} \cdot \int_{-\infty}^{t_2} z(\tau_{N-1}) d\tau_{N-1} \end{aligned} \quad (3.206)$$

Bild 3.30 stellt diese Gleichung als Blockdiagramm dar.

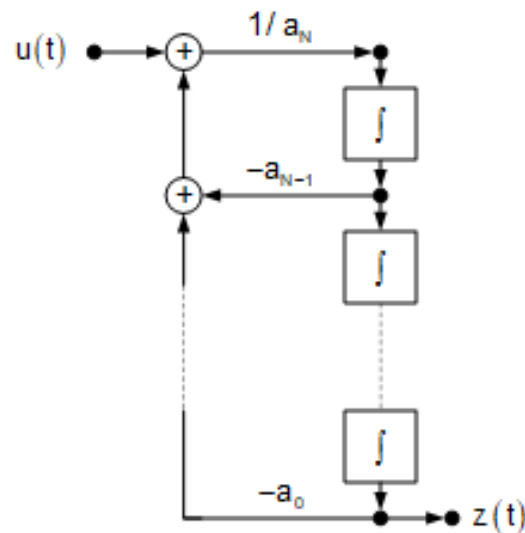


Bild 3.30: Blockschaltbild des in Gleichung (3.206) beschriebenen Teilsystems

Das Ausgangssignal  $y(t)$  setzt sich nach Gleichung (3.204) aus einer Linearkombination von Ableitungen der Größe  $z(t)$  zusammen.

$$y(t) = b_0 \cdot z(t) + b_1 \cdot \frac{dz}{dt} + b_2 \cdot \frac{d^2z}{dt^2} + \dots + b_M \cdot \frac{d^M z}{dt^M} \quad (3.207)$$

Die Eingangssignale der Integrierer sind Ableitungen der Größe  $z(t)$ . Damit kann das Gesamtsystem mit dem Blockschaltbild in Bild (3.31) beschreiben werden.

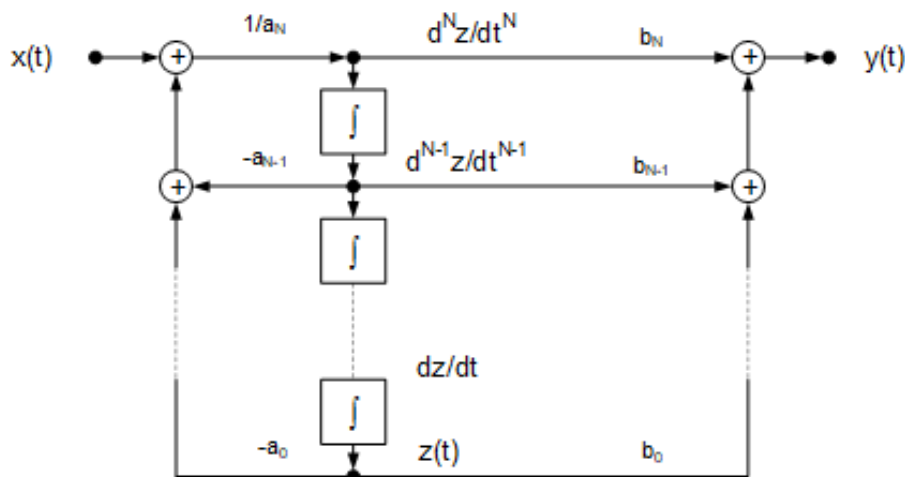


Bild 3.31: Blockschaltbild eines linearen, zeitinvarianten Systems

In technischen Systemen gilt oftmals die Beziehung  $M \leq N$ , in diesem Fall sind die entsprechenden Koeffizienten  $b_m$  zu null zu setzen. Beide Herleitungen führen zu einem kanonischen Blockschaltbild mit  $N$  Integrierern. Bei der Integration müssen die Anfangsbedingungen in Form von *Initial Conditions* berücksichtigt werden.

#### Beispiel: Darstellung des Feder-Masse-Dämpfer-Systems als Blockschaltbild

Die Anwendung der Systemdarstellung über Blockschaltbilder wird anhand eines Feder-Masse- Dämpfer- Systems verdeutlicht.

$$F_E(t) = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + D \cdot \frac{dx}{dt} + c \cdot x(t) \quad (3.208)$$

Eingangssignal ist der Kraftverlauf  $F_E(t)$ , Ausgangssignal ist die Auslenkung  $x(t)$ . Einsetzen der entsprechenden Koeffizienten in die allgemeine Form führt zu der Darstellung des Systems als kanonisches Blockschaltbild. Es ist in Bild 3.32 dargestellt.

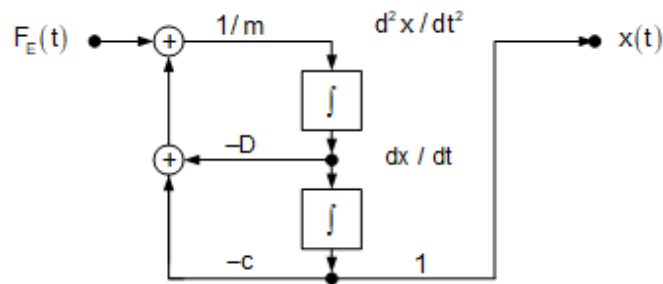


Bild 3.32: Kanonisches Blockschaltbild eines Feder-Masse-Dämpfer-Systems

Diese Darstellung kann anschaulich interpretiert werden. Das Ausgangssignal des zweiten Integrierers ist die Auslenkung  $x(t)$  des Systems. Damit ist das Eingangssignal des zweiten Integrierers die erste Ableitung  $dx/dt$  und das Eingangssignal des ersten Integrierers die zweite Ableitung  $d^2x/dt^2$  der Auslenkung  $x(t)$ . Nach Gleichung (3.208) gilt für die zweite Ableitung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m} \cdot (F_E(t) - D \cdot \frac{dx}{dt} - c \cdot x(t)) \quad (3.209)$$

Eine Analyse des Signalflusses zeigt, dass das Blockschaltbild genau diese Struktur realisiert. Die Anfangsbedingungen der beiden Integrierer ergeben sich aus  $x(t_0)$  und  $dx/dt$  an der Stelle  $t = t_0$ .

### 3.5.2 Simulation von Systemen mit MATLAB / Simulink

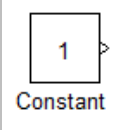
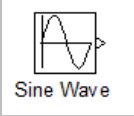
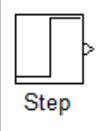
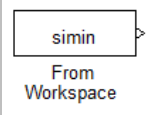
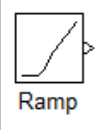
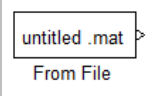
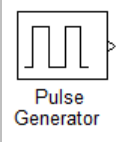

Das in Abschnitt 3.5.1 beschriebene Blockschaltbild kann zur Simulation des Systems in Simulink verwendet werden. Dabei wird das Blockdiagramm in Simulink grafisch programmiert. Simulink stellt verschiedene elementare Übertragungsglieder zur Verfügung.

#### Signalquellen

Mithilfe von Signalquellen (*Sources*) werden Eingangssignale generiert. Neben den typischen Signalformen wie Sprung-, Rampen-, Rechteck- und Sinusfunktion erlaubt Simulink die Erzeugung von Signalquellen über selbst definierte Variablen oder sogenannte mat-Files. Damit ist es zum Beispiel auch möglich, gemessene Daten als Signalquelle zu verwenden, indem die Messdaten aus mat-Files eingelesen werden. Tabelle 3.11 stellt eine Auswahl von Signalquellen in Simulink dar.



Tabelle 3.11: Auswahl von Signalquellen in Simulink

Signalquelle	Simulink Symbol	Signalquelle	Simulink Symbol
Konstante		Sinusfunktion	
Sprungfunktion		Zugriff auf Variable im Workspace	
Rampenfunktion		Definition in mat-File	
Rechteckfunktion		Zeit	

### Signalpfade und Verknüpfung von Signalpfaden

Simulink definiert Systeme über das Verbinden von Funktionsblöcken mit Signalpfaden. Zum Beispiel könnte ein System, das die Gleichung

$$y(t) = 3 \cdot u(t) + 1 \quad (3.210)$$

erfüllt, in Simulink über das Modell in Bild 3.33 dargestellt werden. Dabei wird  $u(t)$  als Signalquelle mit Sinusfunktion realisiert.

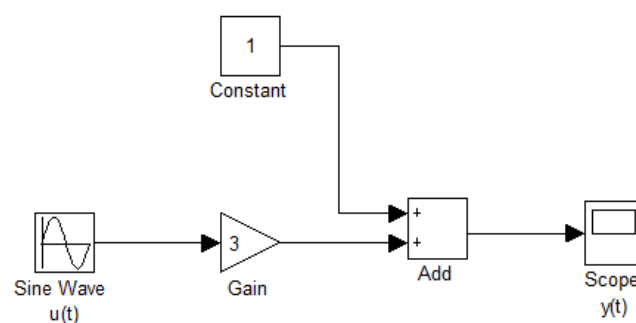
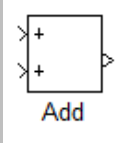
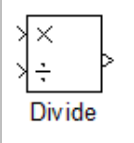
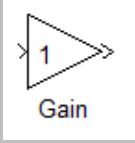
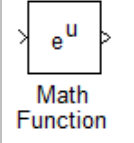

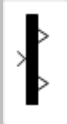


Bild 3.33: Einfaches Simulink Modell

Die Signalpfade laufen durch Blöcke, die eine definierte Funktion ausführen. Diese Funktion kann neben Additionen, Subtraktion, Multiplikation und Division auch eine höhere mathematische Funktion sein, die als *Math-Function-Block* definiert wird. Mit den Blöcken Multiplexer und Demultiplexer können Signale zu einem mehrdimensionalen Signalpfad zusammengefasst beziehungsweise von einem Signalpfad in einzelne Signale zerlegt werden. Tabelle 3.12 stellt eine Auswahl von Verknüpfungen in Simulink dar.

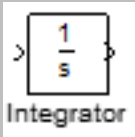

Tabelle 3.12: Auswahl von Funktionen zur Signalverknüpfung

Operation	Simulink Symbol	Operation	Simulink Symbol
Addition von Signalen		Multiplikation / Division von Signalen	
Multiplikation mit einem Faktor, Verstärkung		Mathematische Funktionen	
Multiplexer		Demultiplexer	

### Elementare Übertragungsglieder

Tabelle 3.13 zeigt die elementaren Übertragungsglieder zur Darstellung eines linearen, zeitinvarianten Systems als Blockschaltbild.

Tabelle 3.13: Elementare Übertragungsglieder in Simulink

Übertragungsfunktion	Simulink Symbol	Übertragungsfunktion	Simulink Symbol
Integration		Differentiation	

Integrierer besitzen das Symbol  $1/s$ , im Laplace-Bereich ist das die Übertragungsfunktion eines Integrierers. Durch ein doppeltes Klicken auf die Symbole öffnet sich in Simulink ein Dialog, mit dem die Eigenschaften des Übertragungsglieds definiert werden können. Insbesondere kann bei Integrierern die Anfangsbedingung (*Initial Condition*) festgelegt werden. Wird kein spezieller Anfangswert definiert, verwendet Simulink den Anfangswert  $y(0) = 0$ .

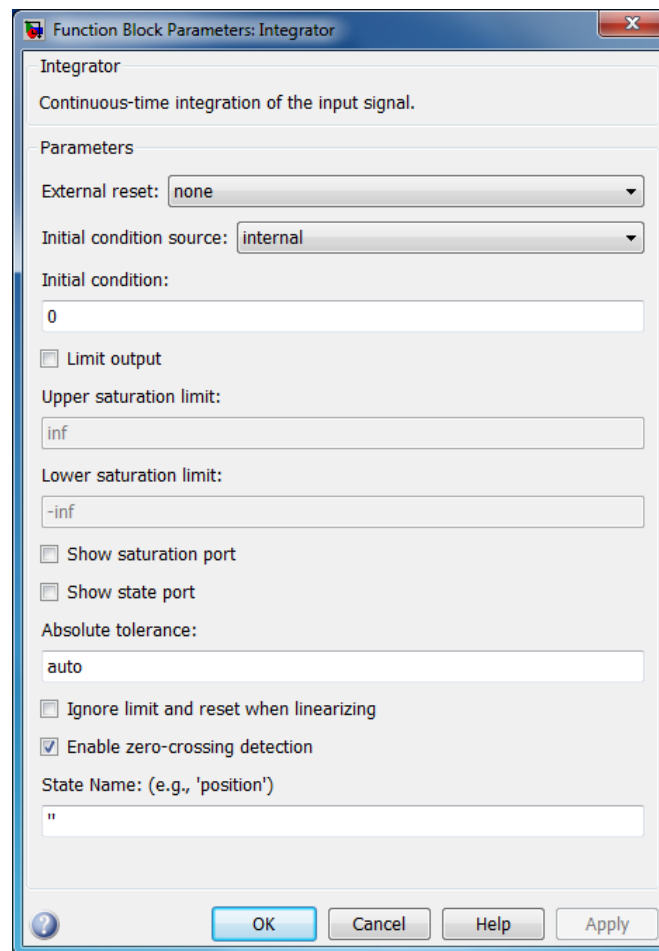


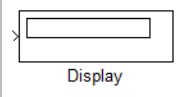
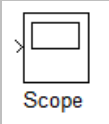
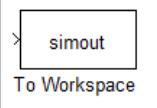
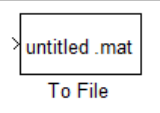
Bild 3.34: Dialog zur Definition der Eigenschaften eines Integrierers, insbesondere der Anfangsbedingung

Differenzierer sind an dem Symbol  $du/dt$  zu erkennen, was auf die zeitliche Ableitung der Eingangsgröße hinweist. Zu Beginn des Abschnitts wird darauf hingewiesen, dass die numerische Realisierung kritisch ist, die Differentiation nicht kausal ist und zu einer Verstärkung von Rauschanteilen im Signal führt. Deshalb sollte auf den Einsatz von Differenzierern verzichtet werden. Neben den elementaren Übertragungsgliedern Integrierer oder Differenzierer bietet Simulink die Möglichkeit, komplexere Übertragungsglieder im Laplace-Bereich zu definieren. Diese Darstellungsform wird nach der Beschreibung von Systemen im Laplace-Bereich aufgegriffen.

### Signalsenken

Die in Simulink berechneten Signalpfade enden in sogenannten Signalsenken (*Sinks*). Signalsenken stellen das Signal grafisch dar oder speichern das Signal in Variablen oder mat-Files. Tabelle 3.14 stellt eine Auswahl von Signalsenken in Simulink dar.

Tabelle 3.14: Auswahl von Signalsenken in Simulink

Signalsenke	Simulink Symbol	Signalsenke	Simulink Symbol
Numerische Anzeige		Grafische Darstellung	
Speicherung in Variable im Workspace		Speicherung in mat-File	

### Simulationsvarianten zeitkontinuierlicher Systeme

Zeitkontinuierliche Systeme werden in Simulink typischerweise als Variable-Step-Simulation ausgeführt. Dabei bestimmt Simulink auf Basis der Simulationsergebnisse eine variable Schrittweite, die bei vorgegebener Toleranz zu einer minimalen Rechenzeit führt. Die Simulation wird in einem Fenster vorgenommen, das über den Menüpunkt *Simulation / Configuration Parameters* aufgerufen wird. Es erscheint das Fenster, das in Bild 3.35 dargestellt ist.

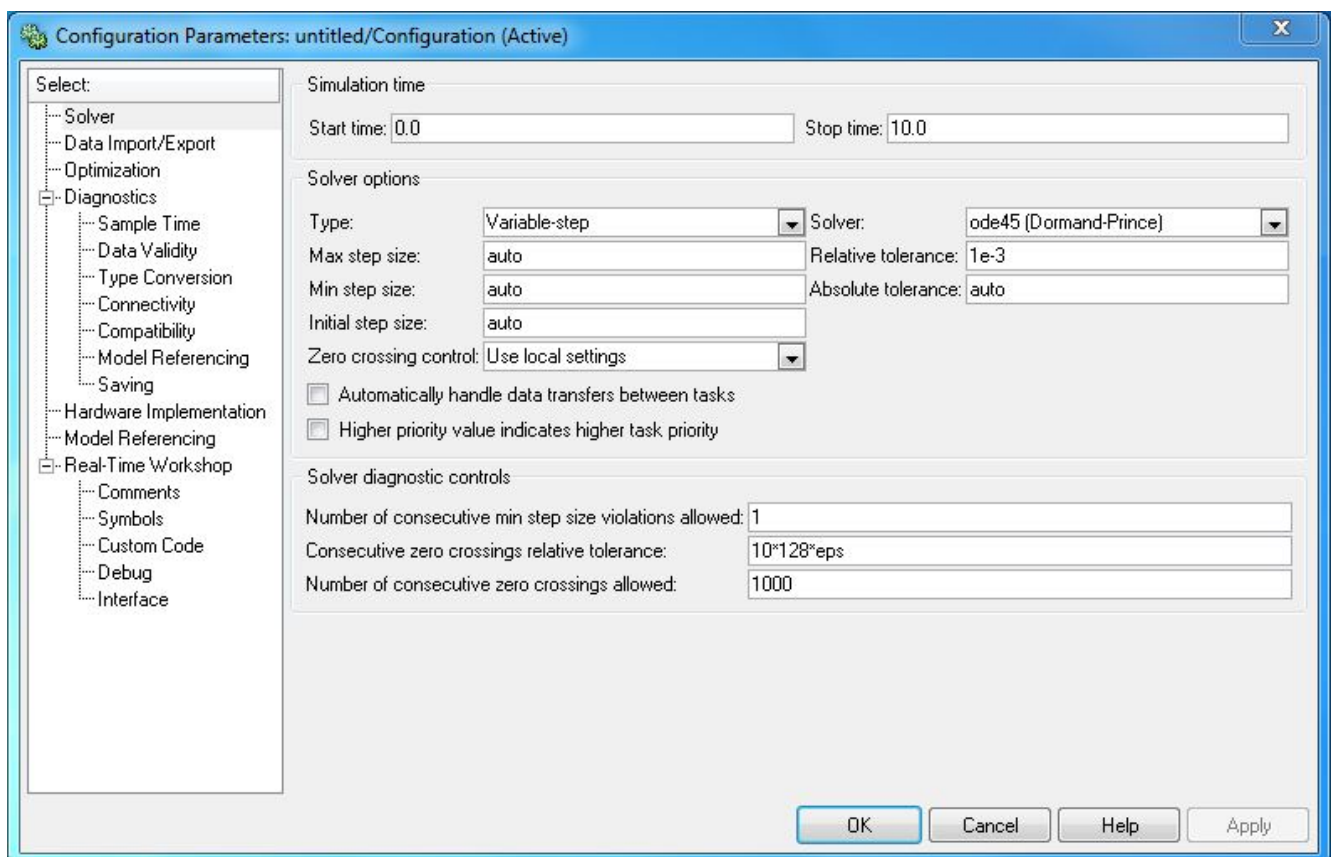


Bild 3.35: Fenster zur Konfiguration von Parametern in Simulink

Für die Simulation sind neben Start- und Endzeitpunkt die Solver-Optionen von Bedeutung. Informationen zu den Eigenschaften der Solver und ihren Anwendungsgebieten sind in [Schw07] und [Stei07] zu finden. Im Rahmen der Vorlesung werden die Simulationen mit dem Solver *ode45 (Dormand-Prince)* ausgeführt. Alle Default-Einstellungen von Simulink werden übernommen.

Beispiel: Simulation eines Feder-Masse-Dämpfer-Systems

Zur Simulation eines Feder-Masse-Dämpfer-Systems wird das hergeleitete Blockschaltbild mithilfe der mathematischen Funktionen sowie der Integrierer in MATLAB dargestellt. Es ergibt sich das in Bild 3.36 dargestellte Simulink-Modell.

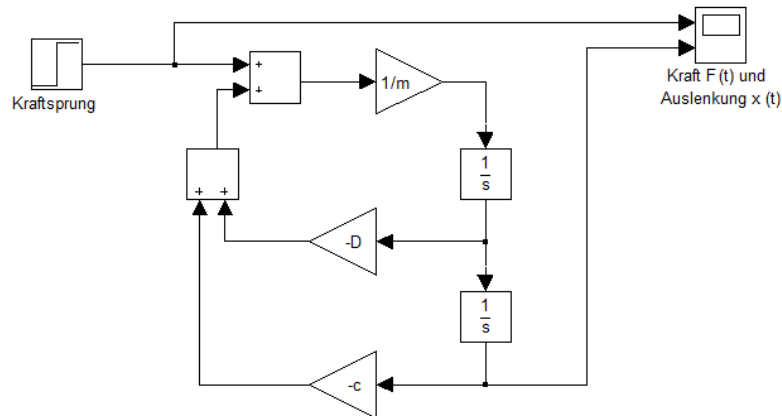


Bild 3.36: Blockschaltbild eines Feder-Masse-Dämpfer-Systems in Simulink

Als Signalquelle wird eine Sprungfunktion eingesetzt. Ein- und Ausgangssignal werden in einem sogenannten *Scope* dargestellt. Für eine Federkonstante von  $c = 100 \text{ N/m}$ , eine Dämpfung von  $D = 0.5 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ , eine Masse  $m = 10 \text{ g}$  und eine Kraft  $F_0 = 0.2 \text{ N}$  ergibt sich das in Bild 3.37 *Scope*-Bild.

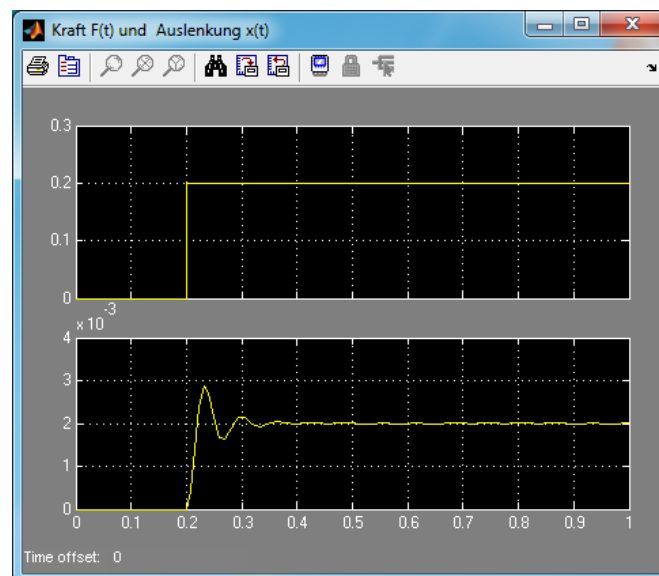


Bild 3.37: Simulation des Einschwingverhaltens des Feder-Masse-Dämpfer-Systems bei einer sprungförmigen Anregung mit einer Kraft von  $0.2 \text{ N}$  dargestellt als Scope in Simulink

Das Eingangssignal ist in dem oberen Feld als Sprung zu erkennen. Das Ausgangssignal ist im unteren Feld dargestellt. Das Simulationsergebnis entspricht dem in Bild 3.37 dargestellten Signalverlauf.

## 3.6 Literatur

### 3.6.1 Literaturstellen mit anschaulicher Darstellung

- [Alba04] Albach, Manfred: Grundlagen der Elektrotechnik 1 und 2.  
Pearson Studium, 2004
- [Foel11] Föllinger, Otto: Laplace-, Fourier- und z-Transformation. 10., überarbeitete Auflage  
VDE Verlag GmbH, Berlin, Offenbach 2011
- [Führ06] Führer, Arnold: Grundgebiete der Elektrotechnik 1 - 3  
Hanser Verlag, München, 2006
- [Goeb11] Goebbels, Steffen: Mathematik verstehen und anwenden  
Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2011
- [Papu01] Papula, Lothar: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler  
Vieweg Fachbücher der Technik, Braunschweig/Wiesbaden, 2001

### 3.6.2 Literatur zu MATLAB

- [Beuc00] Beucher, Ottmar: MATLAB und Simulink lernen,  
Addison Wesley Longman Verlag, München, 2000
- [Schw07] Schweizer, Wolfgang: MATLAB kompakt,  
Oldenbourg Verlag München, 2007
- [Ste07] Stein, Ulrich: Einstieg in das Programmieren mit MATLAB,  
Fachbuchverlag Leipzig, 2007

### 3.6.3 Literaturstellen mit praktischen Anwendungen mit MATLAB

- [Hoff98] Hoffmann, Josef: Matlab und Simulink,  
Addison Wesley Longman Verlag, München, 1998
- [Hoff99] Hoffmann, Josef: Matlab und Simulink in der Signalverarbeitung und  
Kommunikationstechnik, Addison Wesley Longman Verlag, München, 1999
- [Sche04] Scherf, Helmut: Modellbildung und Simulation dynamischer Systeme,  
Oldenbourg Verlag, München, 2004

### 3.6.4 Weiterführende Literatur

- [Bart89] Barton, G.: Elements of Green's Functions and Propagation: Potentials, Diffusion, and  
Waves, Oxford University Press, 1989

## 4 Laplace-Transformation zeitkontinuierlicher Signale

Zeitkontinuierliche Signale können mithilfe der Laplace-Transformation in einen sogenannten Laplace-Bereich transformiert werden. Im Laplace-Bereich lassen sich lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten vergleichsweise einfach und anschaulich lösen. Rechenregeln der Laplace-Transformation erlauben eine vergleichsweise einfache Behandlung der Anfangsbedingungen. Darüber hinaus eignet sich der Laplace-Bereich zur Charakterisierung von linearen, zeitinvarianten Systemen mit sogenannten Übertragungsfunktionen.

In diesem Kapitel wird die Laplace-Transformation vorgestellt. Nach der Definition der Laplace-Transformation werden einige Korrespondenzen über die Definitionsgleichung bestimmt. Die eher aufwendige Bestimmung von Korrespondenzen über die Definitionsgleichung kann vermieden werden, wenn die vorliegende Funktion auf Funktionen mit bekannten Korrespondenzen zurückgeführt werden kann. Die dazu notwendigen Rechenregeln werden hergeleitet und der Nutzen an Beispielen demonstriert.

Anhand eines einfachen Beispiels wird die Bedeutung der Laplace-Transformation für die Lösung von Differentialgleichungen aufgezeigt. Dabei wird motiviert, warum die Rücktransformation vom Laplace-Bereich in den Zeitbereich erforderlich ist. Die Rücktransformation vom Laplace-Bereich in den Zeitbereich kann grundsätzlich über ein Umkehrintegral erfolgen. Da dieser Weg aufwendig ist und Kenntnisse in der Funktionentheorie voraussetzt, wird er in der Praxis vermieden. Die bei technischen Anwendungen entstehenden Laplace-Transformierten sind typischerweise gebrochen rationale Funktionen. Sie können in Partialbrüche zerlegt werden, die sich mithilfe der angesprochenen Rechenregeln und einiger Korrespondenzen in den Zeitbereich transformieren lassen.

Die computerunterstützte Berechnung von Laplace-Transformierten wird anhand des Programms MATLAB beschrieben. Nach der Zusammenstellung der für die analytische Berechnung wesentlichen Befehle werden einige Beispiele und Beweise mithilfe der *Symbolic Math Toolbox* berechnet.

### 4.1 Grundlagen der Laplace-Transformation

#### 4.1.1 Definitionsgleichung der Laplace-Transformation

Für kausale Signale ist die einseitige Laplace-Transformation definiert als

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt \quad (4.1)$$

Dabei ist  $s$  eine komplexe Zahl mit Realteil und Imaginärteil. Das Integral startet dabei an der Stelle  $t = 0^-$ . Damit schließt das Laplace-Integral in Gleichung (4.1) Singularitäten an der Stelle  $t = 0$  mit ein. Es wird sich zeigen, dass daraus ein Formalismus entsteht, mit dem Übergangsbedingungen elegant bestimmt werden können. Die Transformation wird mit einem großen  $L$  symbolisiert.

$$L\{x(t)\} = X(s) = \int_{0-}^{\infty} x(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt \quad (4.2)$$

Ein Paar aus Zeitfunktion  $x(t)$  und Laplace-Transformierter  $X(s)$  wird auch als Korrespondenz bezeichnet. Korrespondenzen werden in der Literatur mit einem halb ausgefüllten Hantelzeichen dargestellt. Die nicht ausgefüllte Seite repräsentiert dabei den Zeitbereich, die ausgefüllte Seite den transformierten Bereich.

$$x(t) \circ - \bullet X(s) \quad (4.3)$$

Die Laplace-Transformation bildet demnach Zeitfunktionen  $x(t)$  auf ihre Laplace-Transformierte  $X(s)$  ab. Die Variable  $s$  ist eine komplexe Variable. Die zugehörige komplexe Ebene wird auch als  $s$ -Ebene

bezeichnet. Eine wichtige Eigenschaft der Laplace-Transformation besteht darin, dass der Differentiation und Integration im Zeitbereich einfache algebraische Operationen im Laplace-Bereich entsprechen. Außerdem geht eine Faltung im Zeitbereich in eine Multiplikation im Laplace-Bereich über. Diese und andere Eigenschaften werden in Abschnitt 4.2 hergeleitet.

### 4.1.2 Laplace-Transformation grundlegender Signale

Zur Einführung werden die Laplace-Transformierten von einigen kausalen Funktionen über die Definitionsgleichung der Laplace-Transformation berechnet. Dabei ist zu berücksichtigen, dass im Rahmen dieser Buchreihe die einseitige Laplace-Transformation durchgeführt wird, die nur für kausale Signale definiert ist.

#### Kausale Rechteckfunktion

Eine Rechteckfunktion mit der Gleichung

$$x(t) = \sigma(t) - \sigma(t - t_0) \quad (4.4)$$

soll in den Laplace-Bereich transformiert werden. Das Signal ist in Bild 4.1 dargestellt.

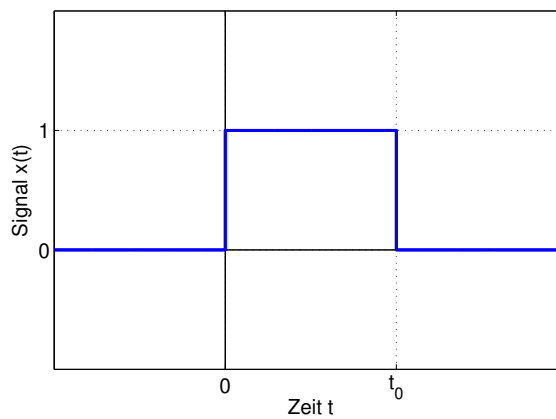


Bild 4.1: Kausale Rechteckfunktion  $x(t)$

Einsetzen der Zeitfunktion  $x(t)$  in die Definitionsgleichung führt zu

$$X(s) = \int_{0_-}^{\infty} x(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt = \int_{0_-}^{\infty} (\sigma(t) - \sigma(t - t_0)) \cdot e^{-s \cdot t} dt \quad (4.5)$$

Die kausale Rechteckfunktion ist nur in dem Bereich von  $0_-$  bis  $t_0$  von null verschieden. Damit muss auch die Integration nur in diesem Bereich durchgeführt werden. In dem Bereich ist die Funktion  $x(t)$  konstant gleich 1. Damit kann das Integral umgeformt werden zu

$$X(s) = \int_{0_-}^{\infty} (\sigma(t) - \sigma(t - t_0)) \cdot e^{-s \cdot t} dt = \int_{0_-}^{t_0} 1 \cdot e^{-s \cdot t} dt \quad (4.6)$$

Mit der Stammfunktion der Exponentialfunktion

$$\int e^{a \cdot t} dt = \frac{1}{a} \cdot e^{a \cdot t} \quad (4.7)$$

und durch Einsetzen der Integrationsgrenzen ergibt sich die Laplace-Transformierte

$$X(s) = \int_{0_-}^{t_0} 1 \cdot e^{-s \cdot t} dt = -\frac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot t} \Big|_{0_-}^{t_0} = -\frac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot t_0} + \frac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot 0_-} = \frac{1}{s} \cdot (1 - e^{-s \cdot t_0}) \quad (4.8)$$



## Impulsfunktion

Als weiteres Beispiel werden die Laplace-Transformierten einer Impulsfunktion  $x_1(t)$  und einer verschobenen Impulsfunktion  $x_2(t)$  berechnet.

$$x_1(t) = \delta(t) \quad (4.9)$$

$$x_2(t) = \delta(t - t_0) \quad (4.10)$$

Die beiden Signale sind in Bild 4.2 dargestellt.

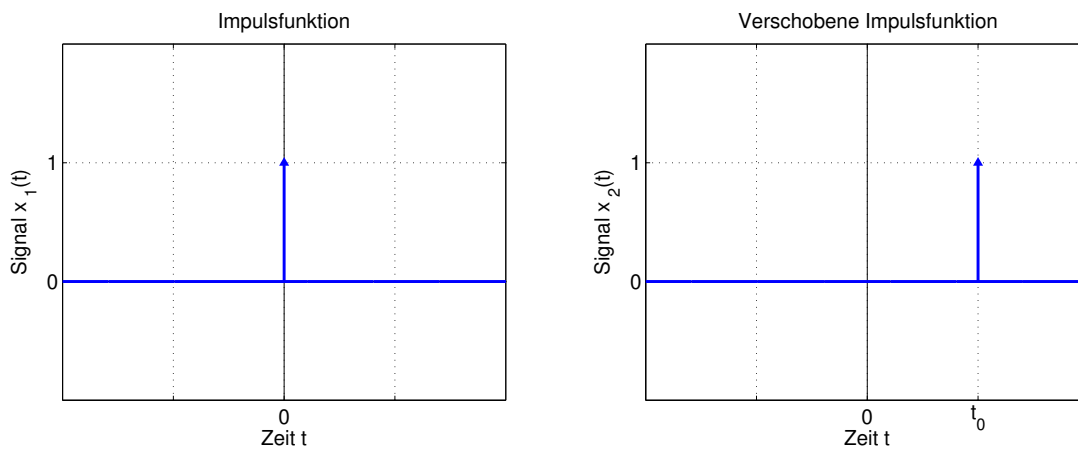


Bild 4.2: Impulsfunktion  $x_1(t)$  und verschobene Impulsfunktion  $x_2(t)$

Einsetzen der Impulsfunktion in die Definitionsgleichung führt mit der Ausblendeigenschaft der Impulsfunktion zu

$$X_1(s) = \int_{0_-}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt = e^{-s \cdot 0} \cdot \int_{0_-}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \cdot \int_{0_-}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (4.11)$$

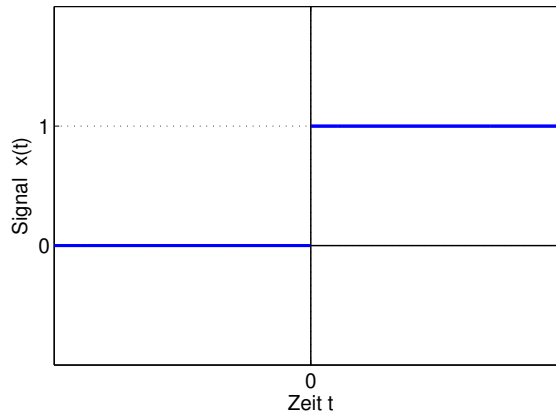
Analog ergibt sich für den verschobenen Impuls die Laplace-Transformierte

$$X_2(s) = \int_{0_-}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot e^{-s \cdot t} dt = e^{-s \cdot t_0} \cdot \int_{0_-}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = e^{-s \cdot t_0} \quad (4.12)$$

Die Impulsfunktion  $\delta(t)$  besitzt die Laplace-Transformierte  $X(s) = 1$ . Eine Verschiebung des Impulses um  $t_0$  nach rechts führt zu der Laplace-Transformierten  $e^{-s \cdot t_0}$ . In Abschnitt 4.2 wird sich zeigen, dass eine Verschiebung der Zeitfunktion um  $t_0$  nach rechts immer zu einer Multiplikation mit dem Faktor  $e^{-s \cdot t_0}$  führt.

## Sprungfunktion

Die Sprungfunktion  $\sigma(t)$  springt zum Zeitpunkt  $t = 0$  von null auf den Wert eins. Sie ist in Bild 4.3 dargestellt.

Bild 4.3: Sprungfunktion  $\sigma$ 

$$X(s) = \int_{0_-}^{\infty} \sigma(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt = \int_{0_-}^{\infty} 1 \cdot e^{-s \cdot t} dt = \int_{0_-}^{\infty} e^{-s \cdot t} dt \quad (4.13)$$

Da die Sprungfunktion zeitlich nicht begrenzt ist, weist das Integral einen unendlich langen Integrationsbereich auf. Derartige Integrale werden uneigentliche Integrale genannt. Bilden der Stammfunktion und Einsetzen der Integrationsgrenzen führen zu dem Ausdruck

$$X(s) = -\frac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot t} \Big|_{0_-}^{\infty} = -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot t} + \frac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot 0_-} = \frac{1}{s} \cdot \left(1 - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-s \cdot t}\right) \quad (4.14)$$

Dabei ist die Zahl  $s$  eine komplexe Zahl  $s = \delta + j \cdot \omega$ . Der Grenzwert existiert nur, wenn der Realteil  $\delta$  der komplexen Zahl  $s$  positiv ist. In diesem Fall gilt

$$X(s) = \frac{1}{s} \cdot \left(1 - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-s \cdot t}\right) = \frac{1}{s} \cdot \left(1 - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(\delta + j \cdot \omega) \cdot t}\right) = \frac{1}{s} \cdot \left(1 - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\delta \cdot t} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t}\right) = \frac{1}{s} \cdot (1 - 0) = \frac{1}{s} \quad (4.15)$$

Die Sprungfunktion  $x(t) = \sigma(t)$  hat demnach für den Bereich der  $s$ -Ebene mit  $\delta > 0$  die Laplace-Transformierte  $X(s) = 1/s$ . In dem Bereich der  $s$ -Ebene mit  $\delta \leq 0$  besitzt die Sprungfunktion keine Laplace-Transformierte, da das Laplace-Integral nicht konvergiert.

Zu der Laplace-Transformierten muss demnach immer ein Konvergenzbereich angegeben werden. In den beiden ersten Beispielen ist der Konvergenzbereich unendlich groß. Bei der Sprungfunktion liegt der Konvergenzbereich in der positiven Halbebene. Auf die Frage der Konvergenz des Laplace-Integrals wird in Abschnitt 4.1.3 genauer eingegangen.

### Konstanten und kausale Konstanten

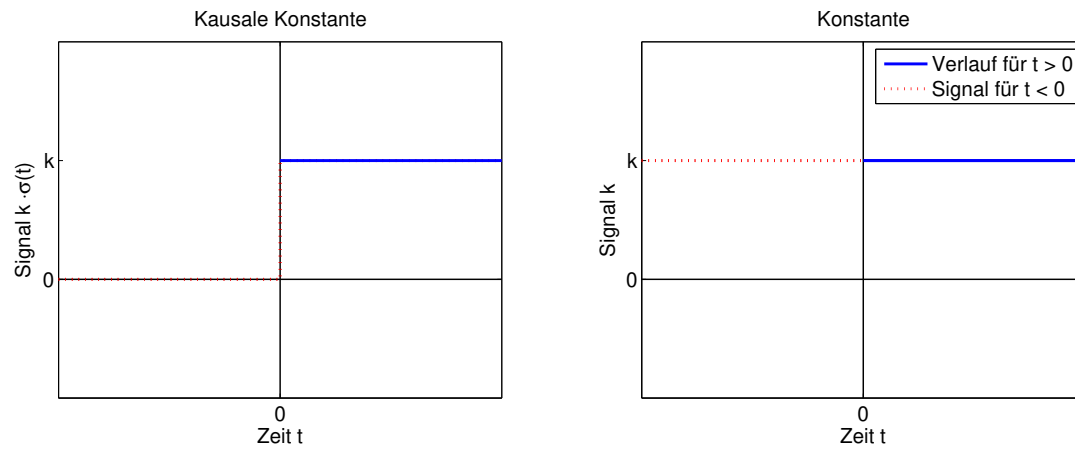
Die Laplace-Transformierte einer Konstanten  $x(t) = k$  ergibt sich analog zu der Berechnung der Laplace-Transformierten der Sprungfunktion zu

$$X(s) = \int_{0_-}^{\infty} k \cdot e^{-s \cdot t} dt = k \cdot \int_{0_-}^{\infty} e^{-s \cdot t} dt = \frac{k}{s} \quad (4.16)$$

Die Laplace-Transformierten einer Konstante  $k$  und einer mit dem Faktor  $k$  multiplizierten Sprungfunktion  $k \cdot \sigma(t)$  unterscheiden sich weder im Ergebnis noch im Konvergenzbereich. Ursache ist die einseitige Laplace-Transformation mit der Definitionsgleichung

$$X(s) = \int_{0_-}^{\infty} x(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt \quad (4.17)$$

Die Integration beginnt zum Zeitpunkt  $t = 0_-$ , sodass das Verhalten der Funktion für  $t < 0$  unberücksichtigt bleibt. Da sich Konstanten und Sprungfunktionen aber nur in diesem Bereich unterscheiden, ist ihre Laplace-Transformierte identisch. Bild 4.4 verdeutlicht diesen Zusammenhang grafisch.

Bild 4.4: Grafischer Vergleich von kausaler Konstante  $k\sigma(t)$  und Konstante  $k$ 

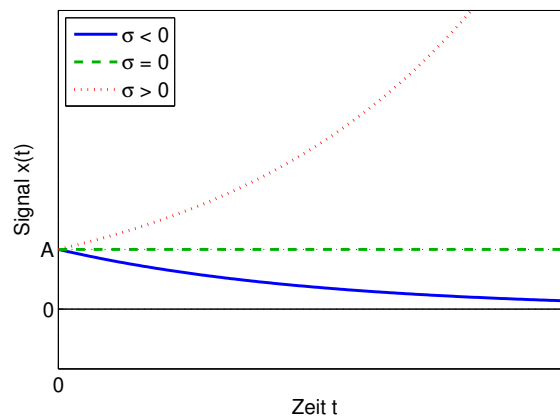
Konstanten werden im Zusammenhang mit der Laplace-Transformation auch als kausale Konstanten bezeichnet, also als Konstanten, die erst für  $t \geq 0$  von null verschieden sind.

### Kausale Exponentialfunktion

Die kausale Exponentialfunktion ist für  $t < 0$  null. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  springt sie auf den Wert eins. Je nach Koeffizienten  $\delta$  steigt die Exponentialfunktion an, bleibt konstant oder fällt ab.

$$x(t) = e^{\delta \cdot t} \cdot \sigma(t) \quad (4.18)$$

Bild 2.25 verdeutlicht die Abhängigkeit des Signalverlaufs von dem Koeffizienten  $\delta$ .

Bild 4.5: Kausale Exponentialfunktion mit unterschiedlichen Koeffizienten  $\sigma = -1, 0$  und  $1$ 

Wird die kausale Exponentialfunktion in die Definitionsgleichung für die Laplace-Transformation eingesetzt, ergibt sich das Integral

$$X(s) = \int_{0_-}^{\infty} e^{\delta \cdot t} \cdot \sigma(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt = \int_{0_-}^{\infty} e^{(\delta-s) \cdot t} dt \quad (4.19)$$

Wieder handelt es sich um ein uneigentliches Integral. Dasselbe Vorgehen wie bei der Sprungfunktion führt zu

$$X(s) = \frac{1}{\delta-s} \cdot e^{(\delta-s) \cdot t} \Big|_{0_-}^{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\delta-s} \cdot e^{(\delta-s) \cdot t} - \frac{1}{\delta-s} \cdot e^{(\delta-s) \cdot 0_-} = \frac{1}{s-\delta} \cdot \left(1 - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(s-\delta) \cdot t}\right) \quad (4.20)$$

Der Grenzwert existiert nur, wenn  $\text{Re}(s - \delta) > 0$  ist. In dem Fall gilt

$$X(s) = \frac{1}{s-\delta} \cdot \left(1 - \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(s-\delta) \cdot t}\right) = \frac{1}{s-\delta} \quad (4.21)$$

Die kausale Exponentialfunktion hat demnach für den Bereich der  $s$ -Ebene mit  $\operatorname{Re}(s - \delta) > 0$  die Laplace-Transformierte  $X(s) = 1/(s - \delta)$ . In dem übrigen Bereich der  $s$ -Ebene besitzt die kausale Exponentialfunktion keine Laplace-Transformierte, da das Laplace-Integral nicht konvergiert.

#### 4.1.3 Existenz der Laplace-Transformation

Die Laplace-Transformation beruht auf der Auswertung des Laplace-Integrals.

$$X(s) = \int_{0_-}^{\infty} x(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt \quad (4.22)$$

Es ist ein uneigentliches Integral, das nur definiert ist, wenn das Integral konvergiert. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn  $x(t)$  stückweise stetig ist und wenn  $|x(t)|$  für  $t \rightarrow \infty$  nicht schneller als eine Exponentialfunktion wächst. In dem Fall kann die Funktion  $x(t)$  abgeschätzt werden mit

$$|x(t)| \leq k \cdot e^{\delta \cdot t} \quad (4.23)$$

Für  $\operatorname{Re}(s) > \delta$  ist das zugehörige Laplace-Integral absolut konvergent, und die Laplace-Transformierte existiert. Dies kann durch Einsetzen in das Laplace-Integral verdeutlicht werden. Mit

$$x(t) = e^{\delta \cdot t} \cdot \sigma(t) \quad (4.24)$$

ergibt sich

$$X(s) = \int_{0_-}^{\infty} e^{\delta \cdot t} \cdot \sigma(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt = \int_{0_-}^{\infty} e^{(\delta - s) \cdot t} dt = \frac{1}{\delta - s} \cdot e^{-(s - \delta) \cdot t} \Big|_{0_-}^{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\delta - s} \cdot e^{-(s - \delta) \cdot t} - \frac{1}{\delta - s} \quad (4.25)$$

Für  $\operatorname{Re}(s - \delta) < 0$  strebt die Exponentialfunktion gegen unendlich, das Integral ist demnach nicht konvergent, die Laplace-Transformierte existiert für diesen Bereich der  $s$ -Ebene nicht. Für  $\operatorname{Re}(s - \delta) > 0$  strebt die Exponentialfunktion für  $t \rightarrow \infty$  gegen null. Das Integral ist konvergent, und die Laplace-Transformierte existiert. Bild 4.6 zeigt den Konvergenzbereich des Laplace-Integrals in der komplexen Ebene.

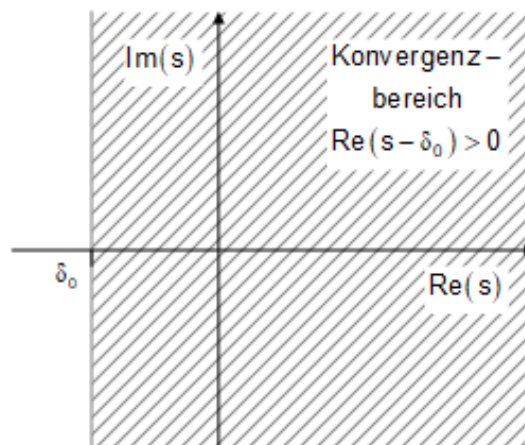


Bild 4.6: Konvergenzbereich für  $\operatorname{Re}(s - \sigma) > 0$

Für den grau hinterlegten Bereich der  $s$ -Ebene ist das Laplace-Integral konvergent. Allgemein existiert eine Laplace-Transformierte  $X(s)$  einer Funktion  $x(t)$  also, wenn  $|x(t)|$  für  $t \rightarrow \infty$  nicht schneller wächst als eine Exponentialfunktion. In den systemtheoretisch interessanten Fällen kann von der Konvergenz des Laplace-Integrals zumindest in einem Teil der  $s$ -Ebene ausgegangen werden. Der Konvergenzbereich der Laplace-Transformation ist deshalb für die Berechnung technisch interessanter Fälle von untergeordneter Bedeutung.

Bei der sogenannten Fourier-Transformation ist der Konvergenzbereich der Laplace-Transformation wieder wichtig. Es wird sich zeigen, dass sich die Fourier-Transformierte direkt aus der Laplace-Transformierten ergibt, wenn die imaginäre Achse  $s = j \cdot \omega$  im Konvergenzbereich der Laplace-Transformierten liegt.

#### 4.1.4 Pollage und kausale Exponentialfunktion

Im Abschnitt 4.1.2 wird die Laplace-Transformierte der kausalen Exponentialfunktion

$$x(t) = e^{\lambda \cdot t} \cdot \sigma(t) \quad (4.26)$$

berechnet zu

$$X(s) = \frac{1}{s - \lambda} \quad (4.27)$$

Aus Gleichung (4.27) kann der zu der Exponentialfunktion zugehörige Pol in der komplexen s-Ebene abgelesen werden.

$$s = \lambda \quad (4.28)$$

Die Lage des Poles beziehungsweise der Pole in der s-Ebene kann damit einem Signalverhalten zugeordnet werden, das in Tabelle 4.1 skizziert ist.

Kosinusfunktionen mit exponentiell abklingender Amplitude können nach den Darstellungen in Abschnitt 2.4.2 als Summe zweier Exponentialfunktionen mit jeweils konjugiert komplexen Koeffizienten  $\lambda$  dargestellt werden.

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cdot e^{\delta_0 \cdot t} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot \sigma(t) = \frac{1}{2} \cdot A \cdot e^{\delta_0 \cdot t} \cdot (e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t}) \cdot \sigma(t) \\ &= \frac{1}{2} \cdot A \cdot (e^{(\delta_0 + j \cdot \omega_0) \cdot t} + e^{(\delta_0 - j \cdot \omega_0) \cdot t}) \cdot \sigma(t) \end{aligned} \quad (4.29)$$

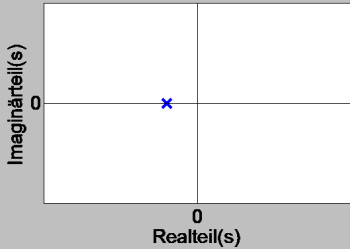
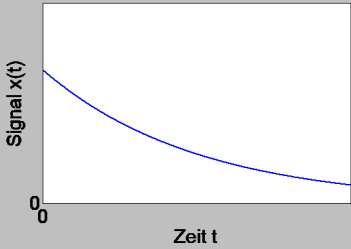
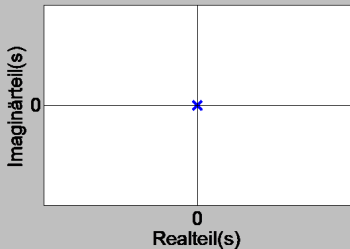
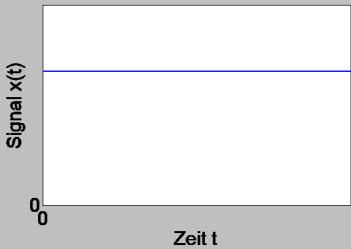
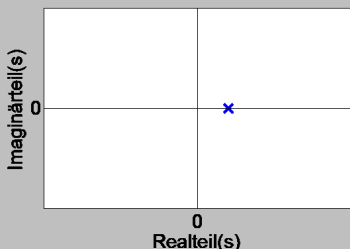
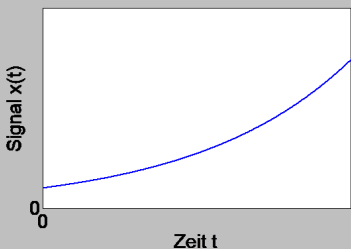
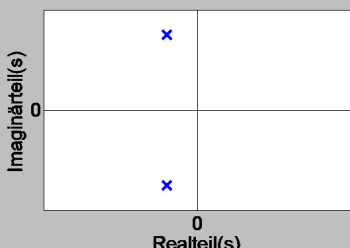
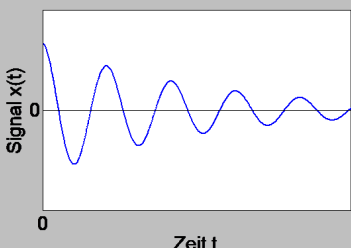
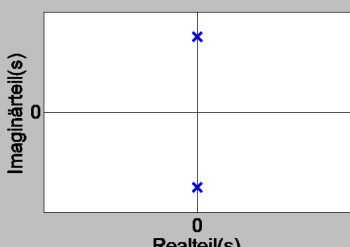
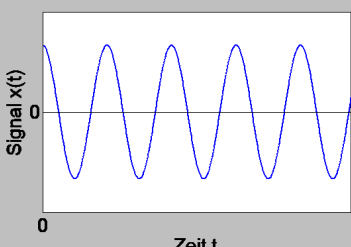
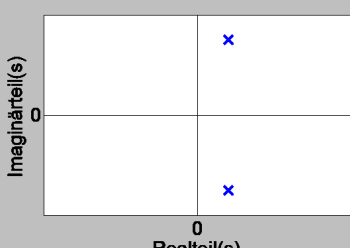
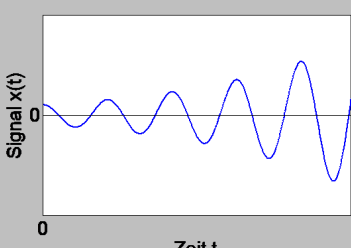
Jede Exponentialfunktion führt zu einem Pol in der komplexen Ebene, sodass in diesem Fall konjugiert komplexe Polpaare auftreten. Der Realteil  $\delta_0$  der Pole beschreibt das Verhalten der Amplitude, die Imaginärteil  $\omega_0$  repräsentiert die Kreisfrequenz, mit der das Signal schwingt. Die Lage der konjugiert komplexen Polpaare und das entsprechende Signalverhalten sind ebenfalls in Tabelle 4.1 skizziert.

Der Zusammenhang von Pollage der Laplace-Transformierten  $X(s)$  und dem Einschwingverhalten der zugehörigen Zeitfunktion  $x(t)$  ist Grundlage für die Interpretation linearer, zeitinvarianter Systeme im Laplace-Bereich.



Das Portal *Systemtheorie Online* verdeutlicht die Applikation *Komplexe Exponentialfunktion* den Zusammenhang zwischen der Lage des Wertes  $\lambda = \delta + j \cdot \omega_0$  in der komplexen Ebene und dem Verhalten der Zeitfunktion.

Tabelle 4.1: Zusammenhang zwischen Pollage der Laplace-Transformierten  $X(s)$  in der komplexen Ebene und Signalverlauf  $x(t)$ 

Pollage $X(s)$	Signalverlauf $x(t)$
	
	
	
	
	
	

## 4.2 Rechenregeln der Laplace-Transformation

Die Berechnung von Laplace-Transformierten kann über die Auswertung des Laplace-Integrals erfolgen. Dieser Weg ist jedoch oft aufwendig, sodass in der Praxis bereits berechnete Korrespondenzen verwendet werden, um Signale in den Laplace-Bereich zu transformieren. Dazu ist es erforderlich, Rechenregeln der Laplace-Transformation zu nutzen, um auf standardisierte Ausdrücke zu kommen. Diese Rechenregeln werden im Folgenden hergeleitet und zusammengefasst. Dabei wird davon ausgegangen, dass die Signale  $x(t)$  kausale Signale sind.

### 4.2.1 Linearitätsprinzip

Die Laplace-Transformation ist eine lineare Transformation. Damit kann eine Linearkombination zweier Funktionen im Laplace-Bereich über dieselbe Linearkombination der jeweiligen Laplace-Transformierten dargestellt werden.

$$L\{v_1 \cdot x_1(t) + v_2 \cdot x_2(t)\} = v_1 \cdot X_1(s) + v_2 \cdot X_2(s) \quad (4.30)$$

Der Beweis der Linearität beruht auf der Linearität der Integralrechnung.

$$\begin{aligned} L\{v_1 \cdot x_1(t) + v_2 \cdot x_2(t)\} &= \int_{0_-}^{\infty} (v_1 \cdot x_1(t) + v_2 \cdot x_2(t)) \cdot e^{-s \cdot t} dt \\ &= v_1 \cdot \int_{0_-}^{\infty} x_1(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt + v_2 \cdot \int_{0_-}^{\infty} x_2(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt = v_1 \cdot X_1(s) + v_2 \cdot X_2(s) \end{aligned} \quad (4.31)$$

#### Beispiel: Linearität der Laplace-Transformation

Die Linearitätseigenschaft der Laplace-Transformation kann genutzt werden, um die exponentiell abklingende harmonische Schwingung in den Laplace-Bereich zu transformieren. Sie kann als Summe zweier komplexer Exponentialfunktionen dargestellt werden

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cdot e^{\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot \sigma(t) = \frac{1}{2} \cdot A \cdot e^{\delta \cdot t} \cdot (e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t}) \cdot \sigma(t) \\ &= \frac{1}{2} \cdot A \cdot (e^{(\delta + j \cdot \omega_0) \cdot t} + e^{(\delta - j \cdot \omega_0) \cdot t}) \cdot \sigma(t) \end{aligned} \quad (4.32)$$

Für Exponentialfunktionen ist die Laplace-Transformierte bekannt, sodass die Summe die Laplace-Transformierte

$$X(s) = \frac{1}{2} \cdot A \cdot \left( \frac{1}{s - (\delta + j \cdot \omega_0)} + \frac{1}{s - (\delta - j \cdot \omega_0)} \right) = A \cdot \frac{s - \delta}{(s - \delta)^2 + \omega_0^2} \quad (4.33)$$

aufweist. Analog ergibt sich für eine abklingende Sinusfunktion

$$L\{A \cdot e^{\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \cdot \sigma(t)\} = A \cdot \frac{\omega_0}{(s - \delta)^2 + \omega_0^2} \quad (4.34)$$

### 4.2.2 Verschiebungsregel der Zeitfunktion nach rechts, Transport Delay

Eine Verschiebung einer Zeitfunktion um  $t_0$  nach rechts kann durch  $x(t - t_0)$  dargestellt werden. Dabei ist  $t_0$  eine feste Zahl mit  $t_0 > 0$ . Für die Funktion im Laplace-Bereich gilt

$$L\{x(t - t_0)\} = e^{-s \cdot t_0} \cdot X(s) \quad (4.35)$$

Für den Beweis dieses Verschiebungssatzes wird die Definitionsgleichung der Laplace-Transformation verwendet.

$$\begin{aligned}
 L\{x(t-t_0)\} &= \int_{0_-}^{\infty} x(t-t_0) \cdot e^{-s \cdot t} dt = \int_{0_-}^{\infty} x(t-t_0) \cdot e^{-s \cdot (t-t_0)} \cdot e^{-s \cdot t_0} dt \\
 &= e^{-s \cdot t_0} \cdot \int_{0_-}^{\infty} x(t-t_0) \cdot e^{-s \cdot (t-t_0)} dt = e^{-s \cdot t_0} \cdot \int_{-t_0}^{\infty} x(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt \\
 &= e^{-s \cdot t_0} \cdot \int_{-t_0}^0 x(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt + e^{-s \cdot t_0} \cdot \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

Unter der Voraussetzung, dass es sich um ein kausales Signal handelt, ist das erste Integral null, das zweite Integral ist die Laplace-Transformierte  $X(s)$  des Zeitsignals  $x(t)$ . Damit gilt für kausale Signale

$$L\{x(t-t_0)\} = e^{-s \cdot t_0} \cdot X(s) \tag{4.37}$$

Der Verschiebung einer kausalen Zeitfunktion um  $t_0$  nach rechts entspricht eine Multiplikation mit  $e^{-s \cdot t_0}$  im Laplace-Bereich. Eine Verschiebung der Zeitfunktion nach rechts wird bei technischen Anwendungen dazu genutzt, Transportvorgänge zu beschreiben. Deshalb hat sich für die Zeitverschiebung der englische Begriff *Transport Delay* durchgesetzt.

#### Beispiel: Verschiebungsregel der Laplace-Transformation

Die kausale Rechteckfunktion kann durch zwei verschobene Sprungfunktionen dargestellt werden.

$$x(t) = \sigma(t) - \sigma(t-t_0) \tag{4.38}$$

Mit der Verschiebungsregel und der bereits berechneten Korrespondenz der Sprungfunktion

$$L\{\sigma(t)\} = \frac{1}{s} \tag{4.39}$$

ergibt sich die Funktion im Laplace-Bereich

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot t_0} = \frac{1}{s} \cdot (1 - e^{-s \cdot t_0}) \tag{4.40}$$

Das Ergebnis entspricht dem in Abschnitt 4.1.2 über die Definitionsgleichung der Laplace-Transformation berechneten Ergebnis.



### 4.2.3 Modulationsregel

Bei der Verschiebungsregel führt eine Verschiebung der Zeitfunktion zu der Multiplikation der Laplace-Transformierten mit einer Exponentialfunktion. Umgekehrt gilt der Zusammenhang

$$L\{e^{\lambda \cdot t} \cdot x(t)\} = X(s - \lambda) \quad (4.41)$$

Dabei ist  $\lambda$  eine beliebige komplexe Zahl. Der Beweis beruht wieder auf der Definitionsgleichung des Laplace-Integrals.

$$L\{e^{\lambda \cdot t} \cdot x(t)\} = \int_{0_-}^{\infty} x(t) \cdot e^{\lambda \cdot t} \cdot e^{-s \cdot t} dt = \int_{0_-}^{\infty} x(t) \cdot e^{-(s-\lambda) \cdot t} dt = X(s - \lambda) \quad (4.42)$$

Der Multiplikation der Zeitfunktion mit der Exponentialfunktion  $e^{\lambda \cdot t}$  entspricht im Laplace-Bereich einer Verschiebung der Funktion um  $\lambda$ .

#### Beispiel: Modulationsregel der Laplace-Transformation

Die kausale Sinusfunktion kann mithilfe der Eulerschen Formel dargestellt werden als die Summe von zwei komplexen Exponentialfunktionen.

$$x(t) = \sin(\omega_0 \cdot t) \cdot \sigma(t) = \frac{1}{2 \cdot j} \cdot (e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} - e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t}) \cdot \sigma(t) = \frac{1}{2 \cdot j} \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot \sigma(t) - \frac{1}{2 \cdot j} \cdot e^{-j \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot \sigma(t) \quad (4.43)$$

Die Multiplikation der Sprungfunktion mit den Exponentialfunktionen kann als Modulation aufgefasst werden. Mit der Korrespondenz der Sprungfunktion und der Modulationsregel berechnet sich die Korrespondenz der Sinusfunktion zu

$$X(s) = \frac{1}{2 \cdot j} \cdot \frac{1}{s - j \cdot \omega_0} - \frac{1}{2 \cdot j} \cdot \frac{1}{s + j \cdot \omega_0} = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \quad (4.44)$$

Analog ergibt sich für die Kosinusfunktion

$$L\{\cos(\omega_0 \cdot t) \cdot \sigma(t)\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s - j \cdot \omega_0} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s + j \cdot \omega_0} = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \quad (4.45)$$

### 4.2.4 Lineare Gewichtung der Zeitfunktion

Die Regel zur linearen Gewichtung der Zeitfunktion  $x(t)$  ergibt sich durch Ableitung der Laplace-Transformierten  $X(s)$  nach der komplexen Variablen  $s$ .

$$\frac{d}{ds} X(s) = \frac{d}{ds} \int_{0_-}^{\infty} x(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt = \int_{0_-}^{\infty} -t \cdot x(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt \quad (4.46)$$

Multiplikation der Gleichung mit  $-1$  führt zu der Rechenregel der linearen Gewichtung.

$$L\{t \cdot x(t)\} = -\frac{dX}{ds} \quad (4.47)$$

#### Beispiel: Lineare Gewichtung bei der Laplace-Transformation

Die Laplace-Transformierte der Funktion

$$x(t) = t \cdot e^{\lambda \cdot t} \quad (4.48)$$

kann mit der linearen Gewichtung berechnet werden. Es ergibt sich

$$X(s) = -\frac{d}{ds} \frac{1}{s - \lambda} = -\frac{d}{ds} (s - \lambda)^{-1} = (s - \lambda)^{-2} = \frac{1}{(s - \lambda)^2} \quad (4.49)$$

### 4.2.5 Skalierungsregel

Wird die Funktionen  $x(t)$  gedehnt oder gestaucht, gilt für die Laplace-Transformierte bei einer reellen Konstante  $c > 0$

$$L\{x(c \cdot t)\} = \frac{1}{c} \cdot X\left(\frac{s}{c}\right) \quad (4.50)$$

Die Beziehung ergibt sich wieder aus der Integralrechnung.

$$L\{x(c \cdot t)\} = \int_{0_-}^{\infty} x(c \cdot t) \cdot e^{-s \cdot t} dt = \int_{0_-}^{\infty} x(c \cdot t) \cdot e^{-\frac{s}{c} \cdot c \cdot t} dt \quad (4.51)$$

Mit der Substitution  $\tau = c \cdot t$  und  $d\tau/dt = c$  ergibt die Laplace-Transformierte

$$L\{x(c \cdot t)\} = \int_{0_-}^{\infty} x(c \cdot t) \cdot e^{-\frac{s}{c} \cdot c \cdot t} dt = \frac{1}{c} \cdot \int_{0_-}^{\infty} x(\tau) \cdot e^{-\frac{s}{c} \cdot \tau} d\tau = \frac{1}{c} \cdot X\left(\frac{s}{c}\right) \quad (4.52)$$

Analog gilt:

$$L\left\{\frac{1}{c} \cdot x\left(\frac{t}{c}\right)\right\} = X(c \cdot s) \quad (4.53)$$

#### Beispiel: Skalierungsregel der Laplace-Transformation

Die Rechteckfunktion

$$x(t) = \sigma(t) - \sigma(t - t_0) \quad (4.54)$$

hat die Laplace-Transformierte

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot t_0} = \frac{1}{s} \cdot (1 - e^{-s \cdot t_0}) \quad (4.55)$$

Wird sie um den Faktor 2 gestaucht,

$$y(t) = x(2 \cdot t) = \sigma(2 \cdot t) - \sigma(2 \cdot t - t_0) \quad (4.56)$$

ergibt sich für die Laplace-Transformierte

$$Y(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{s} \cdot (1 - e^{-\frac{s}{2} \cdot t_0}) = \frac{1}{s} \cdot (1 - e^{-s \cdot \frac{t_0}{2}}) \quad (4.57)$$

Die Gleichung entspricht dem erwarteten Ergebnis, da die Rechteckfunktion bei einer Stauchung um einen Faktor 2 nur noch halb so lang ist, wird die Dauer  $t_0$  praktisch halbiert.

### 4.2.6 Integrationsregel

Besitzt die Zeitfunktion  $x(t)$  die Laplace-Transformierte  $X(s)$ , so gilt für ihre Stammfunktion die Beziehung

$$L\left\{\int_{0_-}^t x(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} \cdot X(s) \quad (4.58)$$

Der Beweis ergibt sich durch Einsetzen des Integralausdrucks in die Definitionsgleichung der Laplace-Transformation

$$L \left\{ \int_{0_-}^t x(\tau) d\tau \right\} = \int_{0_-}^{\infty} \int_{0_-}^t x(\tau) d\tau \cdot e^{-s \cdot t} dt \quad (4.59)$$

und partielle Integration

$$\begin{aligned} L \left\{ \int_{0_-}^t x(\tau) d\tau \right\} &= \int_{0_-}^{\infty} \int_{0_-}^t x(\tau) d\tau \cdot e^{-s \cdot t} dt = \frac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot t} \cdot \int_{0_-}^t x(\tau) d\tau \Big|_{0_-}^{\infty} - \int_{0_-}^{\infty} -\frac{1}{s} \cdot x(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot t} \cdot \int_{0_-}^t x(\tau) d\tau - \lim_{t \rightarrow 0_-} \frac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot t} \cdot \int_{0_-}^t x(\tau) d\tau + \frac{1}{s} \cdot \int_{0_-}^{\infty} x(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt \end{aligned} \quad (4.60)$$

Für  $t \rightarrow \infty$  wird der erste Summand wegen der Exponentialfunktion zu null, wenn  $s$  nur weit genug in der positiven Halbebene liegt und  $x(t)$  nicht stärker wächst als eine Exponentialfunktion. Für  $t = 0_-$  wird der erste Summand zu null, weil die Integrationsgrenzen des Integrals identisch sind. Damit vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$L \left\{ \int_{0_-}^t x(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{s} \cdot \int_{0_-}^{\infty} x(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt = \frac{1}{s} \cdot X(s) \quad (4.61)$$

#### Beispiel: Integrationsregel der Laplace-Transformation

Die Rampenfunktion ist die Stammfunktion der Sprungfunktion.

$$x(t) = \int_{0_-}^t \sigma(\tau) d\tau \quad (4.62)$$

Mithilfe der Integrationsregel ergibt sich die Laplace-Transformierte der Rampenfunktion zu

$$X(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2} \quad (4.63)$$

#### Beispiel: Integrationsregel der Laplace-Transformation

Die kausale Exponentialfunktion

$$x(t) = e^{\lambda \cdot t} \cdot \sigma(t) \quad (4.64)$$

besitzt die Laplace-Transformierte

$$X(s) = \frac{1}{s - \lambda} \quad (4.65)$$

Es wird sich zeigen, dass bei der Berechnung von Sprungantworten die Zeitfunktion von Interesse ist, die zu der Laplace-Transformierten

$$Y(s) = \frac{1}{s \cdot (s - \lambda)} \quad (4.66)$$

gehört. Die zugehörige Zeitfunktion kann mithilfe der Integrationsregel bestimmt werden zu

$$y(t) = \int_{0_-}^t e^{\lambda \cdot \tau} \cdot \sigma(\tau) d\tau = \int_{0_-}^t e^{\lambda \cdot \tau} d\tau = \frac{1}{\lambda} \cdot e^{\lambda \cdot \tau} \Big|_{0_-}^t = \frac{1}{\lambda} \cdot (e^{\lambda \cdot t} - 1) \quad (4.67)$$

### 4.2.7 Differentiationsregel

Besitzt die Zeitfunktion  $x(t)$  die Laplace-Transformierte  $X(s)$ , so gilt für ihre verallgemeinerte Ableitung die Beziehung

$$L\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = s \cdot X(s) - x(0_-) \quad (4.68)$$

Zur Herleitung der Differentiationsregel für die verallgemeinerte Differentiation wird daran erinnert, dass die Funktion  $x(t)$  einen stetigen Anteil  $x_s(t)$  und einen Sprung  $\Delta x$  an der Stelle  $t = 0$  haben kann. Zunächst wird die Differentiationsregel für stetige Funktionen hergeleitet. Durch Einsetzen in die Definitionsgleichung der Laplace-Transformation ergibt sich

$$L\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = \int_{0_-}^{\infty} \frac{dx}{dt} \cdot e^{-s \cdot t} dt \quad (4.69)$$

Mit partieller Integration ergibt sich

$$L\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = \int_{0_-}^{\infty} \frac{dx}{dt} \cdot e^{-s \cdot t} dt = x(t) \cdot e^{-s \cdot t} \Big|_{0_-}^{\infty} + s \cdot \int_{0_-}^{\infty} x(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt \quad (4.70)$$

Der erste Summand geht für  $t \rightarrow \infty$  gegen null, wenn  $s$  nur weit genug in der positiven Halbebene liegt und  $x(t)$  nicht stärker wächst als eine Exponentialfunktion. Damit vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$L\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = -x(0_-) + s \cdot X(s) = s \cdot X(s) - x(0_-) \quad (4.71)$$

Dabei kennzeichnet der Ausdruck  $x(0_-)$  den linksseitigen Grenzwert von  $x(t)$  an der Stelle  $t = 0$ . Entsprechend ergibt sich für höhere Ableitungen in  $t$  die Laplace-Transformierte

$$L\left\{\frac{d^n x}{dt^n}\right\} = s^n \cdot X(s) - s^{n-1} \cdot x(0_-) - \dots - \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} \Big|_{t=0_-} \quad (4.72)$$

Für die zweite und dritte Ableitung ergibt sich

$$L\left\{\frac{d^2 x}{dt^2}\right\} = s^2 \cdot X(s) - s \cdot x(0_-) - \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0_-} \quad (4.73)$$

und

$$L\left\{\frac{d^3 x}{dt^3}\right\} = s^3 \cdot X(s) - s^2 \cdot x(0_-) - s \cdot \frac{dx}{dt} \Big|_{t=0_-} - \frac{d^2 x}{dt^2} \Big|_{t=0_-} \quad (4.74)$$

Die Ableitungsregel ist für praktische Anwendungen der Laplace-Transformation die wichtigste. Sie drückt aus, dass die Differentiation im Zeitbereich in eine Multiplikation im Laplace-Bereich übergeht. Sie ist damit Voraussetzung für die vergleichsweise einfache Lösung von linearen Differentialgleichungen mit Anfangsbedingungen.

#### Beispiel: Ableitungsregel der Laplace-Transformation

In Abschnitt 4.1.1 wird die Ausgangsspannung eines RC-Netzwerks berechnet, das mit einem Spannungssprung angeregt wird. Dieses Beispiel wird hier erneut aufgegriffen.

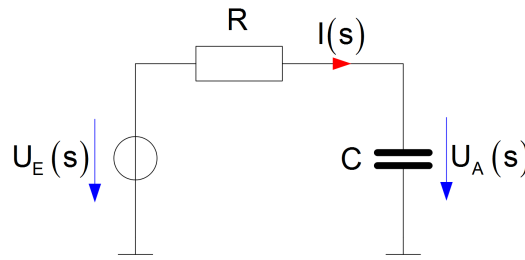


Bild 4.7: Schaltbild für das Beispiel RC-Netzwerk

Die Ausgangsspannung ergibt sich aus der Differentialgleichung:

$$R \cdot C \cdot \frac{du_A}{dt} + u_A(t) = u_E(t) \quad (4.75)$$

Mit der Laplace-Transformation ergibt sich unter Anwendung der Linearitäts- und der Ableitungsregel

$$R \cdot C \cdot (s \cdot U_A(s) - u_A(0_-)) + U_A(s) = U_E(s) \quad (4.76)$$

Wie in Abschnitt 4.1.1 wird die Ausgangsspannung für einen Spannungssprung zum Zeitpunkt  $t = 0$  von 5 V berechnet und eine Spannung am Kondensator von  $u_A(0_-) = U_{A0}$  angenommen. Damit ergibt sich für das Eingangssignal  $U_E(s)$  im Laplace-Bereich

$$U_E(s) = \frac{5 \text{ V}}{s} \quad (4.77)$$

Einsetzen in Gleichung ((4.76)) führt zu der Gleichung

$$R \cdot C \cdot (s \cdot U_A(s) - U_{A0}) + U_A(s) = \frac{5 \text{ V}}{s} \quad (4.78)$$

Ausmultiplizieren und Auflösen nach  $U_A(s)$  ergibt

$$R \cdot C \cdot s \cdot U_A(s) + U_A(s) = \frac{5 \text{ V}}{s} + R \cdot C \cdot U_{A0} \quad (4.79)$$

beziehungsweise

$$U_A(s) = \frac{5 \text{ V}}{s \cdot (1 + R \cdot C \cdot s)} + \frac{R \cdot C}{1 + R \cdot C \cdot s} \cdot U_{A0} \quad (4.80)$$

Bei der Rücktransformation müssen zwei Summanden berücksichtigt werden. Die Ausgangsspannung  $u_A(t)$  ergibt sich mit den bereits berechneten Korrespondenzen zu

$$u_A(t) = 5 \text{ V} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \cdot \sigma(t) + U_{A0} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \cdot \sigma(t) \quad (4.81)$$

Damit ist das Ergebnis in Gleichung (4.7) bestätigt. Bild 4.8 stellt das Einschwingverhalten der Kondensatorspannung  $u_A(t)$  für eine Spannung  $U_E = 5 \text{ V}$ , eine Spannung  $U_{A0} = 1 \text{ V}$ , einen Widerstand  $R = 5 \text{ k}\Omega$  und eine Kapazität  $C = 4 \text{ nF}$  dar.

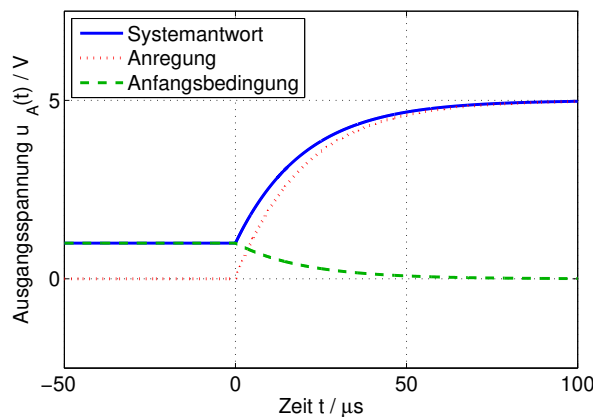


Bild 4.8: Einschwingverhalten der Kondensatorspannung  $u_A$  bei Anregung mit einem Spannungssprung von  $U_E = 5 \text{ V}$  und einer Anfangsbedingung von  $U_{A0} = 1 \text{ V}$

Bereits an diesem einfachen Beispiel zeigt sich der Vorteil der Laplace-Transformation. Sie ermöglicht eine schnelle Berechnung von Systemantworten linearer, zeitinvarianter Systeme unter Berücksichtigung von Anfangsbedingungen.

#### 4.2.8 Multiplikation zweier Zeitfunktionen

Die Rechenregel zur Multiplikation zweier Zeitfunktionen wird in Abschnitt 4.3.1 über das Umkehrintegral der Laplace-Transformation hergeleitet. Sie wird hier der Vollständigkeit halber aufgeführt.

$$L\{x(t) \cdot w(t)\} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \int_{c-j \cdot \infty}^{c+j \cdot \infty} X(v) \cdot W(s-v) dv = X(s) * W(s) \quad (4.82)$$

Die Multiplikation im Zeitbereich führt zu der Faltung der entsprechenden Laplace-Transformierten im Laplace-Bereich. Diese Rechenregel ist zum Beispiel bei Modulationsverfahren und bei der Fensterung von Signalen von Bedeutung.

#### 4.2.9 Faltung zweier Zeitfunktionen

Bei der Berechnung der Systemantwort  $y(t)$  im Zeitbereich wird die Faltungsoperation verwendet. Im Laplace-Bereich berechnet sich die Systemantwort  $Y(s)$  aus dem Produkt der einzelnen Laplace-Transformierten  $G(s)$  und  $U(s)$ .

$$L\{g(t) * u(t)\} = G(s) \cdot U(s) \quad (4.83)$$

Für den Beweis dieser Rechenregel wird von dem Produkt der beiden Laplace-Transformierten ausgegangen.

$$\begin{aligned} G(s) \cdot U(s) &= \int_{0_-}^{\infty} u(v) \cdot e^{-s \cdot v} dv \cdot \int_{0_-}^{\infty} g(\tau) \cdot e^{-s \cdot \tau} d\tau = \int_{0_-}^{\infty} \int_{0_-}^{\infty} u(v) \cdot e^{-s \cdot v} \cdot g(\tau) \cdot e^{-s \cdot \tau} d\tau dv \\ &= \int_{0_-}^{\infty} g(\tau) \cdot \int_{0_-}^{\infty} u(v) \cdot e^{-s \cdot (v+\tau)} dv d\tau \end{aligned} \quad (4.84)$$

Mit der Substitution

$$v + \tau = t \quad (4.85)$$

und der Ableitung

$$\frac{dv}{dt} = 1 \quad (4.86)$$

ergibt sich

$$G(s) \cdot U(s) = \int_{0_-}^{\infty} g(\tau) \cdot \int_{0_-}^{\infty} u(v) \cdot e^{-s \cdot (v+\tau)} dv d\tau = \int_{0_-}^{\infty} g(\tau) \cdot \int_{\tau_-}^{\infty} u(t-\tau) \cdot e^{-s \cdot t} dt d\tau \quad (4.87)$$

Bild 4.9 stellt den Integrationsbereich grafisch dar.

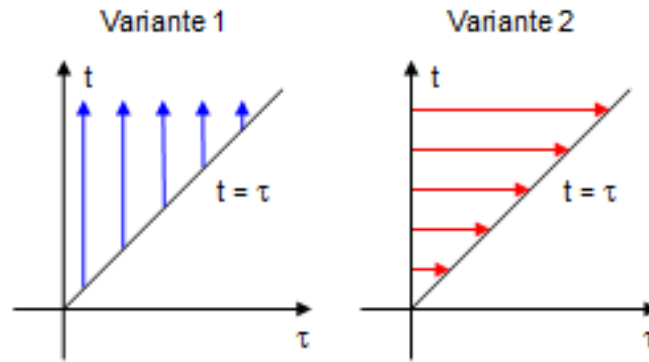


Bild 4.9: Änderung der Integrationsreihenfolge zur Bestimmung der Laplace-Transformierten

Die Integration in Gleichung (4.88) entspricht der Variante 1. Alternativ kann die in Bild 4.9 die als Variante 2 bezeichnete Integrationsreihenfolge gewählt werden. Dazu muss die Integrationsreihenfolge geändert werden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
 G(s) \cdot U(s) &= \int_{0_-}^{\infty} g(\tau) \cdot \int_{\tau_-}^{\infty} u(t-\tau) \cdot e^{-s \cdot t} dt d\tau = \int_{0_-}^{\infty} \int_{0_-}^t u(t-\tau) \cdot g(\tau) \cdot e^{-s \cdot t} d\tau dt \\
 &= \int_{0_-}^{\infty} \int_{0_-}^t u(t-\tau) \cdot g(\tau) d\tau \cdot e^{-s \cdot t} dt = L \left\{ \int_{0_-}^t u(t-\tau) \cdot g(\tau) d\tau \right\} \\
 &= L\{u(t) * g(t)\} = L\{g(t) * u(t)\}
 \end{aligned} \tag{4.88}$$

Aus der aufwendig auszuwertenden Faltungsoperation im Zeitbereich wird im Laplace-Bereich ein Produkt. Der Berechnung des Ausgangssignals im Zeitbereich

$$y(t) = \int_{0_-}^t u(t-\tau) \cdot g(\tau) d\tau \tag{4.89}$$

entspricht damit im Laplace-Bereich der Ausdruck

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = U(s) \cdot G(s) \tag{4.90}$$

Die Bedeutung und Interpretation der Funktion  $G(s)$  ist Gegenstand des Kapitels 5.

#### 4.2.10 Anfangswertsatz

Der Anfangswertsatz erlaubt die Berechnung des Grenzwertes  $x(0_+)$  mithilfe der Laplace-Transformierten  $X(s)$ . Es gilt

$$x(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot X(s) \tag{4.91}$$

Der Beweis des Anfangswertsatzes ergibt sich aus der Laplace-Transformierten der Ableitung

$$L \left\{ \frac{dx}{dt} \right\} = s \cdot X(s) - x(0_-) \tag{4.92}$$

Ausführlich kann die Laplace-Transformierte der Ableitung geschrieben werden als

$$\int_{0_-}^{\infty} \frac{dx}{dt} \cdot e^{-s \cdot t} dt = \int_{0_-}^{0_+} \frac{dx}{dt} \cdot e^{-s \cdot t} dt + \int_{0_+}^{\infty} \frac{dx}{dt} \cdot e^{-s \cdot t} dt = x(0_-) - x(0_+) + \int_{0_+}^{\infty} \frac{dx}{dt} \cdot e^{-s \cdot t} dt \tag{4.93}$$

Für den Grenzwert  $s \rightarrow \infty$  wird das letzte Integral in Gleichung (4.93) null.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0+}^{\infty} \frac{dx}{dt} \cdot e^{-s \cdot t} dt = \int_{0+}^{\infty} \frac{dx}{dt} \cdot \lim_{s \rightarrow \infty} e^{-s \cdot t} dt = \int_{0+}^{\infty} \frac{dx}{dt} \cdot 0 dt = 0 \quad (4.94)$$

Gleichsetzen der Gleichungen (4.92) und (4.94) führt über

$$x(0_+) - x(0_-) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot X(s) - x(0_-) \quad (4.95)$$

zu dem Anfangswertsatz

$$x(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot X(s) \quad (4.96)$$

#### Beispiel: Anfangswertsatz

Der Anfangswert der Zeitfunktion

$$x(t) = e^{\lambda \cdot t} \cdot \sigma(t) \quad (4.97)$$

kann im Laplace-Bereich berechnet werden zu

$$x(0_-) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \frac{1}{s - \lambda} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{s - \lambda} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{s}} = 1 \quad (4.98)$$

Da Ergebnis stimmt mit dem erwarteten Anfangswert überein.

#### 4.2.11 Endwertsatz

Der Endwertsatz erlaubt die Berechnung des Grenzwertes  $x(\infty)$  mithilfe der Laplace-Transformierten.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot X(s) \quad (4.99)$$

Der Beweis ergibt sich aus der Laplace-Transformierten der Ableitung

$$L\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{dt} \cdot e^{-s \cdot t} dt = s \cdot X(s) - x(0_-) \quad (4.100)$$

Für den Grenzwert  $s \rightarrow 0$  wird die Exponentialfunktion aus dem Integral zu eins. Damit gilt

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{dx}{dt} \cdot e^{-s \cdot t} dt = \int_0^{\infty} \frac{dx}{dt} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) - x(0_-) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot X(s) - x(0_-) \quad (4.101)$$

Auflösen nach  $x(\infty)$  ergibt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot X(s) \quad (4.102)$$

Der Endwert  $x(\infty)$  kann jedoch nur berechnet werden, wenn er existiert. In Kapitel 4.3 wird sich zeigen, dass das genau dann der Fall ist, wenn  $X(s)$  keine Pole mit  $\text{Re}(s) \geq 0$  besitzt.

#### Beispiel: Endwertsatz

Der Grenzwert der Funktion

$$u_A(t) = 5 \text{ V} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \cdot \sigma(t) \quad (4.103)$$

kann im Laplace-Bereich berechnet werden. Mit der Laplace-Transformierten

$$U_A(s) = \frac{5 \text{ V}}{s \cdot (1 + R \cdot C \cdot s)} \quad (4.104)$$

ergibt sich der Endwert

$$u_A(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{5 \text{ V}}{s \cdot (1 + R \cdot C \cdot s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{5 \text{ V}}{1 + R \cdot C \cdot s} = 5 \text{ V} \quad (4.105)$$



#### 4.2.12 Zusammenfassung der Rechenregeln zur Laplace-Transformation

Tabelle 4.2 fasst die wesentlichen Rechenregeln der Laplace-Transformation zusammen. Dabei ist grundsätzlich vorausgesetzt, dass die Zeitfunktion  $x(t)$  kausal ist. Mit diesen Rechenregeln können die wichtigsten Korrespondenzen der Laplace-Transformation hergeleitet werden.

Tabelle 4.2: Rechenregeln der Laplace-Transformation

Regel	Funktion $x(t)$	Laplace-Transformierte $X(s)$
Linearität	$\nu_1 \cdot x_1(t) + \nu_2 \cdot x_2(t)$	$\nu_1 \cdot X_1(s) + \nu_2 \cdot X_2(s)$
Zeitverschiebung nach rechts	$x(t - t_0)$	$e^{-s \cdot t_0} \cdot X(s)$
Modulation	$e^{\lambda \cdot t} \cdot x(t)$	$X(s - \lambda)$
Lineare Gewichtung	$t \cdot x(t)$	$-\frac{dX}{ds}$
Skalierung	$x(c \cdot t)$	$\frac{1}{c} \cdot X\left(\frac{s}{c}\right)$
Skalierung	$\frac{1}{c} \cdot x\left(\frac{t}{c}\right)$	$X(c \cdot s)$
Integration	$\int_0^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} \cdot X(s)$
Ableitung	$\frac{dx}{dt}$	$s \cdot X(s) - x(0_-)$
n-fache Ableitung	$\frac{d^n x}{dt^n}$	$s^n \cdot X(s) - s^{n-1} \cdot x(0_-) - \dots - \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} \Big _{t=0_-}$
Multiplikation	$x(t) \cdot w(t)$	$X(s) * W(s)$
Faltung	$g(t) * x(t)$	$G(s) \cdot X(s)$
Anfangswert	$\lim_{t \rightarrow 0_+} x(t)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot X(s)$
Endwert	$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot X(s)$

#### 4.2.13 Korrespondenzen der Laplace-Transformation

Die Rechenregeln zur Laplace-Transformation erlauben die Berechnung weiterer Korrespondenzen. Tabelle 4.3 und Tabelle 4.4 stellen wichtige Korrespondenzen der Laplace-Transformation zusammen. Die Korrespondenztabelle ermöglicht die schnelle Angabe von Laplace-Transformierten der aufgeführten Zeitfunktionen. Um die Korrespondenztabelle anwenden zu können, muss die vorliegende Zeitfunktion gegebenenfalls durch Zerlegung nach dem Linearitätsprinzip, Verschiebung im Zeitbereich oder Dehnung/Stauchung mit dem Ähnlichkeitssatz umgeformt werden.

Tabelle 4.3: Korrespondenzen der Laplace-Transformation (1/2)

Nr	Zeitfunktion $x(t)$	Konvergenz- bereich	Laplace-Transformierte $X(s)$
1	$\delta(t)$	$s \in \mathbb{C}$	1
2	$\delta(t - t_0)$	$s \in \mathbb{C}$	$e^{-t_0 \cdot s}$
3	$1 \cdot \sigma(t)$	$\operatorname{Re}(s) > 0$	$\frac{1}{s}$
4	$t \cdot \sigma(t)$	$\operatorname{Re}(s) > 0$	$\frac{1}{s^2}$
5	$\frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot \sigma(t)$	$\operatorname{Re}(s) > 0$	$\frac{1}{s^3}$
6	$\frac{1}{n!} \cdot t^n \cdot \sigma(t)$	$\operatorname{Re}(s) > 0$	$\frac{1}{s^{n+1}}$ für $n = 0, 1, \dots$
7	$e^{\lambda \cdot t} \cdot \sigma(t)$	$\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(\lambda)$	$\frac{1}{s - \lambda}$
8	$t \cdot e^{\lambda \cdot t} \cdot \sigma(t)$	$\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(\lambda)$	$\frac{1}{(s - \lambda)^2}$
9	$\frac{1}{n!} \cdot t^n \cdot e^{\lambda \cdot t} \cdot \sigma(t)$	$\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(\lambda)$	$\frac{1}{(s - \lambda)^{n+1}}$ für $n = 0, 1, \dots$
10	$\frac{1}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}} \cdot \sigma(t)$	$\operatorname{Re}(s) > -\frac{1}{T}$	$\frac{1}{1 + T \cdot s}$
11	$\delta(t) - \frac{1}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}} \cdot \sigma(t)$	$\operatorname{Re}(s) > -\frac{1}{T}$	$\frac{T \cdot s}{1 + T \cdot s}$
12	$\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \cdot \sigma(t)$	$\operatorname{Re}(s) > 0$	$\frac{1}{s \cdot (1 + T \cdot s)}$
13	$\frac{t}{T^2} \cdot e^{-\frac{t}{T}} \cdot \sigma(t)$	$\operatorname{Re}(s) > -\frac{1}{T}$	$\frac{1}{(1 + T \cdot s)^2}$
14	$\left(t - T \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)\right) \cdot \sigma(t)$	$\operatorname{Re}(s) > 0$	$\frac{1}{s^2 \cdot (1 + T \cdot s)}$

Tabelle 4.4: Korrespondenzen der Laplace-Transformation (2/2)

Nr	Zeitfunktion $x(t)$	Konvergenz- bereich	Laplace-Transformierte $X(s)$
15	$\sin(\omega_0 \cdot t) \cdot \sigma(t)$	$\operatorname{Re}(s) > 0$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$
16	$\cos(\omega_0 \cdot t) \cdot \sigma(t)$	$\operatorname{Re}(s) > 0$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$
17	$\sinh(\lambda \cdot t) \cdot \sigma(t)$	$\operatorname{Re}(s) > \lambda$	$\frac{\lambda}{s^2 - \lambda^2}$
18	$\cosh(\lambda \cdot t) \cdot \sigma(t)$	$\operatorname{Re}(s) > \lambda$	$\frac{s}{s^2 - \lambda^2}$
19	$\frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot \sigma(t)$	$\operatorname{Re}(s) > \delta_0$	$\frac{1}{s^3}$
20	$\frac{1}{\omega_0} \cdot e^{\delta_0 \cdot t} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \cdot \sigma(t)$	$\operatorname{Re}(s) > \delta_0$	$\frac{1}{(s - \delta_0)^2 + \omega_0^2}$
21	$\frac{t}{2 \cdot \omega_0} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \cdot \sigma(t)$	$\operatorname{Re}(s) > 0$	$\frac{s}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$
22	$t \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot \sigma(t)$	$\operatorname{Re}(s) > 0$	$\frac{s^2 - \omega_0^2}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$
23	$\frac{t}{2 \cdot \omega_0} \cdot e^{\delta_0 \cdot t} \sin(\omega_0 \cdot t) \cdot \sigma(t)$	$\operatorname{Re}(s) > \delta_0$	$\frac{s - \delta_0}{(s^2 - 2 \cdot \delta_0 \cdot s + \delta_0^2 + \omega_0^2)^2}$
24	$t \cdot e^{\delta_0 \cdot t} \cos(\omega_0 \cdot t) \cdot \sigma(t)$	$\operatorname{Re}(s) > \delta_0$	$\frac{s^2 - 2 \cdot \delta_0 \cdot s + \delta_0^2 - \omega_0^2}{(s^2 - 2 \cdot \delta_0 \cdot s + \delta_0^2 + \omega_0^2)^2}$
25	$\frac{1}{\sqrt{\pi \cdot t}} \cdot \sigma(t)$	$\operatorname{Re}(s) > \delta_0$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$
26	$\frac{e^{\delta_0 \cdot t}}{\sqrt{\pi \cdot t}} \cdot \sigma(t)$	$\operatorname{Re}(s) > 0$	$\frac{1}{\sqrt{s - \delta_0}}$
27	$2 \cdot \sqrt{\frac{t}{\pi}} \cdot \sigma(t)$	$\operatorname{Re}(s) > \delta_0$	$\frac{1}{s \cdot \sqrt{s}}$

### 4.3 Rücktransformation

Das Beispiel in Abschnitt 4.2.7 zeigt, dass für den Einsatz der Laplace-Transformation bei der Lösung linearer Differentialgleichungen eine Rücktransformation erforderlich ist. Sie lässt sich zum einen als mathematische Umkehrformel angeben, was in der Praxis jedoch aufwendig und wenig gebräuchlich ist.

In dem Beispiel des Abschnitts 4.2.7 wird die Funktion im Laplace-Bereich so zerlegt, dass bekannte Korrespondenzen aus der Korrespondenztabelle eingesetzt werden können. Dieses Vorgehen erfordert eine Partialbruchzerlegung der Laplace-Transformierten. Das Vorgehen zur Rücktransformation über eine Partialbruchzerlegung wird nach der Vorstellung der Umkehrformel zur Laplace-Transformation weiter vertieft.

#### 4.3.1 Definition der inversen Laplace-Transformation

Die Umkehrformel zur Laplace-Transformation lautet [Foel11]:

$$x(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \int_{\delta-j\cdot\infty}^{\delta+j\cdot\infty} X(s) \cdot e^{s \cdot t} ds = L^{-1}\{X(s)\} \quad (4.106)$$

Die Rücktransformation wird als inverse Laplace-Transformation bezeichnet. Das eingeführte Hantelsymbol kennzeichnet eine Korrespondenz und wird deshalb für Hin- und Rücktransformation verwendet.

$$X(s) \bullet - \circ x(t) \quad (4.107)$$

Der Einsatz der Umkehrformel ist aufwendig und wird deshalb mithilfe der Partialbruchzerlegung und bekannten Korrespondenzen umgangen. Die Umkehrformel kann jedoch zur Herleitung von Rechenregeln zur Laplace-Transformation nützlich sein, was an der Faltungsoperation im Laplace-Bereich aufgezeigt wird. Die Laplace-Transformierte für das Produkt zweier Zeitfunktionen ist definiert als

$$L\{x(t) \cdot w(t)\} = \int_0^{\infty} x(t) \cdot w(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt \quad (4.108)$$

Die Zeitfunktion  $x(t)$  kann über die inverse Laplace-Transformierte ausgedrückt werden.

$$L\{x(t) \cdot w(t)\} = \int_0^{\infty} x(t) \cdot w(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} X(v) \cdot e^{v \cdot t} dv \cdot w(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt \quad (4.109)$$

Ausklammern des Vorfaktors und Tauschen der Integrationsreihenfolge führt zu

$$\begin{aligned} L\{x(t) \cdot w(t)\} &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} X(v) \cdot \int_0^{\infty} w(t) \cdot e^{-(s-v) \cdot t} dt dv \\ &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \int_{\delta-j\infty}^{\delta+j\infty} X(v) \cdot W(s-v) dv = X(s) * W(s) \end{aligned} \quad (4.110)$$

Die Laplace-Transformierte des Produktes zweier Zeitfunktionen entspricht demnach der komplexen Faltung der beiden Funktionen im Laplace-Bereich.

### 4.3.2 Rücktransformation über Partialbruchzerlegung

In den bisher behandelten Beispielen und Rechenregeln sind immer gebrochen rationale Funktionen der Form

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m \cdot s^m}{\sum_{n=0}^N a_n \cdot s^n} = \frac{b_M}{a_N} \cdot \frac{\prod_{m=1}^M (s - \beta_m)}{\prod_{n=1}^N (s - \alpha_n)} \quad (4.111)$$

entstanden. Da sich die Laplace-Transformation auf kausale Signale beschränkt, ist der Zählergrad maximal so groß wie der Nennergrad  $M \leq N$ . Die Koeffizienten  $a_n$  und  $b_m$  sind reelle Koeffizienten. Damit sind die Pol- und Nullstellen von  $X(s)$  entweder reell oder konjugiert komplex.

Die gebrochen rationalen Funktionen  $X(s)$  lassen sich in seltenen Fällen direkt über eine bekannte Korrespondenz zurücktransformieren. Im Allgemeinen ist eine Zerlegung der Funktion mit der Partialbruchzerlegung notwendig. Nach der Partialbruchzerlegung liegen einzelne Partialbrüche vor, die auf bekannte Korrespondenzen zurückgeführt werden können.

#### Vorbereitung der Partialbruchzerlegung falls Zählergrad M gleich Nennergrad N

Für den Fall, dass Zählergrad  $M$  gleich Nennergrad  $N$  gleich groß sind ( $M = N$ ), muss vor der Partialbruchzerlegung eine Polynomdivision durchgeführt werden. Dadurch entsteht ein konstanter Summand

$$X_0 = \frac{b_M}{a_N} \quad (4.112)$$

Da die inverse Laplace-Transformierte von einer Konstanten die Impulsfunktion  $\delta(t)$  ist, entspricht diesem Summand ein Impuls zum Zeitpunkt  $t = 0$

$$x_0(t) = \frac{b_M}{a_N} \cdot \delta(t) \quad (4.113)$$

#### Beispiel: Zählergrad gleich Nennergrad

Die Laplace-Transformierte  $X(s)$  soll in den Zeitbereich zurück transformiert werden. Da der Zählergrad genauso groß ist wie der Nennergrad, wird eine Polynomdivision durchgeführt.

$$X(s) = \frac{2 \cdot s - 3}{s - 3} = 2 + \frac{3}{s - 3} \quad (4.114)$$

Damit kann die Funktion im Zeitbereich mit der Korrespondenztabelle bestimmt werden zu

$$x(t) = 2 \cdot \delta(t) + 3 \cdot e^{3 \cdot t} \cdot \sigma(t) \quad (4.115)$$

#### Partialbruchzerlegung für einfache Pole $\alpha$

Besitzt die Laplace-Transformierte  $X(s)$  nur einfache Pole  $\alpha_n$ , kann Sie mithilfe der Partialbruchzerlegung dargestellt werden als

$$X(s) = \frac{1}{a_N} \cdot \frac{\sum_{m=0}^M b_m \cdot s^m}{\prod_{n=1}^N (s - \alpha_n)} = \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{s - \alpha_n} \quad (4.116)$$

Die Koeffizienten  $A_n$  der einzelnen Partialbrüche können auf unterschiedliche Arten berechnet werden:

- Ausmultiplizieren  
Die Gleichung wird mit den Linearfaktoren des Nenners multipliziert. Anschließend werden die Polstellen eingesetzt, und es ergibt sich ein Gleichungssystem für die Koeffizienten  $A_n$ .

- Residuensatz

Die einzelnen Koeffizienten werden über den Residuensatz berechnet

$$A_n = (X(s) \cdot (s - \alpha_n))|_{s=\alpha_n} \quad (4.117)$$

Jeder einzelne Partialbruch hat die Form

$$X_n(s) = \frac{A_n}{s - \alpha_n} \quad (4.118)$$

Im Zeitbereich ergibt sich damit für jeden Partialbruch eine Exponentialfunktion.

$$x_n(t) = L^{-1} \left\{ \frac{A_n}{s - \alpha_n} \right\} = A_n \cdot e^{\alpha_n \cdot t} \cdot \sigma(t) \quad (4.119)$$

Die Summe der Partialbrüche aus Gleichung (4.116) entspricht deshalb im Zeitbereich der Summe

$$L^{-1} \left\{ \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{s - \alpha_n} \right\} = \sum_{n=1}^N A_n \cdot e^{\alpha_n \cdot t} \cdot \sigma(t) \quad (4.120)$$

**Beispiel: Partialbruchzerlegung für einfache Pole  $\alpha_n$**

Die Laplace-Transformierte  $X(s)$  soll in den Zeitbereich zurücktransformiert werden. Ihr Zählergrad ist kleiner als der Nennergrad, und sie hat zwei einfache Pole.

$$X(s) = \frac{s}{s^2 + 3 \cdot s + 2} = \frac{s}{(s+1) \cdot (s+2)} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+2} \quad (4.121)$$

Ausmultiplizieren der Gleichung führt zu

$$s = A_1 \cdot (s+2) + A_2 \cdot (s+1) \quad (4.122)$$

Einsetzen der Polstellen  $\alpha_1 = -1$  und  $\alpha_2 = -2$  führt zu

$$A_1 = -1 \quad (4.123)$$

und

$$A_2 = 2 \quad (4.124)$$

Alternativ hätte der Residuensatz ergeben

$$A_1 = \left( \frac{s}{(s+1) \cdot (s+2)} \cdot (s+1) \right) \Big|_{s=-1} = \left( \frac{s}{s+2} \right) \Big|_{s=-1} = \frac{-1}{-1+2} = -1 \quad (4.125)$$

und

$$A_2 = \left( \frac{s}{(s+1) \cdot (s+2)} \cdot (s+2) \right) \Big|_{s=-2} = \left( \frac{s}{s+1} \right) \Big|_{s=-2} = \frac{-2}{-2+1} = 2 \quad (4.126)$$

Sind die Koeffizienten der Partialbrüche bestimmt, kann die Laplace-Transformierte mit den bekannten Korrespondenzen in den Zeitbereich zurücktransformiert werden.

$$X(s) = \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2} \quad (4.127)$$

Es ergibt sich die Funktion

$$x(t) = -1 \cdot e^{-1 \cdot t} \cdot \sigma(t) + 2 \cdot e^{-2 \cdot t} \cdot \sigma(t) \quad (4.128)$$

### Partialbruchzerlegung für konjugiert komplexe Polpaare

Bei komplexen Polen gelten dieselben Regeln und Formeln wie bei den reellen Polen. Die Koeffizienten können mit denselben Verfahren bestimmt werden. Die Rücktransformation kann jedoch durch einen modifizierten Ansatz zur Partialbruchzerlegung vereinfacht werden. Dabei wird die Eigenschaft genutzt, dass bei Laplace-Transformierten mit reellen Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  komplexe Pole  $\alpha_n$  immer als konjugiert komplexe Polpaare auftreten.

$$\alpha_n = \delta_n \pm j \cdot \omega_n \quad (4.129)$$

Außerdem sind in diesem Fall die Koeffizienten  $A_n$  der Partialbrüche konjugiert komplex zueinander.

$$X_n(s) = \frac{A_n}{s - \delta_n - j \cdot \omega_n} + \frac{A_n^*}{s - \delta_n + j \cdot \omega_n} = \frac{c_n + j \cdot d_n}{s - \delta_n - j \cdot \omega_n} + \frac{c_n - j \cdot d_n}{s - \delta_n + j \cdot \omega_n} \quad (4.130)$$

Die beiden Partialbrüche können zusammengefasst werden.

$$X_n(s) = \frac{c_n + j \cdot d_n}{s - \delta_n - j \cdot \omega_n} + \frac{c_n - j \cdot d_n}{s - \delta_n + j \cdot \omega_n} \quad (4.131)$$

=

Damit kann bei konjugiert komplexen Polpaaren der Ansatz

$$X_n(s) = \frac{A_n \cdot s + B_n}{(s - \delta_n)^2 + \omega_n^2} \quad (4.132)$$

gemacht werden. Zur Bestimmung der Koeffizienten  $A_n$  und  $B_n$  wird mit dem Hauptnenner multipliziert und durch Koeffizientenvergleich oder durch Einsetzen fester Zahlenwerte für die Variable  $s$  ein Gleichungssystem für die zu bestimmenden Koeffizienten aufgestellt und gelöst. Nach der Bestimmung der Koeffizienten  $A_n$  und  $B_n$  wird der Ausdruck so umgeformt, dass die Korrespondenzen mit den Nummern 19 und 20 aus Tabelle 4.4 zur Rücktransformation verwendet werden können.

$$X_n(s) = \frac{A_n \cdot s + B_n}{(s - \delta_n)^2 + \omega_n^2} = A_n \cdot \frac{s - \delta_n}{(s - \delta_n)^2 + \omega_n^2} + (B_n + A_n \cdot \delta_n) \cdot \frac{1}{(s - \delta_n)^2 + \omega_n^2} \quad (4.133)$$

Damit ergibt sich die Funktion im Zeitbereich zu

$$x_n(t) = A_n \cdot e^{\delta_n \cdot t} \cdot \cos(\omega_n \cdot t) \cdot \sigma(t) + \frac{B_n + A_n \cdot \delta_n}{\omega_n} \cdot e^{\delta_n \cdot t} \cdot \sin(\omega_n \cdot t) \cdot \sigma(t) \quad (4.134)$$

**Beispiel: Partialbruchzerlegung für konjugiert komplexe Polpaare  $\alpha = \delta \pm j \cdot \omega$**

Die Laplace-Transformierte

$$X(s) = \frac{2}{(s+1) \cdot (s^2 + 4 \cdot s + 5)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B \cdot s + C}{s^2 + 4 \cdot s + 5} \quad (4.135)$$

soll in den Zeitbereich zurücktransformiert werden. Die Konstante  $A$  errechnet sich mit dem Residuensatz zu

$$A = \left. \frac{2}{s^2 + 4 \cdot s + 5} \right|_{s=-1} = \frac{2}{2} = 1 \quad (4.136)$$

Die Konstanten  $B$  und  $C$  werden durch Multiplikation mit dem Hauptnenner

$$2 = (s^2 + 4 \cdot s + 5) + (B \cdot s + C) \cdot (s+1) = (1+B) \cdot s^2 + (4+B+C) \cdot s + (5+C) \quad (4.137)$$

und Einsetzen der Zahlen  $s = 0$

$$2 = 5 + C \quad (4.138)$$



und  $s = 1$  ermittelt.

$$2 = 1 + B + 4 + B + C + 5 + C = 10 + 2 \cdot B + 2 \cdot C \quad (4.139)$$

Es ergeben sich die Konstanten  $B = -1$  und  $C = -3$ . Einsetzen der Zahlenwerte in den Ansatz führt zu

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{s+3}{s^2+4 \cdot s+5} = \frac{1}{s+1} - \frac{s+2}{(s+2)^2+1} - \frac{1}{(s+2)^2+1} \quad (4.140)$$

Rücktransformation mit den Korrespondenzen 7, 19 und 20 ergibt

$$x(t) = (e^{-t} - e^{-2 \cdot t} \cdot \cos(t) - e^{-2 \cdot t} \cdot \sin(t)) \cdot \sigma(t) \quad (4.141)$$

### Partialbruchzerlegung für mehrfache Pole bei $\alpha$

Liegt ein  $P$ -facher Pol an der Stelle  $\alpha$  vor, muss der Teil der Laplace-Transformierten dargestellt werden als

$$X(s) = \frac{B(s)}{(s-\alpha)^P} = \sum_{n=1}^P \frac{A_n}{(s-\alpha)^n} \quad (4.142)$$

Die Koeffizienten  $A_n$  der einzelnen Partialbrüche können wieder auf unterschiedliche Arten berechnet werden:

- **Ausmultiplizieren**  
Die Gleichung wird mit dem Nenner multipliziert. Anschließend wird die Polstelle und  $P - 1$  weitere Werte für  $s$  eingesetzt. Es ergibt sich ein Gleichungssystem für die Koeffizienten  $A_n$ .
- **Residuensatz**  
Die einzelnen Koeffizienten werden über den Residuensatz [Foel11] berechnet

$$A_n = \frac{1}{(P-n)!} \cdot \frac{d^{P-n}}{ds^{P-n}} (X(s) \cdot (s-\alpha)^P) \Big|_{s=\alpha} \quad (4.143)$$

Die Rücktransformation der einzelnen Partialbrüche ergibt sich aus Korrespondenz 9 zu

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-\alpha)^n} \right\} = \frac{1}{(n-1)!} \cdot t^{n-1} \cdot e^{\alpha \cdot t} \cdot \sigma(t) \quad (4.144)$$

Damit lautet das Gesamtergebnis

$$x(t) = \sum_{n=1}^P \frac{A_n}{(n-1)!} \cdot t^{n-1} \cdot e^{\alpha \cdot t} \cdot \sigma(t) \quad (4.145)$$

### Beispiel: Partialbruchzerlegung für mehrfache Pole bei $\alpha$

Die Laplace-Transformierte  $X(s)$  soll in den Zeitbereich zurücktransformiert werden. Ihr Zählergrad ist kleiner als der Nennergrad, und sie hat einen doppelten Pol an der Stelle  $\alpha = 0.5$ . Damit lautet der Ansatz für die Partialbruchzerlegung

$$X(s) = \frac{s}{(s-0.5)^2} = \frac{A_1}{s-0.5} + \frac{A_2}{(s-0.5)^2} \quad (4.146)$$

Ausmultiplizieren führt zu der Gleichung

$$s = A_1 \cdot (s-0.5) + A_2 \quad (4.147)$$

Einsetzen der Zahlenwerte  $s = 0.5$  und  $s = 0$  ergibt

$$A_2 = 0.5 \quad (4.148)$$

und

$$A_1 = 2 \cdot A_2 = 1 \quad (4.149)$$

Alternativ könnte der Residuensatz verwendet werden:

$$A_1 = \frac{d}{ds} \left( X(s) \cdot (s-0.5)^2 \right) \Big|_{s=0.5} = \frac{d}{ds} s \Big|_{s=0.5} = 1 \quad (4.150)$$

und

$$A_2 = 1 \cdot X(s) \cdot (s-0.5)^2 \Big|_{s=0.5} = s \Big|_{s=0.5} = 0.5 \quad (4.151)$$

Die Funktion  $X(s)$  kann damit in folgende Partialbrüche aufgeteilt werden:

$$X(s) = \frac{s}{(s-0.5)^2} = \frac{1}{s-0.5} + \frac{0.5}{(s-0.5)^2} \quad (4.152)$$

Zur Rücktransformation werden die Korrespondenzen 7 und 8 verwendet.

$$x(t) = e^{0.5 \cdot t} \cdot \sigma(t) + 0.5 \cdot t \cdot e^{0.5 \cdot t} \cdot \sigma(t) \quad (4.153)$$

### Zusammenfassung der Ansätze für die Partialbruchzerlegung

Tabelle 4.5 fasst die Ansätze für die Partialbruchzerlegung zusammen. Dabei wird von einer Laplace-Transformierten der Form

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m \cdot s^m}{\sum_{n=0}^N a_n \cdot s^n} = \frac{b_M}{a_N} \cdot \frac{\prod_{m=1}^M (s - \beta_m)}{\prod_{n=1}^N (s - \alpha_n)} \quad (4.154)$$

ausgegangen, bei der der Zählergrad  $M$  kleiner als der Nennergrad  $N$  ist. Die Koeffizienten  $a_n$  und  $b_m$  sind reelle Koeffizienten. Die Nullstellen  $\beta_m$  und die Pole  $\alpha_n$  sind nicht gleich.

Tabelle 4.5: Ansätze für die Partialbruchzerlegung

Pollage	Ansatz Partialbruchzerlegung
Einfache reelle oder komplexe Pole $\alpha_n$	$X(s) = \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{s - \alpha_n}$
Konjugiert komplexe Polpaare $\alpha_n = \delta_n \pm j \cdot \omega_n$	$X_n(s) = \frac{A_n \cdot s + B_n}{(s - \delta_n)^2 + \omega_n^2}$
P-facher reeller oder komplexer Pol $\alpha_n$	$X(s) = \sum_{n=1}^P \frac{A_n}{(s - \alpha)^n}$

## 4.4 Laplace-Transformation mit MATLAB

Transformation schnell aufwendig werden. Deshalb wird hier die computerunterstützte Berechnung und Interpretation der Laplace-Transformierten mit MATLAB vorgestellt.

Zur Berechnung der Laplace-Transformation und inversen Laplace-Transformation sind folgende Verfahren von Interesse:

- Darstellung von Funktionen
- Laplace-Transformation und inverse Laplace-Transformation
- Umformung und Vereinfachung von Ausdrücken
- Partialbruchzerlegung

Diese Punkte werden für MATLAB beschrieben. Weitere Information finden sich in der MATLAB-Hilfe zur *Symbolic Math Toolbox*.

### 4.4.1 Darstellung von Funktionen

Für die Berechnung der Laplace-Transformation sind zunächst einige Befehle notwendig, mit denen Funktionen dargestellt werden können. Tabelle 4.6 stellt Befehle zur Darstellung von Funktionen zusammen.

Tabelle 4.6: Tabellarische Übersicht über Befehle zur Darstellung von Funktionen in MATLAB

Befehl	Beschreibung
<code>syms s t x X</code>	Definition von Variablen für die symbolische Berechnung, hier werden die Variable $s$ und $t$ , die Funktion $x$ und ihre Laplace-Transformierte $X$ definiert
<code>heaviside(t)</code>	Sprungfunktion
<code>dirac(t)</code>	Impulsfunktion
<code>+</code> <code>-</code> <code>*</code> <code>/</code>	Arithmetische Operationen können wie gewohnt verwendet werden
<code>exp(a*t)</code>	Exponentialfunktion kann wie gewohnt verwendet werden
<code>sin(a*t)</code> , <code>cos(a*t)</code>	Auswahl von wesentlichen Funktionen, weitere Funktionen sind in der MATLAB-Hilfe beschrieben

Die Berechnung der Funktionen wird an einem Beispiel angewendet, das im Folgenden weiterverwendet wird.

**Beispiel: Funktionsdefinition**

Gegeben ist die Funktion  $x(t)$

$$x(t) = 2 \cdot \sigma(t) + 5 \cdot e^{3 \cdot t} \cdot \sigma(t) + \delta(t - 3) \quad (4.155)$$

Im MATLAB ergibt sich die Funktionsdefinition aus folgender Befehlssequenz

```

1 % Definition der symbolischen Variablen
2 syms x X t s;
3
4 % Definition der Funktion
5 x = 2*heaviside(t) + 5*exp(3*t)*heaviside(t) + dirac(t-3);

```

Zunächst werden die symbolischen Variablen  $x$ ,  $X$ ,  $t$  und  $s$  definiert, die zur Berechnung der Funktion und später zur Berechnung der Laplace-Transformierten benötigt werden. Anschließend wird die Funktion definiert. Da MATLAB generell eine einseitige Laplace-Transformation durchführt, kann die Sprungfunktion  $\sigma(t)$ , die in MATLAB als *heaviside*-Funktion bezeichnet wird, bei der Darstellung von Zeitfunktionen auch weggelassen werden.

#### 4.4.2 Laplace-Transformation und inverse Laplace -Transformation

Sind die Funktionen definiert, können sie in den Laplace-Bereich transformiert werden. Zur Laplace-Transformation und inversen Laplace-Transformation stehen zwei Befehle zur Verfügung. Sie sind in Tabelle 4.7 zusammengestellt.

Tabelle 4.7: Tabellarische Übersicht über Befehle zur Darstellung von Funktionen in MATLAB

Befehl	Beschreibung
$X = \text{laplace}(x, t, s)$	Laplace-Transformation der symbolisch definierten Funktion $x(t)$ in den Laplace-Bereich mit der Variable $s$
$x = \text{ilaplace}(X, s, t)$	inverse Laplace-Transformation der symbolisch definierten Laplace-Transformierten $X$ mit der Variable $s$ in den Zeitbereich $t$

**Beispiel: Laplace-Transformation mit MATLAB**

Die Funktion  $x(t)$  mit

$$x(t) = 2 \cdot \sigma(t) + 5 \cdot e^{3 \cdot t} \cdot \sigma(t) + \delta(t - 3) \quad (4.156)$$

soll in den Laplace-Bereich transformiert werden. Als Ergebnis wird mit den Rechenregeln der Laplace-Transformation die Laplace-Transformierte

$$X(s) = 2 \cdot \frac{1}{s} + 5 \cdot \frac{1}{s-3} + e^{-3 \cdot s} \quad (4.157)$$

erwartet. Die Berechnung in MATLAB ergibt sich mit dem Befehl

```
1 % Transformation der Funktion in den Laplace-Bereich
2 X = laplace(x, t, s)
```

Das von MATLAB berechnete Ergebnis lautet

```
1 X =
2
3 1/exp(3*s) + 5/(s - 3) + 2/s
```

Die Rücktransformation wird an demselben Beispiel verdeutlicht.

```
1 % Transformation der Laplace-Transformierten in den Zeitbereich
2 y = ilaplace(X, s, t)
```

Es ergibt sich das Ergebnis

```
1 y =
2
3 dirac(t - 3) + 5*exp(3*t) + 2
```

$$x(t) = 2 \cdot \sigma(t) + 5 \cdot e^{3 \cdot t} \cdot \sigma(t) + \delta(t-3) \quad (4.158)$$

überein

#### 4.4.3 Umformung und Vereinfachung von Ausdrücken

Der praktische Umgang mit MATLAB zeigt, dass die Ergebnisse oftmals in eine andere Form gebracht werden müssen. Deshalb werden in Tabelle 4.8 einige Befehle zur Umformung und Vereinfachung von Ausdrücken vorgestellt.

Tabelle 4.8: Tabellarische Übersicht über Befehle zur Umformung und Vereinfachung von Ergebnissen

Befehl	Beschreibung
<code>collect(x,t)</code>	Sortiert den Ausdruck x nach Potenzen der Variable t
<code>expand(x)</code>	Multipliziert den Ausdruck x aus
<code>factor(x)</code>	Stellt einen Ausdruck x als Produkt von Faktoren dar
<code>simple(x)</code>	Erstellt die kürzeste Darstellungsform für den Ausdruck x
<code>pretty(x)</code>	Stellt den Ausdruck x in einer grafische Form dar
<code>[r,p,k] = residue(b,a)</code>	Berechnung der Partialbrüche mit Koeffizient $r_i$ , Pol $p_i$ und Konstante k bei gegebener gebrochen rationaler Funktion mit den Koeffizienten $b_i$ und $a_i$
<code>[a,b] = residue(r,p,k)</code>	Berechnung der Koeffizienten $b_i$ und $a_i$ einer gebrochen rationalen Funktion bei gegebenen Partialbrüchen mit Koeffizient $r_i$ , Pol $p_i$ und Konstante k

Die genaue Bezeichnung der einzelnen Befehle kann in der MATLAB-Hilfe nachgeschlagen werden. Hier wird der Umgang mit den Befehlen an zwei Beispielen verdeutlicht.

##### Beispiel: Laplace-Transformation einer Winkelfunktion mit MATLAB

Die Laplace-Transformierte einer Kosinusfunktion errechnet sich mit MATLAB mit folgender Sequenz:

```

1 % Definition der symbolischen Variablen
2 syms f t s x X;
3
4 % Definition der Kosinusfunktion
5 x = cos(2*pi*f*t);
6
7 X = laplace(x,t,s);
8 pretty(simple(X))
9
10      s
11  -----
12      2 2    2
13     4 pi f + s

```

Das Ergebnis entspricht Korrespondenz 16.

**Beispiel: Partialbruchzerlegung mit MATLAB**

Der Befehl *residue* rechnet die unterschiedlichen Darstellungsformen für gebrochen rationale Funktionen ineinander um. Die Berechnung wird numerisch durchgeführt, der Befehl ist deshalb kein Teil der *Symbolic Math Toolbox*. Bei einfachen Polen wird folgende Nomenklatur zugrunde gelegt:

$$\frac{b_1 \cdot s^M + b_2 \cdot s^{M-1} + b_3 \cdot s^{M-2} + \dots + b_M \cdot s + b_{M+1}}{a_1 \cdot s^N + a_2 \cdot s^{N-1} + a_3 \cdot s^{N-2} + \dots + a_N \cdot s + a_{N+1}} = \frac{r_1}{s-p_1} + \frac{r_2}{s-p_2} + \dots + \frac{r_N}{s-p_N} + k \quad (4.159)$$

Treten bei der Partialbruchzerlegung vielfache Pole  $p_n$  auf, so werden sie mit aufsteigender Potenz dargestellt:

$$\frac{b_1 \cdot s^M + b_2 \cdot s^{M-1} + b_3 \cdot s^{M-2} + \dots + b_M \cdot s + b_{M+1}}{a_1 \cdot s^N + a_2 \cdot s^{N-1} + a_3 \cdot s^{N-2} + \dots + a_N \cdot s + a_{N+1}} = \dots + \frac{r_n}{s-p_n} + \frac{r_{n+1}}{(s-p_n)^2} + \frac{r_{n+2}}{(s-p_n)^3} + \dots \quad (4.160)$$

Bei der Partialbruchzerlegung wird folgendes Beispiel berechnet. Die Rechnung soll mit MATLAB nachvollzogen werden.

$$X(s) = \frac{s}{s^2 + 3 \cdot s + 2} = \frac{s}{(s+1) \cdot (s+2)} = \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2} \quad (4.161)$$

Die Partialbruchzerlegung ergibt sich mit MATLAB mit folgender Sequenz:

```

1 % Definition der gebrochen rationalen Funktion ueber Koeffizienten-Vektoren
2 b = [1 0];
3 a = [1 3 2];
4
5 % Berechnung der Partialbrueche
6 [r,p,k] = residue(b,a)
7 r = [2 -1]
8 p = [-2 -1]
9 k = []

```

Das Ergebnis von Matlab entspricht der analytischen Rechnung.



## 4.5 Literatur

### 4.5.1 Literaturstellen mit anschaulicher Darstellung

- [Foel11] Föllinger, Otto: Laplace-, Fourier- und z-Transformation. 10., überarbeitete Auflage  
VDE Verlag GmbH, Berlin, Offenbach 2011
- [Schei05] Scheithauer, Rainer: Signale und Systeme. 2. Auflage  
B.G. Teubner Stuttgart, 2005

### 4.5.2 Literatur zu MATLAB

- [Beuc00] Beucher, Ottmar: MATLAB und Simulink lernen,  
Addison Wesley Longman Verlag, München, 2000
- [Schw07] Schweizer, Wolfgang: MATLAB kompakt,  
Oldenbourg Verlag München, 2007
- [Ste07] Stein, Ulrich: Einstieg in das Programmieren mit MATLAB,  
Fachbuchverlag Leipzig, 2007

### 4.5.3 Weiterführende Literatur

- [Giro05] Girod, Bernd: Einführung in die Systemtheorie. 3. Auflage  
B.G. Teubner Stuttgart, 2005