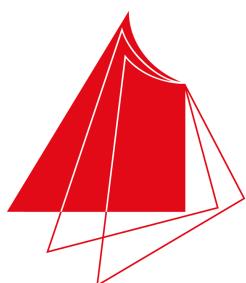


Systemtheorie Teil B

- Zeitdiskrete Signale und Systeme -

Manfred Strohrmann
Urban Brunner



Hochschule Karlsruhe
Technik und Wirtschaft
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Änderungsindex

Version	Datum	Verfasser	Änderungen
10	15.08.2020	M. Strohrmann, U. Brunner	Fehlerkorrektur, Ausgabe für Vorlesung WS 2020/21
9	15.09.2015	M. Strohrmann, U. Brunner	Fehlerkorrektur, Ausgabe für Vorlesung WS 2017/18
8	15.09.2015	M. Strohrmann, U. Brunner	Fehlerkorrektur, Ausgabe für Vorlesung WS 2015/16
7	15.03.2015	M. Strohrmann, U. Brunner	Trennung von Text, Übungsaufgaben und Musterlösungen, Überarbeitung Kapitel 11: Diskrete Fourier Transformation, Ausgabe für Vorlesung SS 2015
6	15.03.2014	M. Strohrmann, U. Brunner	Integration der Systemtheorie Online Funktionen, Korrektur von Fehlern und Überarbeitung
5	14.03.2012	M. Strohrmann	Korrektur von Fehlern und Überarbeitung
4	14.03.2014	M. Strohrmann	Kapitel 10: Strukturen digitaler Systeme Korrektur von Fehlern und Überarbeitung
3	14.03.2011	M. Strohrmann	Korrektur von Fehlern und Überarbeitung
2	01.10.2010	M. Strohrmann	Einarbeiten von Musterlösungen und Vertiefung
1	01.04.2010	M. Strohrmann	Erstausgabe

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	1
1.1 Strukturierung des Buchs	2
1.2 Ergänzungen zum Buch	4
1.3 Danksagung	8
2 Signalabtastung und Rekonstruktion	9
2.1 Quantisierungsfehler der Amplitude	9
2.2 Vorüberlegungen zur zeitlichen Diskretisierung	11
2.3 Ideale Abtastung und ideale Rekonstruktion	13
2.4 Reale Abtastung und Rekonstruktion	20
2.5 Literatur	26
3 Zeitdiskrete Signale	27
3.1 Klassen und Eigenschaften von Signalen	27
3.2 Sprung- und Impulsfolgen	34
3.3 Rechnen mit Folgen	42
3.4 Folgen zur Beschreibung von zeitdiskreten Einschwingvorgängen	46
3.5 Literatur	52
4 Zeitdiskrete Systeme im Zeitbereich	53
4.1 Beschreibung zeitdiskreter Systeme mit Differenzengleichungen	53
4.2 Grundlegende Systemeigenschaften	59
4.3 Lösung linearer Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten	67
4.4 Berechnung der Systemantwort über die Faltungssumme	76
4.5 Literatur	84
5 z-Transformation von Signalen	85
5.1 Grundlagen der z-Transformation	85
5.2 Rechenregeln der z-Transformation	94
5.3 Rücktransformation	103
5.4 z-Transformation mit MATLAB	110
5.5 Literatur	115
6 Zeitdiskrete Systeme im z-Bereich	116
6.1 Lösung von Differenzengleichungen mit der z-Transformation	116
6.2 Übertragungsfunktion zeitdiskreter Systeme	122
6.3 Interpretation der Übertragungsfunktion	126
6.4 Analyse und Simulation zeitdiskreter Systeme mit MATLAB	143
6.5 Literatur	151
7 Spektrum von Signalfolgen	152
7.1 Grundlagen	152
7.2 Rechenregeln der Fourier-Transformation von Signalfolgen	164
7.3 Fourier-Transformation von Signalfolgen und andere Integraltransformationen	176
7.4 Berechnung von Korrespondenzen der Fourier-Transformation von Signalfolgen	181
7.5 Literatur	182
8 Frequenzgang zeitdiskreter Systeme	183
8.1 Motivation und Herleitung	183
8.2 Grafische Darstellung des Frequenzgangs	188

1 Einleitung

In vielen praktischen Anwendungen werden analoge Signale mit digitalen Systemen wie zum Beispiel Computern oder Mikro-Controllern erfasst und digital verarbeitet. Gründe für die digitale Realisierung von Systemen sind die kostengünstige Umsetzung, die sich aus der Verwendung von Mikro-Controllern oder hochintegrierter Schaltungen ergibt, und die Anwendung von Algorithmen, die analog wenn überhaupt nur sehr aufwendig umgesetzt werden können.

Der Aufbau eines Systems zur digitalen Signalverarbeitung ist in Bild 1.1 dargestellt. Bei der Beschreibung eines Abtastvorgangs wird sich zeigen, dass das abzutastende Signal zunächst durch einen Tiefpass bandbegrenzt werden muss. Nach der anschließenden Abtastung liegen zeitdiskrete Signalwerte vor, mit den eine digitale Signalverarbeitung (DSV) durchgeführt wird. Gegebenenfalls werden die zeitdiskreten Abtastwerte über ein Halteglied und einen Tiefpass zu einem analogen Signal rekonstruiert. Insgesamt ergibt sich damit die in Bild 1.1 beschriebene Signalverarbeitungskette.

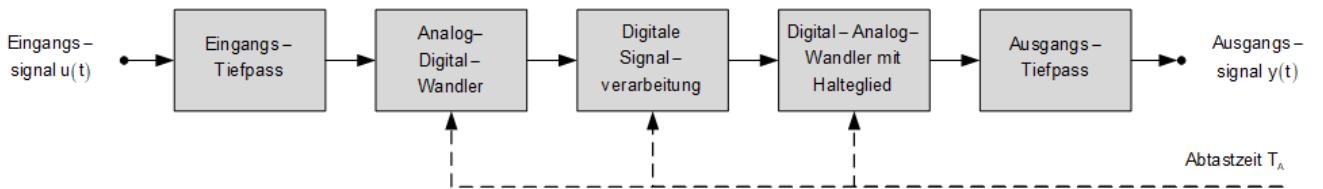
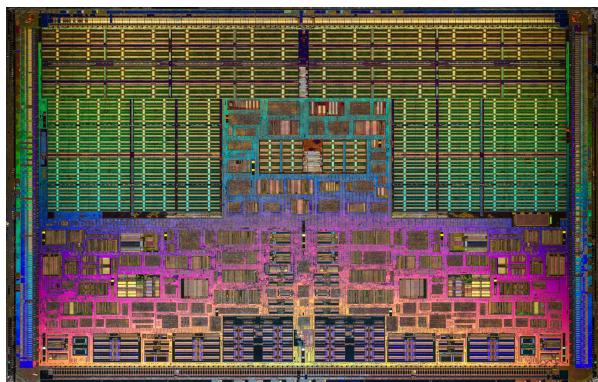


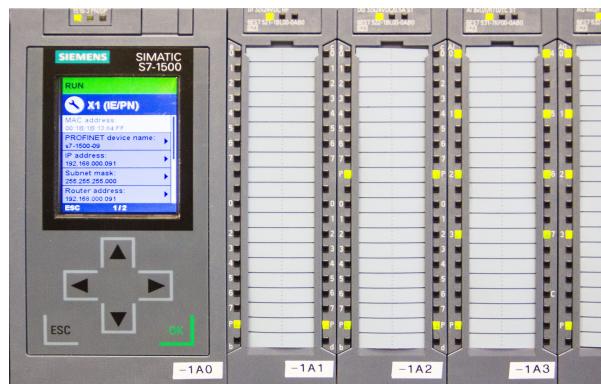
Bild 1.1: Blockdiagramm zur digitalen Signalverarbeitung

Die Signalverarbeitung wird dabei in Form von Gleichungen oder Algorithmen beschrieben, die von digitalen Systemen in einfacher Form umgesetzt werden können. Außer einer Speicherverwaltung müssen zur Realisierung der Algorithmen über Differenzengleichung nur Multiplikation und Additionen durchgeführt werden. Damit können die Algorithmen in sehr unterschiedlichen Systemen implementiert werden. Bei Anwendungen mit hohen Stückzahlen wie im Automotive-Bereich und bei Smart-Phones werden Application-Specific-Integrated-Circuits (ASIC) mit digitaler Signalverarbeitung eingesetzt. Zur Steuerung von Prozessen und zur lokalen Signalverarbeitung werden Mikro-Controller und digitale Signalprozessoren sowie Field-Programmable-Gate-Arrays (FPGA) eingesetzt. Auch in der Automatisierungstechnik findet die digitale Signalverarbeitung Anwendung. Bild 1.2 zeigt eine Auswahl von Systemen, mit denen eine digitale Signalverarbeitung realisiert wird. Der Entwurf der entsprechenden Algorithmen ist Gegenstand der folgenden Kapitel dieses Skriptes.

(a) Application-Specific-Integrated-Circuit (ASIC) mit digitaler Signalverarbeitung [Frit20]



(b) Speicher-Programmierbare-Steuerung (SPS)



(c) Field-Programmable-Gate-Array (FPGA)



(d) Micro-Controller (μ C) und digitale Signalprozessoren (DSP)

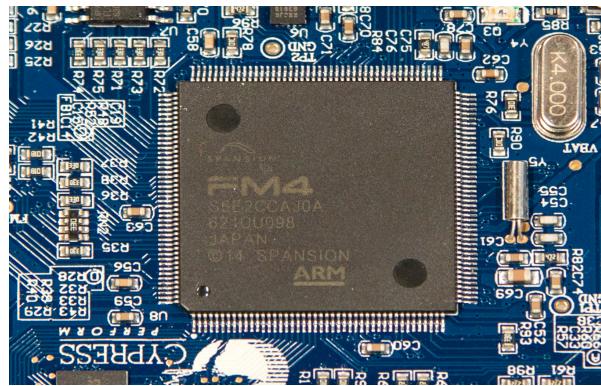


Bild 1.2: Beispiele für Systeme mit digitaler Signalverarbeitung

1.1 Strukturierung des Buchs

Das Buch beginnt mit der Aufgabenstellung, analoge Signale in zeitdiskrete Signale umzusetzen. Es wird sich zeigen, dass analoge Signale ohne Verfälschung diskretisiert werden können, wenn das sogenannte Abtasttheorem eingehalten wird. Kritischer ist eine technisch realisierbare Rekonstruktion der Abtastwerte zu einem zeitkontinuierlichen Signal. Durch den Abtastprozess entstehen Zahlenfolgen.

Diese Zahlen können ähnlich wie analoge Zeitfunktionen betrachtet werden. Der Umgang mit Zahlenfolgen wird dargestellt und an Beispielen geübt. Dabei wird das Rechnen mit Impuls- und Sprungfolgen eingeführt und vertieft. Besonderer Wert wird auf komplexe Exponentialfolgen gelegt, die für das Einstellungsvorverhalten digitaler Systeme von besonderer Bedeutung sind.

Digitale Systeme lassen sich wegen ihrer diskreten Signale nicht über Differentialgleichungen beschreiben. Deshalb wird die Beschreibung zeitdiskreter Systeme über Differenzengleichungen eingeführt. An Beispielen wird erläutert, wie diese Differenzengleichungen aufgestellt werden können. Abschließend werden grundlegende Systemeigenschaften wie Linearität, Zeitinvarianz, Stabilität und Kausalität diskutiert. Für lineare, zeitinvariante Systeme wird die Systemantwort über die Faltungssumme berechnet.

Die Zweiteilung von Signalen und Systemen zieht sich weiter durch das Skript. Zur Lösung von Differenzengleichungen wird die z-Transformation eingeführt. Sie ist das Pendant zur Laplace-Transformation zeitkontinuierlicher Signale und Systeme. Nach der Diskussion der z-Transformation für Signale werden Differenzengleichungen mit Hilfe der z-Transformation gelöst, und es wird der Begriff der Übertragungsfunktion zeitdiskreter Systeme eingeführt. An der Übertragungsfunktion können wichtige Systemeigenschaften direkt abgelesen werden, ohne die Systemantwort ausrechnen zu müssen. Die Interpretation der Übertragungsfunktion wird beschrieben und an Beispielen angewendet.

Anschließend wird der Begriff des Spektrums einer Signalfolge erläutert, und es wird die Fourier-Transformation von Signalfolgen vorgestellt. Mit der Fourier-Transformation für Signalfolgen wird einer

Signalfolge ein Spektrum zugeordnet. Zeitdiskrete Systeme weisen einen Frequenzgang auf, der ebenfalls über die Fourier-Transformation von Signalfolgen bestimmt werden kann. Durchlaufen zeitdiskrete Signale zeitdiskrete Systeme, wird ihr Spektrum mit dem Frequenzgang des Systems multipliziert.

In Produkten werden zeitkontinuierliche Systeme als Ersatz oder Ergänzung zu zeitdiskreten Systemen eingesetzt. Dabei wird sich eine zeitdiskrete Realisierung im Detail immer von einer zeitkontinuierlichen Realisierung unterscheiden. Es stellt sich die Frage, wie ein zeitkontinuierliches System vorteilhaft zeitdiskret approximiert werden kann.

Für eine gezielte Änderung des Spektrums können zeitdiskrete Filter entworfen werden. Dazu werden unterschiedliche Verfahren zum Filter-Design für Filter mit endlicher Impulsantwort (FIR-Filter) und für Filter mit unendlicher Impulsantwort (IIR-Filter) beschrieben und an Beispielen verdeutlicht. Für die Realisierung von Filtern werden oftmals feste Strukturen verwendet, die vergleichbar zu standardisierten Operationsverstärkerschaltungen für analoge Filter sind.

Zur Bestimmung des Spektrums eines gemessenen Signals wird die Diskrete-Fourier-Transformation verwendet. Sie wird am Ende des Skriptes vorgestellt und angewendet. Durch eine Analyse des Signalflusses von der zeitkontinuierlichen Funktion bis zum Spektrum der Diskreten-Fourier Transformation werden Effekte wie Leakage, Zero-Padding und Fensterung erläutert.

Die Darstellungen in diesem Skript werden mit Beispielen illustriert. Beispiele beginnen mit einem grauen Balken und enden mit einem kleinen Quadrat.

Beispiel:

Erläuterung des Beispiels

Wesentlicher Erfolgsfaktor für das Verständnis und den praktischen Umgang mit den Methoden der Systemtheorie ist das selbstständige Rechnen von Aufgaben. Aus diesem Grund sind in das vorliegende Buch Übungsaufgaben integriert, die eine Semester begleitende Vertiefung ermöglichen. Musterlösungen sind online verfügbar.

1.2 Ergänzungen zum Buch

Das Fach Systemtheorie führt zu interdisziplinären Systembeschreibungen und bietet damit die Option, unterschiedliche Disziplinen und Fachrichtungen miteinander zu verbinden. Dies ist vor allem bei größeren Entwicklungsprojekten in Industrie und Wirtschaft von strategischer Bedeutung. Leider steht der hohen Bedeutung oft eine Abneigung der Studierenden gegenüber, die das Fach Systemtheorie als theoretisch und abstrakt empfinden. In einem Projekt Systemtheorie-Online, das von der Hochschule Karlsruhe und dem Land Baden-Württemberg gefördert wurde, wurden unterschiedliche Elemente entwickelt, mit denen die Praxisrelevanz des Stoffes verdeutlicht und die Motivation der Studierenden gesteigert werden soll.

1.2.1 Systemtheorie-Online

Eine Maßnahme ist die Online-Plattform Systemtheorie-Online. Bei der Online-Plattform handelt es sich um ein Internet-Portal zur Unterstützung des Vorlesungsbetriebs. Die Studierenden haben dort die Möglichkeit, das Skript als PDF-Dokument herunterzuladen oder es online mit mehreren Zusatzfunktionen durchzuarbeiten. Zu den präsentierten Inhalten werden themenbezogen Links zu Praxisbeispielen und Übungsaufgaben sowie sogenannte Applikationen und sogenannte virtuelle Versuche bereitgestellt.

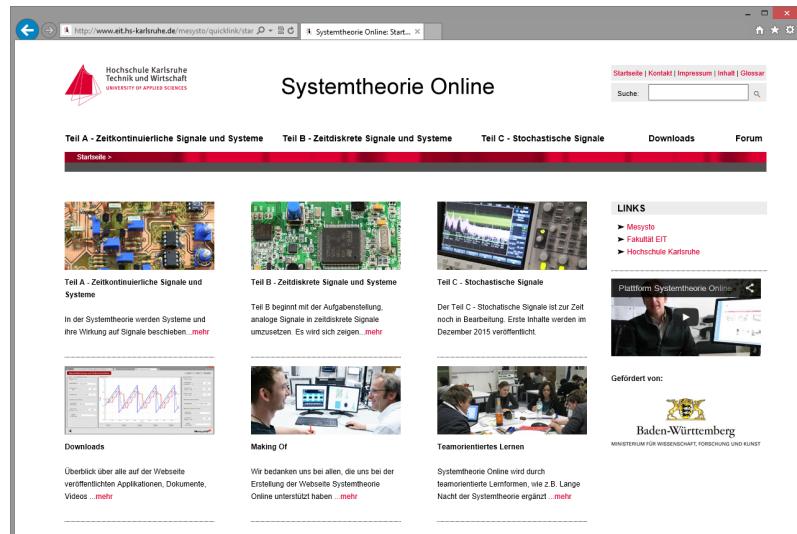


Bild 1.3: Systemtheorie Online (www.hs-karlsruhe.de/mesysto)

Applikationen zur Systemtheorie

Für Sachverhalte und Zusammenhänge, die sich die Studierenden nur schwer vorstellen können, werden Applikationen zur Verfügung gestellt. Bei den Applikationen können Parameter beispielsweise per Schieberegler verändert und die Folgen dieser Modifikationen auf die Ausgabesignale beobachtet werden. Die Applikationen erlauben es einerseits, im Rahmen des spielerischen Ausprobierens ein Gefühl für Zusammenhänge und Abhängigkeiten verschiedener Systemparameter zu bekommen. In Video-Tutorials werden Studierenden in den Umgang mit den Applikationen eingeführt. Sie sollen dabei vor der Manipulation von Parametern Hypothesen über zu erwartende Effekte auf das Gesamtsystem abgeben, bevor unmittelbar darauf das Ergebnis-Feedback bezüglich des Zutreffens des eigenen Vorhersagen erfolgt.

Das Vorgehen bei den grafischen Animationen kann kurz an einem Beispiel erläutert werden: Ein PT2-Glied ist von den Parametern Zeitkonstante T, Dämpfung d und Verstärkung k abhängig (Bild 1.4). Die grafische Animation zeigt parallel die Eigenschaften des Systems im Zeit-, Laplace- und Frequenzbereich. Die Parameter können dabei durch Schieberegler variiert werden, sodass die Studierenden spielerisch ein Fingerspitzengefühl für das Übertragungsverhalten bekommen. Durch die Bereitstellung als Silverlight-Applikation benötigen die Studierenden keine zusätzliche Software, um das Programm auszuführen.

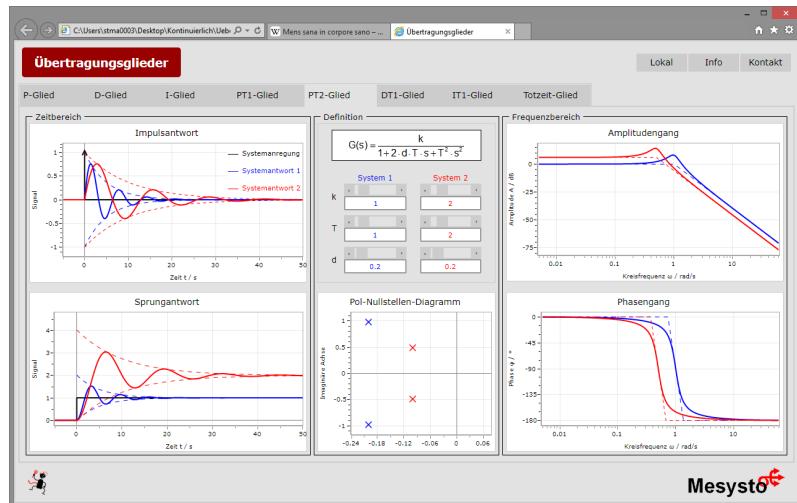


Bild 1.4: Darstellung des Verhaltens eines sogenannten PT2-Gliedes als Silverlight-Applikation

Virtuelle Versuche zur Systemtheorie

Darüber ermöglicht die Online-Plattform die Durchführung virtueller Experimente. Passend zu den Themen des Skripts werden Versuche mit dem Laborwagen auf Video aufgezeichnet und diese auf der Online-Plattform gemeinsam mit den entsprechenden Datensätzen zur Verfügung gestellt. Zusätzliche Erläuterungen zur Durchführung der Versuche und Auswertung der Daten fördern ein Grundverständnis für das wissenschaftliche Denken und Arbeiten.

Als Experimente zur Demonstration stehen bereits einige Versuche zum Laborwagen zur Verfügung. Bild 1.5 zeigt zum Beispiel einen Versuch zur Beschreibung des Einschwingverhaltens eines Lautsprechers. Weitere Experimente insbesondere zu den Themen diskrete Systeme und stochastische Systeme wurden aufgebaut und gefilmt, die Videos stehen als Datei zur Verfügung. Die Studierenden erhalten aber nicht nur den Video-Stream, sondern auch die einzelnen Versuchsergebnisse in Form von Daten-Files und können bei Interesse eigene Versuchsauswertungen erstellen.

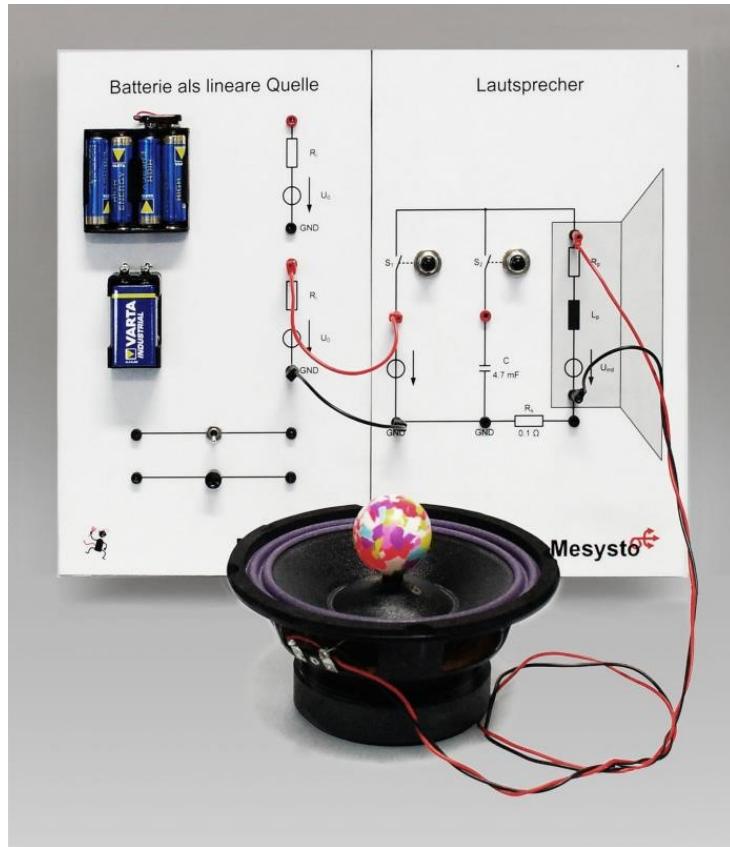


Bild 1.5: Versuchsaufbau zum Einschwingverhalten eines Lautsprechers

Das Portal Systemtheorie-Online bietet den Studierenden damit die Möglichkeit, theoretische Sachverhalte auf eine anschauliche Art aufbereitet und erklärt zu bekommen. Damit wird eine Forderung aus der Evaluation aufgegriffen, mehr Versuche in der Systemtheorie einzusetzen. Darüber hinaus haben die Studierenden die Möglichkeit, selbst aktiv zu werden und Versuche selbstständig auszuwerten und daran ihren eigenen Lernerfolg zu messen. Das Projekt bietet damit einen Beitrag zur praxisnahen Ausbildung von Studierenden und stellt wegen des freien Zugangs ein Weiterbildungsangebot dar, das Mitarbeitern aus Industrie und Wirtschaft offensteht. Der Aufbau dieses Portal wurde im Rahmen von Pro-Studium aus Studiengebühren und aus Mitteln des Landes Baden-Württemberg im Rahmen des Programms Willkommen in der Wissenschaft finanziert.

1.2.2 Teamorientierte Lehrmethoden

Parallel zu den Online-Aktivitäten wird die Vorlesung um unterschiedliche teamorientierte Lehrmethoden ergänzt. Kooperative Lernformen fördern den Zusammenhalt und tragen sozialen Bedürfnissen Rechnung. Sie wirken der sozialen Isolation entgegen, die Studierenden fühlen sich eingebunden. Nicht zuletzt spiegelt die Teamarbeit auch berufliche Anforderungen wider. Die Methoden des teamorientierten Lernens sind auf der Online-Plattform ausführlich dokumentiert.

Lange Nächte der Systemtheorie

Lange Nächte sind abendliche Veranstaltungen zur Vertiefung des Vorlesungsstoffs, passend zu einem bestimmten Vorlesungsthema. In entspannter Atmosphäre werden Übungsaufgaben und Experimente mit dem Laborwagen miteinander kombiniert. Der verfügbare Zeitrahmen erlaubt eine Beschäftigung mit komplexeren Fragestellungen. In erster Linie ist dieser Baustein als offener Lernraum konzipiert, in dem Wissen stressfrei vermittelt und vertieft wird. Erste lange Nächte wurden von den Studierenden sehr positiv bewertet. Besonders gelobt wurden das gemeinschaftliche Lernen in der Gruppe, das angenehme Arbeitsklima sowie der Praxisbezug und die Arbeit mit realen Messdaten.

Großer Preis der Systemtheorie

In Anlehnung an die Fernsehsendung "Der große Preis" wird mit den Studierenden eine Quiz-Show veranstaltet. Dabei bearbeiten die Studierenden in Gruppen Fragen zu Themenblöcken der Vorlesung. Die Punktzahl ist abhängig von Schwierigkeitsgrad. Die Abschätzung eines Einsatzes bei sogenannten Risiko-Fragen erfordert die Selbsteinschätzung der Studierenden. Durch sogenannte Glücksfragen zu fachfremden Themen können auch Gruppen mit mäßigem Fachwissen gewinnen. Die traditionelle Rangordnung innerhalb der Vorlesung wird aufgebrochen und die Motivation der Studierenden steigt. Studierenden zeigten bei erster Durchführung extrem hohe Motivation und hohes Engagement.

Zirkeltraining Systemtheorie

Erfolgreiches Lernen setzt ein Gleichgewicht zwischen Anspannung und Entspannung voraus. Zielsetzung dieses Zirkeltrainings ist es deshalb, sportliche Übungen oder Geschicklichkeitsspiele in den Lernprozess zu integrieren. Dazu wird ein Parkour aufgebaut, bei dem sich Übungsaufgaben und Spielstationen abwechseln. Bei der Veranstaltung stehen die Motivation und der Spaß an vorderster Stelle. Es wird eine angenehme Atmosphäre geschaffen, in der der Druck beim Bewältigen von Übungsaufgaben durch spielerische Anteile entlastet wird. Wegen des erforderlichen Platzbedarfs eignet sich das Zirkeltraining Systemtheorie insbesondere für die Sommermonate.

Die Evaluationsergebnisse zur Vorlesung zeigen, dass es durch den Einsatz teamorientierter Lehrmethoden gelungen ist, diese Abneigung gegen das Fach Systemtheorie zumindest teilweise abzubauen.

1.3 Danksagung

Wir bedanken uns bei den Studierenden und Assistenten Andreas Kühn, Erik Seiter, Sebastian Stiegler, Philipp Fetzer, Jaruwan Limsukhakorn, Doraemon Dedkum, Georg Bauer, Jochen Lang, Alex Schwin und Michael Holz für die Gestaltung und Ausarbeitung des wesentlichen Teils der Übungsaufgaben, Applikationen und Versuche.

Unserer besonderer Dank gilt außerdem den Kollegen Prof. Dr. Beucher, Prof. Dr. Dussel, Prof. Dr. Quint und Prof. Dr. Weizenecker, die die inhaltliche und mathematische Darstellung in diesem Buch kritisch hinterfragt und damit zur besseren Verständlichkeit beigetragen haben.

In das Buch sind viele Hinweise von Studierenden der Hochschule Karlsruhe eingegangen. Wir haben versucht, den Hinweisen gerecht zu werden, die meisten Hinweise sind bereits in Überarbeitungen Korrekturen eingeflossen. Über weitere Hinweise zur mangelhaften Verständlichkeit und auf Fehler würden wir uns freuen.

Karlsruhe, 16.03.2015

Quelle

- 35465715536_0df591f741_4k.jpg, US.IV+__DSC00496, <https://www.flickr.com/photos/130561288@N04/>, Fritzchens Fritz, <https://flic.kr/p/W2Z4C5>, auf Flickr, CC0 1.0 Universal (CC0 1.0) Public Domain Dedication

2 Signalabtastung und Rekonstruktion

Als Voraussetzung für die digitale Signalverarbeitung müssen die analogen, zeit- und wertkontinuierlichen Signale so gewandelt werden, dass sie abgespeichert und weiter verarbeitet werden können. Diese Wandlung wird Digitalisierung genannt.

Dazu muss das Signal einerseits zeitlich quantisiert werden, da nur endlich viele Werte verarbeitet werden können. Zu diskreten Zeitpunkten wird dabei der aktuelle Wert des Signals erfasst oder abgetastet. Die Abstände zwischen den Zeitpunkten, zu denen die Werte erfasst werden, sind üblicherweise äquidistant, also immer gleich groß. Die erfassten Werte werden Abtastwerte genannt. Außerdem muss die Amplitude des Signals bestimmt werden, was nur in einem begrenzten Bereich und mit einer definierten Auflösung oder Quantisierung möglich ist.

Nach einer kurzen Darstellung zum Umgang mit Quantisierungsfehlern bei der Amplitude wird in diesem Kapitel die Zeitdiskretisierung betrachtet, da eine falsche Zeitdiskretisierung fatale Auswirkungen auf die folgende Signalverarbeitung hat. Zunächst wird allgemein erklärt, wie die ideale Abtastung von Signalen mathematisch beschrieben werden kann. Hierbei wird deutlich, warum das Spektrum eines abgetasteten Signals immer periodisch ist. Anhand der Periodizität des Spektrums wird das Abtasttheorem von Shannon eingeführt. Es besagt, dass die Abtastfrequenz bei bandbegrenzten Signalen mehr als doppelt so groß sein muss, wie die größten Frequenzanteile im Signal. Mit dem Anti-Aliasing-Tiefpass wird eine Methode vorgestellt, wie Signale ohne Bandbegrenzung gefiltert werden können, um das Abtasttheorem zu erfüllen.

Da die ideale Abtastung von Signalen nur in der Theorie existiert und in der Praxis so nicht direkt angewandt werden kann, wird darüber hinaus die reale Abtastung mathematisch beschrieben und die dadurch entstehenden Signalverzerrungen erläutert. Auch hier gibt es die Möglichkeit, die Effekte durch die geschickte Anwendung von Filtern zu kompensieren.

2.1 Quantisierungsfehler der Amplitude

Bei der Digitalisierung von Signalen muss die Amplitude einer festen Quantisierungsstufe zugeordnet werden. Entscheidend für die Quantisierung des Signals ist die Auflösung des Analog-Digital-Wandlers (AD-Wandlers), die üblicherweise in Bit angegeben wird. Beispielsweise wird mit einem 12-Bit-AD-Wandler ein definierter Messbereich in $2^{12} = 4096$ Intervalle eingeteilt. Bei einem Messbereich von 5 V ergäben sich demnach bei einer Auflösung von 12 Bit Quantisierungsstufen von.

$$\Delta U = \frac{5 \text{ V}}{2^{12}} = \frac{5 \text{ V}}{4096} = 1.2 \text{ mV} \quad (2.1)$$

In der Praxis wird die Quantisierung der Amplitude gerne vernachlässigt, weil die entstehenden Fehler durch eine hohe Auflösung des verwendeten Analog-Digital-Wandlers klein gehalten werden können. Die existierende Abweichung zwischen dem wertdiskreten und wertkontinuierlichen Signal wird als Quantisierungsfehler modelliert. Bild 2.1 verdeutlicht den Quantisierungsfehler an zwei Beispielen.

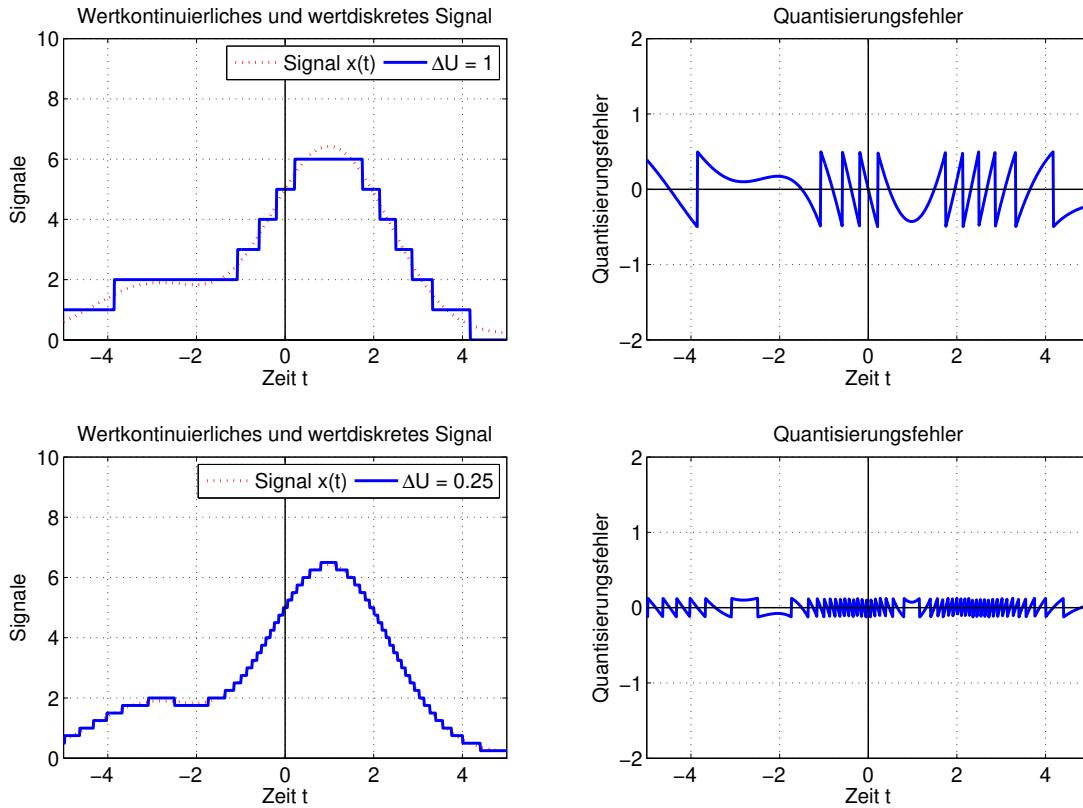


Bild 2.1: Darstellung des Quantisierungsfehlers (Quantisierungsrauschen)

Der Quantisierungsfehler ergibt sich aus der Differenz zwischen dem wertkontinuierlichen und dem wertdiskreten Signal. Je feiner die Auflösung des AD-Wandlers ist, desto geringer ist der Abstand zwischen dem kontinuierlichen und dem quantisierten Signal. Da die Abweichung einen zufälligen Verlauf zu haben scheint, wird dieser Fehler als Quantisierungsrauschen bezeichnet und als zufälliger Fehler oder zufälliges Störsignal behandelt. Der Umgang mit zufälligen Signalen ist Gegenstand des Teils C dieser Buchreihe, der Quantisierungsfehler wird an dieser Stelle deshalb nicht weiter vertieft.

2.2 Vorüberlegungen zur zeitlichen Diskretisierung

Die grundlegende Frage bei der zeitlichen Abtastung von Signalen ist, in welchen Zeitabständen T_A beziehungsweise mit welcher Abtastfrequenz f_A ein Signal erfasst werden muss. Die Bedeutung dieser Frage wird an einem Beispiel erläutert.

Beispiel: Abtastwerte

Bild 2.2 zeigt Abtastwerte eines Signals, das mit unterschiedlichen Abtastzeiten T_A abgetastet wird. Die Abtastwerte sind jeweils über Geradenabschnitte miteinander verbunden. Das Signal scheint davon abzuhängen, wie es abgetastet wird.

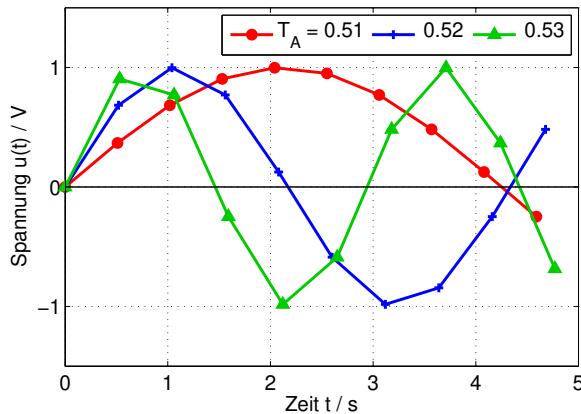


Bild 2.2: Darstellung der Abtastwerte eines Signals, das mit unterschiedlichen Abtastzeiten T_A abgetastet wird

Das zugrunde liegende Signal ist sinusförmig und wird mit der Funktion

$$u(t) = 1 \text{ V} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot t) \quad (2.2)$$

beschrieben. Der Vergleich der Abtastwerte mit dem Signal $u(t)$ in Bild 2.3 zeigt, dass alle in Bild 2.2 dargestellten abgetasteten Signale falsch oder zumindest irreführend sind.

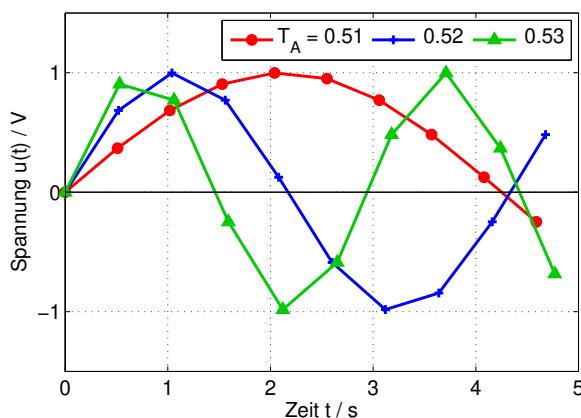


Bild 2.3: Vergleich der Abtastwerte eines harmonischen Signals mit dem Originalsignal

Die Abtastwerte liegen auf einer Schwingung mit wesentlich höherer Frequenz und geben nicht das eigentliche Signal wieder. Daraus kann die Schlussfolgerung gezogen werden, dass beim Abtasten Regeln eingehalten werden müssen, um das Signal richtig rekonstruieren zu können. Diese Überlegung wird zu dem Abtasttheorem führen.

Vor der allgemeinen Herleitung des Abtasttheorems werden die Abtastwerte eines harmonischen Signals $x(t)$ mit einer Frequenz f_0 analysiert. Das Signal ist definiert als

$$x(t) = \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \quad (2.3)$$

Das Signal wird mit einer Abtastzeit T_A abgetastet, sodass sich an den ganzzahligen Vielfachen k der Abtastzeit $t = k \cdot T_A$ die Werte ergeben zu

$$x[k] = x(k \cdot T_A) = \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot k \cdot T_A) \quad (2.4)$$

Die Abtastwerte der Signalfolge stimmen mit einer Signalfolge überein, die sich aus der Abtastung eines harmonischen Signals mit einer Frequenz f_0 und dem Vielfachen der Abtastfrequenz $n \cdot f_A$ ergibt. Einsetzen der Bedingungen ergibt

$$\begin{aligned} \sin(2 \cdot \pi \cdot (f_0 + n \cdot f_A) \cdot k \cdot T_A) &= \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \left(f_0 \cdot k \cdot T_A + \frac{n}{T_A} \cdot k \cdot T_A\right)\right) \\ &= \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot k \cdot T_A + 2 \cdot \pi \cdot n \cdot k) = \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot k \cdot T_A) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Der Faktor $n \cdot k$ ist dabei ein ganzzahliger Wert. Das bedeutet, dass die Abtastwerte, die ein Signal der Frequenz f_0 repräsentieren, genau dieselben sind wie diejenigen, die sich beim Abtasten eines Signals der Frequenz f_0 und einem Vielfachen der Abtastfrequenz f_A ergeben. Nach der Abtastung kann also nicht zwischen Signalen der Frequenz f_0 und $f_0 + n \cdot f_A$ unterschieden werden. Bild 2.4 stellt die Signal- und Abtastwerte für ein Beispiel dar.

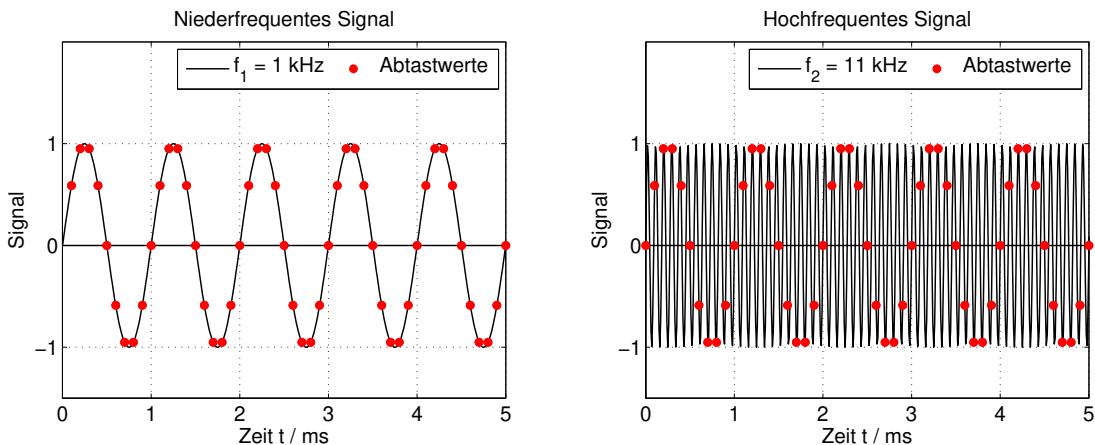


Bild 2.4: Abtastwerte für ein harmonisches Signal mit der Frequenz $f_{01} = 1 \text{ kHz}$ und $f_{02} = 11 \text{ kHz}$

Das Signal wird mit einer Frequenz $f_A = 10 \text{ kHz}$ abgetastet. Die Abtastwerte sind für ein Signal mit einer Frequenz $f_1 = 1 \text{ kHz}$ und einem Signal mit einer Frequenz $f_2 = 11 \text{ kHz}$ identisch.

Der hier für harmonische Schwingungen dargestellte Sachverhalt gilt auch für nicht harmonische Signale, da sie sich mit der Fourier-Transformation auf harmonische Signale zurückführen lassen. Dieser Effekt macht es erforderlich, den Abtastvorgang mathematisch zu beschreiben und Bedingungen für den Abtastvorgang zu definieren, unter denen ein abgetastetes Signal rekonstruiert werden kann.

2.3 Ideale Abtastung und ideale Rekonstruktion

Für die systemtheoretische Behandlung der digitalen Signalverarbeitung ist es erforderlich, die Abtastung und die Rekonstruktion des Signals mathematisch ideal zu beschreiben. Aus dieser Beschreibung wird anschließend das Abtasttheorem hergeleitet.

2.3.1 Mathematische Beschreibung der idealen Abtastung

Um die Abtastung eines Signals mathematisch beschreiben zu können, wird eine sogenannte Abtastfunktion $a(t)$ definiert. Da bei der idealen Abtastung Werte des analogen Signals zu diskreten Zeitpunkten erfasst werden, bietet sich eine Folge von Impulsen als Abtastfunktion an. Diese Abtastfunktion $a(t)$ ist mathematisch definiert als

$$a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k \cdot T_A) \quad (2.6)$$

Die Abtastfunktion wird mit dem analogen Signal $x(t)$ multipliziert. Da die Impulsfolge nur zu den Zeitpunkten $k \cdot T_A$ ungleich null ist, genügt es, die Funktion $x(t)$ nur zu diesen Zeitpunkten zu betrachten. Es ergibt sich als Darstellung für das ideal abgetastete Signal $x_A(t)$

$$x_A(t) = x(t) \cdot a(t) = x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k \cdot T_A) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k \cdot T_A) \cdot \delta(t - k \cdot T_A) \quad (2.7)$$

Bild 2.5 verdeutlicht die mathematische Beschreibung der Signale grafisch. Dabei werden die unendlich großen Impulse als Pfeile dargestellt, ihre Höhe repräsentiert das Gewicht des jeweiligen Impulses.

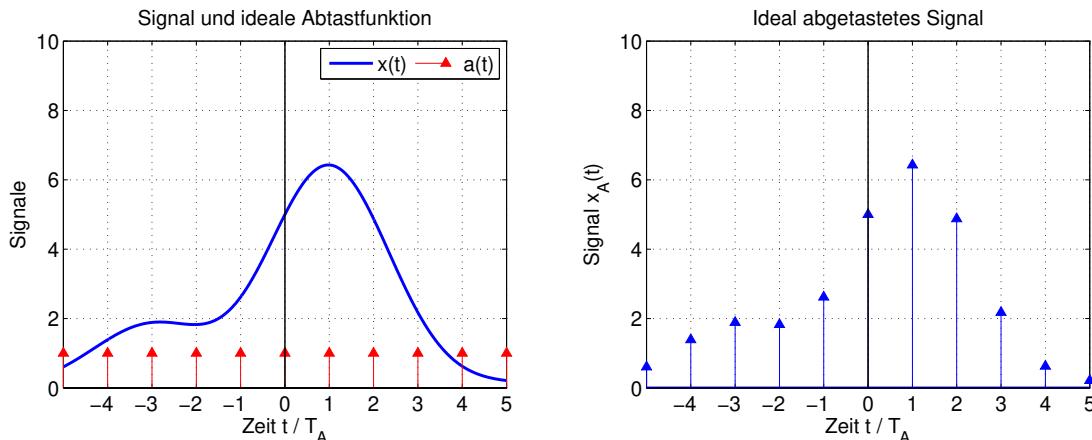


Bild 2.5: Darstellung der Signale im idealen Abtastprozess

Wird dieser Vorgang im Frequenzbereich betrachtet, wird deutlich, dass durch das Abtasten das Spektrum des Signals periodisch wird. Im Zeitbereich wird das Signal $x(t)$ mit der Abtastfunktion $a(t)$ multipliziert. Der Multiplikation im Zeitbereich entspricht eine Faltung im Frequenzbereich. Damit muss im Frequenzbereich das Spektrum des Signals $X(\omega)$ mit dem Spektrum der Abtastfunktion $A(\omega)$ gefaltet werden. Hierfür wird zunächst das Spektrum der Abtastfunktion errechnet.

$$\mathcal{I}\{a(t)\} = \mathcal{I}\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k \cdot T_A) \right\} \quad (2.8)$$

Die Gleichung kann als Fourier-Reihe dargestellt werden und in den folgenden Ausdruck umgeformt werden

$$\mathcal{I}\{a(t)\} = \mathcal{I}\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k \cdot T_A) \right\} = \frac{2 \cdot \pi}{T_A} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T_A}\right) = \frac{2 \cdot \pi}{T_A} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k \cdot \omega_A) \quad (2.9)$$

Dies bedeutet, dass die Abtastfunktion auch im Frequenzbereich einer Impulsfolge entspricht, wobei der Abstand der Impulse proportional zur Abtastfrequenz

$$\omega_A = 2 \cdot \pi \cdot f_A = \frac{2 \cdot \pi}{T_A} \quad (2.10)$$

ist. Über die Faltungsbeziehung ergibt sich für die abgetastete Funktion $x_A(t)$ im Frequenzbereich

$$\begin{aligned} X_A(\omega) &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left(X(\omega) * \left(\frac{2 \cdot \pi}{T_A} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T_A}\right) \right) \right) \\ &= \frac{1}{T_A} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\omega - k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T_A}\right) = \frac{1}{T_A} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k \cdot \omega_A) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Die Eine Abtastung mit einer idealen Impulsreihe der idealen Abtastfunktion führt demnach zu einer in ω_A periodischen Fortsetzung des Spektrums $X(\omega)$ des kontinuierlichen Zeitsignals $x(t)$ und zu einer Multiplikation mit dem Faktor $1/T_A$. Bild 2.6 stellt die Spektren im idealen Abtastprozess schematisch dar.

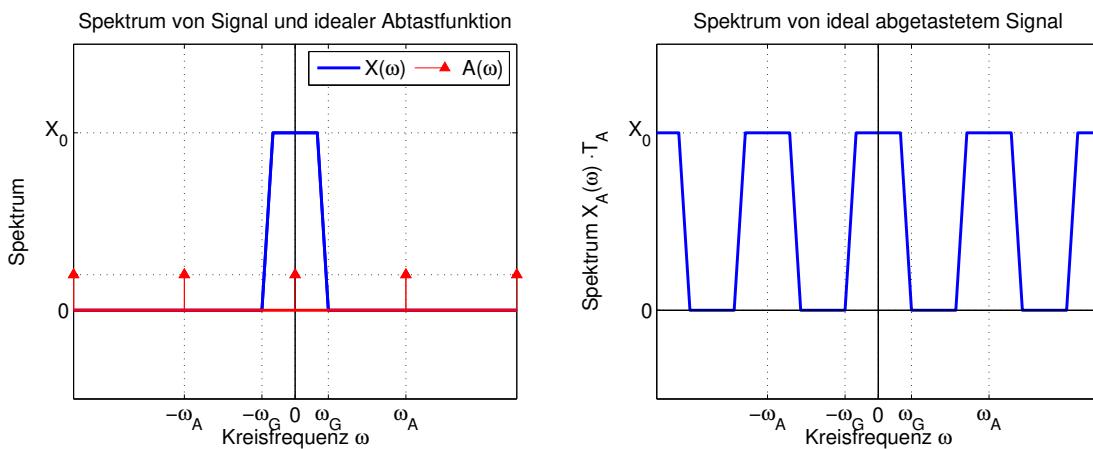


Bild 2.6: Darstellung der Spektren im idealen Abtastprozess

Die periodische Wiederholung des Spektrums ist dafür verantwortlich, dass die Abtastwerte von zu langsam abgetasteten Signalen mit den Frequenzen f_0 und $f_0 + n \cdot f_A$ nicht unterschieden werden können. Die mathematische Herleitung bestätigt damit den in Bild 2.6 dargestellten Sachverhalt.

Der ursprüngliche Frequenzbereich des Signals $x(t)$ mit dem Frequenzbereich $-\omega_G \leq \omega \leq \omega_G$ wird als Basisband des Signals bezeichnet. Durch den Abtastvorgang wird das Basisband periodisch in ω_A wiederholt.

2.3.2 Ideale Rekonstruktion eines Signals

Da bei der idealen Abtastung das Spektrum eines Signals periodisch wiederholt und mit dem Faktor $1/T_A$ multipliziert wird, liegt es auf der Hand, die Wiederholung des Spektrums durch eine entsprechende Filterung zu eliminieren. Durch eine hier ideal angenommene Tiefpass-Funktion mit einer Bandbreite Grenzfrequenz von $\omega_A/2$ kann das sogenannte Basisband, also das ursprüngliche Spektrum der Zeitfunktion, isoliert werden. Bild 2.7 verdeutlicht den Filterprozess.

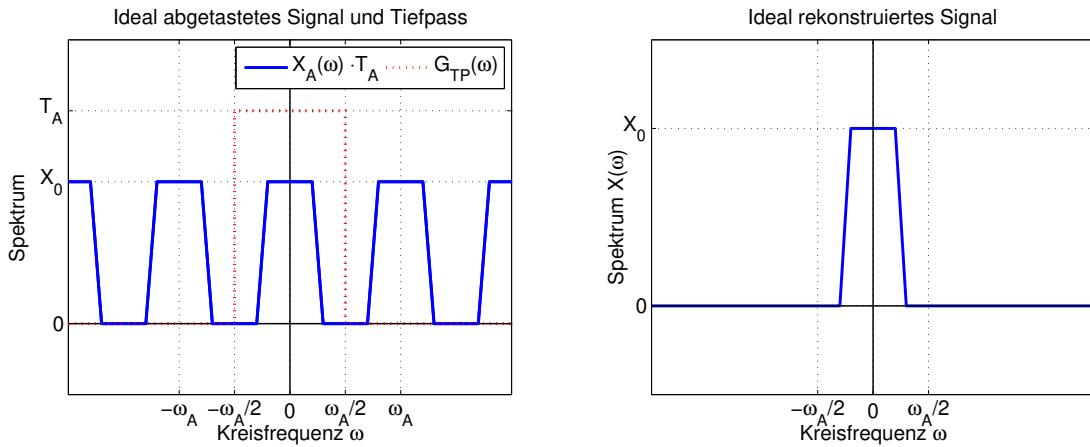


Bild 2.7: Rekonstruktion des Spektrums der Zeitfunktion durch ideale Tiefpass-Filterung, idealisierte Tiefpass-Funktion gestrichelt dargestellt

Mathematisch gesehen muss das Spektrum mit einer idealen Tiefpass-Filterfunktion und dem Faktor \$T_A\$ multipliziert werden. Das Spektrum ergibt sich damit zu

$$X(\omega) = G_{TP}(\omega) \cdot X_A(\omega) = T_A \cdot \left(\sigma\left(\omega + \frac{\omega_A}{2}\right) - \sigma\left(\omega - \frac{\omega_A}{2}\right) \right) \cdot \frac{1}{T_A} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k \cdot \omega_A)$$

=

Die ideale Rekonstruktion kann auch im Zeitbereich durchgeführt werden. Der Multiplikation im Frequenzbereich entspricht im Zeitbereich die Faltung der entsprechenden Zeitfunktionen. Die Impulsantwort \$g_{TP}(t)\$ der Filterfunktion \$G_{TP}(\omega)\$ ist nach den Rechenregeln der Fourier-Transformation

$$g_{TP}(t) = \frac{T_A}{\pi} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega_A}{2} \cdot t\right)}{t} \quad (2.13)$$

Die Funktion Impulsantwort des Tiefpasses ist in Bild 2.8 dargestellt. Zum Zeitpunkt \$t = 0\$ ist die Funktion 1, zu den Zeitpunkten \$k \cdot T_A\$ ist die Funktion null.

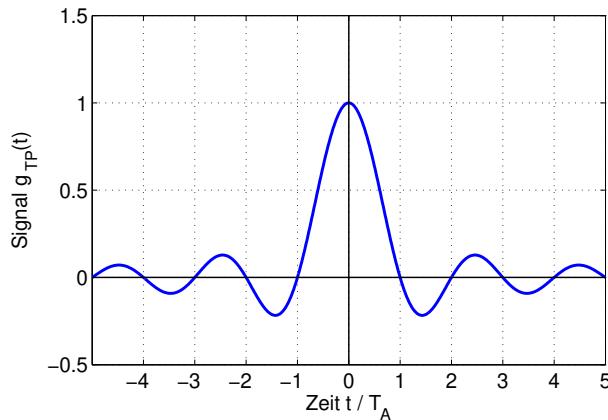


Bild 2.8: Impulsantwort des idealen Tiefpass-Filters zur Rekonstruktion

Das Signal \$x(t)\$ berechnet sich über das Faltungsintegral. Da die Faltung einer Funktion \$x(t)\$ mit einem Impuls an der Stelle \$t_0\$ die Funktion an die Stelle \$x(t - t_0)\$ verschiebt, ergibt sich

$$x(t) = g_{TP}(t) * x_A(t) = \frac{T_A}{\pi} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega_A}{2} \cdot t\right)}{t} * \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k \cdot T_A) \cdot \delta(t - T_A \cdot k) \quad (2.14)$$

Das Signal setzt sich aus der Summe von Termen $g_{TP}(t)$ zusammen, die jeweils um $k \cdot T_A$ verschoben sind und mit dem Gewicht $x(k \cdot T_A)$ multipliziert werden. Bild 2.9 stellt die Rekonstruktion im Zeitbereich dar.

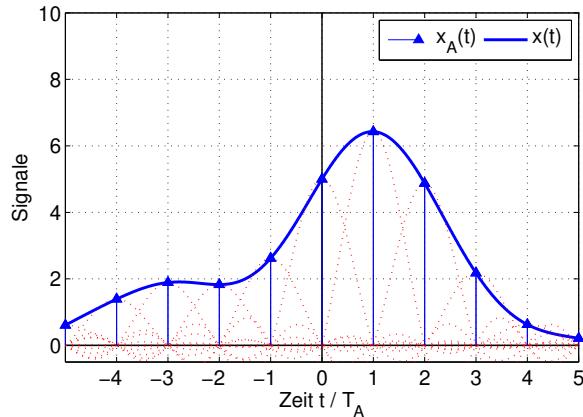


Bild 2.9: Rekonstruktion eines ideal abgetasteten Signals im Zeitbereich

Das Ergebnis der Überlagerung ist entsprechend erwartungsgemäß die der ursprüngliche Zeitfunktion $x(t)$.

2.3.3 Abtasttheorem nach Shannon

In den vorangegangenen Abschnitten wird gezeigt, dass sich das Spektrum eines abgetasteten Signals periodisch mit der Abtastfrequenz ω_A fortsetzt. Diese periodische Wiederholung ist Grundlage für die Herleitung des Abtasttheorems nach Shannon.

Gegeben sei ein bandbegrenztes Signal $x(t)$, das abgetastet werden soll. Durch die Physik des Systems ist die Bandbreite des Signals auf Frequenzen $\omega \leq \omega_G$ begrenzt. Bei der Abtastung des Signals wird das Spektrum der Zeitfunktion, wie in Bild 2.7 dargestellt, periodisch in ω_A wiederholt. Durch eine hier ideal angenommene Tiefpass-Funktion kann das sogenannte Basisband, also das ursprüngliche Spektrum der Zeitfunktion, isoliert werden. Bild 2.7 verdeutlicht den Filterprozess.

Ist die Abtastzeit T_A zu groß, wird ω_A zu klein und die einzelnen Spektren der abgetasteten Funktion überlagern sich. Signalverzerrungen, die sich beim Abtasten durch Überlagerung der Spektren ergeben, werden als Aliasing bezeichnet. Damit die einzelnen Spektren voneinander getrennt bleiben, muss nach Bild 2.7 die Bedingung

$$\omega_G < \omega_A - \omega_G \quad (2.15)$$

beziehungsweise

$$\omega_A = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{T_A} > 2 \cdot \omega_G \quad (2.16)$$

erfüllt sein. Dieses Ergebnis wird als Abtasttheorem bezeichnet. Die Abtastfrequenz ω_A muss mindestens mehr als doppelt so groß sein wie die Bandbreite ω_G des abzutastenden Signals. Damit muss für die Abtastzeit T_A gelten:

$$T_A < \frac{\pi}{\omega_G} \quad (2.17)$$

Bild 2.10 zeigt die Spektren abgetasteter Signale für genügend große Abtastfrequenz, gerade ausreichende und zu kleine Abtastfrequenz.

Im ersten Fall $X_{A1}(\omega)$ wird mit einer Abtastfrequenz gearbeitet, die deutlich größer ist als das Abtasttheorem vorschreibt. Dieser Fall wird als Oversampling bezeichnet. Durch die hohe Abtastfrequenz werden das Spektrum im Basisband und die nächsthöheren Spektren deutlich voneinander getrennt, sodass mit einem Tiefpass-Filter mit vergleichsweise flachem Übergang zwischen Sperr- und Durchlass-Bereich gearbeitet werden kann.

Im zweiten Fall $X_{A2}(\omega)$ wird das Abtasttheorem gerade eingehalten. Es zeigt sich aber, dass die Rekonstruktion nur mit einem idealen Tiefpass-Filter erfolgen kann, der technisch nicht realisiert werden kann. Dieser Fall entspricht dem theoretischen Grenzfall des Abtasttheorems.

Im Fall einer zu kleinen Abtastfrequenz $X_{A3}(\omega)$ überlagern sich die Spektren. Das Signal kann selbst mit einem idealen Tiefpass-Filter nicht fehlerfrei rekonstruiert werden. Es kommt zu Signalverzerrungen oder Aliasing.

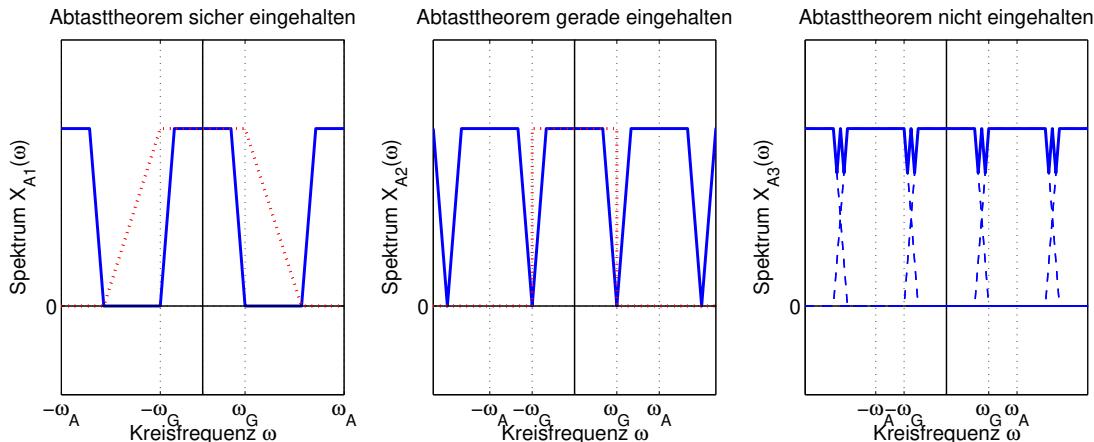


Bild 2.10: Spektren abgetasteter Signale für genügend große Abtastfrequenz $X_{A1}(\omega)$, gerade ausreichende Abtastfrequenz $X_{A2}(\omega)$ und für zu kleine Abtastfrequenz $X_{A3}(\omega)$

Beispiel: Abtastrate einer Sound-Karte

Sound-Karten von Computern besitzen einen Analog-Digital-Wandler (ADC). Er wandelt das analoge Signal in ein digitales Signal um. Bei Sound-Karten ist zum einen die Auflösung des ADC wichtig, da sie die Quantisierungsfehler und damit das Rauschen bestimmt. Zweiter wesentlicher Faktor ist die Abtastrate.



Bild 2.11: Sound-Karte für Personal Computer

Eine Abtastfrequenz $f_A = 44$ kHz ermöglicht die Aufnahme und Wiedergabe bis zu einer theoretischen Bandbreite von

$$f_G = \frac{f_A}{2} = 22 \text{ kHz} \quad (2.18)$$

Mit der Sound-Karte können damit Musiksignale mit einer maximalen Frequenz von 22 kHz verarbeitet werden.

2.3.4 Bandbegrenzung des abzutastenden Signals

Das Abtasttheorem geht davon aus, dass das Signal bandbegrenzt ist. Reale Signale haben in praktischen Anwendungen aber im Allgemeinen keine harte Bandbegrenzung. Vielmehr ergibt sich ihre Bandbreite aus dem Tiefpassverhalten des Systems, das das Signal generiert, und dem Spektrum von überlagerten Störungen. Um den Einfluss der mangelhaften Bandbegrenzung zu reduzieren, kann ein analoger Tiefpass wie zum Beispiel ein RC-Glied zur Filterung eingesetzt werden. Er verhindert, dass sich in dem Spektrum höhere Frequenzanteile befinden als erwartet, und reduziert damit den Einfluss von Störungen. Das Tiefpass-Filter wird aufgrund seiner Funktion als Anti-Aliasing-Filter bezeichnet. Die Wirkung des Anti-Aliasing-Filters wird in Bild 2.12 veranschaulicht.

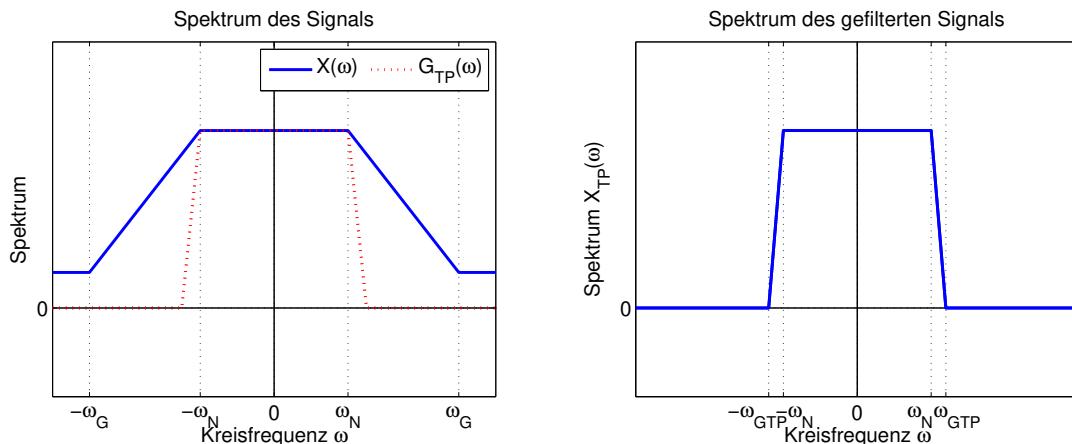


Bild 2.12: Wirkung des Anti-Aliasing-Filters auf die Bandbegrenzung des Spektrums $X(\omega)$ des Signals $x(t)$

Das Signal $x(t)$ hat ein Spektrum, dessen Information im Nutzbereich $-\omega_N < \omega < \omega_N$ liegt. Es besitzt aber zum Beispiel aufgrund von Störungen ein breiteres Spektrum. Damit existieren auch oberhalb der als maximal angenommenen Bandbreite ω_G Spektralanteile. Durch den Einsatz eines Tiefpass-Filters, das den Frequenzbereich $\omega < -\omega_N$ und den Bereich $\omega > \omega_N$ dämpft, ergibt sich bei dem neu entstandenen Signal ein Spektrum $X_{TP}(\omega)$, das im Nutzbereich dem des ursprünglichen Signals entspricht, im übrigen Bereich aber stärker gedämpft ist. Dieses Signal kann wegen der geringeren Bandbreite $\omega_{GTP} < \omega_G$ mit einer geringeren Frequenz abgetastet werden und der Rauschanteil wird durch die Bandbegrenzung reduziert.

In technischen Anwendungen wird deshalb praktisch immer ein Eingangstiefpass eingesetzt, das das Spektrum des Eingangssignals auf die notwendige Bandbreite begrenzt. Die Spezifikation von Filtern und ihr Entwurf werden im Teil A dieser Buchreihe diskutiert.

Beispiel: Abtastung Drucksensor im Steuergerät

Für die Regelung des Ladedrucks von Turboladern werden Drucksensoren eingesetzt.



Bild 2.13: Drucksensor zur Messung des Ladedrucks (Bosch)

Der Drucksensor, der den Ladedruck misst, hat besitzt laut Datenblatt eine Zeitkonstante $T = 0.1 \text{ ms}$. Das entspricht einer 3dB-Grenzfrequenz von

$$\omega_G = \frac{1}{T} = 10 \text{ krad/s} \quad (2.19)$$

Das Motor-Steuergerät tastet das Signal mit einer Abtastzeit T_A von 1 ms ab. Es ergibt sich eine Abtastfrequenz von

$$\omega_A = \frac{2 \cdot \pi}{T_A} = 6.283 \text{ krad/s} \quad (2.20)$$

Das Abtasttheorem ist demnach nicht erfüllt. Außerdem sind dem Sensorsignal Störungen überlagert, die Spektralanteile weit oberhalb der Grenzfrequenz besitzen können. Zur Vermeidung von Aliasing-Effekten wird ein Anti-Aliasing-Filter eingesetzt. Es weist eine Zeitkonstante von $T_{TP} = 0.6 \text{ ms}$ auf, was einer 3dB-Grenzfrequenz von

$$\omega_{TP} = \frac{1}{0.6 \text{ ms}} = 1.67 \text{ krad/s} < 3.14 \text{ krad/s} = \frac{\omega_A}{2} \quad (2.21)$$

entspricht. Durch den Einsatz des Tiefpass-Filters wird bei derselben Abtastrate das Abtasttheorem eingehalten. Das Filter hat eine Dämpfung von - 20 dB pro Dekade. Die sich aus der endlichen Steilheit ergebenden Effekte werden in einer Übungsaufgabe diskutiert.

2.4 Reale Abtastung und Rekonstruktion

Die zuvor vorgestellte ideale Abtastfunktion $a(t)$ ist nicht realisierbar, da ideale Impulse technisch nicht erzeugt werden können. Dies liegt an der unendlich kurzen Dauer sowie der unendlichen Steilheit und Höhe von Impulsen. Aus dieser Überlegung ergeben sich die reale Abtastung und die reale Rekonstruktion von Signalen.

2.4.1 Reale Abtastung eines Signals

Reale beziehungsweise technisch realisierbare Abtastsysteme brauchen eine Wandlungszeit T_W , um aus dem analogen Signal ein zeitdiskretes Signal zu generieren. Die Wandlungszeit ergibt sich zum Beispiel aus einem Ladungstransport oder einem Approximationsprozess, bei dem das Signal als Mittelwert über einen Zeitraum T_W durch Integration bestimmt wird. Das real abgetastete Signal $x_{AW}(t)$ wird deshalb mit dem Ausdruck

$$x_{AW}(t) = \frac{1}{T_W} \cdot \int_{t-T_W}^t x(\tau) d\tau \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k \cdot T_A) = x_M(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k \cdot T_A) \quad (2.22)$$

beschrieben. Es handelt sich um das Produkt von dem gleitenden Mittelwert $x_M(t)$ und der idealen Abtastfunktion $a(t)$ im Zeitbereich. Zur Berechnung des Spektrums $X_{AW}(\omega)$ müssen die Spektren der beiden Signale berechnet werden. Dazu wird das Integral in zwei Summanden zerlegt.

$$x_M(t) = \frac{1}{T_W} \cdot \int_{t-T_W}^t x(\tau) d\tau = \frac{1}{T_W} \cdot \left(\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{t-T_W} x(\tau) d\tau \right) \quad (2.23)$$

Mit der Integrations- und Verschiebungsregel ergibt sich das zugehörige Spektrum.

$$\begin{aligned} X_M(\omega) &= \frac{1}{T_W} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \omega} \cdot X(\omega) + \pi \cdot X(0) \cdot \delta(\omega) \right) \cdot \left(1 - e^{-j \cdot \omega \cdot T_W} \right) \\ &= \frac{1}{T_W} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot \omega} \cdot X(\omega) + \pi \cdot X(0) \cdot \delta(\omega) \right) \cdot 2 \cdot j \cdot \sin\left(\frac{\omega \cdot T_W}{2}\right) \cdot e^{-\frac{j \cdot \omega \cdot T_W}{2}} \\ &\quad \frac{2}{\omega \cdot T_W} \cdot \sin\left(\frac{\omega \cdot T_W}{2}\right) \cdot X(\omega) \cdot e^{-\frac{j \cdot \omega \cdot T_W}{2}} + \frac{\pi \cdot X(0)}{T_W} \cdot \delta(\omega) \cdot 2 \cdot j \cdot \sin\left(\frac{\omega \cdot T_W}{2}\right) \cdot e^{-\frac{j \cdot \omega \cdot T_W}{2}} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Da der letzte Summand in Gleichung (2.24) null ist, gilt:

$$X_M(\omega) = \frac{2}{\omega \cdot T_W} \cdot \sin\left(\frac{\omega \cdot T_W}{2}\right) \cdot X(\omega) \cdot e^{-\frac{j \cdot \omega \cdot T_W}{2}} \quad (2.25)$$

Mit dem Spektrum der idealen Abtastfunktion $a(t)$ aus Gleichung (2.9) und der Multiplikationsregel kann das Spektrum des real abgetasteten Signals berechnet werden zu

$$\begin{aligned} X_{AW}(\omega) &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{2}{\omega \cdot T_W} \cdot \sin\left(\frac{\omega \cdot T_W}{2}\right) \cdot X(\omega) \cdot e^{-\frac{j \cdot \omega \cdot T_W}{2}} \right) * \left(\frac{2 \cdot \pi}{T_A} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k \cdot \omega_A) \right) \\ &= \frac{1}{T_A} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{(\omega - k \cdot \omega_A) \cdot T_W} \cdot \sin\left(\frac{(\omega - k \cdot \omega_A) \cdot T_W}{2}\right) \cdot X(\omega - k \cdot \omega_A) \cdot e^{-\frac{j \cdot (\omega - k \cdot \omega_A) \cdot T_W}{2}} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Wie bei der idealen Abtastung wird das Spektrum mit $1/T_A$ skaliert und periodisch in ω_A wiederholt. Allerdings wird das Spektrum des zeitkontinuierlichen Signals vor der periodischen Wiederholung mit einem Frequenzgang multipliziert, der sich aus der gleitenden Mittelung ergibt. Allerdings wird das Spektrum des zeitkontinuierlichen Signals vor der periodischen Wiederholung mit dem Spektrum der Fensterfunktion multipliziert. Dieser Vorgang wird in Bild 2.14 für eine Wandlungszeiten von $T_W = T_A$ und $T_W = 0.1 \cdot T_A$ dargestellt. Die Auswirkung auf das Spektrum im Basisband steigt mit steigender Wandlungszeit. In Analog-Digital-Wandlern wird der Effekt durch geringe Wandlungszeiten klein gehalten und durch den Einsatz inverser Filter kompensiert.

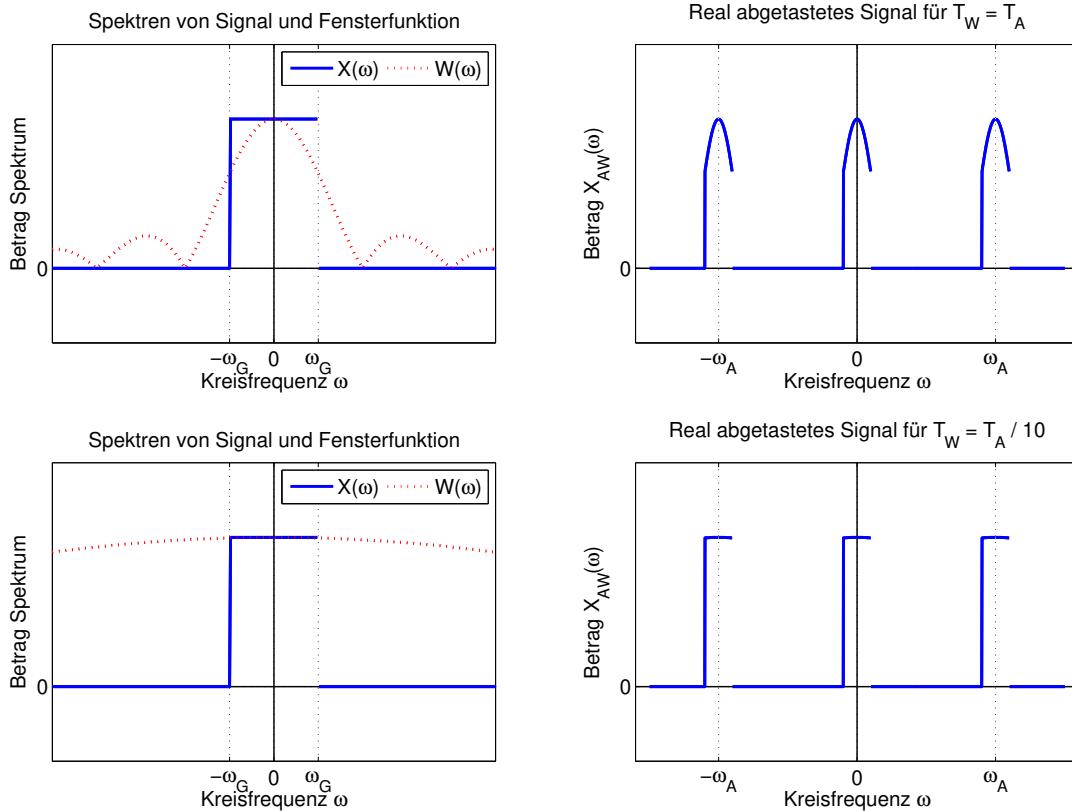


Bild 2.14: Darstellung des Spektrums eines realen Abtastprozesses für unterschiedliche Wandlungszeiten $T_W = T_A$ und $T_W = 0.1 \cdot T_A$

2.4.2 Reale Rekonstruktion eines Signals

Nach der Abtastung liegen einzelne Abtastwerte vor, die das Signal zu den entsprechenden Abtastzeiten charakterisieren. Für einige Anwendungen ist es notwendig, diese zeitdiskreten Signale wieder in zeitkontinuierliche Signale zu wandeln. Die bereits diskutierte ideale Rekonstruktion eines Signals ist wegen des ideal angenommenen Tiefpass-Filters nicht kausal und kann deshalb technisch nicht realisiert werden. Eine technisch realisierbare Rekonstruktion des ursprünglichen Signals aus den Abtastwerten wird in zwei Schritten realisiert:

- Erzeugung eines stufenförmigen Ausgangssignals mit einem Halteglied
- Tiefpass-Filterung

Die beiden Schritte werden im Zeit- und Frequenzbereich beschrieben. Zur Übersicht stellt Bild 2.15 den Signalfluss einer realen Signalrekonstruktion bei idealer Signalabtastung dar.

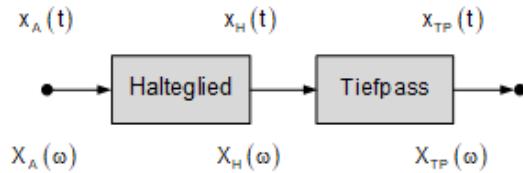


Bild 2.15: Signalfloss zur realen Rekonstruktion

Erzeugung eines stufenförmigen Ausgangssignals mit einem Halteglied

Die einzelnen Abtastwerte stellen das Signal zu den entsprechenden Abtastzeiten dar. Das Halteglied H hält den aktuell gültigen Wert des digitalen Systems am Ausgang fest, bis der nächste Abtastwert zur Verfügung steht. Dadurch steht zu jedem Zeitpunkt t ein Ausgangssignal zur Verfügung und das Signal ist wieder zeitkontinuierlich. Bild 2.16 zeigt an einem Beispiel das abgetastete Signal $x_A(t)$ und das Signal $x_H(t)$ nach dem Halteglied.

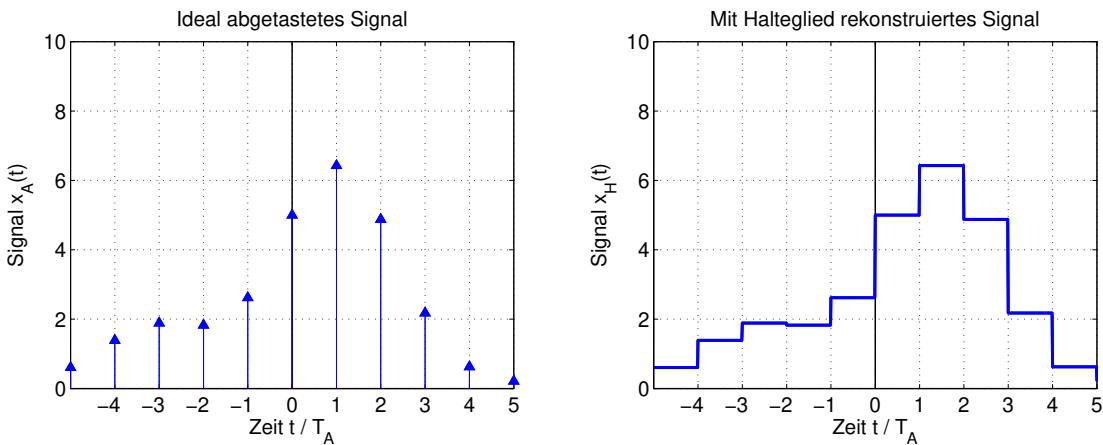


Bild 2.16: Rekonstruktion eines abgetasteten Signals mit Halteglied

Im Zeitbereich kann das kontinuierliche Signal nach dem Halteglied analog zur realen Wandlung mit Rechteckfunktionen beschrieben werden.

$$w(t) = \frac{1}{T_W} \cdot (\sigma(t) - \sigma(t - T_W)) \quad (2.27)$$

Das Signal nach dem Halteglied kann wieder als Faltung ausgedrückt werden.

$$\begin{aligned} x_H(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_A(k \cdot T_A) \cdot (\sigma(t - k \cdot T_A) - \sigma(t - (k + 1) \cdot T_A)) \\ &= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k \cdot T_A) \cdot \delta(t - k \cdot T_A) \right) * (\sigma(t) - \sigma(t - T_A)) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Der Faltung der Signale im Zeitbereich entspricht die Multiplikation der Spektren im Frequenzbereich. Das Spektrum des Signals nach dem Halteglied ergibt sich damit aus dem Produkt des Spektrums $X_A(\omega)$ und dem Frequenzgang des Halteglieds $H(\omega)$.

$$H(\omega) = \frac{2}{\omega} \cdot \sin\left(\frac{\omega \cdot T_A}{2}\right) \cdot e^{-j \cdot \frac{\omega \cdot T_A}{2}} \quad (2.29)$$

Bild 2.17 zeigt das Spektrum des abgetasteten Signals $x_A(t)$ und dem Signal $x_H(t)$ nach dem Halteglied.

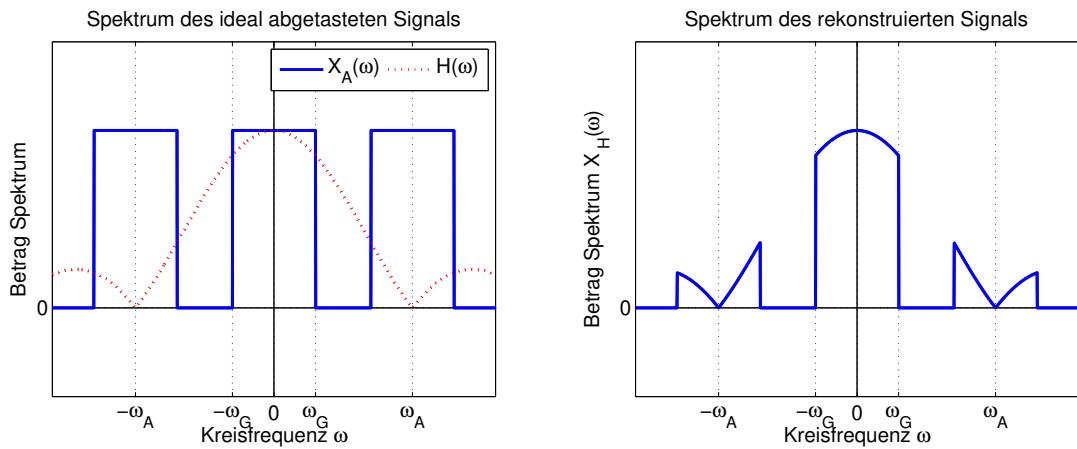


Bild 2.17: Betrag des Spektrums vom abgetasteten Signal $x_A(t)$ und vom Signal $x_H(t)$ nach dem Halteglied

Durch das Halteglied wird das Spektrum im Bereich der Grenzfrequenz ω_G gedämpft. Diese Dämpfung wirkt sich aber vor allem auf die periodische Fortsetzung des Spektrums aus.

Filterung des stufenförmigen Signals

Zur Vermeidung von Signalsprüngen im rekonstruierten Signal wird das Spektrum nach dem Halteglied mit einem geeigneten Filter gefiltert. Mit der Übertragungsfunktion dem Frequenzgang des Filters $G_R(\omega)$ ergibt sich der Frequenzgang des rekonstruierten Signals $x_R(t)$ zu

$$X_R(\omega) = X_A(\omega) \cdot \frac{2}{\omega} \cdot \sin\left(\frac{\omega \cdot T_A}{2}\right) \cdot e^{-j \cdot \frac{\omega \cdot T_A}{2}} \cdot G_R(\omega) \quad (2.30)$$

Idealerweise würde das Filter die Abweichungen im Basisband des Nutzsignals $-\omega_N < \omega < \omega_N$ kompensieren und die Frequenzanteile ober- und unterhalb des Basisbandes vollständig eliminieren. Bild 2.18 verdeutlicht diesen Ansatz.

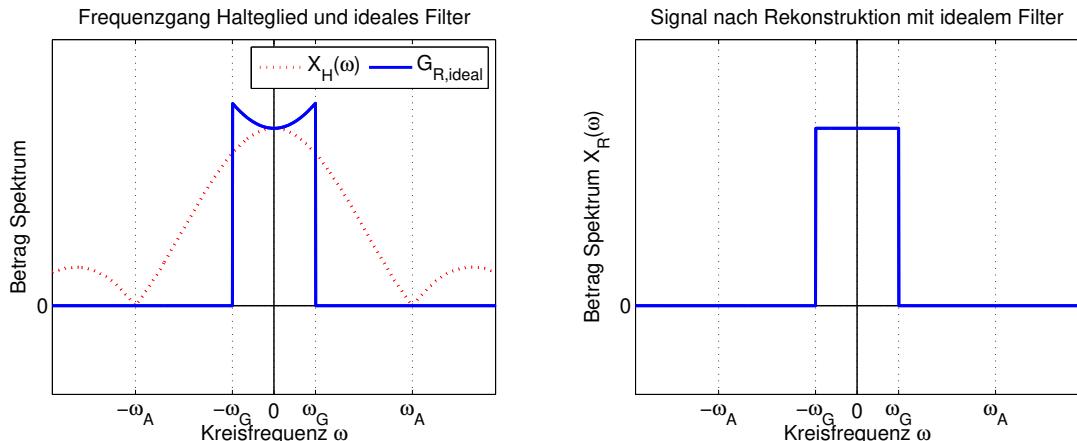


Bild 2.18: Ideales Filter zur Rekonstruktion eines abgetasteten Signals

Dieses ideale Filter ist wegen der idealen Flankensteilheit nicht realisierbar. Reale Filter beschränken sich auf eine endliche Flankensteilheit. Eine Möglichkeit, die erforderliche Flankensteilheit zu senken, ist eine Steigerung der Abtastrate f_A . Dieser Vorgang wird als Überabtastung oder Oversampling bezeichnet. Durch die höhere Abtastrate werden zwei Effekte erzielt:

- Die Trennung der periodischen Spektren ist größer. Dadurch kann die Ordnung des Filters zur Signal-Rekonstruktion reduziert werden.
- Mit höherer Abtastrate liegt der Nutzbereich des Signals immer mehr im flachen Bereich der Übertragungsfunktion des Halteglieds, sodass eine Kompensation des Frequenzgangs des Halteglieds nicht weiter notwendig ist.

Die zum Halteglied inverse Charakteristik im Durchlassbereich kann über ein digitales Filter erreicht werden, der als Teil der digitalen Signalverarbeitung realisiert wird.

2.4.3 Totzeit bei der realen Signalabtastung

In den vorangegangenen Abschnitten wird der Abtastvorgang hinsichtlich der Auswirkung auf den Betrag des Spektrums diskutiert. Die Übertragungsfunktionen weisen aber immer auch eine Phasenverschiebung auf. Die gesamte Phasenverschiebung ergibt sich bei der realen Abtastung nach den obigen Darstellungen aus den Totzeiten des Wandlers und des Halteglieds.

$$T_T = \frac{T_W}{2} + \frac{T_A}{2} \quad (2.31)$$

Dazu kommen die Phase des Anti-Aliasing-Filters und des Tiefpass-Filters zur Signalrekonstruktion, sodass gegenüber dem Eingangssignal eine teilweise erhebliche Signalverzögerung entsteht. Die Zeitverzögerung sowie das Einschwingverhalten des rekonstruierten Signals werden an einem Beispiel verdeutlicht.

Beispiel: Signalrekonstruktion

Ein Signal der Form

$$x(t) = 5 \cdot e^{-0.1 \cdot t^2} \cdot (1 + 0.5 \cdot \sin(t)) \cdot (\sigma(t+5) - \sigma(t-5)) \quad (2.32)$$

wird mit einer Abtastzeit von $T_A = 1$ abgetastet, das System besitzt eine Wandlungszeit von $T_W = 1$. Es entstehen die in Tabelle 2.1 dargestellten Abtastwerte.

Tabelle 2.1: Tabellarische Übersicht über Signaleigenschaften für Signalfolgen

T/T_A	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$x(k \cdot T_A)$	0.607	1.392	1.889	1.828	2.621	5.000	6.428	4.875	2.176	0.628	0.214

Die Abtastwerte werden über ein Halteglied und einen Tiefpass mit einer Zeitkonstante $T_{TP} = 0.5$ rekonstruiert. Bild 2.19 zeigt das analoge Signal $x(t)$ und das durch Abtastung und Rekonstruktion erzeugte Signal $x_{TP}(t)$ bei Verwendung eines Tiefpass erster Ordnung.

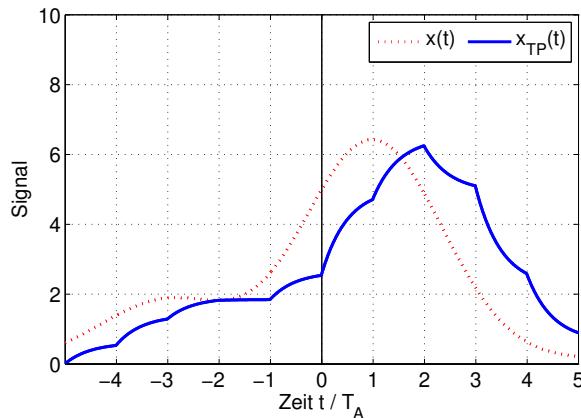


Bild 2.19: Vergleich eines Zeitsignals $x(t)$ und der realen Rekonstruktion des abgetasteten Signals mit einem Tiefpass erster Ordnung

Das rekonstruierte Signal weist zum einen eine Verzögerung von

$$T_T = \frac{T_W}{2} + \frac{T_A}{2} = \frac{T_A}{2} + \frac{T_A}{2} = T_A \quad (2.33)$$

auf. Außerdem ist das Einschwingen des Tiefpasses nach jedem Quantisierungsschritt zu erkennen. Diese Signalverzögerung T_T ist insbesondere bei Regelungssystemen kritisch anzusehen. Auch in dieser Beziehung ist eine hohe Abtastrate, die wegen kleiner Abtastzeit und Wandlungszeit zu einer Verringerung der Totzeit führt, vorteilhaft.



Im Online-Portal *Systemtheorie Online* verdeutlicht die *Applikation Signalabtastung und Signalrekonstruktion* grafisch, welche Effekte durch Anti-Aliasing-Filter, reale Abtastung und reale Rekonstruktion entstehen.

2.5 Literatur

2.5.1 Literaturstellen mit besonders anschaulicher Darstellung

- [Lyon04] Lyons, Richard G.: Understanding Digital Signal Processing, Prentice Hall, New Jersey, 2004
- [Stea99] Stearns, Samuel: Digitale Verarbeitung analoger Signale, 7. Auflage, Oldenbourg Verlag München, 1999

2.5.2 Literaturstellen mit praktischen Anwendungen

- [Wern08] Werner, Martin: Signale und Systeme, Vieweg Studium Technik, Wiesbaden, 2008
- [Meye08] Meyer, Martin: Signalverarbeitung – Analoge und digitale Signale, Systeme und Filter, Vieweg Studium Technik, Wiesbaden, 2008

2.5.3 Weiterführende Literatur

- [Opp04] Oppenheim, Alan: Zeitdiskrete Signalverarbeitung, 2. überarbeitete Auflage, Pearson Studium, 2004
- [Kamm98] Kammeyer, Karl: Digitale Signalverarbeitung, B.G. Teubner Stuttgart, 1998

3 Zeitdiskrete Signale

Die Systemtheorie beschreibt Systeme unter anderem durch den Zusammenhang von Signalen am Systemeingang und Systemausgang. In Teil A dieser Buchreihe sind Beispiele für unterschiedliche zeitkontinuierliche Signalformen dargestellt. Außerdem sind dort bereits Eigenschaften und Rechenregeln für zeitkontinuierliche Signale beschrieben. In diesem Kapitel werden zeitdiskrete Signale behandelt.

Im ersten Abschnitt wird die Klassifizierung von zeitkontinuierlichen Signalen auf zeitdiskrete Signalfolgen übertragen.

Für die Charakterisierung von zeitdiskreten Systemen können Testfolgen als Eingangssignal eingesetzt werden, die eine besonders anschauliche Interpretation des Ausgangssignals ermöglichen. Bei zeitdiskreten Systemen ist dabei die Impulsfolge von großer Bedeutung, weil sie sich als reale Signalfolge darstellen lässt und eine anschauliche Interpretation der Systemantwort ermöglicht. Die Impulsfolge und ähnliche Folgen werden im zweiten Teil dieses Kapitels diskutiert und das Rechnen mit diesen Testfolgen an Beispielen erläutert.

Auch für zeitdiskrete LTI-Systeme gilt das Superpositionsprinzip. Kann ein Eingangssignal aus einer Linearkombination bekannter Signalfolgen beschrieben werden, ergibt sich das Ausgangssignal aus derselben Linearkombination der zugehörigen Ausgangssignale. Deshalb wird im dritten Teil dieses Kapitels das Rechnen mit Signalfolgen vorgestellt.

Die Reaktion eines zeitdiskreten Systems kann vielfach über Kosinus- und Exponentialfolgen beschrieben werden. Beide Folgen können zu komplexen Exponentialfolgen zusammengefasst werden. Komplexe Exponentialfolgen werden dazu verwendet, das Einschwingverhalten von Systemen effizient zu beschreiben. Der vierte Teil dieses Kapitels widmet sich daher harmonischen Schwingungsfolgen sowie reellen und komplexen Exponentialfolgen.

Die hier dargestellten Signaleigenschaften und Rechenmethoden sind denen im zeitkontinuierlichen Bereich sehr ähnlich. Sie sind hier trotzdem ausführlich aufgeführt, um einen Quereinstieg in das Thema der zeitdiskreten Systeme zu ermöglichen.

3.1 Klassen und Eigenschaften von Signalen

In Teil A dieser Buchreihe werden verschiedene Signalklassen dargestellt. Die dort vorgestellten Signalklassen und Eigenschaften beziehen sich auf zeitkontinuierliche Signale. Mit der Abtastung von Signalen werden Signale zeitquantisiert. Wie bereits in Kapitel 2 dargestellt wird, wird bei der Beschreibung der abgetasteten Signale die Amplituden-Quantisierung gerne vernachlässigt, sodass im vorliegenden Teil B dieser Buchreihe zeitdiskrete Systeme mit kontinuierlicher Amplitude behandelt werden. Diese Signale sind in Bild 3.1 oben rechts dargestellt.

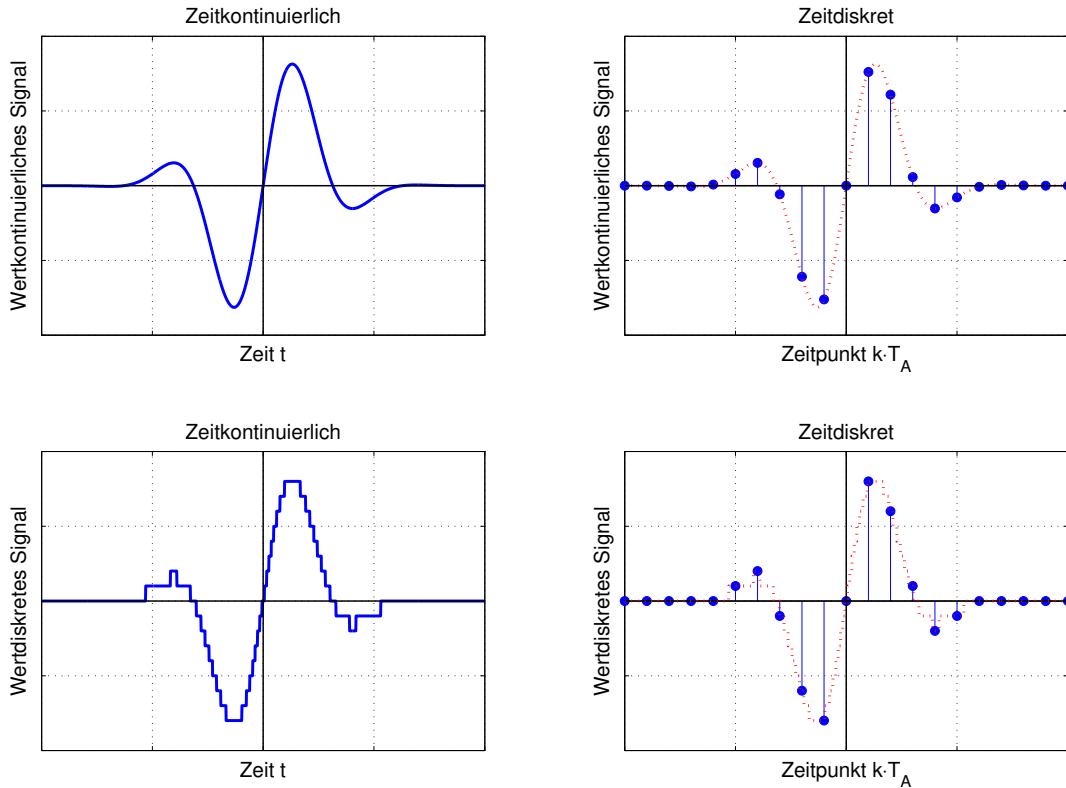


Bild 3.1: Darstellung wertkontinuierlicher und wertdiskreter Signale in zeitkontinuierlicher und zeitdiskreter Form

Zeitdiskrete Signale sind nur zu bestimmten Zeitpunkten definiert. Es existieren keine Übergänge zwischen zwei aufeinanderfolgenden Werten. Im Fall der Abtastung eines zeitkontinuierlichen Signals $x(t)$ ergibt sich die Zahlenfolge $x[k]$ des abgetasteten Signals zu

$$x[k] = x(k \cdot T_A) \quad (3.1)$$

Da die Signale nicht mehr kontinuierlich sind, werden sie als Folgen oder Signalfolgen $x[k]$ bezeichnet. Mit den eckigen Klammern wird der Unterschied zwischen zeitkontinuierlichen Signallen $x(t)$ und Signalfolgen $x[k]$ grafisch verdeutlicht. Bild 3.2 zeigt ein Beispiel für eine Signalfolge.

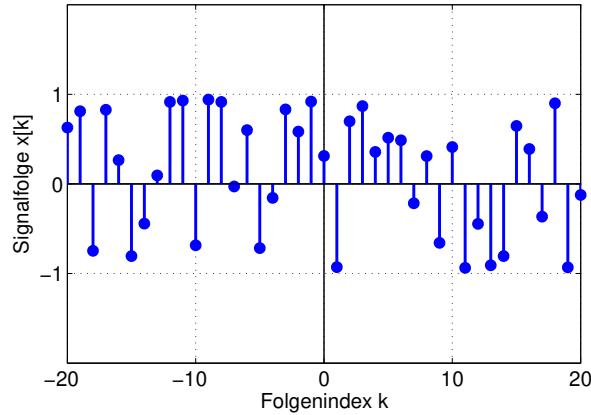


Bild 3.2: Darstellung einer Signalfolge $x[k]$

Da die Signalfolge $x[k]$ nur zu definierten Zeitpunkten $k \cdot T_A$ definiert ist, können mathematische Operationen wie Integral und Differential nicht ausgeführt werden. Sie müssen durch entsprechende Operationen für Folgen ersetzt werden. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden die wesentlichen bisher

für zeitkontinuierliche Signale beschriebenen Signaleigenschaften und Rechenoperationen auf zeitdiskrete Signale übertragen.

3.1.1 Determinierte und zufällige Signalfolgen

Determinierte Signalfolgen lassen sich durch eine mathematische Vorschrift in ihrem zeitlichen Verlauf angeben. Sie können implizit oder explizit definiert sein. Bei einer explizit definierten Signalfolge lässt sich der zu einem Index k gehörende Wert direkt ablesen. Ein Beispiel dafür ist eine abklingende Sinusfolge ($0 < r < 1$).

$$x[k] = 10 \cdot r^k \cdot \sin(\Omega_0 \cdot k) \quad (3.2)$$

Bei der impliziten Definition einer Signalfolge ist der Signalwert zwar eindeutig bestimmt, er muss aber zunächst durch weitere Umformungen bestimmt werden. Ein Beispiel für eine implizit definierte Signalfolge ist die Definition über eine Differenzengleichung

$$x[k-1] + 3 \cdot x[k-2] = 5 \cdot x[k] \quad (3.3)$$

mit der Anfangsbedingung $x[0] = x_0$. Zufällige Signalfolgen können nicht exakt angegeben werden, für sie sind lediglich statistische Eigenschaften bekannt. Sowohl Rauschen als auch Audio- oder Video-Signale sind zufällige Signale. Bild 3.3 zeigt jeweils ein Beispiel für ein determiniertes und ein zufälliges Signal. Zufällige Signale und Signalfolgen werden in Teil C dieser Buchreihe behandelt.

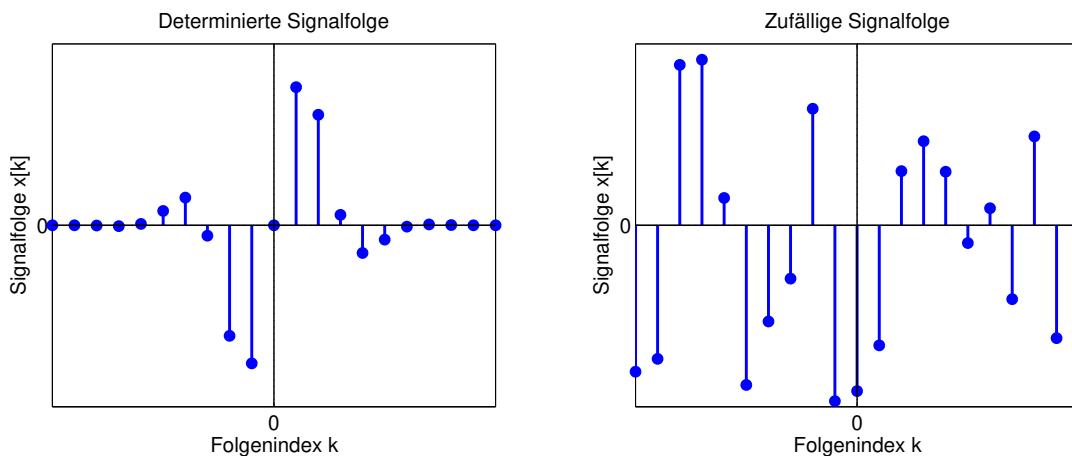


Bild 3.3: Beispiele für determinierte und zufällige Signalfolgen

3.1.2 Zeitlich begrenzte und kausale Signalfolgen

Auch bei Signalfolgen wird oft mit einer zeitlichen Begrenzung gearbeitet, weil eine Signalfolge nur einen begrenzten Zeitraum lang beobachtet werden kann und weil zum Beispiel Impulsfolgen für die Charakterisierung von Systemen verwendet werden. Bild 3.4 zeigt zeitlich begrenzte Signalfolgen.

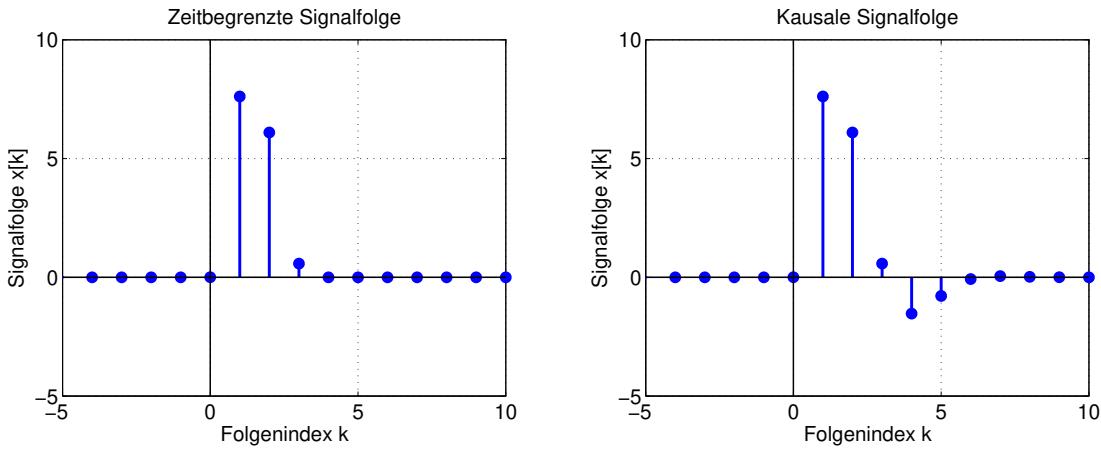


Bild 3.4: Darstellung einer beidseitig zeitbegrenzten und einer kausalen Signalfolge

Beidseitig zeitbegrenzte Signalfolgen sind Signale, die nur für einen Bereich $k_1 \leq k < k_2$ von null verschieden sind. Einige Signale sind nur einseitig begrenzt, zum Beispiel ist ein für $k = k_1$ stattfindender Sprung nur einseitig zeitbegrenzt. Da diese Signalfolgen rechts auf dem Zeitstrahl von null verschieden sind, werden sie als rechtsseitige Signalfolgen bezeichnet. Eine spezielle rechtsseitige Signalfolge ist die kausale Signalfolge, für die gilt:

$$x[k] = 0 \quad \text{für } k < 0 \quad (3.4)$$

Damit gelten die Definitionen zeitkontinuierlicher Signale sinngemäß auch für Signalfolgen.

3.1.3 Quadratisch summierbare Signalfolgen

Für die Existenz von unendlichen Reihen zum Beispiel bei der Fourier-Transformation von Folgen oder der sogenannten z-Transformation ist der Begriff der Leistungs- und Energiesignalfolge wesentlich. Wie bei zeitkontinuierlichen Signalen wird von der Vorstellung ausgegangen, dass die an einem Widerstand umgesetzte Leistung proportional zum Quadrat der anliegenden Spannung $u(t)$ beziehungsweise proportional zum Quadrat des durchfließenden Stromes $i(t)$ ist.

$$p_{el}(t) = \frac{u^2(t)}{R} = i^2(t) \cdot R \quad (3.5)$$

Für zeitkontinuierliche Signale wird damit die Energie eines Signals berechnet zu

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} p_{el}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^2(t)}{R} dt = \int_{-\infty}^{\infty} i^2(t) \cdot R dt \quad (3.6)$$

und vereinfachend zu der normierten Beschreibung

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (3.7)$$

übergegangen. Da für zeitdiskrete Signalfolgen keine Integration durchgeführt werden kann, wird für Signalfolgen die Summe

$$E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 \quad (3.8)$$

als Energie definiert. Mit dieser Definition können Signalfolgen wie zeitkontinuierliche Signale in Energiesignalfolgen und Leistungssignalfolgen eingestuft werden:

Energiesignalfolgen

Energiesignalfolgen haben eine von Null verschiedene und endliche Gesamtenergie in dem Intervall von $-\infty < k < \infty$. Die mathematische Bedingung für Energiesignalfolgen lautet:

$$0 < \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 < \infty \quad (3.9)$$

Diese Bedingung ist für jede zeitbegrenzte und amplitudenbegrenzte Folge erfüllt. Folgen, die gleichzeitig zeit- und amplitudenbegrenzt sind, sind damit immer Energiesignalfolgen.

Leistungssignalfolgen

Leistungssignalfolgen haben dagegen eine von Null verschiedene und endliche mittlere Leistung. Mathematisch ergibt sich folgende Definition für Leistungssignalfolgen:

$$0 \leq \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=-K}^{K} |x[k]|^2 < \infty \quad (3.10)$$

Für Signalfolgen mit einer begrenzten Amplitude bedeutet das, dass sie nicht zeitbegrenzt sein müssen. Ihre Energie ist zwar unendlich, ihre Energie im Intervall von $-K$ bis K ist aber begrenzt.

Signalfolgen, die weder Energie- noch Leistungssignalfolgen sind, spielen in der Systemtheorie praktisch keine Rolle, da technische Vorgänge grundsätzlich mit endlichen Größen verbunden sind.

3.1.4 Symmetrieeigenschaften von Signalfolgen

Die Bestimmung von Signaleigenschaften und Transformationen von Signalfolgen kann wie bei zeitkontinuierlichen Signalen durch Ausnutzen von Symmetrien vereinfacht werden. Deshalb werden Symmetrieeigenschaften diskutiert, mit denen Signalfolgen in gerade und ungerade Signalfolgen eingeteilt werden können. Gerade Signalfolgen sind für alle k symmetrisch zur Achse $k = 0$, also zur Ordinatenachse. Für eine gerade Signalfolge gilt deshalb die Bedingung:

$$x[k] = x[-k] \quad (3.11)$$

Eine kosinusförmige Signalfolge mit einem Nullphasenwinkel $\varphi = 0$ ist ein Beispiel für eine gerade Signalfolge, denn es gilt:

$$x[k] = \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{T_0} \cdot T_A \cdot k\right) = \cos\left(-\frac{2 \cdot \pi}{T_0} \cdot T_A \cdot k\right) = x[-k] \quad (3.12)$$

Ungerade Signalfolgen sind für alle k punktsymmetrisch zu dem Koordinatenursprung $(0|0)$. Dies kann mathematisch ausgedrückt werden als

$$x[k] = -x[-k] \quad (3.13)$$

Eine sinusförmige Signalfolge ist ein Beispiel für eine ungerade Signalfolge, denn es gilt:

$$x[k] = \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T_0} \cdot T_A \cdot k\right) = -\sin\left(-\frac{2 \cdot \pi}{T_0} \cdot T_A \cdot k\right) = -x[-k] \quad (3.14)$$

Bild 3.5 zeigt Kosinus- und Sinusfolgen als Beispiele für gerade und ungerade Signalfolgen.

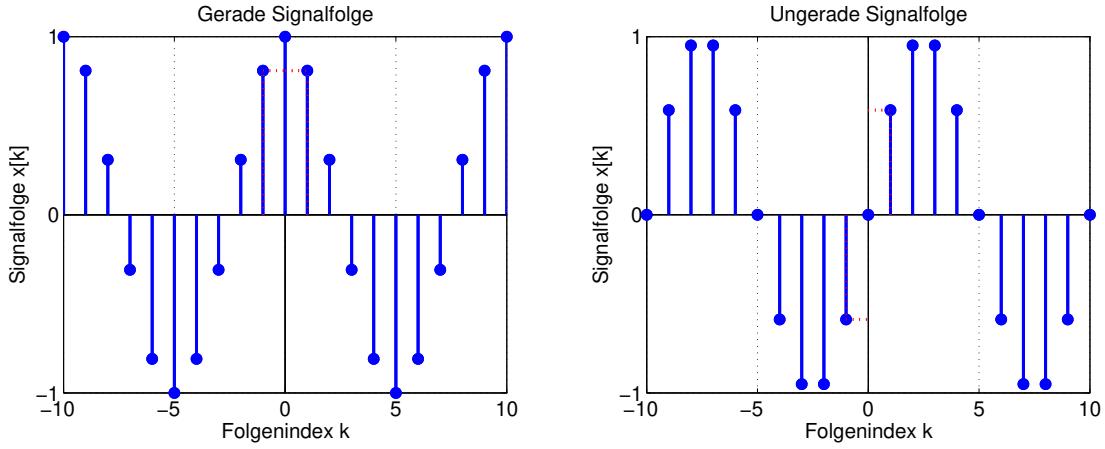


Bild 3.5: Kosinus- und Sinusfolgen als Beispiele für gerade und ungerade Signalfolgen

Es existieren Signalfolgen, die weder gerade, noch ungerade sind, sie weisen keine Symmetrie auf. Jede beliebige Signalfolge lässt sich aber in einen geraden und einen ungeraden Anteil aufspalten.

$$x[k] = x_g[k] + x_u[k] \quad (3.15)$$

wobei sich die beiden Anteile ergeben aus

$$x_g[k] = \frac{1}{2} \cdot (x[k] + x[-k]) \quad (3.16)$$

und

$$x_u[k] = \frac{1}{2} \cdot (x[k] - x[-k]) \quad (3.17)$$

Bild 3.6 verdeutlicht die Zerlegung eines Signals in einen geraden und einen ungeraden Anteil an einem Beispiel.

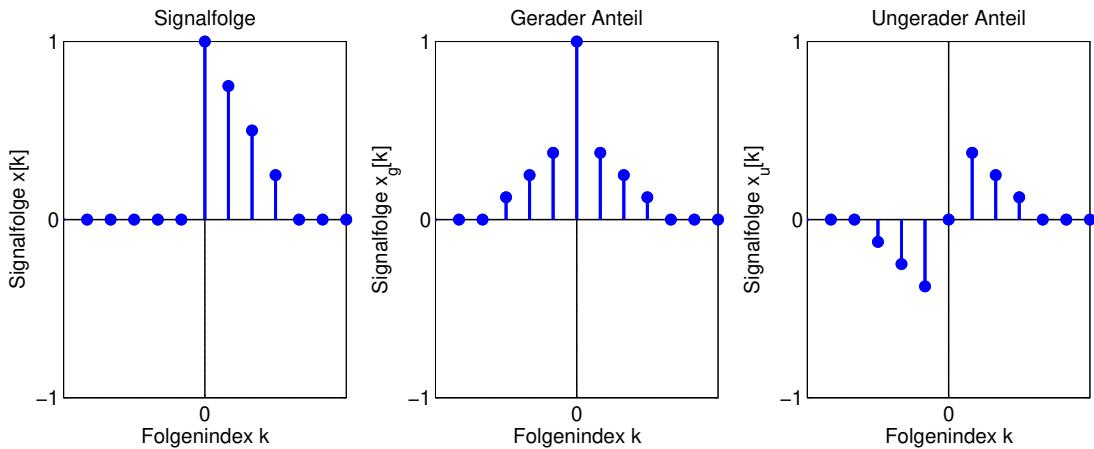


Bild 3.6: Zerlegung einer Signalfolge in geraden und ungeraden Anteil

3.1.5 Zusammenfassung Eigenschaften von Signalfolgen

Zur besseren Übersicht sind in Tabelle 3.1 die diskutierten Eigenschaften für Signalfolgen dargestellt.

Tabelle 3.1: Tabellarische Übersicht über Signaleigenschaften für Signalfolgen

Signaleigenschaft	Mathematische Beschreibung
Explizit definierte Signalfolge	Folgenwert kann direkt abgelesen werden, zum Beispiel $x[k] = 10 \cdot r^k \cdot \sin(\Omega_0 \cdot k)$
Implizit definierte Signalfolge	Folgenwert muss berechnet werden, zum Beispiel $x[k-1] + 3 \cdot x[k-2] = 5 \cdot x[k]$ mit Anfangsbedingung $x[0] = x_0$
Begrenzte Signalfolge	$x[k] = 0 \quad \text{für } k < k_1 \text{ und/oder } k > k_2$
Kausale Signalfolge	$x[k] = 0 \quad \text{für } k < 0$
Energiesignalfolge	$0 < \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] ^2 < \infty$
Leistungssignalfolge	$0 \leq \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=-K}^{K} x[k] ^2 < \infty$
Gerade Signalfolge	$x[k] = x[-k]$
Ungerade Signalfolge	$x[k] = -x[-k]$
Gerader Anteil	$x_g[k] = \frac{1}{2} \cdot (x[k] + x[-k])$
Ungerader Anteil	$x_u[k] = \frac{1}{2} \cdot (x[k] - x[-k])$

3.2 Sprung- und Impulsfolgen

Auch bei der Beschreibung und Interpretation von zeitdiskreten Systemen werden Impuls- und Sprungantworten verwendet. Deshalb werden in diesem Abschnitt Sprung- und Impulsfolgen vorgestellt, weitere Signalfolgen daraus abgeleitet und das Rechnen mit Impulsfolgen vertieft.

3.2.1 Impulsfolge

Die Impulsfolge ist im Gegensatz zur Impulsfunktion nicht als Grenzwert definiert, sondern durch die Bedingung

$$\delta[k] = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{für ganzzahlige } k \neq 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

Im Vergleich zur Impulsfunktion ist die Impulsfolge nicht unendlich hoch, sondern hat eine Höhe, die beim kontinuierlichen System dem Gewicht der Impulsfunktion entspricht. Diese Definition erleichtert das Rechnen mit der Impulsfolge im Vergleich zur Impulsfunktion. Bild 3.7 stellt die Impulsfolge grafisch dar.

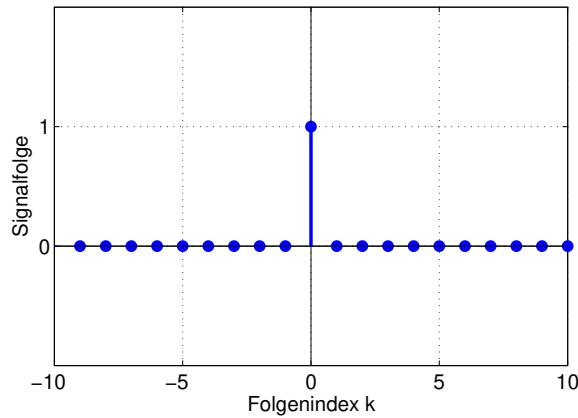


Bild 3.7: Darstellung der Impulsfolge $\delta[k]$

Die Impulsfolge wird für die Charakterisierung von Systemen verwendet. Die Impulsfolge ist sowohl zeitlich, als auch von der Amplitude begrenzt. Sie ist eine Energiesignalfolge. Da die Impulsfolge für $k < 0$ null ist, ist sie eine kausale Folge. Da praktisch alle Werte der Impulsfolge null sind bis auf den Wert, an dem das Argument der Impulsfolge zu null wird, ergibt sich die Summe über die Impulsfolge zu

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k] = 1 \quad (3.19)$$

Mit der Impulsfolge werden zwei wichtige Methoden realisiert, die für die Darstellung abgetasteter Signale notwendig sind.

Ausblendeigenschaft der Impulsfolge

Mit Hilfe der Impulsfolge können einzelne Werte einer Folge $x[k]$ selektiert werden.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[k - k_0] = x[k_0] \quad (3.20)$$

Diese Bedingung ergibt sich daraus, dass die Impulsfolge für alle Werte von k zu null wird, außer für den Wert $k = k_0$. Für $k = k_0$ nimmt die Impulsfolge den Wert 1 an, die Folge $x[k]$ hat für $k = k_0$ den Wert $x[k_0]$.

Periodische Impulsfolge

Insbesondere bei der Darstellung periodischer Signale wird die periodische Impulsfolge einge-setzt.

$$x[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[k - n \cdot K_0] \quad (3.21)$$

Jede Impulsfolge ist an allen Stellen null, bis auf die Stelle $k = n \cdot K_0$. Durch die Summe entsteht eine in K periodische Impulsfolge, die in Bild 3.8 dargestellt ist. Sie wird auch als Impulskamm bezeichnet.

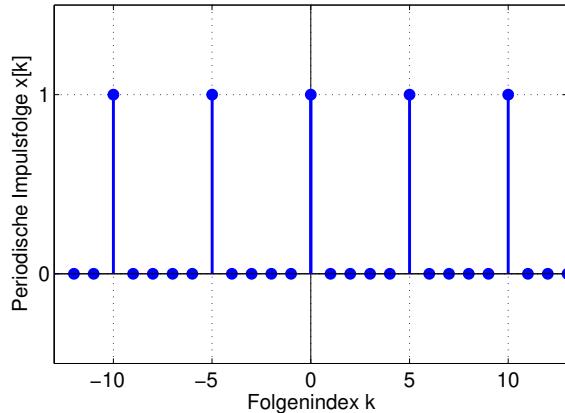


Bild 3.8: Darstellung der in $K_0 = 5$ periodischen Impulsfolge

3.2.2 Sprungfolge

Die Sprungfolge $\sigma[k]$ ist identisch zur Sprungfunktion im zeitkontinuierlichen Bereich definiert als

$$\sigma[k] = \begin{cases} 0 & \text{für } k < 0 \\ 1 & \text{für } k \geq 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

Wie im zeitkontinuierlichen Bereich ist die Sprungfolge eine wichtige Testfolge. Bild 3.9 stellt die Sprungfolge dar.

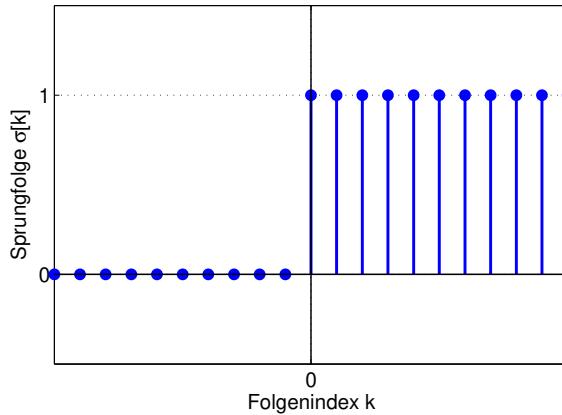


Bild 3.9: Darstellung der diskreten Sprungfolge $\sigma[k]$

Die Sprungfolge wird zum Beispiel dafür verwendet, ideale Einschaltvorgänge zu beschreiben. Die Sprungfolge ist zeitlich nicht begrenzt und ist damit keine Energiesignalfolge. Wegen ihrer begrenzten Amplitude ist die Bedingung für eine Leistungssignalfolge erfüllt. Da die Sprungfolge für $k < 0$ null ist, ist sie eine kausale Folge.

Sprung- und Impulsfolge können in Abhängigkeit voneinander dargestellt werden. So kann die Sprungfolge als Summe einzelner verschobener Impulse dargestellt werden.

$$\sigma[k] = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \delta[k-\kappa] \quad (3.23)$$

Andererseits ist die Impulsfolge die Differenz zweier Sprungfolgen, die um einen Index $k_0 = 1$ gegenüberliegen.

$$\delta[k] = \sigma[k] - \sigma[k-1] \quad (3.24)$$

Aus dem Vergleich mit der Abhängigkeit der zeitkontinuierlichen Sprung- und Impulsfunktion ergibt sich ein weiterer interessanter Aspekt: Die Sprungfunktion kann als Integral der Impulsfunktion dargestellt werden. Im zeitdiskreten Bereich wird das Integral durch die Summe ersetzt.

$$\sigma[k] = \sum_{\kappa=-\infty}^k \delta[\kappa] \quad (3.25)$$

In zeitkontinuierlichen Bereich ist die Impulsfunktion die Ableitung der Sprungfunktion. Im zeitdiskreten Bereich wird die Ableitung durch den Differenzenquotienten ersetzt, sodass gilt:

$$\delta[k] = \frac{\sigma[k] - \sigma[k-1]}{k - (k-1)} = \sigma[k] - \sigma[k-1] \quad (3.26)$$

Im zeitdiskreten Bereich gehen also das Integral in eine Summe und die Ableitung in einen Differenzenquotienten über.

3.2.3 Integral abgetasteter Signale

Ideal abgetastete Signale können als Summe gewichteter Impulse dargestellt werden.

$$x_A(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k \cdot T_A) \cdot \delta(t - k \cdot T_A) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta(t - k \cdot T_A) \quad (3.27)$$

Insbesondere bei der Berechnung des Spektrums abgetasteter Signale werden Integrale berechnet, in denen ideal abgetasteten Signale vorkommen. Als Vorbereitung dazu wird das Integral abgetasteter Signale berechnet.

$$\int_{\tau=-\infty}^t x_A(\tau) d\tau = \int_{\tau=-\infty}^t \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x[\kappa] \cdot \delta(\tau - \kappa \cdot T_A) d\tau = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x[\kappa] \cdot \int_{\tau=-\infty}^t \delta(\tau - \kappa \cdot T_A) d\tau \quad (3.28)$$

Um von dem zeitkontinuierlichen Integralausdruck zu einer Summe zu kommen, wird die Zeitvariable normiert.

$$\tau = T_A \cdot \eta \quad (3.29)$$

Aus der Substitutionsregel folgt

$$d\tau = T_A \cdot d\eta \quad (3.30)$$

Für die Zeitpunkte $t = k \cdot T_A$ ergibt sich

$$\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x[\kappa] \int_{\eta=-\infty}^k \delta(\eta - \kappa) \cdot T_A d\eta = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x[\kappa] \cdot T_A \cdot \int_{\eta=-\infty}^k \delta(\eta - \kappa) d\eta \quad (3.31)$$

Das Integral bewirkt, dass nur Werte aufsummiert werden, die kleiner oder gleich k sind. Damit kann der Ausdruck umgeformt werden zu

$$\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x[\kappa] \cdot T_A \cdot \int_{\eta=-\infty}^k \delta(\eta - \kappa) d\eta = T_A \cdot \sum_{\kappa=-\infty}^k x[\kappa] \cdot \delta[k - \kappa] \quad (3.32)$$

Der Vergleich zeigt, dass bei der Berechnung von Integralen ideal abgetasteter Signale neben der Summe der Abtastwerte die Abtastzeit berücksichtigt werden muss.

Tabelle 3.2 vergleicht die Definition und die Eigenschaften der Impulsfolge und der Impulsfunktion tabellarisch miteinander.

Tabelle 3.2: Tabellarische Zusammenfassung der wesentlichen Eigenschaften der Impulsfunktion

Eigenschaft	Zeitkontinuierlicher Bereich	Zeitdiskreter Bereich
Definition des Impulses	$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(\sigma\left(t + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \sigma\left(t - \frac{\varepsilon}{2}\right) \right)$	$\delta[k] = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{für } k \neq 0 \end{cases}$
Integration	$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = 1$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k] = 1$
Ausblendeigenschaft	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = x(t_0)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[k - k_0] = x[k_0]$
Impuls als Ableitung des Sprungs	$\delta(t) = \frac{d\sigma}{dt}$	$\delta[k] = \sigma[k] - \sigma[k - 1]$
Sprung als Integral des Impulses	$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$	$\sigma[k] = \sum_{\kappa=-\infty}^k \delta[\kappa]$
Integral eines abgetasteten Signals	$\int_{-\infty}^t x_A(\tau) d\tau = T_A \cdot \sum_{\kappa=-\infty}^k x[\kappa] \cdot \delta[\kappa]$	

3.2.4 Rechteckfolge

Die Rechteckfolge ist abschnittsweise definiert als

$$x[k] = \begin{cases} 0 & \text{für } k < -K \\ 1 & \text{für } -K \leq k < K + 1 \\ 0 & \text{für } K + 1 \leq k \end{cases} \quad (3.33)$$

Die Rechteckfolge ist eine Folge mit endlicher Amplitude und endlicher Dauer. Die Bedingung für eine Energiesignalfolge ist deshalb erfüllt. Die Rechteckfolge nach Gleichung (3.33) ist keine kausale Folge, da sie für $k < 0$ nicht null ist. Durch eine Verschiebung um K nach rechts wird die Folge kausal. Beide Folgen sind in Bild 3.10 dargestellt.

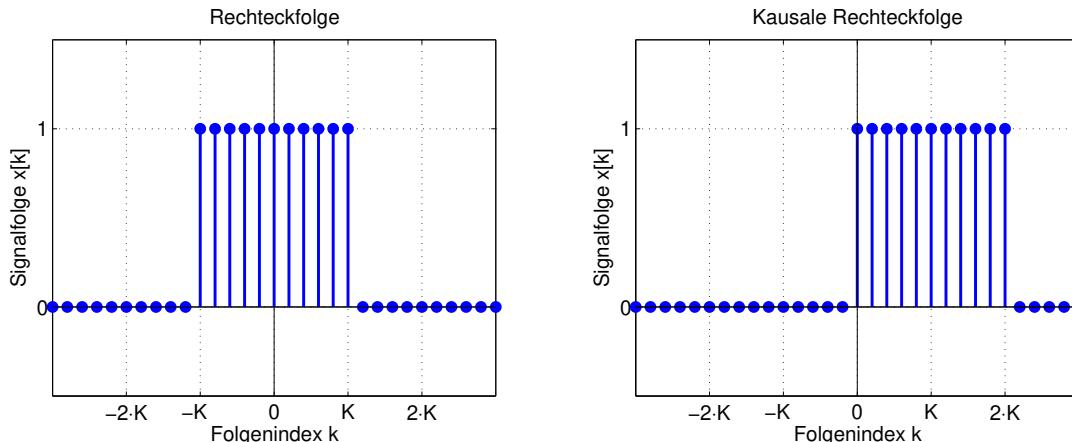


Bild 3.10: Rechteckfolge und verschobene Rechteckfolge

Die Rechteckfolge kann neben der abschnittsweisen Definition auch als Summe zweier Sprungfolgen dargestellt werden, die um $-K$ beziehungsweise $K+1$ verschoben sind.

$$x[k] = \sigma[k+K] - \sigma[k-(K+1)] = \sigma[k+K] - \sigma[k-K-1] \quad (3.34)$$

3.2.5 Signum-Folge

Die Signum-Folge $\text{sgn}[k]$ ist abschnittsweise definiert als

$$x[k] = \text{sgn}[k] = \begin{cases} -1 & \text{für } k < 0 \\ +1 & \text{für } k \geq 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

Auch die Signum-Folge kann mit Hilfe der Sprungfolge dargestellt werden.

$$x[k] = \text{sgn}[k] = 2 \cdot \sigma[k] - 1 \quad (3.36)$$

Bild 3.12 stellt die Signum-Folge grafisch dar. Sie dauert unendlich lange an und ist deshalb keine Energiesignalfolge. Wegen ihrer konstanten Amplitude ist die Bedingung für eine Leistungssignalfolge erfüllt. Die Signum-Folge ist nicht kausal und kann durch eine zeitliche Verschiebung auch nicht kausal werden.

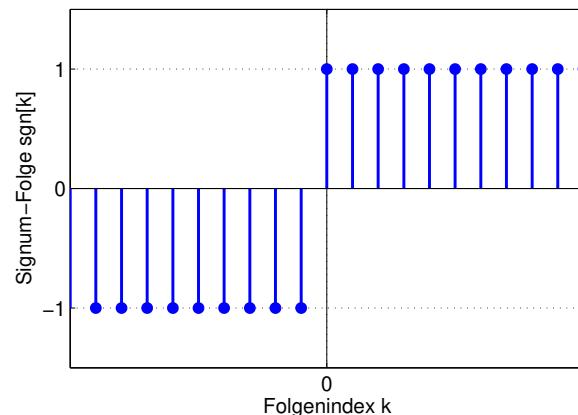


Bild 3.11: Signum-Folge $\text{sgn}[k]$

3.2.6 Rampenfolge

Die Rampenfolge ist wie im zeitkontinuierlichen Bereich definiert als

$$x[k] = \begin{cases} 0 & \text{für } k < 0 \\ k & \text{für } k \geq 0 \end{cases} \quad (3.37)$$

Bild 3.12 stellt die Rampenfolge grafisch dar.

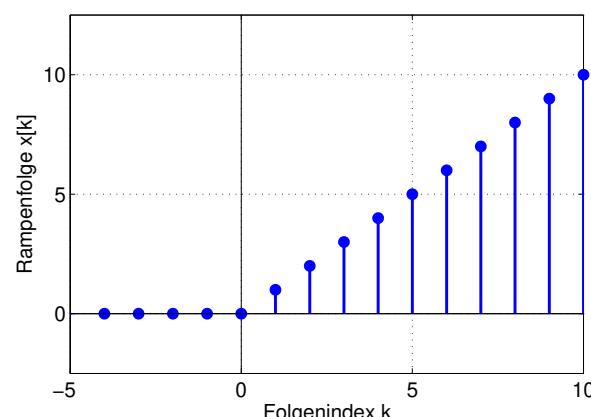


Bild 3.12: Rampenfolge

Die Rampenfolge kann als Summation über die Sprungfolge beschrieben werden. Dabei muss jedoch beachtet werden, dass die Rampenfolge an der Stelle $k = 0$ null ist. Deshalb muss die Rampenfolge dargestellt werden als

$$x[k] = \sum_{\kappa=-\infty}^{k-1} \sigma[\kappa] = \sum_{\kappa=-\infty}^k \sigma[\kappa - 1] \quad (3.38)$$

Auswerten der Summengleichung führt zu der Darstellung

$$x[k] = k \cdot \sigma[k] \quad (3.39)$$

Die Rampenfolge hat weder eine begrenzte Amplitude, noch eine begrenzte Zeitdauer, sie ist weder Energie- noch Leistungssignalfolge. Eine ideale Rampenfolge kann in realen Systemen deshalb nur für ein begrenztes Intervall realisiert werden. Da die Rampenfolge für $k < 0$ null ist, ist sie eine kausale Signalfolge.

3.2.7 Dreieckfolge

Die Dreieckfolge ist in Bild 3.13 dargestellt und definiert als

$$x[k] = \begin{cases} 0 & \text{für } k < -K \\ 1 + k/K & \text{für } -K \leq k < 0 \\ 1 - k/K & \text{für } 0 \leq k < K \\ 0 & \text{für } k \geq K \end{cases} \quad (3.40)$$

Die Dreieckfolge kann auf unterschiedliche Art aus den bereits dargestellten Folgen gewonnen werden, zum Beispiel durch Überlagerung von drei Rampenfolgen.

$$x[k] = \frac{k+K}{K} \cdot \sigma[k+K] - \frac{2 \cdot k}{K} \cdot \sigma[k] + \frac{k-K}{K} \cdot \sigma[k-K] \quad (3.41)$$

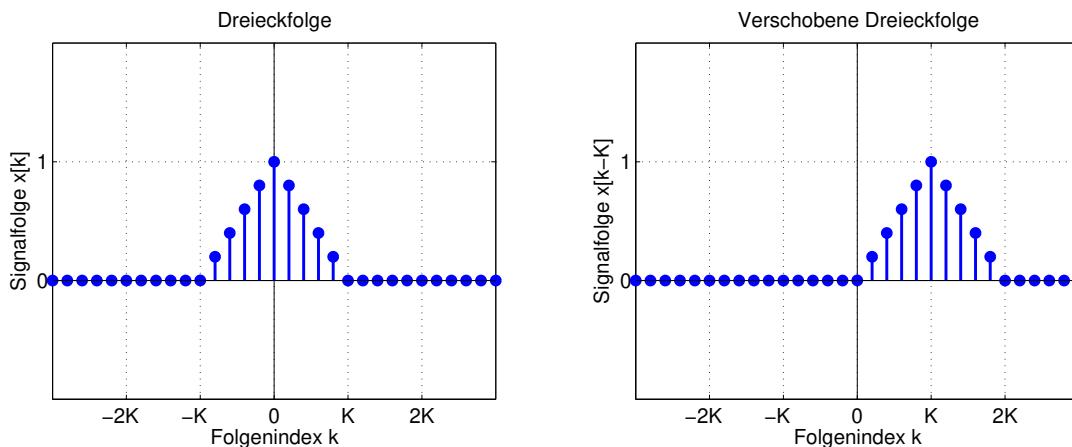


Bild 3.13: Dreieckfolge und verschobene Dreieckfolge

Die Dreieckfolge ist eine Folge mit endlicher Amplitude und endlicher Dauer. Die Bedingung für eine Energie- und Leistungssignalfolge ist erfüllt. Wie die Rechteckfolge beginnt die Rampenfolge bereits für $k = -K$. Sie ist deshalb nicht kausal, kann aber durch Verschiebung um K nach rechts in eine kausale Folge überführt werden.

3.2.8 Zusammenfassung Testfolgen

In Tabelle 3.3 sind die wesentlichen Testfolgen und ihre Darstellungsmöglichkeiten mit der Sprungfolge zusammengefasst.

Tabelle 3.3: Tabellarische Zusammenfassung von Testfolgen und ihrer Beschreibung mit Sprungfolgen

Testfolgen	Mathematische Beschreibung durch Sprungfolgen
Impulsfolge	$\delta[k] = \sigma[k] - \sigma[k-1]$
Sprungfolge	$\sigma[k] = \sum_{\kappa=-\infty}^k \delta[\kappa]$
Rechteckfolge der Länge $2 \cdot K + 1$	$x[k] = \sigma[k+K] - \sigma[k-K-1]$
Signum-Folge	$x[k] = sgn[k] = 2 \cdot \sigma[k] - 1$
Rampenfolge	$x[k] = k \cdot \sigma[k] = \sum_{\kappa=-\infty}^k \sigma[\kappa-1]$

3.3 Rechnen mit Folgen

Die Berechnung der Ausgangsfolge eines linearen Systems kann auf bekannte Ausgangsfolgen zurückgeführt werden, wenn die Eingangsfolge auf bekannten Folgen basiert. Dazu ist es notwendig, die Folgen mit Hilfe der in diesem Abschnitt dargestellten Rechenmethoden umrechnen zu können.

3.3.1 Operationen mit Folgen

Für die Umrechnung von Folgen sind mathematische Operationen notwendig. Die wichtigsten elementaren Operationen sind im Folgenden zusammengefasst und an dem Beispiel der Folge

$$x[k] = 10 \cdot r^k \cdot \sin(\Omega_0 \cdot k) \quad (3.42)$$

grafisch dargestellt.

Skalierung der Amplitude

Die Folge $a \cdot x[k]$ ist gegenüber der Folge $x[k]$ verstärkt ($a > 1$) beziehungsweise gedämpft ($0 < a < 1$). Bild 3.14 zeigt die Folge $x[k]$ und die um einen Faktor 0.5 gedämpfte Signalfolge $0.5 \cdot x[k]$.

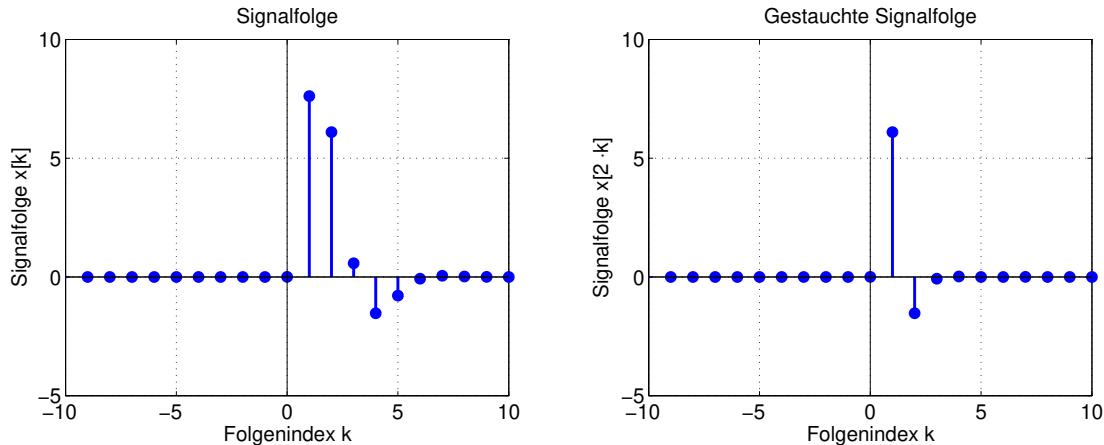


Bild 3.14: Darstellung der Folge $x[k]$ und der skalierten Folge $0.5 \cdot x[k]$

Zeitliche Verschiebung

Die Folge $x[k - k_0]$ ist gegenüber der Folge $x[k]$ nach rechts ($k_0 > 0$) beziehungsweise nach links ($k_0 < 0$) verschoben. Bild 3.15 zeigt die Signalfolge $x[k]$ und die um $k_0 = 5$ verschobene Signalfolge $x[k - 5]$.

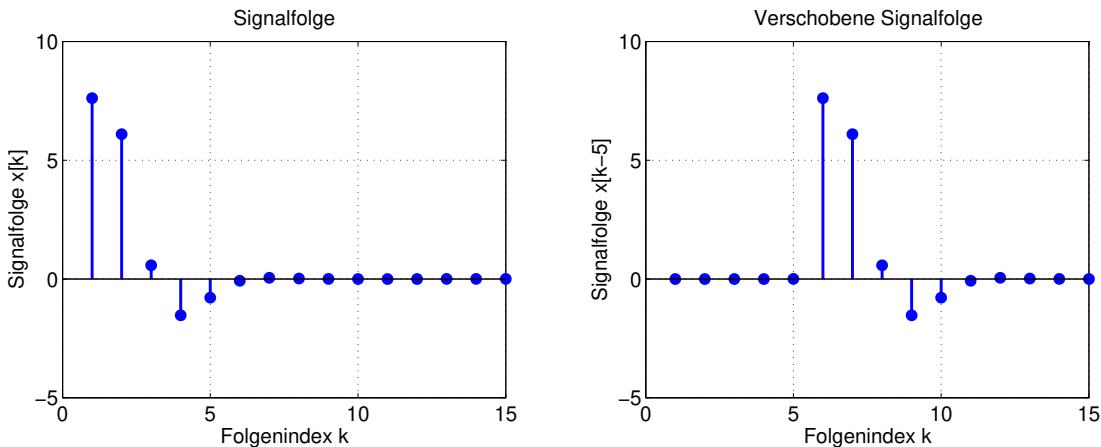


Bild 3.15: Darstellung der Signalfolge $x[k]$ und der um $k_0 = 5$ nach rechts verschobenen Signalfolge $x[k - 5]$

Das Vorgehen wird am einfachsten deutlich, wenn über den Folgenindex k argumentiert wird. Die Signalfolge $x[k]$ weist zum Zeitpunkt $k = 1$ den maximalen Wert auf. Da der Index k in der Signalfolge $x[k - 5]$ um 5 verringert wird, weist die Signalfolge $x[k - 5]$ erst an der Stelle $k = 6$ den maximalen Wert auf.

Spiegelung

Die Spiegelung einer Folge an der Stelle $k = 0$ kann mathematisch durch die Folge $x[-k]$ dargestellt werden. Bild 3.16 zeigt die Folge $x[k]$ und die gespiegelte Folge $x[-k]$.

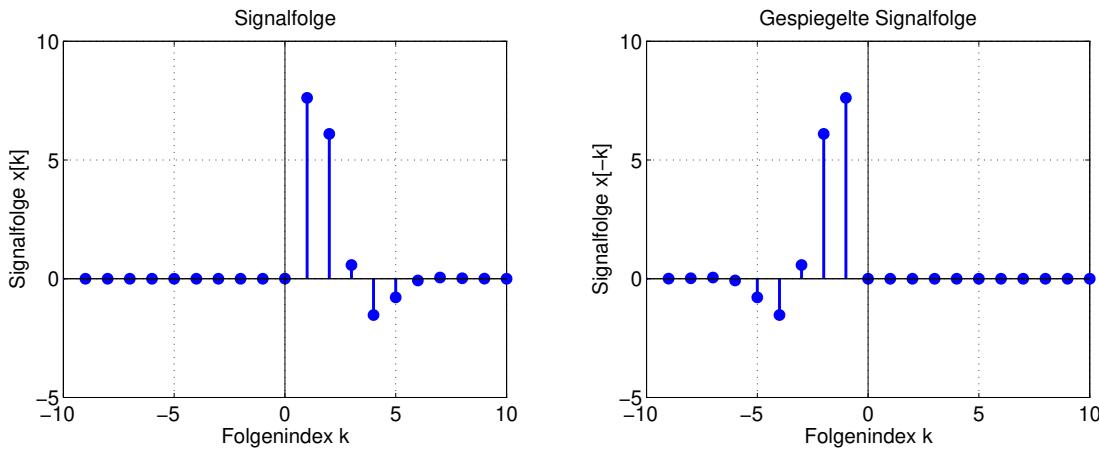


Bild 3.16: Darstellung der Folge $x[k]$ und der an $k = 0$ gespiegelte Folge $x[-k]$

Auch hier kann über den Folgenindex argumentiert werden. Die Folge $x[k]$ weist an der Stelle $k = 1$ den Folgenwert $x[1] = 7.6$ auf. Die Folge $x[-k]$ besitzt denselben Folgenwert an der Stelle $k = -1$.

Zeitliche Skalierung

Bei Signalfolgen kann eine Stauchung oder Dehnung des Signals nicht beliebig vorgenommen werden, da die dazu notwenigen Abtastwerte nicht vorliegen. Ohne zusätzliche Interpolationsschritte ist es bei der zeitlichen Skalierung nur möglich, ganzzahlige Faktoren $a > 1$ einzusetzen. Diese Skalierung führt zu einer Stauchung der Signalfolge. Bild 3.17 zeigt die Folge $x[k]$ und die zeitlich skalierte Folge $x[2 \cdot k]$.

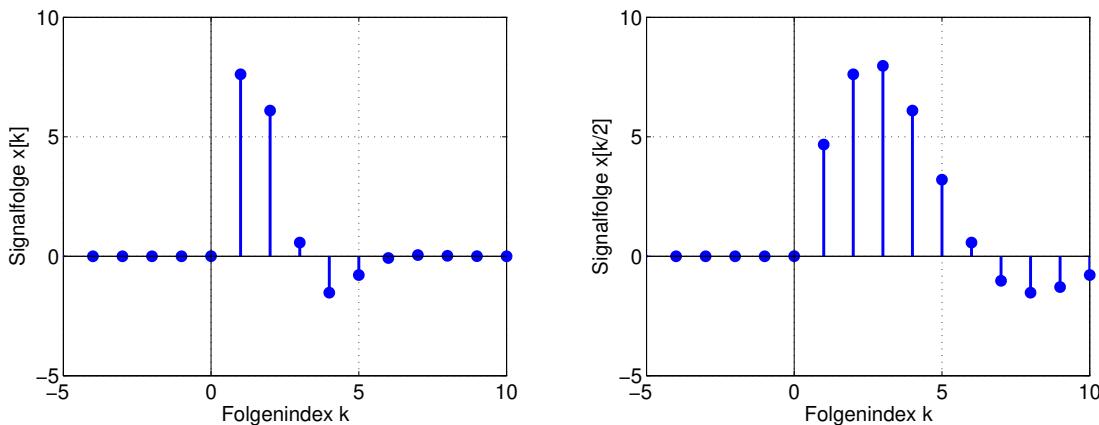


Bild 3.17: Darstellung der Folge $x[k]$ und der gestauchten Signalfolge $x[2 \cdot k]$

Wieder wird der Begriff der Stauchung am einfachsten deutlich, wenn über das Argument der Folge $x[a \cdot k]$ argumentiert wird.

3.3.2 Überlagerung grundlegender Folgen

Die vorgestellten Folgen und Rechenregeln ermöglichen die Synthese weiterer Testfolgen durch eine Überlagerung grundlegender Folgen. An einem Beispiel wird das Rechnen mit grundlegenden Folgen verdeutlicht. Die Signalfolge aus Bild 3.18 soll als Kombination grundlegender Folgen dargestellt werden.

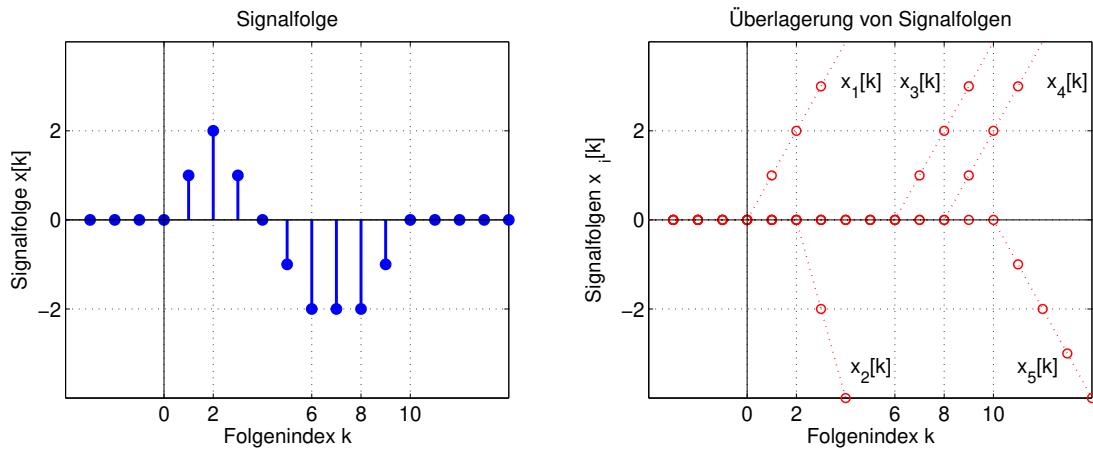


Bild 3.18: Darstellung einer Folge $x[k]$ als Summe grundlegender Folgen

Bei der Beschreibung der Folge $x[k]$ sind insbesondere die Stellen von Bedeutung, an denen sich die Steigung der Folge ändert. Aus 3.18 kann abgelesen werden, dass das die Stellen 0, 2, 6, 8 und 10 sind. An der Stelle $k = 0$ beginnt die Folge mit der Steigung 1. Die Folge $x_1[k]$, die dieses Verhalten beschreibt, lautet:

$$x_1[k] = k \cdot \sigma[k] \quad (3.43)$$

An der Stelle $k = 2$ ändert sich die Steigung der Folge um -2 . Der Faktor 2 ergibt sich dabei aus der Kompensation der vor dieser Stelle vorhandenen Steigung 1 und der nach der Stelle gewünschten Steigung -1 . Zu der Folge $x_1[k]$ muss die Folge $x_2[k]$ addiert werden, die aber erst an der Stelle $k = 2$ einen Einfluss haben darf. Um die Folge für $k < 2$ auszublenden, wird die Sprungfolge verwendet.

$$x_2[k] = -2 \cdot (k - 2) \cdot \sigma[k - 2] \quad (3.44)$$

Das Vorgehen wiederholt sich mit unterschiedlichen Steigungsänderungen an den Stellen 6, 8 und 10, und es ergeben sich die Folgen

$$x_3[k] = (k - 6) \cdot \sigma[k - 6] \quad (3.45)$$

$$x_4[k] = (k - 8) \cdot \sigma[k - 8] \quad (3.46)$$

$$x_5[k] = -(k - 10) \cdot \sigma[k - 10] \quad (3.47)$$

Die Folge $x[k]$ kann damit als Überlagerung der Teilfolgen $x_1[k]$ bis $x_5[k]$ dargestellt werden.

$$\begin{aligned} x[k] = & k \cdot \sigma[k] - 2 \cdot (k - 2) \cdot \sigma[k - 2] + (k - 6) \cdot \sigma[k - 6] \\ & + (k - 8) \cdot \sigma[k - 8] - (k - 10) \cdot \sigma[k - 10] \end{aligned} \quad (3.48)$$

Durch den Einsatz der Sprungfolgen ist gewährleistet, dass die jeweilige Folge erst ab einem definierten Zeitpunkt berücksichtigt wird. Sie ermöglicht damit die sequenzielle Synthese der Folge $x[k]$.

3.3.3 Zusammenfassung Rechenoperationen mit Folgen

In Tabelle 3.4 sind die besprochenen Rechenregeln zusammengefasst. Sie ermöglichen die Zerlegung von Signalfolgen in bekannte Signalanteile. Das Rechnen mit Folgen ist deshalb Grundlage für eine erfolgreiche Anwendung von Korrespondenztafeln der z- und Fourier-Transformation, die in Kapitel 1 und 1 beschrieben wird.

Tabelle 3.4: Tabellarische Zusammenfassung der Rechenoperationen für Folgen

Operation	Mathematische Beschreibung
Skalierung der Amplitude	$y[k] = a \cdot x[k]$
Verschiebung um k_0 nach rechts	$y[k] = x[k - k_0]$
Stauchung ($a > 1$ und ganzzahlig)	$y[k] = x[a \cdot k]$
Spiegelung	$y[k] = x[-k]$
Aktivieren an der Stelle k_0	$y[k] = x[k] \cdot \sigma[k - k_0]$



Portal *Systemtheorie Online* verdeutlicht die *Applikation Signalabtastung und Signal-rekonstruktion* graphisch, welche Effekte durch Anti-Aliasing-Filter, reale Abtastung und reale Rekonstruktion entstehen.

3.4 Folgen zur Beschreibung von zeitdiskreten Einschwingvorgängen

Ausgangssignale zeitdiskreter Systeme lassen sich vielfach mit Hilfe von harmonischen Folgen und Exponentialfolgen beschreiben. Sie werden im Folgenden vorgestellt.

3.4.1 Periodische und harmonische Folgen

Periodische Folgen sind dadurch gekennzeichnet, dass sich der Folgenwert periodisch nach einem Intervall der Länge K wiederholt. Bild 3.19 zeigt eine einfache periodische Signalfolge:

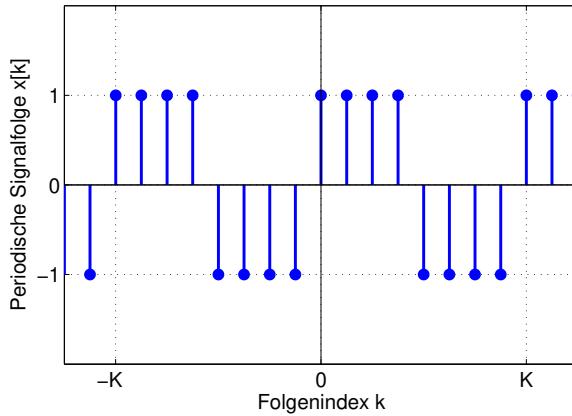


Bild 3.19: Beispiel für eine periodische Signalfolge mit einer Periode $K = 8$

Für periodische Folgen und ganzzahlige Werte n gilt:

$$x[k] = x[k + n \cdot K] \quad (3.49)$$

Neben den Folgen, die das Ein-, Aus- oder Umschalten modellieren, sind in der Systemtheorie periodische, harmonische Signalfolgen von großer Bedeutung. Als Beispiel soll hier eine Kosinusfolge diskutiert werden. Sie ist definiert als

$$x[k] = A \cdot \cos(\Omega_0 \cdot k + \varphi) = A \cdot \cos(\Omega_0 \cdot (k + k_0)) \quad (3.50)$$

wobei A die Amplitude der Schwingung, φ der Nullphasenwinkel und Ω_0 die normierte Kreisfrequenz ist. Die Normierung wird in Kapitel 7.1.2 ausführlich diskutiert. Die normierte Kreisfrequenz ergibt sich aus dem Ansatz, dass die Folgenwerte $x[k]$ an den Zeitpunkten $k \cdot T_A$ mit der Funktion $x(t)$ übereinstimmen sollen.

$$x[k] = A \cdot \cos(\Omega_0 \cdot k + \varphi) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot k \cdot T_A + \varphi) = x(k \cdot T_A) \quad (3.51)$$

Ein Vergleich der beiden Kosinusfunktionen führt zu einer Normierung der Kreisfrequenz mit der Abtastzeit T_A .

$$\Omega_0 = \omega_0 \cdot T_A \quad (3.52)$$

Da der Folgenindex k im Gegensatz zu Zeit t dimensionslos ist, besitzt die normierte Kreisfrequenz die Einheit rad. Bild 3.20 verdeutlicht diese Definitionen an einem Beispiel:

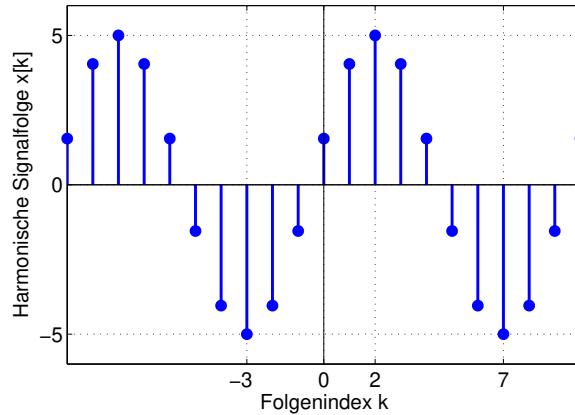


Bild 3.20: Kosinusfolge mit einer Periode $K = 10$, einer Amplitude von 5 und einem Nullphasenwinkel von $-2/5\pi$

In dem Beispiel beträgt die Amplitude 5. Die Kosinusfolge hat zwei aufeinanderfolgende Minima bei $k = -3$ und $k = 7$, woraus sich eine Periode von $K = 10$ und eine normierte Kreisfrequenz

$$\Omega_0 = \frac{2 \cdot \pi}{10} \quad (3.53)$$

ergibt. Die Nullphase φ ist nicht unmittelbar aus dem Diagramm ablesbar. Sie wird über die Verschiebung k_0 berechnet:

$$k_0 = \frac{\varphi}{2 \cdot \pi} \cdot 10 = -2 \quad (3.54)$$

Für das Beispiel ergibt sich damit der Nullphasenwinkel $\varphi = -2/5\pi$.

Zeigerdarstellung von harmonischen Signalfolgen

In der Elektrotechnik hat sich für die Berechnung von harmonisch angeregten Schaltungen die Zeigerdarstellung durchgesetzt. Sie beruht auf der Eulerschen Formel.

$$e^{j \cdot \varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi) \quad (3.55)$$

Damit kann eine Kosinusfolge der Form

$$x[k] = A \cdot \cos(\Omega_0 \cdot k + \varphi) \quad (3.56)$$

als Realteil einer komplexen Folge

$$z[k] = A \cdot e^{j \cdot (\Omega_0 \cdot k + \varphi)} = A \cdot e^{j \cdot \varphi} \cdot e^{j \cdot \Omega_0 \cdot k} = A \cdot (\cos(\Omega_0 \cdot k + \varphi) + j \cdot \sin(\Omega_0 \cdot k + \varphi)) \quad (3.57)$$

aufgefasst werden. Diese mathematische Darstellung kann durch einen Zeiger der Länge A verdeutlicht werden, der in der komplexen Ebene um den Koordinatenursprung rotiert. Die Zeit für eine volle Umdrehung ist die Periode K. Die eigentlich interessierende Größe ist die Projektion des Zeigers auf die reelle Achse, sie stellt die Folge x[k] dar. Zum Zeitpunkt k = 0 gilt

$$z[0] = A \cdot e^{j \cdot \varphi} = A \cdot \cos(\varphi) + j \cdot A \cdot \sin(\varphi) \quad (3.58)$$

Zur Verdeutlichung zeigt Bild 3.21 die Zeigerdarstellung in der komplexen Ebene.

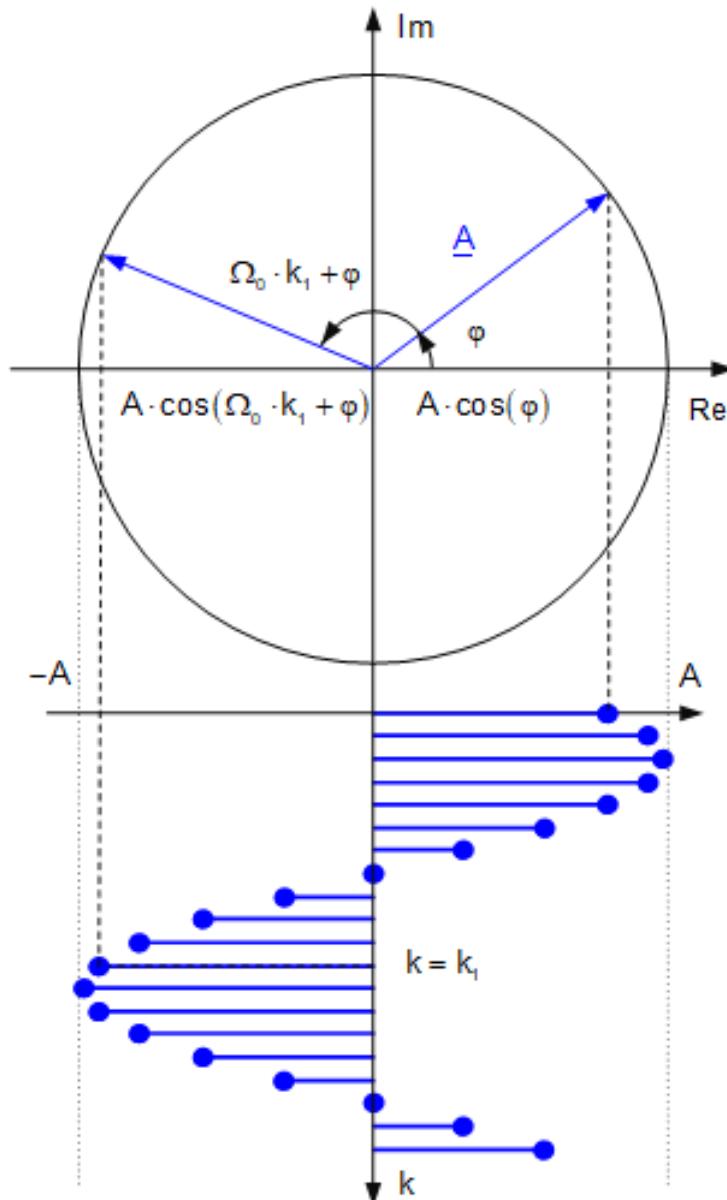


Bild 3.21: Darstellung einer harmonischen Schwingungsfolge als Zeigerdiagramm

Darstellung von Signalfolgen als Überlagerung komplexer Schwingungsfolgen

Durch Umformung der Eulerschen Formel ergibt sich für Kosinusfolgen die Darstellung

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot (e^{j \cdot \varphi} + e^{-j \cdot \varphi}) \quad (3.59)$$

Damit lässt sich die Kosinusfolge darstellen als

$$x[k] = A \cdot \cos(\Omega_0 \cdot k + \varphi) = \frac{A}{2} \cdot (e^{j \cdot (\Omega_0 \cdot k + \varphi)} + e^{-j \cdot (\Omega_0 \cdot k + \varphi)}) \quad (3.60)$$

Der erste Summand beschreibt einen komplexen Zeiger, der sich in der komplexen Ebene mit einer normierten Kreisfrequenz Ω_0 in mathematisch positiver Richtung dreht. Der zweite Summand beschreibt einen zweiten komplexen Zeiger, der zu jedem Zeitpunkt konjugiert komplex zum Ersten ist. Er dreht sich mit derselben Winkelgeschwindigkeit wie der erste Zeiger, aber in entgegengesetzter Richtung.

Die komplexe Exponentialfolge stellt reelle Folgen mit Hilfe komplexer Zahlen dar. Es ist eine effiziente Beschreibungsform, die gleichermaßen Amplitude und Phase beschreibt. Physikalisch gesehen existieren komplexe Signale nicht.



Im Online-Portal *Systemtheorie Online* verdeutlicht die *Applikation Signalabtastung und Signalrekonstruktion* grafisch, welche Effekte durch Anti-Aliasing-Filter, reale Abtastung und reale Rekonstruktion entstehen.

3.4.2 Exponentialfolge

Bei der Diskussion von zeitdiskreten Systemen wird sich zeigen, dass die Exponentialfolge

$$x[k] = A \cdot r_0^k \cdot \sigma[k] \quad (3.61)$$

die Einschwingvorgänge vieler linearer zeitdiskreter Systeme beschreibt. Bild 3.22 stellt das Verhalten der Exponentialfolge für unterschiedliche reelle Parameter r_0 und $k > 0$ dar:

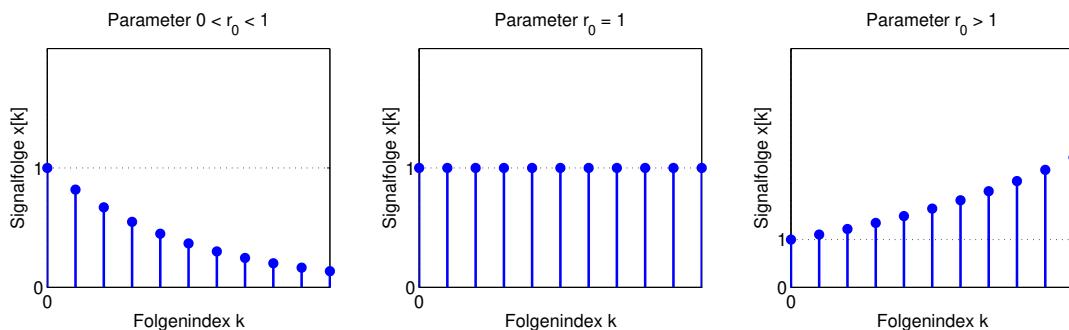


Bild 3.22: Darstellung der Exponentialfolge für unterschiedliche Parameter r_0

Die Exponentialfolge beginnt für alle Parameter r_0 an der Stelle $x[0] = A$. Für reelle Parameter $0 < r_0 < 1$ nähert sich die Exponentialfolge der Asymptote $x = 0$. Für $r_0 = 1$ bleibt die Exponentialfolge konstant bei $x = A$. Für $r_0 > 1$ steigt die Exponentialfolge mit wachsendem Folgenindex k .

Mit Exponentialfolgen der Form $e^{j\Omega_0 k}$ können harmonische Schwingungen beschrieben werden. Durch die Kombination beider Exponentialfolgen können Kosinusfolgen mit exponentiell abklingender Amplitude als Summe zweier Exponentialfolgen dargestellt werden.

$$\begin{aligned} x[k] &= A \cdot r_0^k \cdot \cos(\Omega_0 \cdot k) \cdot \sigma[k] = \frac{1}{2} \cdot A \cdot r_0^k \cdot (e^{j \cdot \Omega_0 \cdot k} + e^{-j \cdot \Omega_0 \cdot k}) \cdot \sigma[k] \\ &= \frac{1}{2} \cdot A \cdot ((r_0 \cdot e^{j \cdot \Omega_0})^k + (r_0 \cdot e^{-j \cdot \Omega_0})^k) \cdot \sigma[k] = \frac{1}{2} \cdot A \cdot (\lambda_0^k + (\lambda_0^*)^k) \cdot \sigma[k] \end{aligned} \quad (3.62)$$

Die Kosinusfolge mit exponentiell abklingender Amplitude ist in Bild 3.23 dargestellt. Dabei sind die Einhüllenden der Kosinusfolge als gestrichelte Linie eingezeichnet.

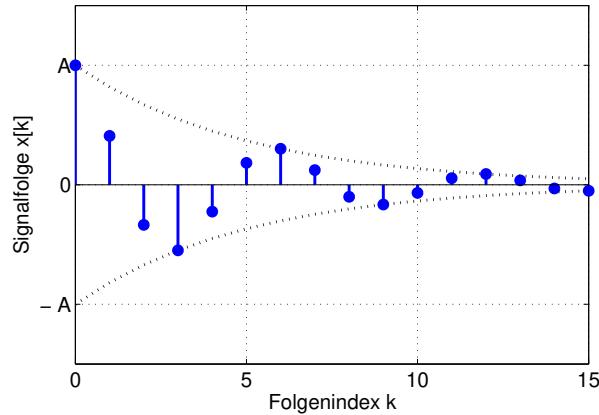


Bild 3.23: Darstellung einer Exponentialfolge mit abklingender Amplitude

Je nach Lage des Wertes $\lambda_0 = r_0 \cdot e^{j\Omega_0 \cdot k}$ in der komplexen Ebene ergeben sich ein charakteristisches Verhalten der komplexen Exponentialfolge. Bei der Diskussion von Systemeigenschaften linearer Systeme wird die Interpretation reeller und komplexer Exponentialfolgen weiter vertieft.



Im Online-Portal *Systemtheorie Online* verdeutlicht die *Applikation Signalabtastung und Signalrekonstruktion* grafisch, welche Effekte durch Anti-Aliasing-Filter, reale Abtastung und reale Rekonstruktion entstehen.

3.4.3 Zusammenfassung zur Beschreibung von zeitdiskreten Einschwingvorgängen

Die Systemreaktion linearer zeitdiskreter Systeme ist in vielen Anwendungen eine abklingende harmonische Schwingungsfolge. Zur mathematischen Beschreibung werden in Tabelle 3.5 Folgen zusammengestellt.

Tabelle 3.5: Folgen zur Beschreibung von Einschwingvorgängen

Folge	Mathematische Beschreibung
Periodische Folge der Periodendauer K	$x[k] = x[k + n \cdot K]$
Harmonische Folge	$x[k] = A \cdot \cos(\Omega_0 \cdot k + \varphi) = A \cdot \cos(\Omega_0 \cdot (k + k_0))$
Eulersche Formel	$e^{j \cdot \varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)$
Darstellung der Kosinusfolge über die Eulersche Formel	$\cos(\Omega_0 \cdot k) = \frac{1}{2} \cdot (e^{j \cdot \Omega_0 \cdot k} + e^{-j \cdot \Omega_0 \cdot k})$
Darstellung der Sinusfolge über die Eulersche Formel	$\sin(\Omega_0 \cdot k) = \frac{1}{2 \cdot j} \cdot (e^{j \cdot \Omega_0 \cdot k} - e^{-j \cdot \Omega_0 \cdot k})$
Exponentialfolge mit komplexem Argument	$x[k] = (r_0 \cdot e^{j \cdot \Omega_0})^k = r_0^k \cdot e^{j \cdot \Omega_0 \cdot k}$
Beschreibung einer gedämpften Schwingungsfolge über eine Exponentialfolge mit komplexem Argument	$ \begin{aligned} x[k] &= A \cdot r_0^k \cdot \cos(\Omega_0 \cdot k) \cdot \sigma[k] \\ &= \frac{1}{2} \cdot A \cdot \left((r_0 \cdot e^{j \cdot \Omega_0})^k + (r_0 \cdot e^{-j \cdot \Omega_0})^k \right) \cdot \sigma[k] \\ &= \frac{1}{2} \cdot A \cdot (\lambda^k + \lambda^{*k}) \cdot \sigma[k] \end{aligned} $

3.5 Literatur

3.5.1 Literaturstellen mit besonders anschaulicher Darstellung

- [Lyon04] Lyons, Richard G.: Understanding Digital Signal Processing,
Prentice Hall, New Jersey, 2004
- [Stea99] Stearns, Samuel: Digitale Verarbeitung analoger Signale,
7. Auflage, Oldenbourg Verlag München, 1999

3.5.2 Literaturstellen mit praktischen Anwendungen

- [Wern08] Werner, Martin: Signale und Systeme,
Vieweg Studium Technik, Wiesbaden, 2008
- [Meye08] Meyer, Martin: Signalverarbeitung – Analoge und digitale Signale, Systeme und Filter,
Vieweg Studium Technik, Wiesbaden, 2008

3.5.3 Weiterführende Literatur

- [Opp04] Oppenheim, Alan: Zeitdiskrete Signalverarbeitung, 2.
überarbeitete Auflage, Pearson Studium, 2004
- [Kamm98] Kammeyer, Karl: Digitale Signalverarbeitung,
B.G. Teubner Stuttgart, 1998

4 Zeitdiskrete Systeme im Zeitbereich

Im zeitkontinuierlichen Bereich werden dynamische Systeme mit Differentialgleichungen beschrieben. Für zeitdiskrete Systeme geht die Differentiation in einen Differenzenquotienten über. Daraus resultiert die Beschreibung zeitdiskreter Systeme mit Differenzengleichungen.

Zu Beginn des Kapitels werden einige typische zeitdiskrete Systeme beschrieben und die Systemantworten mit numerischen Algorithmen bestimmt. Als Beispiele werden ein rekursives Filter, ein System mit einer gleitenden Mittelwertrechnung und eine Switched-Capacitor-Schaltung diskutiert. Für die Systeme werden die jeweiligen Differenzengleichungen aufgestellt, diskutiert und numerisch gelöst.

Lineare, zeitinvariante Systeme haben im zeitkontinuierlichen Bereich eine besonders anschauliche Lösung und Interpretation ermöglicht. Der Begriff des linearen, zeitinvarianten Systems existiert auch für zeitdiskrete Systeme. Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels werden grundlegende Systemeigenschaften erläutert und Verfahren zum Nachweis der unterschiedlichen Eigenschaften vorgestellt.

Numerische Lösungen von Differenzengleichungen eignen sich nicht für eine analytische Bestimmung von Systemeigenschaften. Deshalb ist es erforderlich, analytische Lösungsmethoden zu diskutieren. Im dritten Abschnitt wird die analytische Berechnung der Systemantwort im Zeitbereich behandelt. Sie kann über eine sogenannte 4-Schritt-Methode bestimmt werden.

Für lineare, zeitinvariante Systeme gilt das Superpositionsprinzip. Danach ergibt sich die Systemantwort bei Anregung mit einer Überlagerung von Eingangssignalen aus derselben Überlagerung der zugehörigen Ausgangssignale. Das Superpositionsprinzip führt zur zeitdiskreten Faltung. Superposition und Faltung entsprechen weitgehend den Methoden für zeitkontinuierliche Systeme.

Verfahren und Eigenschaften zeitdiskreter Systeme werden an Beispielen erläutert. An einem Projekt wird aufgezeigt, wie zeitdiskrete Signalverarbeitung mit Switched-Capacitor-Schaltungen realisiert werden kann und welche Vorteile sich aus der Realisierung ergeben.

4.1 Beschreibung zeitdiskreter Systeme mit Differenzengleichungen

Zeitdiskrete Systeme ergeben sich aus unterschiedlichen Aufgabenstellungen. Zum einen existieren Aufgabenstellungen, die von ihrer Natur aus zeitdiskret sind. Beispiele dafür kommen aus unterschiedlichen Anwendungsbereichen, zum Beispiel werden Algorithmen zur digitalen Signalverarbeitung zeitdiskret beschrieben. Aber auch Schaltungen, die in Switched-Capacitor-Technik aufgebaut werden, können zeitdiskret beschrieben werden.

Zum anderen wird vielfach versucht, analoge Systeme digital nachzubilden, um ihr Verhalten zu emulieren. Lineare Differentialgleichungen N-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten beschreiben zeitkontinuierliche LTI-Systeme. Bei abgetasteten oder zeitdiskreten Systemen kann keine Ableitung bestimmt werden. Aus diesem Grund muss eine andere Beschreibungsform für Systeme gefunden werden. In diesem Abschnitt werden unterschiedliche Methoden vorgestellt, LTI-Systeme zeitdiskret zu beschreiben.

4.1.1 Beispiele für zeitdiskrete Systeme

Algorithmen zur digitalen Signalverarbeitung arbeiten typischerweise in einem festen Takt mit einer festen Abtastzeit. Der aktuelle Wert des Ausgangssignals wird als Funktion des aktuellen Eingangssignals und vergangenen Werten von Ein- und Ausgangssignal gebildet. Das Grundprinzip wird an Beispielen illustriert.

Beispiel: Rückgekoppeltes System

Bei vielen Geräten wird versucht, Filter mit Algorithmen zu implementieren, die wenig Rechenzeit und Speicherelemente benötigen. Eines der einfachsten Filter ergibt sich aus der Gleichung

$$y[k] = (1 - GF) \cdot u[k] + GF \cdot y[k - 1] \quad (4.1)$$

Dabei gilt für den Gedächtnisfaktor GF die Bedingung $0 < GF < 1$. Das aktuelle Ausgangssignal ergibt sich aus dem aktuellen Eingangssignal und dem um einen Takt zurückliegenden Ausgangssignal. Für kleine Werte von GF folgt das Ausgangssignal dem Eingangssignal, für große Werte ändert sich das Ausgangssignal nur sehr langsam. Bild 4.1 zeigt diesen Zusammenhang für einen Sprung am Eingang.

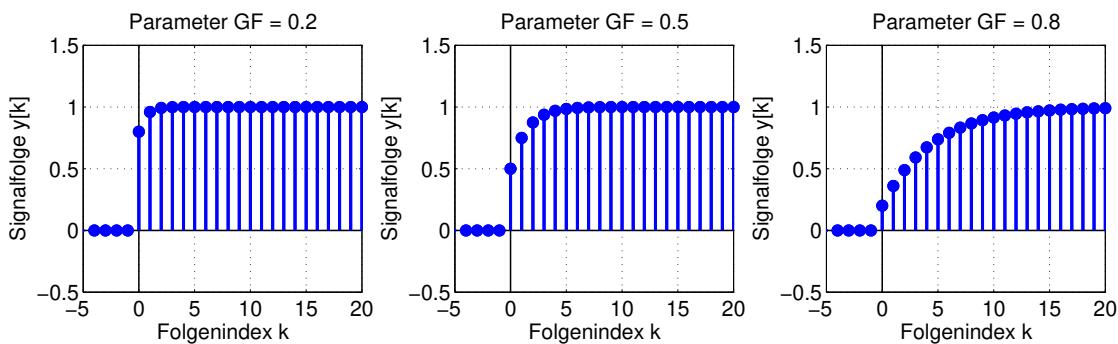


Bild 4.1: Ausgangssignal eines zeitdiskreten Tiefpass-Filters für einen Sprung am Eingang

Die Systemantworten erinnern an das Ausgangssignal eines Tiefpasses. Es wird sich zeigen, dass diese rekursive Form die digitale Approximation eines Tiefpasses erster Ordnung ist.

Beispiel: Gleitender Mittelwert

Zur Verringerung von Störeffekten kann der Mittelwert einiger aufeinanderfolgender Folgenwerte gebildet werden. Dieses Vorgehen wird als gleitende Mittelwertbildung bezeichnet. Zum Beispiel wird über die Gleichung

$$y[k] = \frac{1}{5} \cdot (u[k] + u[k - 1] + u[k - 2] + u[k - 3] + u[k - 4]) \quad (4.2)$$

ein gleitendes Mittelwertfilter mit 5 Abtastwerten beschrieben. Die Ausgangsfolge ist in diesem Fall nur von aktuellen und vergangenen Werten des Eingangssignals abhängig. Durch die Mittelwertbildung weist die Ausgangsfolge $y[k]$ einerseits eine geringere Variation auf als die Eingangsfolge $u[k]$. Durch die Bildung des Mittelwertes von fünf Abtastwerten erreicht das Signal andererseits später seinen Endwert. Beide Effekte sind in Bild 4.2 verdeutlicht.

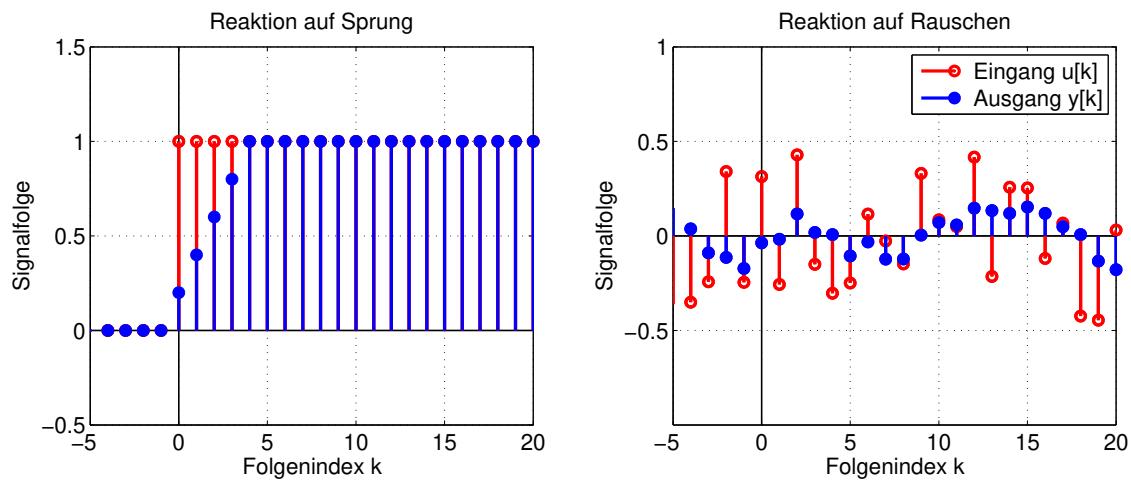


Bild 4.2: Ausgangssignal eines zeitdiskreten Systems mit gleitender Mittelung



Das Online-Portal *Systemtheorie Online* verdeutlicht die *Applikation Signalabtastung und Signal-rekonstruktion* grafisch, welche Effekte durch Anti-Aliasing-Filter, reale Abtastung und reale Rekonstruktion entstehen.

Die beiden vorangegangenen Beispiele sind Algorithmen, die zum Beispiel als Programm in einem Controller implementiert werden können. Ein weiteres Anwendungsfeld für zeitdiskrete Systeme sind Switched-Capacitor-Schaltungen.

Beispiel: Switched-Capacitor-Schaltung

Bei der Integration von CMOS-Schaltungen ist es aufwendig und teuer, präzise und temperaturstabile Widerstände herzustellen. Die Herstellung von stabilen Kondensatoren ist dagegen vergleichsweise günstig. Deshalb werden in der CMOS-Technik Switched-Capacitor-Schaltungen verwendet. Als Beispiel zeigt Bild 4.3 einen invertierenden Integrierer in Switched-Capacitor-Technik.

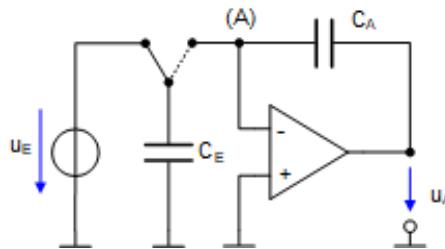


Bild 4.3: Invertierender Integrierer in Switched-Capacitor-Technik

Zu Beginn jeden Taktes wird der Kondensator C_E aufgeladen. Nach Umschalten des Schalters wird der Kondensator C_E mit dem Knoten A des Operationsverstärkers verbunden, der auf Ground-Potential liegt. Der Kondensator wird dabei entladen. Da der Operationsverstärker einen sehr großen Innenwiderstand besitzt, fließt die Ladung nicht über den Operationsverstärker ab, sondern zum Kondensator C_A . Bei jedem Takt wird also dem Integrierer eine Ladung der Größe $q_E[k]$ zugeführt.

$$q_E[k] = u_E[k] \cdot C_E \quad (4.3)$$

Die aktuelle Ladung im Kondensator C_A beträgt damit

$$q_A[k] = u_E[k] \cdot C_E + q_A[k-1] = -u_A[k] \cdot C_A \quad (4.4)$$

Die aktuelle Ladung $q_A[k]$ ergibt sich aus der Ladung im Takt zuvor und der dazukommenden Ladung. Die Ladung wird damit aufsummiert. Das aktuelle Ausgangssignal ergibt sich zu

$$u_A[k] = -\frac{1}{C_A} \cdot q_A[k] = -\frac{1}{C_A} \cdot (u_E[k] \cdot C_E + q_A[k-1]) \quad (4.5)$$

Wegen des Minuszeichens ist das System ein invertierender Summierer.

Alle hier behandelten Beispiele führen auf eine Differenzengleichung, die in allgemeiner Form geschrieben werden kann als

$$c_0 \cdot y[k] + c_1 \cdot y[k-1] + \dots + c_n \cdot y[k-N] = d_0 \cdot u[k] + d_1 \cdot u[k-1] + \dots + d_L \cdot u[k-L] \quad (4.6)$$

Die Lösung dieser Differenzengleichung ist Gegenstand des Abschnitts 4.3.

4.1.2 Zeitdiskrete Approximation zeitkontinuierlicher Systeme

Das Verhalten der Ein- und Ausgangsgrößen eines realisierbaren, zeitkontinuierlichen LTI-Systems wird durch eine lineare Differentialgleichung N-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten beschrieben. Nach den Ausführungen in Teil A dieser Buchreihe kann das System über Integrierer dargestellt werden. Beim Übergang von zeitkontinuierlichen zu zeitdiskreten Systemen kann die Integration nur approximiert werden. Eine Realisierungsmöglichkeit ist die Approximation mit einem Trapez. Bild 4.4 verdeutlicht Ableitung die Integration und Approximation der Ableitung Integration grafisch.

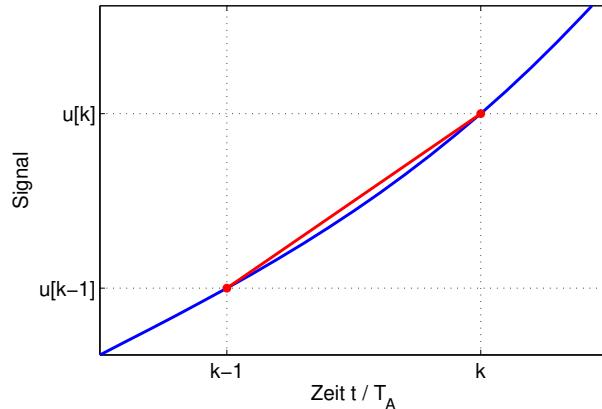


Bild 4.4: Approximation des Integrals eines zeitkontinuierlichen Signals durch ein Trapez

Aus einem Vergleich der Flächen unter der Funktion $u(t)$ ergibt sich der Ausdruck

$$\int_{(k-1) \cdot T_A}^{k \cdot T_A} u(t) dt = \frac{1}{2} \cdot (u[k] + u[k-1]) \cdot T_A \quad (4.7)$$

Die Approximation der Integration führt zu der gewichteten Summe aufeinanderfolgender Abtastwerte, die mit dem Faktor T_A multipliziert wird. Für Integrale höherer Ordnung kann entsprechend verfahren werden. Es ergibt sich eine Summe von Folgenwerten, die jeweils um einen Abtastwert verschoben sind. Allgemein ist das aktuelle Ausgangssignal eine Funktion der vergangenen Ein- und Ausgangswerte und des aktuellen Eingangssignals.

$$y[k] = f(y[k-1], y[k-2], \dots, u[k], u[k-1], u[k-2], \dots) \quad (4.8)$$

Die Beschreibung linearer, zeitinvarianter Systeme führt zu linearen Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten, die allgemein dargestellt werden können als

$$\sum_{n=0}^N c_n \cdot y[k-n] = \sum_{l=0}^L d_l \cdot u[k-l] \quad (4.9)$$

beziehungsweise mit $c_0 = 1$

$$y[k] = \sum_{l=0}^L d_l \cdot u[k-l] - \sum_{n=1}^N c_n \cdot y[k-n] \quad (4.10)$$

Die Güte der Approximation verbessert sich mit sinkender Abtastzeit T_A . Allerdings ist die Abtastzeit aus der Anwendung vorgegeben. Auch der Signalverlauf hat einen Einfluss auf die Approximationsgüte. Nichtlineare Kurvenverläufe und hochfrequente Signalelemente wirken sich negativ auf die Approximationsgüte aus.

Beispiel: RC-Tiefpass

Bild 4.5 zeigt einen RC-Tiefpass mit Spannungsquelle u_E , Widerstand R und Kapazität C .

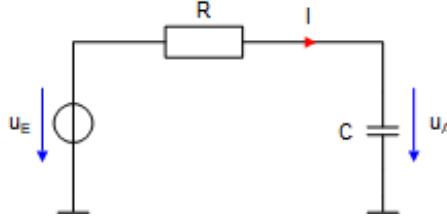


Bild 4.5: RC-Tiefpass

Die zugehörige lineare Differentialgleichung für die Ausgangsspannung $u_A(t)$ lautet:

$$u_A(t) + R \cdot C \cdot \frac{du_A}{dt} = u_E(t) \quad (4.11)$$

Eine Integration der Differentialgleichung führt bei zeitdiskreten Integrationsgrenzen zu

$$\int_{(k-1) \cdot T_A}^{k \cdot T_A} u_A(t) dt + R \cdot C \cdot (u_A(k \cdot T_A) - u_A((k-1) \cdot T_A)) = \int_{(k-1) \cdot T_A}^{k \cdot T_A} u_A(t) dt \quad (4.12)$$

Mit den Signalen

$$u_E(k \cdot T_A) = u_E[k] \quad (4.13)$$

und

$$u_A(k \cdot T_A) = u_A[k] \quad (4.14)$$

und einer Approximation der Integrale über die Trapezregel ergibt sich

$$\frac{1}{2} \cdot (u_A[k] + u_A[k-1]) \cdot T_A + R \cdot C \cdot (u_A[k] - u_A[k-1]) = \frac{1}{2} \cdot (u_E[k] + u_E[k-1]) \cdot T_A \quad (4.15)$$

Zur Berechnung des aktuellen Ausgangssignals wird die Gleichung ausmultipliziert und nach $u_A[k]$ aufgelöst.

$$u_A[k] = \frac{T_A \cdot u_E[k] + T_A \cdot u_E[k-1] - T_A \cdot u_A[k-1] + 2 \cdot R \cdot C \cdot u_A[k-1]}{T_A + 2 \cdot R \cdot C} \quad (4.16)$$

Die aktuelle Ausgangsspannung $u_A[k]$ berechnet sich aus dem aktuellen und einem vergangenen Wert der Eingangsspannung $u_E[k]$ und einem vergangenen Wert der Ausgangsspannung $u_A[k]$. Bild 4.6 zeigt den Vergleich zwischen dem zeitkontinuierlichen und dem zeitdiskreten System bei unterschiedlichen Abtastzeiten.

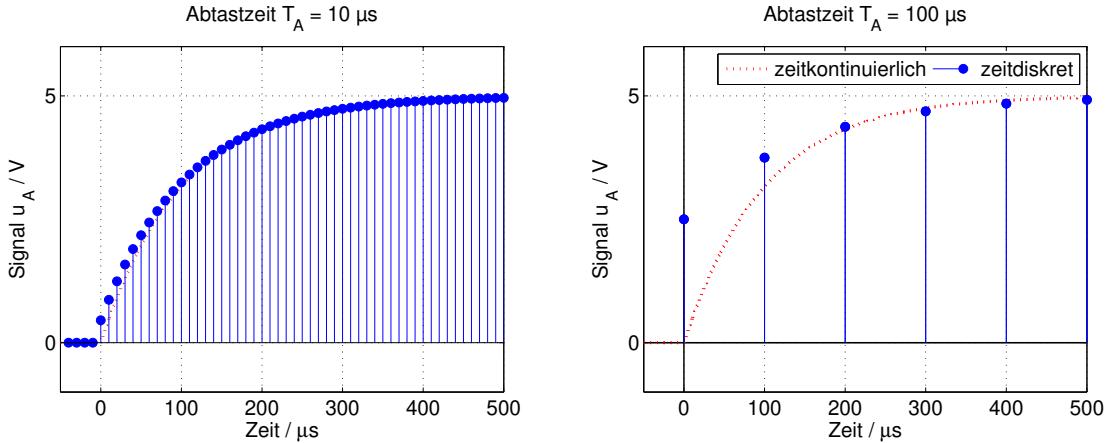


Bild 4.6: Vergleich zwischen zeitkontinuierlicher und zeitdiskreter Realisierung eines Tiefpasses ($R \cdot C = 100 \mu s$)

Die Abtastzeit von $T_A = 10 \mu s$ ist deutlich kleiner als die Zeitkonstante des Systems mit $T = 100 \mu s$. Aus diesem Grund ist die Approximationsgüte im links dargestellten Fall hoch. Die im rechten Bildteil diskutierte Abtastzeit von $T_A = 100 \mu s$ entspricht der Zeitkonstante des Systems. Aus diesem Grund ist die Approximation der Ableitung mit einem Differenzenquotienten unzureichend, die Approximationsgüte ist deutlich schlechter als bei einer Abtastzeit von $T_A = 10 \mu s$. Das Beispiel zeigt, dass zeitkontinuierliche Systeme zeitdiskret nachgebildet werden können. Die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$u_A(t) + R \cdot C \cdot \frac{du_A}{dt} = u_E(t) \quad (4.17)$$

geht dabei über in eine lineare Differenzengleichung erster Ordnung.

$$(T_A + 2 \cdot R \cdot C) \cdot u_A[k] + (T_A - 2 \cdot R \cdot C) \cdot u_A[k-1] = T_A \cdot u_E[k] + T_A \cdot u_E[k-1] \quad (4.18)$$

Die hier diskutierten Beispiele führen auf lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten.

$$c_0 \cdot y[k] + c_1 \cdot y[k-1] + \dots + c_n \cdot y[k-N] = d_0 \cdot u[k] + d_1 \cdot u[k-1] + \dots + d_L \cdot u[k-L] \quad (4.19)$$

Im Folgenden werden die Eigenschaften von Systemen diskutiert, die sich mit dieser Art von Differenzengleichungen beschreiben lassen.

4.2 Grundlegende Systemeigenschaften

Im Abschnitt 4.1 werden unterschiedliche Systeme beschrieben. Die Beschreibung führt zu linearen Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten. In diesem Abschnitt werden grundlegende Eigenschaften von Systemen diskutiert. Sie entsprechen den Eigenschaften linearer, zeitinvarianter Systeme im zeitkontinuierlichen Bereich. Es wird sich zeigen, dass lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten zeitdiskrete, lineare, zeitinvariante Systeme (LTI-Systeme) beschreiben.

4.2.1 Linearität

Für den Linearitätsnachweis eines Systems müssen die Systemantworten $y_1[k]$ und $y_2[k]$ auf die Eingangsfolgen $u_1[k]$ und $u_2[k]$ bekannt sein. Ein System ist linear, wenn es auf eine Linearkombination von Eingangssignalen

$$u[k] = \nu_1 \cdot u_1[k] + \nu_2 \cdot u_2[k] \quad (4.20)$$

mit derselben Linearkombination der entsprechenden Ausgangssignale reagiert.

$$u[k] = \nu_1 \cdot u_1[k] + \nu_2 \cdot u_2[k] \quad (4.21)$$

Der Nachweis erfolgt über Einsetzen der Gleichungen in die Differenzengleichung.

Beispiel: Linearität eines rückgekoppelten Systems

Das Filter mit der Differenzengleichung

$$y[k] = (1 - GF) \cdot u[k] + GF \cdot y[k - 1] \quad (4.22)$$

soll auf Linearität untersucht werden. Die Systemantworten $y_1[k]$ und $y_2[k]$ berechnen sich mit der Differenzengleichung zu

$$y_1[k] = (1 - GF) \cdot u_1[k] + GF \cdot y_1[k - 1] \quad (4.23)$$

beziehungsweise

$$y_2[k] = (1 - GF) \cdot u_2[k] + GF \cdot y_2[k - 1] \quad (4.24)$$

Wird das System mit der oben beschriebenen Linearkombination angeregt, ergibt sich das Ausgangssignal $y[k]$ aus derselben Linearkombination wie die Eingangssignale.

$$\begin{aligned} y[k] &= (1 - GF) \cdot u[k] + GF \cdot y[k - 1] \\ &= (1 - GF) \cdot (\nu_1 \cdot u_1[k] + \nu_2 \cdot u_2[k]) + GF \cdot (\nu_1 \cdot y_1[k - 1] + \nu_2 \cdot y_2[k - 1]) \\ &= (1 - GF) \cdot \nu_1 \cdot u_1[k] + (1 - GF) \cdot \nu_2 \cdot u_2[k] + GF \cdot \nu_1 \cdot y_1[k - 1] + GF \cdot \nu_2 \cdot y_2[k - 1] \\ &= \nu_1 \cdot (1 - GF) \cdot u_1[k] + \nu_1 \cdot GF \cdot y_1[k - 1] + \nu_2 \cdot (1 - GF) \cdot u_2[k] + \nu_2 \cdot GF \cdot y_2[k - 1] \\ &= \nu_1 \cdot y_1[k] + \nu_2 \cdot y_2[k] \end{aligned} \quad (4.25)$$

Bild 4.7 zeigt Ein- und Ausgangssignale eines linearen Systems, das mit den Signalen $u_1[k]$, $u_2[k]$ und $u[k] = u_1[k] + u_2[k]$ angeregt wird.

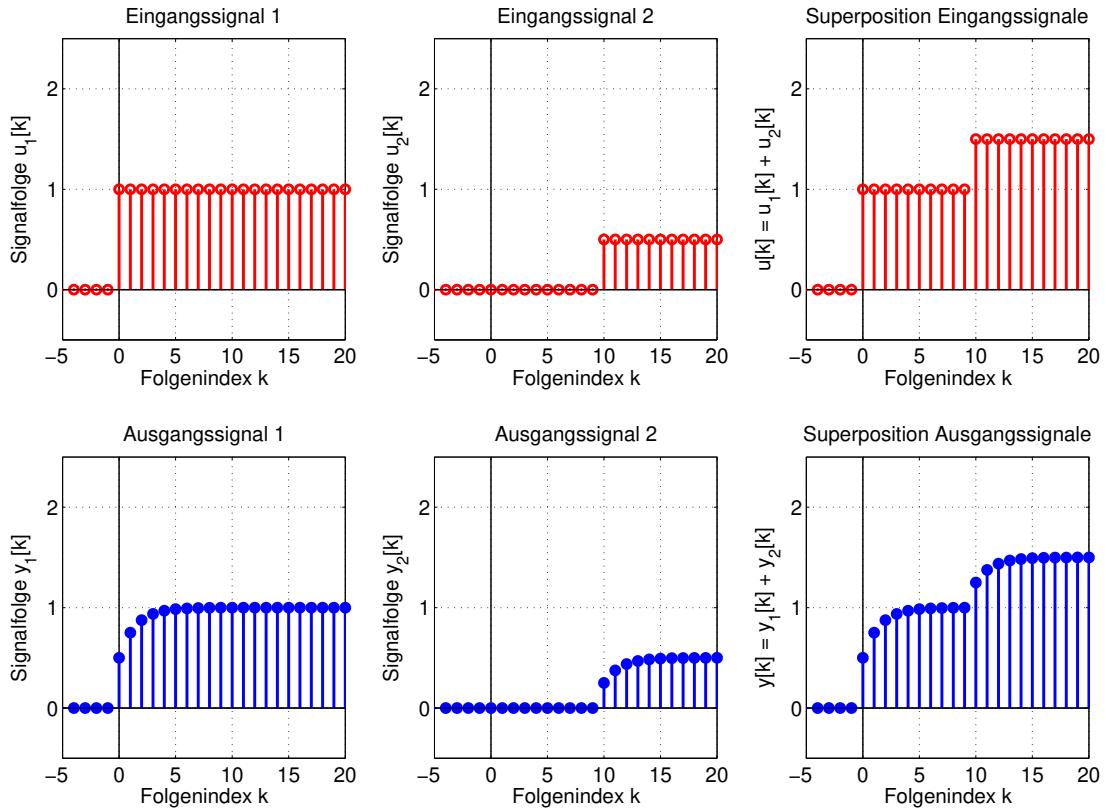


Bild 4.7: Reaktion eines linearen Systems auf die Anregung mit einer Linearkombination von Signalen

Auch das Ausgangssignal $y[k]$ setzt sich aus der Summe der Ausgangssignale $y_1[k]$ und $y_2[k]$ zusammen.

Die Linearität des Systems kann auch daran abgelesen werden, dass alle Folgen nur in linearen Summen auftreten. Keine der Folgen besitzt eine Potenz ungleich 1 oder tritt als Produkt von Folgen auf.

4.2.2 Zeitvarianz

Ein System reagiert auf ein Eingangssignal $u[k]$ mit einer Systemantwort $y[k]$. Ist das System zeitinvariant, so reagiert das System auf das verzögerte Eingangssignal $u[k - k_0]$ mit dem Ausgangssignal $y[k - k_0]$. Zeitinvariante Systeme reagieren also unabhängig vom Startzeitpunkt der Beobachtung auf gleiche Eingangssignale mit gleichen Ausgangssignalen.

Beispiel: Zeitinvarianz eines rückgekoppelten Systems

Das Filter mit der Differenzengleichung

$$y[k] = (1 - GF) \cdot u[k] + GF \cdot y[k - 1] \quad (4.26)$$

soll auf Zeitinvarianz untersucht werden. Dazu werden alle Ausdrücke k durch $k - k_0$ ersetzt. Es ergibt sich die Differenzengleichung

$$y[k - k_0] = (1 - GF) \cdot u[k - k_0] + GF \cdot y[k - k_0 - 1] \quad (4.27)$$

Wird das Eingangssignal um k_0 verschoben, wird auch das Ausgangssignal um k_0 verschoben.

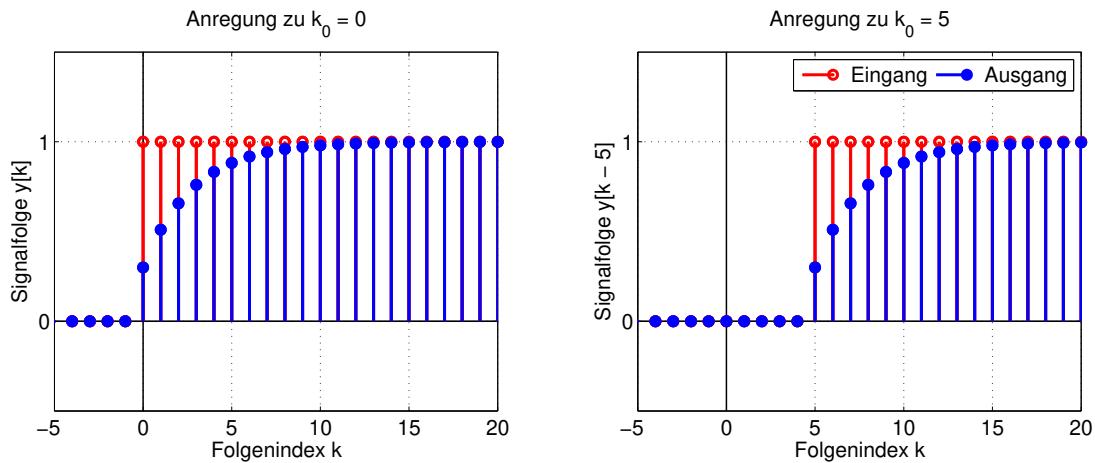


Bild 4.8: Reaktion eines zeitinvarianten Systems auf die Anregung mit zeitverschobenen Signalen

Es kann gezeigt werden, dass zeitinvariante Systeme Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten aufweisen. Ändern sich die Koeffizienten der Differenzengleichung mit dem Folgenindex k , ist das System zeitvariant.

4.2.3 Lineare, zeitinvariante Systeme (LTI-Systeme)

Die Darstellungen in diesem Skript beschränken sich bis auf wenige Ausnahmen auf Systeme, die linear und zeitinvariant sind und als LTI-Systeme bezeichnet werden. Für LTI-Systeme sind besonders anschauliche und einfach zu interpretierende Lösungs- und Interpretationsmethoden im Zeit-, Bild- und Frequenzbereich vorhanden. Sie entsprechen sinngemäß den Methoden zeitkontinuierlicher Systeme.

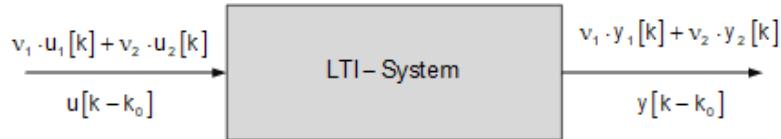


Bild 3.11: Lineares zeitinvariantes System

Systeme, die mit einer linearen Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten beschrieben werden können, erfüllen die Bedingungen nach Linearität und Zeitinvarianz. Ausgehend von der Differenzengleichung

$$\sum_{n=0}^N c_n \cdot y[k-n] = \sum_{l=0}^L d_l \cdot u[k-l] \quad (4.28)$$

werden die Eigenschaften der Linearität und Zeitinvarianz hergeleitet.

Linearität

Ausgangspunkt für den Beweis der Linearität sind zwei Signalkombinationen $u_1[k]$ und $y_1[k]$ sowie $u_2[k]$ und $y_2[k]$, für die gilt

$$\sum_{n=0}^N c_n \cdot y_1[k-n] = \sum_{l=0}^L d_l \cdot u_1[k-l] \quad (4.29)$$

$$\sum_{n=0}^N c_n \cdot y_2[k-n] = \sum_{l=0}^L d_l \cdot u_2[k-l] \quad (4.30)$$

Für eine beliebige Linearkombination

$$u[k] = v_1 \cdot u_1[k] + v_2 \cdot u_2[k] \quad (4.31)$$

gilt dann die Gleichung

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^L d_l \cdot u[k-l] &= \sum_{l=0}^L d_l \cdot v_1 \cdot u_1[k-l] + d_l \cdot v_2 \cdot u_2[k-l] \\ &= v_1 \cdot \sum_{l=0}^L d_l \cdot u_1[k-l] + d_l + v_2 \cdot \sum_{l=0}^L d_l \cdot u_2[k-l] \end{aligned} \quad (4.32)$$

Für jede der beiden Summen kann der Ausdruck aus (4.29) beziehungsweise (4.30) eingesetzt werden, und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^L d_l \cdot u[k-l] &= v_1 \cdot \sum_{n=0}^N c_n \cdot y_1[k-n] + v_2 \cdot \sum_{n=0}^N c_n \cdot y_2[k-n] \\ &= \sum_{n=0}^N c_n c_n \cdot (v_1 \cdot y_1[k-n] + v_2 \cdot y_2[k-n]) = \sum_{n=0}^N c_n c_n \cdot y[k-n] \end{aligned} \quad (4.33)$$

Eine Linearkombination von Eingangssignalen führt damit zu der identischen Linearkombination von Ausgangssignalen, sodass das System ein lineares System ist.

Zeitinvarianz

Wie oben bereits beschrieben sind lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten stets zeitinvariant. Wird in der Differenzengleichung

$$\sum_{n=0}^N c_n \cdot y[k-n] = \sum_{l=0}^L d_l \cdot u[k-l] \quad (4.34)$$

der Folgenindex sowohl bei Eingangs- als auch Ausgangssignalen um k_0 verschoben, bleibt die Differenzengleichung weiter gültig.

$$\sum_{n=0}^N c_n \cdot y[k-k_0-n] = \sum_{l=0}^L d_l \cdot u[k-k_0-l] \quad (4.35)$$

Kausalität

Wesentliche Voraussetzung für die Realisierbarkeit eines Systems ist die Forderung, dass die Werte der Ausgangssignale zu einem gegebenen Zeitpunkt nur von Werten der Eingangssignale zu diesem oder einem früheren Zeitpunkt abhängen, nicht jedoch etwa von zukünftigen Werten. Dieses Verhalten wird für zeitkontinuierliche Systeme als die Eigenschaft der Kausalität eines Systems definiert, die auch im diskreten Fall wesentlich ist. Liegt eine Systembeschreibung über eine Differenzengleichung vor, kann die Kausalität direkt bewertet werden.

$$\sum_{n=0}^N c_n \cdot y[k-n] = \sum_{l=0}^L d_l \cdot u[k-l] \quad (4.36)$$

Ist der Koeffizient $c_0 \neq 0$, kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Annahme $c_0 = 1$ getroffen werden. Ist das nicht der Fall, wird die Gleichung durch c_0 dividiert. Mit dieser Annahme kann die Differenzengleichung nach $y[k]$ aufgelöst werden, und es ergibt sich

$$y[k] = \sum_{l=0}^L d_l \cdot u[k-l] - \sum_{n=1}^N c_n \cdot y[k-n] \quad (4.37)$$

Da alle Indizes m und n größer gleich null sind, ist ein System, das durch eine lineare Differenzengleichung der Form aus Gleichung (4.37) beschrieben werden kann, ein kausales System. Ist in der

Differenzengleichung (4.36) der Koeffizient $c_0 = 0$, kann nicht nach $y[k]$ aufgelöst werden. Wird nach $y[k - 1]$ aufgelöst, ergibt sich die Gleichung

$$y[k - 1] = \frac{1}{c_1} \cdot \left(\sum_{l=0}^L d_l \cdot u[k - l] - \sum_{n=2}^N c_n \cdot y[k - n] \right) \quad (4.38)$$

Damit ist der Ausgangswert $y[k - 1]$ von dem zukünftigen Eingangswert $u[k]$ abhängig. Das System ist demnach für $c_0 = 0$ nicht kausal.

Durch die Kausalitätsforderung sind einige Systembetrachtungen der digitalen Signalverarbeitung aufwendig. Daher werden im Folgenden aus Vereinfachungsgründen auch nicht-kausale Systeme betrachtet. Diese Systeme können aber vielfach durch eine Verschiebung kausal und damit realisierbar gemacht werden.

Beispiel: Kausalität des gleitenden Mittelwertes

Bei der Beschreibung zeitdiskreter Systeme wird der gleitende Mittelwert vorgestellt. Er hat die Differenzengleichung

$$y_1[k] = \frac{1}{5} \cdot (u[k] + u[k - 1] + u[k - 2] + u[k - 3] + u[k - 4]) \quad (4.39)$$

Weil das Ausgangssignal $y[k]$ nur von aktuellen und vergangenen Eingangswerten abhängt, ist das System kausal. Es weist aber eine zeitliche Verzögerung auf, die bei der Berechnung von Frequenzgängen noch dargestellt wird. Ein System mit der Differenzengleichung

$$y_2[k] = \frac{1}{5} \cdot (u[k + 2] + u[k + 1] + u[k] + u[k - 1] + u[k - 2]) \quad (4.40)$$

ist nicht mehr kausal, weist aber - wie später gezeigt wird - keine zeitliche Verzögerung auf. Oft werden in der Datenverarbeitung erst alle Messwerte aufgenommen und anschließend ausgewertet. In diesem Fall liegen auch zukünftige Werte vor. Die Kausalität von Systemen ist in diesem Fall nicht zwingend erforderlich. Bild 4.9 stellt die Sprungantwort eines kausalen und eines nicht kausalen Systems zur Berechnung eines gleitenden Mittelwertes dar.

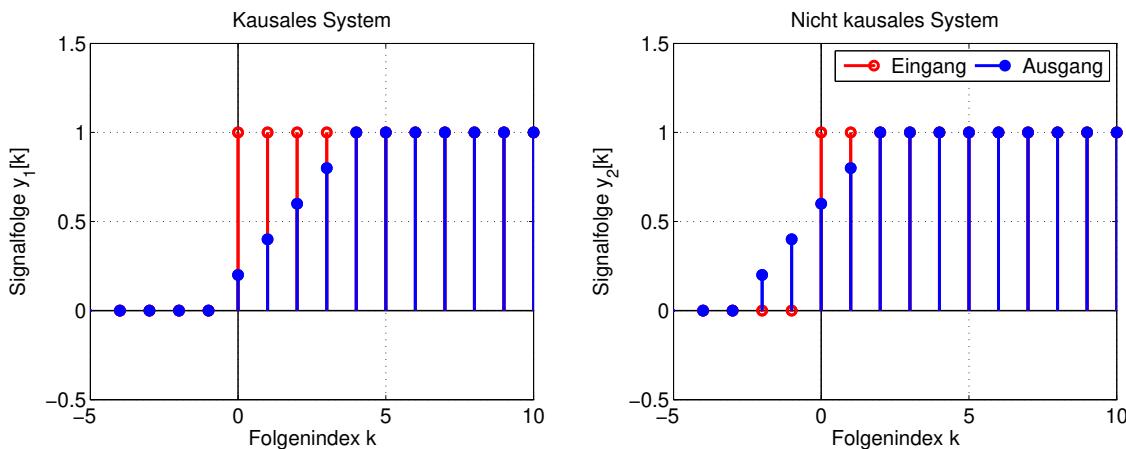


Bild 4.9: Sprungantwort eines kausalen und eines nicht kausalen Systems zur Berechnung eines gleitenden Mittelwertes

Es ist deutlich zu erkennen, dass das nicht kausale System reagiert, bevor der Sprung des Eingangssignals stattgefunden hat, während das kausale Signal erst nach der eigentlichen Anregung reagiert.

4.2.4 Stabilität

Für zeitkontinuierliche Systeme wird in Teil A der Buchreihe folgende Stabilitätsdefinition eingeführt: Ein System ist asymptotisch stabil, wenn es nach einer zeitlich begrenzten Anregung mit endlicher Energie wieder seine Ruheposition erreicht. Es ist grenzstabil, wenn es nach einer zeitlich begrenzten Anregung mit endlicher Energie zu einem konstanten Ausgangswert konvergiert oder mit konstant schwingendem Ausgangssignal reagiert. Ein System ist instabil, wenn es auf eine zeitlich begrenzte Anregung endlicher Energie mit divergierendem Ausgangssignal reagiert. Diese Stabilitätsdefinition wird für zeitdiskrete Systeme übernommen.

Wie bei zeitkontinuierlichen Systemen erfolgt der Nachweis im Zeitbereich über die charakteristische Gleichung (Kapitel 4.3.3) oder die Impulsantwort (Kapitel 4.4.4). Alternativ kann die Stabilität mit der z-Transformation bewertet werden (Kapitel 6.3).

Stabiles, grenzstabiles und instabiles System

Als Beispiele werden rekursive Systeme untersucht. Das erste System hat die Differenzengleichung

$$y_1[k] = 10 \cdot u[k] + \frac{1}{2} \cdot y_1[k-1] \quad (4.41)$$

Wird die Anregung $u[k]$ nach einer endlichen Zeit zu null, wird der Wert $y_1[k]$ nur halb so groß wie der Wert $y_1[k-1]$ im Takt zuvor. Aus diesem Grund konvergiert $y_1[k]$ für $k \rightarrow \infty$ gegen null. Das System ist asymptotisch stabil. Das zweite System wird über die Differenzengleichung

$$y_2[k] = 2 \cdot u[k] + y_2[k-1] \quad (4.42)$$

beschrieben. Wird die Anregung $u[k]$ zu null, bleibt der Wert $y_2[k]$ genauso so groß wie der Wert $y_2[k-1]$ im Takt zuvor. Aus diesem Grund ist $y_2[k]$ für $k \rightarrow \infty$ konstant. Das System ist grenzstabil. Das dritte System wird durch die Gleichung

$$y_3[k] = \frac{1}{2} \cdot u[k] + \frac{11}{10} \cdot y_3[k-1] \quad (4.43)$$

definiert. Bereits an der Differenzengleichung wird deutlich, dass auch nach Ende der Anregung der Wert $y_3[k]$ einen Faktor 1.1 größer ist als der Werte $y_3[k-1]$ im Takt zuvor. Die Systemantwort divergiert. Das System ist damit instabil. Bild 4.10 zeigt die Sprungantworten der unterschiedlichen Systeme. Alle Systeme werden mit einer Rechteckfolge

$$u[k] = \sigma[k] - \sigma[k-10] \quad (4.44)$$

angeregt, die eine endliche Energie aufweist.

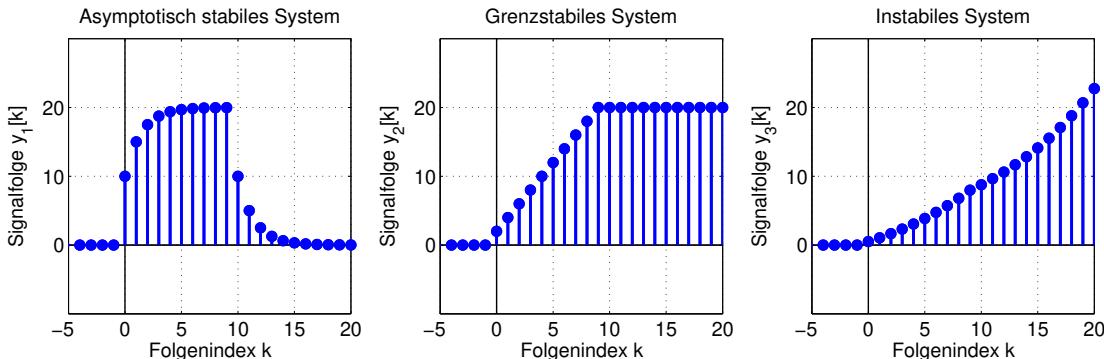


Bild 4.10: Sprungantwort eines asymptotisch stabilen, grenzstabilen und instabilen Systems

Bei dem asymptotisch stabilen System klingt die Systemantwort ab, wenn das Eingangssignal zu null wird. Bei dem grenzstabilen System bleibt die Systemantwort konstant, wenn die Anregung zu null

wird. Bei dem instabilen System wächst das Ausgangssignal stetig an, auch nachdem die Anregung zu null wird.

Die Stabilitätseigenschaften lassen sich bei diesen einfachen Systemen bereits an der Differenzengleichung ablesen, indem das Eingangssignal zu null gesetzt wird. Bei dem stabilen System ergibt sich der neue Ausgangswert aus einem Bruchteil des alten Ausgangswertes. Bei dem grenzstabilen System sind alter und neuer Ausgangswert identisch. Bei dem instabilen System ergibt sich der neue Ausgangswert aus einem Vielfachen des alten Ausgangswertes. Der Koeffizient vor dem Term $y[k - 1]$ entscheidet bei diesem System erster Ordnung offenbar über die Stabilität des Systems.

4.2.5 Zusammenfassung grundlegender Systemeigenschaften

Tabelle 4.1 fasst die diskutierten Systemeigenschaften und ihre Bedeutung zusammen.

Tabelle 4.1: Zusammenfassung von Systemeigenschaften

Eigenschaft	Bedeutung
Linearität	System reagiert auf Linearkombination von Eingangssignalen $x[k] = v_1 \cdot u_1[k] + v_2 \cdot u_2[k]$ mit derselben Linearkombination von Ausgangssignalen $y[k] = v_1 \cdot y_1[k] + v_2 \cdot y_2[k]$
Zeitinvarianz	System reagiert auf ein verzögertes Eingangssignal $u[k - k_0]$ mit einem Ausgangssignal $y[k - k_0]$
Kausalität	System reagiert auf ein Eingangssignal erst nach Beginn der Anregung $c_0 \neq 0$
Asymptotische Stabilität	System erreicht nach einer Anregung mit endlicher Energie wieder seine Ruheposition
Grenzstabilität	System bleibt nach einer Anregung in der aktuellen Position
Instabilität	System reagiert nach einer Anregung mit endlicher Energie mit einer divergierenden Systemantwort

4.3 Lösung linearer Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten

Die dargestellten Beispiele haben ein Systemverhalten, das über lineare Differenzengleichungen N-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten beschrieben wird. Zur Berechnung des Ausgangssignals im Zeitbereich stehen unterschiedliche Methoden zur Verfügung, die in diesem Kapitel vorgestellt werden.

4.3.1 Rekursive Darstellung von Differenzengleichungen

Die Differenzengleichung N-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten lautet in ihrer allgemeinen Form

$$\sum_{n=0}^N c_n \cdot y[k-n] = \sum_{l=0}^L d_l \cdot u[k-l] \quad (4.45)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird die Annahme $c_0 = 1$ getroffen. Mit dieser Annahme kann die Gleichung umgeformt werden zu

$$y[k] = \sum_{l=0}^L d_l \cdot u[k-l] - \sum_{n=1}^N c_n \cdot y[k-n] \quad (4.46)$$

Das aktuelle Ausgangssignal ergibt sich allgemein aus dem aktuellen Wert des Eingangssignals sowie den vergangenen Werten des Ein- und Ausgangssignals. Die Ausgangssignale der oben dargestellten Systeme werden mit Hilfe dieser rekursiven Darstellung berechnet.

Für numerische Berechnungen reicht dieses Lösungsverfahren für lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten vollständig aus. Die rekursive Form hat aber den Nachteil, dass keine geschlossene Form des Ausgangssignals angegeben werden kann. Sie ist deshalb nicht geeignet für eine Analyse von Eigenschaften wie Schwingungsneigung und Stabilität. Deshalb werden in diesem Abschnitt Verfahren zur analytischen Berechnung der Systemantwort beschrieben.

4.3.2 Explizite Lösung über die Vier-Schritt-Methode

Für die Diskussion von Systemeigenschaften ist es notwendig, eine geschlossene Darstellung des Ausgangssignals zu erhalten. Für die Lösung von linearen Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten gibt es eine sogenannte Vier-Schritt-Methode. Sie besteht aus den Schritten

- Berechnung der allgemeinen homogenen Lösung
- Berechnung einer partikulären Lösung
- Kombination von homogener und partikulärer Lösung
- Bestimmung der Konstanten über Anfangsbedingungen

Berechnung der allgemeinen homogenen Lösung

Zur Berechnung der allgemeinen homogenen Lösung wird das Eingangssignal auf null gesetzt. Es ergibt sich die homogene Differenzengleichung

$$y_H[k] + \sum_{n=1}^N c_n \cdot y_H[k-n] = 0 \quad (4.47)$$

Mit dem Ansatz

$$y_H[k] = Y_0 \cdot \lambda^k \quad (4.48)$$

kann die homogene Lösung gefunden werden. Einsetzen des Ansatzes führt zu der Gleichung

$$Y_0 \cdot \lambda^k + Y_0 \cdot \sum_{n=1}^N c_n \cdot Y_0 \cdot \lambda^{k-n} = 0 \quad (4.49)$$

beziehungsweise

$$\lambda^k + \sum_{n=1}^N c_n \cdot \lambda^{k-n} = 0 \quad (4.50)$$

Sie wird als charakteristische Gleichung bezeichnet, weil mit ihr die für das System charakteristischen Parameter λ_n bestimmt werden. Da es sich bei dem System um ein lineares System handelt, ergibt sich die allgemeine homogene Lösung aus der Linearkombination der berechneten Nullstellen λ_n .

$$y_H[k] = Y_1 \cdot \lambda_1^k + Y_2 \cdot \lambda_2^k + \dots + Y_N \cdot \lambda_N^k \quad (4.51)$$

Die Lösungen der charakteristischen Gleichung müssen jedoch nicht die Vielfachheit von eins haben. Existiert ein N_1 -facher Wert λ_1 , ergibt sich die allgemeine homogene Lösung

$$y_H[k] = Y_1 \cdot \lambda_1^k + Y_2 \cdot k \cdot \lambda_1^k + \dots + Y_{N_1} \cdot k^{N_1-1} \cdot \lambda_1^k + Y_{N_1+1} \cdot \lambda_2^k + \dots + Y_N \cdot \lambda_{N-N_1+1}^k \quad (4.52)$$

Beispiel: Sprungantwort eines Tiefpasses - Berechnung der allgemeinen homogenen Lösung

Das praktische Vorgehen wird am Beispiel des rekursiven Tiefpasses dargestellt. Es soll die Systemreaktion auf einen Sprung am Eingang des Filters berechnet werden. Die Differenzengleichung für den Filter lautet nach Gleichung (4.1)

$$y[k] = (1 - GF) \cdot u[k] + GF \cdot y[k-1] \quad (4.53)$$

Für die allgemeine homogene Lösung muss das Eingangssignal $u[k]$ zu null gesetzt werden.

$$y_H[k] - GF \cdot y_H[k-1] = 0 \quad (4.54)$$

Mit dem Ansatz

$$y_H[k] = Y_0 \cdot \lambda^k \quad (4.55)$$

ergibt sich

$$\lambda^k - GF \cdot \lambda^{k-1} = 0 \quad (4.56)$$

Die Gleichung ist zum einen für $\lambda = 0$ erfüllt. Diese triviale Lösung beschreibt aber das Ausgangssignal, das zu allen Zeiten null ist. Es ist deshalb nicht von Interesse. Die von null verschiedene Nullstelle dieser Gleichung ergibt sich zu

$$\lambda = GF \quad (4.57)$$

Die allgemeine homogene Lösung ergibt sich als Linearkombination der berechneten Lösungen und lautet

$$y_H[k] = Y_0 \cdot GF^k \quad (4.58)$$

Die Konstante Y_0 wird in Schritt 4 durch Anfangsbedingungen festgelegt.

Berechnung einer partikulären Lösung

Im nächsten Schritt muss eine partikuläre Lösung der Differenzengleichung

$$y_P[k] + \sum_{n=1}^N c_n \cdot y_P[k-n] = \sum_{l=0}^L d_l \cdot u[k-l] \quad (4.59)$$

bestimmt werden. Als Ansatz für $y_P[k]$ wird ein Signal verwendet, das in Abhängigkeit vom Eingangssignal gewählt wird.

Tabelle 4.2: Ansatz für partikuläre Lösungen linearer Differenzengleichungen

Eingangssignal $u[k]$	Ansatz für die partikuläre Lösung $y_P[k]$
Konstante	Konstante
Polynom	Polynom gleichen Grades
Exponentialfolge u_0^k	Exponentialfolge $k \cdot u_0^k$
Harmonische Schwingung $\cos(\Omega \cdot k)$	$A \cdot \cos(\Omega \cdot k + \varphi)$

Durch Einsetzen dieses Ansatzes in die Differenzengleichung ergibt sich eine partikuläre Lösung $y_P[k]$. Ist das Eingangssignal $u[k]$ eine Kombination der dargestellten Eingangssignale, muss als Ansatz für die partikuläre Lösung eine entsprechende Kombination von Ansätzen gewählt werden. Dabei ist es ausreichend, eine beliebige partikuläre Lösung zu finden.

Alternativ kann die partikuläre Lösung durch eine Variation der Konstanten durchgeführt werden. Dabei werden die Konstanten $Y_0 \dots Y_N$ der allgemeinen homogenen Lösung als Funktion des Index k variiert. Auflösen nach den varierten Konstanten $Y_n(k)$ führt zu der gesuchten partikulären Lösung.

Beispiel: Sprungantwort eines Tiefpasses - Berechnung einer partikulären Lösung

Für das Beispiel des rekursiven Tiefpass-Filters wird die partikuläre Lösung über Variation der Konstanten bestimmt. Der Ansatz für die partikuläre Lösung lautet

$$y_P[k] = Y_0(k) \cdot GF^k \quad (4.60)$$

Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung führt unter Berücksichtigung des Eingangssignals

$$u[k] = \sigma[k] \quad (4.61)$$

zu

$$Y_0(k) \cdot GF^k - GF \cdot Y_0(k-1) \cdot GF^{k-1} = (1 - GF) \cdot \sigma[k] \quad (4.62)$$

Damit kann der Koeffizient $Y_0(k)$ rekursiv beschrieben werden als

$$Y_0(k) = Y_0(k-1) + \frac{(1 - GF)}{GF^k} \cdot \sigma[k] \quad (4.63)$$

Da nur eine beliebige partikuläre Lösung erforderlich ist, kann $Y_0(-1) = 0$ gesetzt werden. Damit sind auch alle Konstanten $Y_0(k)$ mit $k < 1$ null. Für $k > -1$ ergibt sich

$$Y_0(0) = (1 - GF) \quad (4.64)$$

$$Y_0(1) = (1 - GF) + \frac{(1 - GF)}{GF} \quad (4.65)$$

Eine wiederholte Berechnung führt auf $Y_0(k)$

$$Y_0(k) = \left(1 + \frac{1}{GF} + \left(\frac{1}{GF} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{GF} \right)^k \right) \cdot (1 - GF) \cdot \sigma[k] \quad (4.66)$$

Mit der Summenformel für die endliche geometrische Reihe ergibt sich wegen der Definition des Gedächtnisfaktors mit $|GF| < 1$

$$Y_0(k) = \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{GF} \right)^{k+1}}{1 - \frac{1}{GF}} \right) \cdot (1 - GF) \cdot \sigma[k] \quad (4.67)$$

und die partikuläre Lösung lautet

$$y_P[k] = \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{GF} \right)^{k+1}}{1 - \frac{1}{GF}} \right) \cdot (1 - GF) \cdot \sigma[k] \cdot GF^k = \left(1 - GF^{k+1} \right) \cdot \sigma[k] \quad (4.68)$$

Kombination von allgemeiner homogener und partikulärer Lösung

Die komplette Lösung der Differenzengleichung ergibt sich als Summe aus der allgemeinen homogenen und einer partikulären Lösung.

$$y[k] = Y_0 \cdot \lambda_0^k + Y_1 \cdot \lambda_1^k + \dots + Y_N \cdot \lambda_N^k + y_P[k] \quad (4.69)$$

Beispiel: Sprungantwort eines Tiefpasses - Kombination der beiden Lösungen

Die Summe von allgemeiner homogener und partikulärer Lösung errechnet sich zu

$$y[k] = y_H[k] + y_P[k] = Y_0 \cdot GF^k + (1 - GF^{k+1}) \cdot \sigma[k] \quad (4.70)$$

Bestimmung der Konstanten über Anfangsbedingungen

Die Werte für Y_n müssen durch Einsetzen von Folgenwerten ermittelt werden. Für jede Konstante Y_n ist ein Folgenwert als Randbedingung notwendig.

Beispiel: Sprungantwort eines Tiefpasses - Bestimmung der Konstanten

Für das vorliegende Beispiel wird vorgegeben, dass das Ausgangssignal für $k < 0$ null ist. Für $k = 0$ ergibt sich das Ausgangssignal mit $y[-1] = 0$ direkt über die Differenzengleichung zu

$$y[0] = (1 - GF) + GF \cdot 0 = 1 - GF \quad (4.71)$$

Der Wert Y_0 in Gleichung (4.70) muss über die Anfangsbedingungen $y[0] = 1 - GF$ bestimmt werden.

$$y[0] = Y_0 \cdot GF^0 + 1 - GF^1 = Y_0 + 1 - GF = 1 - GF \quad (4.72)$$

Es ergibt sich die Konstante $Y_0 = 0$, und die Lösung der Differenzengleichung lautet

$$y[k] = (1 - GF^{k+1}) \cdot \sigma[k] \quad (4.73)$$

Bild 4.11 vergleicht das Ausgangssignal der rekursiven Berechnung mit dem der analytischen Berechnung.

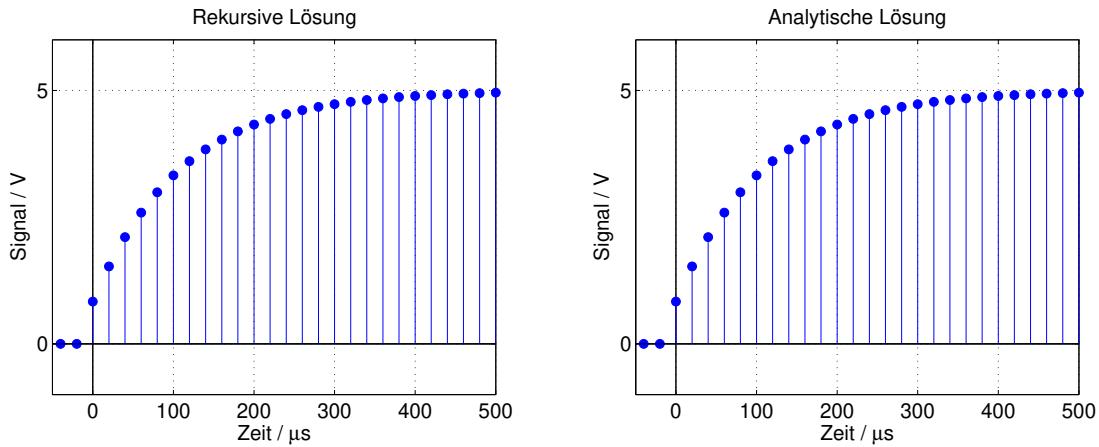


Bild 4.11: Vergleich zwischen rekursiver und analytischer Berechnung des Ausgangssignals eines rekursiven Tiefpass für GF = 0.9

Erwartungsgemäß stimmen die beiden Berechnungen überein.

Das Vorgehen bei der Vier-Schritt-Methode zur Lösung linearer Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten ist in Tabelle 4.3 zusammengefasst.

Tabelle 4.3: Ansatz für partikuläre Lösungen linearer Differenzengleichungen

Schritt	Beschreibung
1	Lösung der homogenen Differenzengleichung $\sum_{n=0}^N c_n \cdot y[k-n] = 0$ über Ansatz $y_H[k] = Y_0 \cdot \lambda^k$ durch Lösen der charakteristischen Gleichung $\lambda^k \sum_{n=0}^N c_n$ Allgemeine Lösung in Abhängigkeit der Vielfachheit
2	Polynom gleichen Grades
3	Exponentialfolge $k \cdot u_0^k$
4	$A \cdot \cos(\Omega \cdot k + \varphi)$

4.3.3 Stabilität und charakteristische Gleichung eines Systems

Bei der Einführung des Begriffes der Stabilität in Abschnitt 4.2.3 wird ausgeführt, dass stabile Systeme nach einer Anregung mit endlicher Energie wieder in ihren Ausgangszustand zurückkehren. Das Verhalten des Systems nach der Anregung wird durch die homogene Lösung der Differentialgleichung beschrieben, die in Abschnitt 4.3.2 berechnet wird. Sie setzt sich bei einfachen Lösungen λ_n aus einer Linearkombination von Potenzfolgen zusammen.

$$y_H[k] = Y_1 \cdot \lambda_1^k + Y_2 \cdot \lambda_2^k + \dots + Y_N \cdot \lambda_N^k \quad (4.74)$$

Damit die homogene Lösung zu null wird, müssen die alle Lösungen λ_n einen Betrag $|\lambda_n| < 1$ aufweisen. Besitzt ein Wert λ_n einen Betrag $|\lambda_n| > 1$, divergiert der entsprechende Summand aus Gleichung (4.74), und folglich divergiert auch die Lösung der homogenen Differentialgleichung.

Liegt mit λ_1 eine P-fache Lösung der charakteristischen Gleichung vor, weisen die zugehörigen Summanden der homogenen Lösung Terme der Form

$$y_H[k] = Y_1 \cdot \lambda_1^k + Y_2 \cdot k \cdot \lambda_1^k + \dots + Y_P \cdot k^{P-1} \cdot \lambda_1^k + Y_{P+1} \cdot \lambda_2^k + \dots + Y_N \cdot \lambda_{N-P+1}^k \quad (4.75)$$

auf. Da die Exponentialfunktion schneller fällt und wächst als jede Potenz von k , konvergiert diese Summe ebenfalls für einen Betrag $|\lambda_n| < 1$, und sie divergiert für einen Betrag $|\lambda_n| > 1$. Dabei ist es unerheblich, ob die Lösungen λ_n reell oder komplex sind.

Einen Sonderfall stellen Lösungen mit einem Betrag $|\lambda_n| = 1$ dar.

$$y_H[k] = Y_1 \cdot 1^k + Y_2 \cdot e^{j\cdot\varphi} + Y_3 \cdot e^{-j\cdot\varphi} + \dots \quad (4.76)$$

Die Lösungen sind konstant beziehungsweise schwingen mit konstanter Amplitude. Für den Fall einfacher Lösungen liegt damit weder eine konvergente, noch eine divergente Lösung vor. Der Fall entspricht dem diskutierten Fall der Grenzstabilität des zugehörigen Systems.

Besitzt eine Lösung mit einem Betrag $|\lambda_n| = 1$ eine Vielfachheit von $P > 1$, entstehen Terme der Form

$$\begin{aligned} y_H[k] = & Y_1 \cdot 1^k + Y_2 \cdot k \cdot 1^k + Y_3 \cdot k^2 \cdot 1^k \dots \\ & + Y_3 \cdot e^{j\cdot\varphi\cdot k} + Y_4 \cdot k \cdot e^{j\cdot\varphi\cdot k} + Y_5 \cdot k^2 \cdot e^{j\cdot\varphi\cdot k} \dots \\ & + Y_6 \cdot e^{-j\cdot\varphi\cdot k} + Y_7 \cdot k \cdot e^{-j\cdot\varphi\cdot k} + Y_8 \cdot k^2 \cdot e^{-j\cdot\varphi\cdot k} \dots \end{aligned} \quad (4.77)$$

Da die Exponentialfunktion die Terme nicht dämpft, divergiert der Ausdruck und damit die gesamte homogene Lösung. Das System ist instabil. Aus dieser Diskussion ergibt sich der in Tabelle 4.7 beschriebene Zusammenhang zwischen der Stabilität von linearen, zeitinvarianten Systemen und den Lösungen der charakteristischen Gleichung.

Tabelle 4.4: Zusammenhang zwischen Lösungen der charakteristischen Gleichung und der Stabilität von LTI-Systemen

Eigenschaft	Lösungen λ_n der charakteristischen Gleichung
Asymptotisch stabiles System	Alle Lösungen λ_n besitzen einen Betrag $ \lambda_n < 1$
Grenzstabiles System	Alle Lösungen λ_n besitzen einen Betrag $ \lambda_n < 1$, zusätzlich liegt mindestens eine einfache Lösung mit Betrag $ \lambda_n = 1$ vor
Instabiles System	Es existiert mindestens eine Lösung λ_n mit einem Betrag $ \lambda_n > 1$ oder eine mehrfache Lösung mit Betrag $ \lambda_n = 1$

4.3.4 Sprung- und Impulsantwort eines Systems

Das Ausgangssignal eines zeitdiskreten Systems ist von dem Anfangszustand abhängig. Sind die Anfangsbedingungen null, ist das System energiefrei. Wie im zeitkontinuierlichen Bereich wird die Reaktion eines energiefreien Systems auf eine sprungförmige Erregung $\sigma[k]$ als Sprungantwort $h[k]$ bezeichnet.

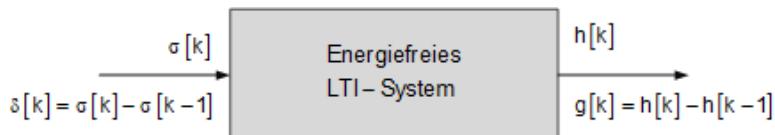


Bild 4.12: Sprungantwort $h[k]$ und Impulsantwort $g[k]$ als Ausgangssignal eines energiefreien Systems

Für das Beispiel des rekursiven Filters wird in Abschnitt 4.3.2 die Antwort des energiefreien Systems auf einen Sprung der Höhe 1 mit der Bedingung $y[k = -1] = 0$ berechnet.

$$y[k] = (1 - GF^{k+1}) \cdot \sigma[k] \quad (4.78)$$

Analog wird die Impulsantwort $g[k]$ als Reaktion eines energiefreien Systems auf eine Anregung mit einem Impuls $\delta[k]$ definiert. Im Kapitel 4.2 wird gezeigt, dass die Impulsfolge $\delta[k]$ als Differenz zweier Sprungfolgen berechnet werden kann.

$$\delta[k] = \sigma[k] - \sigma[k - 1] \quad (4.79)$$

Wegen der Linearität und Zeitinvarianz errechnet sich die Systemreaktion eines energiefreien LTI-Systems auf einen Impuls am Eingang aus der Differenz zweier Sprungantworten zu

$$g[k] = h[k] - h[k - 1] \quad (4.80)$$

Die Systemantwort $g[k]$ eines rekursiven Filters auf einen Impuls $\delta[k]$ ergibt sich demnach zu

$$g[k] = h[k] - h[k - 1] = (1 - GF^{k+1} \cdot \sigma[k]) - (1 - GF^k \cdot \sigma[k - 1]) \quad (4.81)$$

4.3.5 Berechnung der Systemantwort durch Superposition

Ist ein System linear und zeitinvariant, kann ein Ausgangssignal dadurch berechnet werden, dass die Eingangssignale zerlegt, ihre jeweiligen Systemantworten berechnet und anschließend addiert werden. Dieses Prinzip wird als Superpositionsprinzip bezeichnet. Als erste Anwendung dieses Prinzips wird in Abschnitt 4.3.4 die Impulsantwort als Differenz zweier Sprungantworten berechnet. Wird zum Beispiel ein rekursives Filter mit der Differenzengleichung

$$y[k] = (1 - GF) \cdot u[k] + GF \cdot y[k - 1] \quad (4.82)$$

mit einer Rechteckfolge der Länge 10 und der Höhe 5 beaufschlagt, kann das Eingangssignal als Summe zweier Sprungfolgen dargestellt werden

$$u[k] = 5 \cdot (\sigma[k] - \sigma[k - 10]) = 5 \cdot \sigma[k] - 5 \cdot \sigma[k - 10] \quad (4.83)$$

Damit ergibt sich das Ausgangssignal $y[k]$ aus der Summe der beiden Sprungantworten

$$y[k] = 5 \cdot h[k] - 5 \cdot h[k - 10] = 5 \cdot (1 - GF^{k+1} \cdot \sigma[k]) - 5 \cdot (1 - GF^{k-9} \cdot \sigma[k - 10]) \quad (4.84)$$

Bild 4.13 stellt das Superpositionsprinzip für das Beispiel des rekursiven Filters bei Anregung mit einem rechteckförmigen Signal dar.

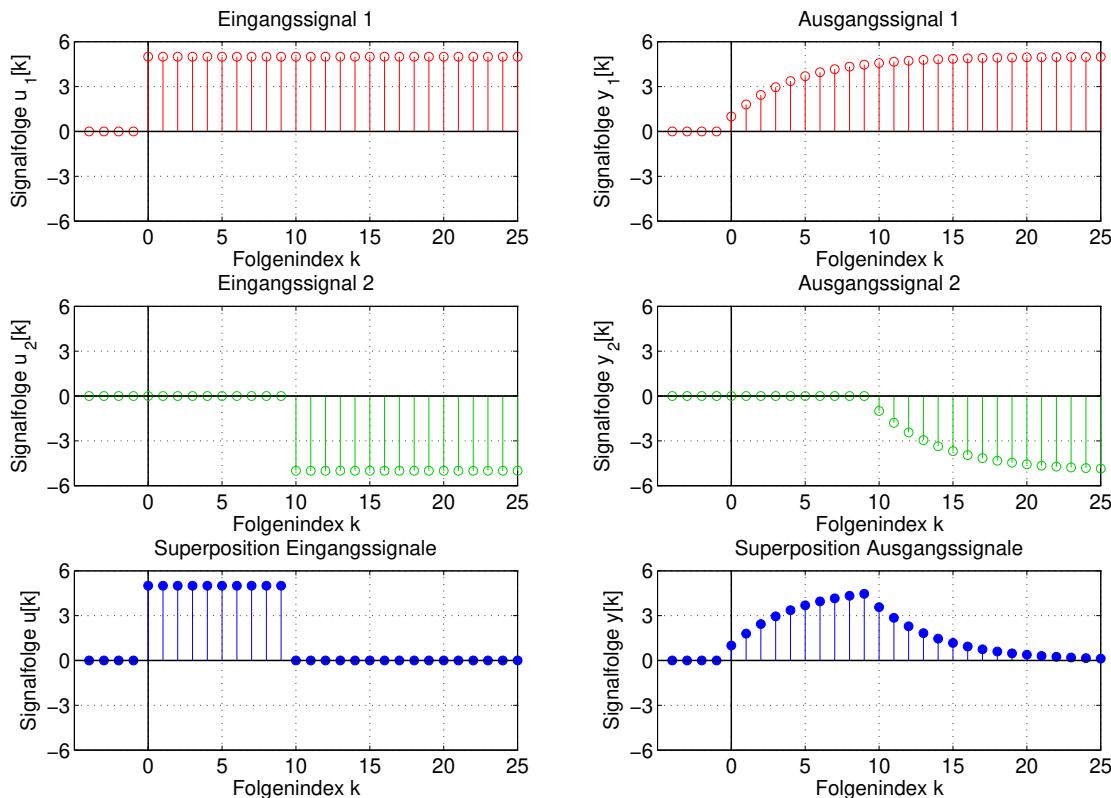


Bild 4.13: Überlagerung der Systemreaktion $y[k] = y_1[k] + y_2[k]$ bei überlagertem Eingangssignal $u[k] = u_1[k] + u_2[k]$

Mit der Kenntnis der Sprungantwort eines Systems kann demnach für Eingangssignale, die sich über die Sprungfolgen darstellen lassen, eine Systemantwort über Superposition berechnet werden.

4.4 Berechnung der Systemantwort über die Faltungssumme

Das Superpositionsprinzip erlaubt eine Zerlegung des Eingangssignals in eine Linearkombination von Eingangssignalen, deren entsprechendes Ausgangsignal bekannt ist. Auf Basis des Superpositionsprinzips kann bei bekannter Impulsantwort $g[k]$ das Ausgangssignal zu einem beliebigen Eingangssignal $u[k]$ bestimmt werden. Der Vorgang wird wie bei zeitkontinuierlichen Systemen als Faltung bezeichnet. Im diskreten Zeitbereich geht das Faltungsintegral in eine sogenannte Faltungssumme über.

4.4.1 Herleitung der Faltungssumme

Mathematisch kann die Faltungssumme über das Superpositionsprinzip hergeleitet werden. Die Systemreaktion eines energiefreien Systems auf einen Impuls am Eingang ist die Impulsantwort $g[k]$. Ein beliebiges Eingangssignal $u[k]$ kann mit der Ausblendeigenschaft der Impulsfolge als gewichtete Summe von Impulsen beschrieben werden.

$$u[k] = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} u[\kappa] \cdot \delta[k-\kappa] \quad (4.85)$$

Die Systemantwort $y[k]$ auf ein solches Eingangssignal ergibt sich aus derselben Linearkombination von Impulsantworten

$$y[k] = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} u[\kappa] \cdot g[k-\kappa] = u[k] * g[k] \quad (4.86)$$

Diese Operation wird als Faltungssumme oder auch diskrete Faltung bezeichnet.

Beispiel: Berechnung der gleitenden Mittelung über die Faltungssumme

Der im vorangegangenen Abschnitt behandelte Algorithmus zur gleitenden Mittelung führte zu der Differenzengleichung

$$y[k] = \frac{1}{5} \cdot (u[k] + u[k-1] + u[k-2] + u[k-3] + u[k-4]) \quad (4.87)$$

Durch Einsetzen der Impulsfolge als Eingangssignal ergibt sich die Impulsantwort zu

$$g[k] = \frac{1}{5} \cdot (\delta[k] + \delta[k-1] + \delta[k-2] + \delta[k-3] + \delta[k-4]) \quad (4.88)$$

und das Ausgangssignal zu einem beliebigen Eingangssignal kann durch die Faltungssumme berechnet werden

$$\begin{aligned} y[k] &= \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} u[\kappa] \cdot g[k-\kappa] \\ &= \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} u[\kappa] \cdot \frac{1}{5} \cdot (\delta[k-\kappa] + \delta[k-\kappa-1] + \delta[k-\kappa-2] + \delta[k-\kappa-3] + \delta[k-\kappa-4]) \\ &= \frac{1}{5} \cdot \sum_{\kappa=0}^4 u[k-\kappa] \end{aligned} \quad (4.89)$$

4.4.2 Grafische Interpretation der Faltungssumme

Die direkte analytische Berechnung der Faltungssumme ist nur in Ausnahmefällen möglich und sinnvoll, da die Zusammenfassung der Summe aufwendig ist. Im Gegensatz zur zeitkontinuierlichen Faltung kann die zeitdiskrete Faltung aber numerisch ausgeführt werden. Die Faltungssumme ist damit eine Realisierungsform zeitdiskreter Systeme. Zum besseren Verständnis wird deshalb die Faltung an einem Beispiel zweier Folgen grafisch veranschaulicht.

Beispiel: Grafische Interpretation der Faltungssumme

Die Folge $u[k]$ wird als Sprungfolge angenommen, die Impulsantwort $g[k]$ ergibt sich in diesem Beispiel zu

$$g[k] = 2 \cdot \sigma[k] - \sigma[k-2] - \sigma[k-4] \quad (4.90)$$

Die Folgen sind in Bild 4.14 grafisch dargestellt.

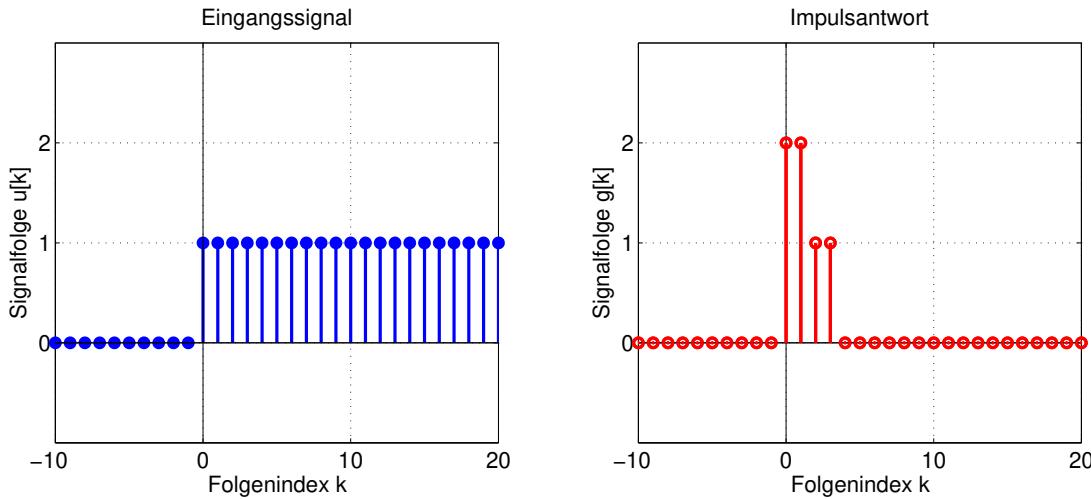


Bild 4.14: Folgen $u[k]$ und $g[k]$ für das Beispiel zur grafischen Interpretation der Faltungssumme

Die Faltung ist über eine Summenformel definiert. Sie kann umgeformt werden zu

$$u[k] * g[k] = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} u[\kappa] \cdot g[k-\kappa] = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} u[\kappa] \cdot g[-(\kappa-k)] \quad (4.91)$$

Mit dieser Darstellung fällt die Interpretation einfacher: Die Folge $g[\kappa]$ wird an der Achse $\kappa = 0$ gespiegelt und um k nach rechts verschoben. Dann wird das Produkt der einzelnen Folgenwerte addiert. Bild 4.15 stellt die unterschiedlichen Phasen der grafischen Faltung dar.

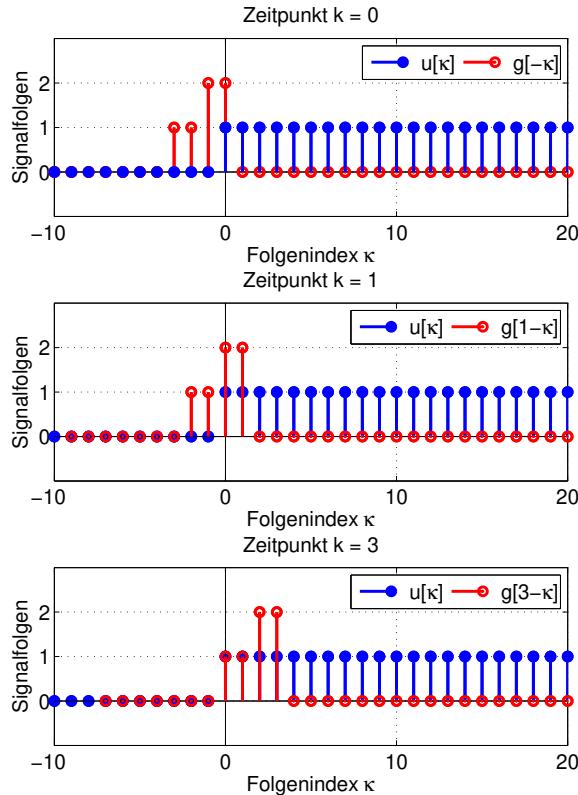


Bild 4.15: Grafische Veranschaulichung der Faltung zweier Folgen zu verschiedenen Stadien

Für negative Folgenindizes k überschneiden sich die beiden Folgen nicht. Zum Zeitpunkt $k = 0$ überschneiden sich die beiden Folgen an genau einer Stelle $\kappa = 0$. Das Ergebnis ist damit $y[0] = 2$. Für $k = 1$ ergibt sich eine Überschneidung der ersten beiden Werte. Nach Bildung des Produktes werden die Ergebnisse addiert und es ergibt sich $y[1] = 2 + 2 = 4$. So wird für die übrigen Werte von k fortgefahrene. Für $k \geq 3$ überschneidet sich die Folge x komplett mit der Folge g , sodass sich der Wert des Ausgangssignals nicht weiter ändert.

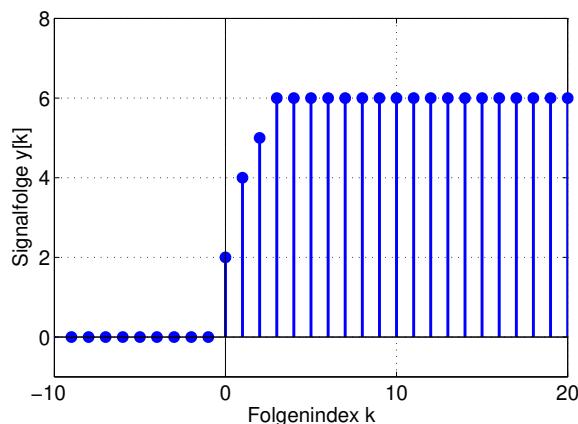


Bild 4.16: Ergebnis der Faltung zweier Folgen

Aus der Grafik kann abgelesen werden, dass das Signal $y[k]$ ab $k = 3$ konstant bleibt.

Die in diesem Beispiel dargestellte Methode zur Berechnung der Faltungssumme ist in Tabelle 4.5 zusammengefasst.

Tabelle 4.5: Vorgehen bei der Berechnung der Systemantwort über die Faltungssumme

Schritt	Beschreibung
1	Berechnung der Impulsantwort $g[k]$
2	Skizze von Eingangssignal $u[k - \kappa]$ und Impulsantwort $g[k - \kappa]$
3	Skizze von einem der Signale $u[k - \kappa]$ oder $g[k - \kappa]$ über Spiegelung an der Achse $\kappa = 0$ und Verschiebung um k nach rechts
4	Aufteilen der Faltungssumme in sinnvolle Bereiche (Überlappungsbereiche, Sprungstellen, Definitionsgrenzen, ...)
5	Lösen der Summen und Superposition der Ergebnisse



Im Online-Portal *Systemtheorie Online* verdeutlicht die *Applikation Signalabtastung und Signalrekonstruktion* grafisch, welche Effekte durch Anti-Aliasing-Filter, reale Abtastung und reale Rekonstruktion entstehen.

4.4.3 Rechenregeln zur Faltungssumme

Zur Vereinfachung der Berechnung von Faltungssummen können Rechenregeln angewendet werden, die im Folgenden kurz dargestellt sind. Aus der grafischen Darstellung zur Faltung wird deutlich, dass die Faltung eine kommutative Operation ist. Der mathematische Nachweis ergibt sich aus einer Indextransformation.

$$x_1[k] * x_2[k] = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x_1[\kappa] \cdot x_2[k - \kappa] = \sum_{k-\kappa=-\infty}^{\infty} x_1[k - \kappa] \cdot x_2[\kappa] \quad (4.92)$$

Da sich die Summe von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt, ist eine Verschiebung um k und eine Spiegelung nicht relevant, und es ergibt sich

$$x_1[k] * x_2[k] = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x_1[\kappa] \cdot x_2[k - \kappa] = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x_1[k - \kappa] \cdot x_2[\kappa] = x_2[k] * x_1[k] \quad (4.93)$$

Das Distributivgesetz ergibt sich aus der Linearität der Summe.

$$\begin{aligned} (x_1[k] + x_2[k]) * x_3[k] &= \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} (x_1[\kappa] + x_2[\kappa]) \cdot x_3[k - \kappa] \\ &= \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x_1[\kappa] \cdot x_3[k - \kappa] + x_2[\kappa] \cdot x_3[k - \kappa] = x_1[k] * x_3[k] + x_2[k] * x_3[k] \end{aligned} \quad (4.94)$$

Das Assoziativgesetz wird hier nur genannt und nicht bewiesen. Es lautet:

$$(x_1[k] * x_2[k]) * x_3[k] = x_1[k] * (x_2[k] * x_3[k]) \quad (4.95)$$

Bei der grafischen Faltung wird gezeigt, dass der von null verschiedene Überlappungsbereich für kausale Folge immer im Zahlenbereich von $0 \dots k$ liegt. Aus diesem Grund muss die Faltung auch nur in diesem Bereich ausgeführt werden, sodass für die Faltung zweier kausaler Folgen gilt:

$$\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x_1[\kappa] \cdot x_2[k-\kappa] = \sum_{\kappa=0}^k x_1[\kappa] \cdot x_2[k-\kappa] \quad (4.96)$$

Aus der Eigenschaft folgt außerdem, dass die Faltung zweier kausaler Folgen zu einer kausalen Folge führt. Die Rechenregeln für die Faltung mit einer Impulsfolge werden in Abschnitt 3.2.1 bei der Einführung von Impulsfolgen behandelt.

Tabelle 4.6: Zusammenfassung der Rechenregeln zur Faltungssumme

Rechenregel	Darstellung als Gleichung
Kommutativgesetz	$x_1[k] * x_2[k] = x_2[k] * x_1[k]$
Distributivgesetz	$(x_1[k] + x_2[k]) * x_3[k] = x_1[k] * x_3[k] + x_2[k] * x_3[k]$
Assoziativgesetz	$(x_1[k] * x_2[k]) * x_3[k] = x_1[k] * (x_2[k] * x_3[k])$
Faltung kausaler Folgen führt zu einer kausalen Folge	$\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x_1[\kappa] \cdot x_2[k-\kappa] = \sum_{\kappa=0}^k x_1[\kappa] \cdot x_2[k-\kappa]$
Faltung mit einem Impuls	$\delta[k] * x[k] = x[k]$
Faltung mit einem Impuls an der Stelle k_0	$\delta[k-k_0] * x[k] = x[k-k_0]$

4.4.4 Impulsantwort und Stabilität

In Abschnitt 4.2.3 wird die Stabilität von Systemen aus physikalischer Sicht definiert. Mit dem Wissen, dass sich bei einem LTI-System die Systemantwort $y[k]$ aus dem Faltungsintegral ergibt, kann die Stabilitätsbewertung auf die Impulsantwort $g[k]$ zurückgeführt werden. Dabei wird davon ausgegangen, dass das System für den Zeitraum $0 < k \leq k_0$ angeregt wird. Für den Zeitraum $k \geq k_0$ nach der Anregung wird das Verhalten der Systemantwort $y[k]$ analysiert.

$$y[k] = \sum_{\kappa=0}^{k_0} u[\kappa] \cdot g[k-\kappa] \quad (4.97)$$

Aus der physikalischen Bedingung an Stabilität leitet sich die Forderung ab, dass bei einer zeitlich begrenzten Anregung das Ausgangssignal den Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |y[k]| = 0 \quad (4.98)$$

aufweisen muss. Ist der Betrag des Eingangssignals beschränkt, kann er mit $|u[\kappa]| < u_{max}$ abgeschätzt werden, und der Betrag des Ausgangssignals kann abgeschätzt werden mit

$$|y[k]| \leq \sum_{\kappa=0}^{k_0} |u[\kappa]| \cdot |g[k-\kappa]| \leq u_{MAX} \cdot \sum_{\kappa=0}^{k_0} |g[k-\kappa]| \quad (4.99)$$

Es handelt sich um eine Summe von $k_0 + 1$ Folgegliedern. Die Summe wird zu null, wenn der Betrag der Impulsantwort $g[k]$ gegen null konvergiert.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |g[k]| = 0 \quad (4.100)$$

Ein System ist damit stabil, wenn die Impulsantwort gegen null konvergiert, es ist instabil, wenn die Impulsantwort divergiert. Einen Sonderfall stellen Impulsantworten $g[k]$ dar, die für $k \rightarrow \infty$ einem konstanten Wert g_0 zustreben. Bei diesen Systemen konvergiert das Ausgangssignal für $k \geq k_0$ gegen einen konstanten Wert.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y[k] = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\kappa=0}^{k_0} u[\kappa] \cdot g[k-\kappa] = g_0 \cdot \sum_{\kappa=0}^{k_0} x[\kappa] = y_0 \quad (4.101)$$

Systeme, deren Impulsantworten $g[k]$ für $k \rightarrow \infty$ einem konstanten Wert g_0 zustreben, entsprechen damit den Bedingungen grenzstabilier Systeme. Dasselbe gilt für Systeme, deren Impulsantwort für $k \rightarrow \infty$ mit konstanter Amplitude schwingt. Der Zusammenhang zwischen Impulsantwort und Stabilität linearer, zeitinvariante Systeme ist in Tabelle 4.7 zusammengefasst.

Tabelle 4.7: Zusammenfassung des Zusammenhangs zwischen Impulsantwort und Stabilität von LTI-Systemen

Eigenschaft	Bedeutung
Stabiles System	$\lim_{k \rightarrow \infty} g[k] = 0$
Grenzstabiles System	$\lim_{k \rightarrow \infty} g[k] = g_0$ oder harmonische Schwingung mit konstanter Amplitude
Instabiles System	$\lim_{k \rightarrow \infty} g[k]$ ist divergent

Zur Stabilitätsbewertung von Systemen im Zeitbereich muss die Impulsantwort bekannt sein. Es wird sich zeigen, dass eine Bewertung der Stabilität im sogenannten z-Bereich praktikabler vor-genommen werden kann.

4.4.5 Faltung in MATLAB

Die Berechnung der Faltungssumme kann mit Hilfe von MATLAB stark vereinfacht werden. Dies wird an einem Beispiel verdeutlicht. Bild 4.17 zeigt zwei Signalfolgen, die miteinander gefaltet werden sollen.

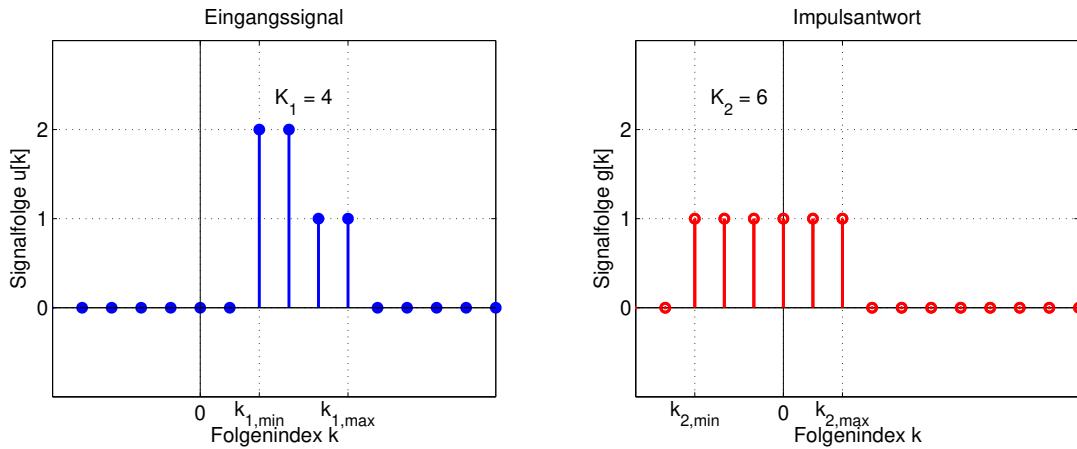


Bild 4.17: Signalfolgen $u[k]$ und $g[k]$ als Beispiel für die Faltung mit MATLAB

Typischerweise werden die Daten nicht mit den führenden Nullen angegeben, sondern es werden nur die von Null verschiedenen Werte der Signalfolge als Vektor angegeben. So ergeben sich die Vektoren u und g . Die Faltung wird mit dem Befehl `conv(u,g)` ausgeführt. Die Abkürzung steht für den englischen Begriff convolution. Der Ergebnisvektor besitzt die Länge

$$K = K_1 + K_2 - 1 \quad (4.102)$$

Der Folgenindex startet an der Stelle

$$k_{MIN} = k_{1,MIN} + k_{2,MIN} \quad (4.103)$$

und endet an der Stelle

(4.104)

In MATLAB kann das Programm wie folgt ausgeführt werden.

```

1 % Definition der Signalfolgen als Vektoren
2 u = [2 2 1 1];
3 k1min = 2;
4 K1 = length(u);
5 g = [1 1 1 1 1];
6 k2min = -3;
7 K2 = length(g);
8
9 % Berechnung der Faltung
10 y = conv(u,g);
11
12 % Berechnung der entsprechenden Indizes k
13 kmin = k2min + k1min;
14 K = K1 + K2 - 1;
15 kc = kmin : 1 : kmin + K - 1;
16
17 % Grafische Darstellung
18 stem(kc,y);

```

Für das in Bild 4.17 dargestellte Beispiel ergibt sich das in Bild 4.18 Ergebnis.

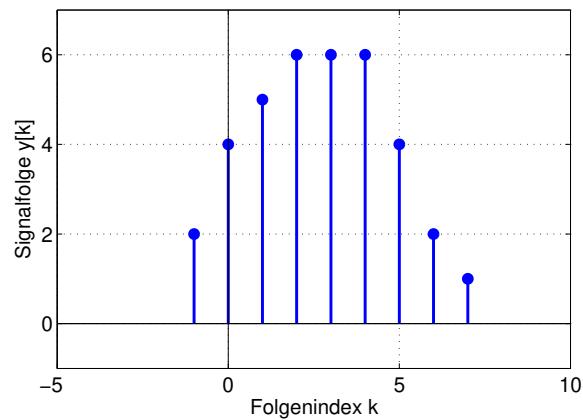


Bild 4.18: Faltung der Signalfolgen $u[k]$ und $g[k]$

Alle Punkte, die nicht in das Diagramm eingezeichnet sind, sind null.

4.5 Literatur

4.5.1 Literaturstellen mit besonders anschaulicher Darstellung

- [Lyon04] Lyons, Richard G.: Understanding Digital Signal Processing, Prentice Hall, New Jersey, 2004
- [Stea99] Stearns, Samuel: Digitale Verarbeitung analoger Signale, 7. Auflage, Oldenbourg Verlag München, 1999

4.5.2 Literaturstellen mit praktischen Anwendungen

- [Wern08] Werner, Martin: Signale und Systeme, Vieweg Studium Technik, Wiesbaden, 2008
- [Meye08] Meyer, Martin: Signalverarbeitung – Analoge und digitale Signale, Systeme und Filter, Vieweg Studium Technik, Wiesbaden, 2008

4.5.3 Literatur zu MATLAB

- [Schw07] Schweizer, Wolfgang: MATLAB kompakt, Oldenbourg Verlag München, 2007
- [Stei07] Stein, Ulrich: Einstieg in das Programmieren mit MATLAB, Fachbuchverlag Leipzig, 2007

4.5.4 Weiterführende Literatur

- [Opp04] Oppenheim, Alan: Zeitdiskrete Signalverarbeitung, 2. überarbeitete Auflage, Pearson Studium, 2004
- [Kamm98] Kammeyer, Karl: Digitale Signalverarbeitung, B.G. Teubner Stuttgart, 1998

5 z-Transformation von Signalen

Die Laplace-Transformation wird zur Beschreibung zeitkontinuierlicher Signale verwendet. Sie eignet sich zur Lösung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und wird zur Interpretation von linearen, zeitinvarianten Systemen mit Übertragungsfunktionen eingesetzt. Die Interpretation der Übertragungsfunktionen führt zu Aussagen wie Stabilität, Schwingungsneigung, Kausalität und Sprungfähigkeit von Systemen. Die z-Transformation ist für zeitdiskrete Anwendungen das Pendant zur Laplace-Transformation. Sie wird in diesem Kapitel eingeführt und ist eine wichtige Voraussetzung für die Beschreibung zeitdiskreter Systeme und den Entwurf zeitdiskreter Filter.

Nach der Definition werden einige Korrespondenzen über die Definitionsgleichung bestimmt, und es wird ein Zusammenhang zwischen der z-Transformation und der Laplace-Transformation hergestellt.

Die eher aufwendige Bestimmung von Korrespondenzen über die Definitionsgleichung kann vermieden werden, wenn die vorliegende Funktion mit Rechenregeln auf Funktionen mit bekannten Korrespondenzen zurückgeführt werden kann. Die dazu notwendigen Rechenregeln werden hergeleitet und der ihr Nutzen an Beispielen aufgezeigt.

Die bei technischen Anwendungen entstehenden z-Transformierten sind typischerweise gebrochen rationale Funktionen. Die Rücktransformation vom z-Bereich in den Zeitbereich kann grundsätzlich über ein Umkehrintegral erfolgen. Da dieser Weg aufwendig ist und Kenntnisse in der Funktionentheorie voraussetzt, wird er in der Praxis umgangen. Stattdessen wird die z-Transformierte in Partialbrüche zerlegt, die mit Hilfe der angesprochenen Rechenregeln und einiger Korrespondenzen in den Zeitbereich transformiert werden können.

Die computerunterstützte Berechnung von z-Transformierten wird anhand des Programms MATLAB aufgezeigt. Nach der Zusammenstellung der für die analytische Berechnung wesentlichen Befehle werden einige Beispiele und Beweise mit Hilfe der *Symbolic Math Toolbox* berechnet.

5.1 Grundlagen der z-Transformation

5.1.1 Definitionsgleichung der z-Transformation

Die z-Transformation ist das Äquivalent zur Laplace-Transformation. Zur Herleitung der Definitionsgleichung wird deshalb von der Laplace-Transformation ausgegangen. Wie bei der Laplace-Transformation werden nur kausale Signale betrachtet. Nach den Darstellungen zur Signalabtastung wird ein ideal abgetastetes kausales Signal über die Multiplikation des kontinuierlichen Signals mit einer Abtastfunktion dargestellt:

$$x_A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k \cdot T_A) \cdot \delta(t - k \cdot T_A) \quad (5.1)$$

Bei $x_A(t)$ handelt es sich um ein kontinuierliches Signal. Deshalb kann die Laplace-Transformierte berechnet werden zu

$$X_A(s) = L \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} x(k \cdot T_A) \cdot \delta(t - k \cdot T_A) \right\} \quad (5.2)$$

Da die Laplace-Transformation eine lineare Operation ist und der Term $x_A(k \cdot T_A)$ nicht von der Zeit t abhängt, kann die Laplace-Transformierte umgerechnet werden in

$$\begin{aligned} L \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} x(k \cdot T_A) \cdot \delta(t - k \cdot T_A) \right\} &= \sum_{k=0}^{\infty} x(k \cdot T_A) \cdot L\{\delta(t - k \cdot T_A)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k \cdot T_A) \cdot e^{-k \cdot T_A \cdot s} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x[k] \cdot (e^{T_A \cdot s})^{-k} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Dabei ist die Variable s eine komplexe Zahl mit Real- und Imaginärteil. Durch die Substitution von

$$z = e^{T_A \cdot s} \quad (5.4)$$

kann die Schreibweise vereinfacht werden zu

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] \cdot z^{-k} \quad (5.5)$$

Diese Gleichung ist die Definitionsgleichung der z-Transformation für kausale Signale. Ähnlich wie bei den vorangegangenen Transformationen wird für die z-Transformation die Schreibweise

$$Z\{x[k]\} = X(z) \quad (5.6)$$

und für die inverse z-Transformation die Schreibweise

$$Z^{-1}\{X(z)\} = x[k] \quad (5.7)$$

eingeführt. Alternativ kann das Hantel-Symbol verwendet werden.

$$x[k] \circ - \bullet X(z) \quad (5.8)$$

5.1.2 z-Transformation grundlegender Signale

Wie bei der Laplace-Transformation werden zunächst einige Korrespondenzen der z-Transformation direkt über die Definitionsgleichung der z-Transformation berechnet. Dabei ergibt sich die z-Transformierte eines Signals durch Auswertung von endlichen und unendlichen Reihen.

Diskrete Impulsfolge

Aus der Definition der diskreten Impulsfolge

$$x[k] = \delta[k] = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{für ganzzahlige } k \neq 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

ergibt sich die z-Transformierte durch Einsetzen in die Definitionsgleichung zu

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[k] \cdot z^{-k} = 1 \cdot z^0 = 1 \quad (5.10)$$

Ist der Impuls um k_0 verschoben, ändert sich die z-Transformierte zu

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[k - k_0] \cdot z^{-k} = 1 \cdot z^{-k_0} = z^{-k_0} \quad (5.11)$$

Der Vergleich der z-Transformierten von Impuls und verschobenem Impuls ist ein erster Hinweis auf eine Verschiebungsregel.

Diskrete Rechteckfolge

Für die Rechteckfolge mit der Definition

$$x[k] = \sigma[k] - \sigma[k - K] \quad (5.12)$$

wird die Summe in der Definitionsgleichung der z-Transformation endlich. Es gilt

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (\sigma[k] - \sigma[k - K]) \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^K z^{-k} \quad (5.13)$$

Die Auswertung der endlichen Summe mit den Rechenregeln für endliche geometrische Reihen

$$\sum_{k=0}^{K-1} q^k = \frac{1 - q^K}{1 - q} \quad (5.14)$$

ergibt die z-Transformierte

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (\sigma[k] - \sigma[k-K]) \cdot z^{-k} = \frac{1 - z^{-K}}{1 - z^{-1}} \quad (5.15)$$

Diskrete Sprungfolge

Die z-Transformation der Sprungfolge mit der Definition

$$x[k] = \sigma[k] = \begin{cases} 1 & \text{für ganzzahlige } k \geq 0 \\ 0 & \text{für ganzzahlige } k < 0 \end{cases} \quad (5.16)$$

errechnet sich direkt durch Einsetzen in die Definitionsgleichung zu

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma[k] \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (z^{-1})^k \quad (5.17)$$

Die Berechnung der Reihe kann auf die unendliche geometrische Reihe zurückgeführt werden. Die geometrische Reihe ist definiert als:

$$1 + q + q^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \quad (5.18)$$

Die Konvergenz der Reihe ist von dem Betrag der Größe q abhängig. Für einen Betrag $|q| < 1$ konvergiert die Reihe und kann berechnet werden zu

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q} \quad (5.19)$$

Die Summe aus Gleichung (5.17) ist eine geometrische Reihe, die für $|z^{-1}| < 1$ konvergiert und dargestellt werden kann als

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z^{-1})^k = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \quad (5.20)$$

Auch an diesem Beispiel wird eine Verschiebung um k_0 untersucht.

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma[k - k_0] \cdot z^{-k} = \sum_{k=k_0}^{\infty} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-(k+k_0)} = z^{-k_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = z^{-k_0} \cdot \frac{z}{z - 1} \quad (5.21)$$

Die Auswertung der Beispiele Impulsfolge und Sprungfolge legt die Vermutung nahe, dass die Verschiebung einer Folge um k_0 nach rechts generell einer Multiplikation der ursprünglichen z-Transformierten mit z^{-k_0} entspricht.

Diskrete Exponentialfolge

Die diskrete Exponentialfolge ist definiert als

$$x[k] = \lambda_0^k \cdot \sigma[k] \quad (5.22)$$

mit

$$\lambda_0 = r_0 \cdot e^{j \cdot \Omega_0} \quad (5.23)$$

Analog zur Sprungfolge ergibt sich die z-Transformierte zu

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma[k] \cdot \lambda_0^k \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_0^k \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda_0}{z}\right)^k \quad (5.24)$$

Diese Gleichung kann für die Berechnung der Korrespondenz für die diskrete Exponentialfolge verwendet werden. Ist der Betrag von $|\lambda_0 \cdot z^{-1}| < 1$, konvergiert die Summe, und es gilt:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\lambda_0 \cdot z^{-1}\right)^k = \frac{1}{1 - \lambda_0 \cdot z^{-1}} = \frac{z}{z - \lambda_0} \quad (5.25)$$

Die bislang berechneten z-Transformierten werden über die Definitionsgleichung berechnet. Zur Vereinfachung der Berechnung werden in Abschnitt 5.2 einige Rechenregeln der z-Transformation hergeleitet.

5.1.3 Existenz der z-Transformierten

Bei der Berechnung einer z-Transformierten wird eine unendliche Reihe ausgewertet. Die z-Transformierte existiert nur dann, wenn diese Reihe konvergiert. Bei der Berechnung der z-Transformierten müssen teilweise Bedingungen an die Variable z gestellt werden, um die Konvergenz der Reihe sicherzustellen. Das führt zu der Frage, unter welchen Bedingungen die z-Transformierte X(z) mit der Definitionsgleichung

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] \cdot z^{-k} \quad (5.26)$$

existiert. Für beidseitig begrenzte Signale x[k] mit begrenzter Amplitude konvergiert die Summe in Gleichung (5.26) immer. Zur Untersuchung der Konvergenz dieser unendlichen Reihe wird die bei nur einseitig begrenzten Folgen x[k] werden die Folgen mit Hilfe einer Exponentialfolge nach oben abgeschätzt.

$$|x[k]| \leq M \cdot r^k \quad (5.27)$$

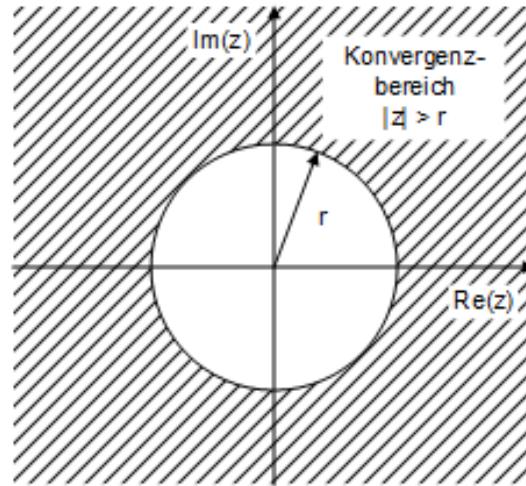
Konvergiert die resultierende geometrische Reihe, existiert auch ihre z-Transformierte X(z). Mit der Abschätzung der Folge x[k] gilt für X(z)

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] \cdot z^{-k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} |x[k] \cdot z^{-k}| \leq \sum_{k=0}^{\infty} M \cdot r^k \cdot |z^{-k}| = M \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{r}{z}\right|^k \quad (5.28)$$

Damit existiert die z-Transformierte, wenn für den Betrag der Basis gilt:

$$\left|\frac{r}{z}\right| < 1 \quad (5.29)$$

Diese Bedingung erfüllen alle Werte der z-Ebene, die außerhalb des Kreises mit dem Radius r liegen. Bild 5.1 zeigt den Konvergenzbereich in der komplexen z-Ebene.

Bild 5.1: Konvergenzbereich der z-Transformierten $X(z)$ einer Folge $x[k]$

In praktischen Anwendungen können unendliche Signalfolgen mit einer Exponentialfolge nach oben abgeschätzt werden, sodass die Konvergenz in den meisten Fällen gegeben ist.

5.1.4 Zusammenhang zwischen z-Transformation und Laplace-Transformation

Mit Hilfe der Laplace-Transformation lassen sich einige Signaleigenschaften bestimmen. Um an diese Interpretationsmöglichkeiten anzuknüpfen, wird ein Zusammenhang zwischen der s-Ebene der Laplace-Transformation und der z-Ebene der z-Transformation hergestellt. Bei der Herleitung der z-Transformation wird die Substitution

$$z = e^{T_A \cdot s} \quad (5.30)$$

verwendet. Mit dieser Substitution wird die komplexe s-Ebene in die komplexe z-Ebene abgebildet. Bild 5.2 zeigt die beiden Ebenen.

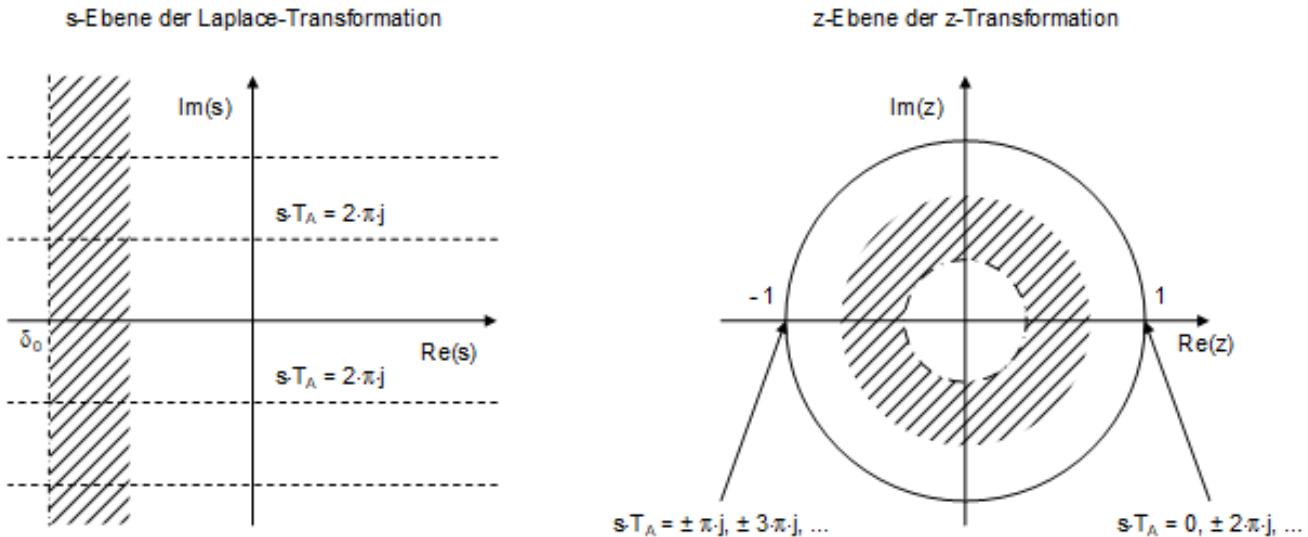


Bild 5.2: Darstellung von Bereichen in der s-Ebene und deren transformierten Flächen in der z-Ebene

Die imaginäre Achse der s-Ebene $s = j\omega$ wird abgebildet in die Variable

$$z = e^{j\omega T_A} \quad (5.31)$$

Das entspricht dem Einheitskreis, der für $-\infty < \omega < \infty$ periodisch in 2π durchlaufen wird. Die imaginäre Achse der s-Ebene wird demnach auf den Einheitskreis der z-Ebene abgebildet. Bei der Abtastung von Signalen entsteht ein Spektrum, das periodisch in ω_A ist. Das Basisband reicht dabei von -

$\omega_A/2$ bis $+\omega_A/2$, so dass der Einheitskreis genau einmal durchlaufen wird. Alle periodischen Wiederholungen des Spektrums werden mit der z-Transformation auf dem Einheitskreis übereinander abgebildet. Deshalb eignet sich die z-Transformation besonders für die Beschreibung abgetasteter Signale. Eine Linie der s-Ebene mit konstantem Realteil δ_0 wird auf einen Kreis abgebildet, der einen Radius

$$|z| = |e^{(\delta_0 + j\cdot\omega)\cdot T_A}| = |e^{\delta_0 \cdot T_A}| \cdot |e^{j\cdot\omega \cdot T_A}| = e^{\delta_0 \cdot T_A} \quad (5.32)$$

aufweist. Mit negativem Realteil ergibt sich eine Lage innerhalb des Einheitskreises, mit positivem Realteil eine Lage um den Einheitskreis herum. Daraus folgt, dass die gesamte linke s-Halbebene in den Einheitskreis abgebildet wird, während die rechte s-Halbebene um den Einheitskreis herum abgebildet wird. Tabelle 5.1 fasst korrespondierende Elemente der s- und z-Ebene zusammen.



Portal *Systemtheorie Online* verdeutlicht die *Applikation Signalabtastung und Signal-rekonstruktion* grafisch, welche Effekte durch Anti-Aliasing-Filter, reale Abtastung und reale Rekonstruktion entstehen.

Mesysto

Tabelle 5.1: Tabellarische Übersicht über korrespondierende Elemente der s- und z-Ebene

s-Ebene	z-Ebene
imaginäre Achse	Einheitskreis
linke komplexe Ebene	Innere des Einheitskreises
rechte komplexe Ebene	Äußeres des Einheitskreises
Ursprung $s = 0$	$z = 1$
halbe Abtastfrequenz $j\cdot\omega = j\cdot\omega_A/2 \pm j\cdot k\cdot\omega_A$	$z = -1$

Der Zusammenhang zwischen s- und z-Ebene wird bei der Diskussion der Signal- und Systemeigenschaften in den folgenden Abschnitten wieder aufgegriffen.

5.1.5 Pollage und komplexe Exponential-Folge

Im vorangegangenen Abschnitt wird die z-Transformierte der Exponentialfolge

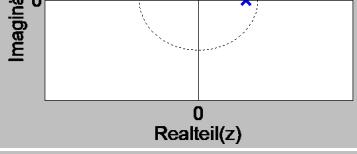
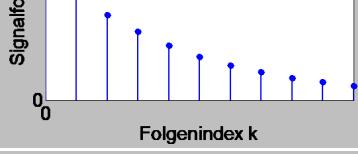
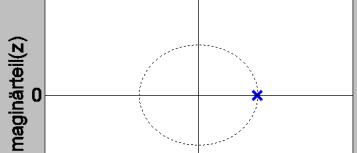
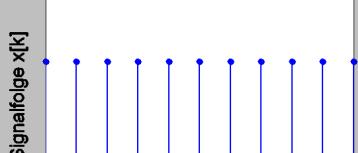
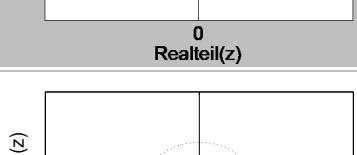
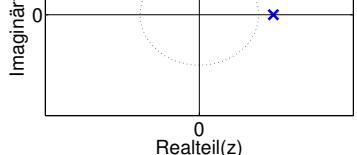
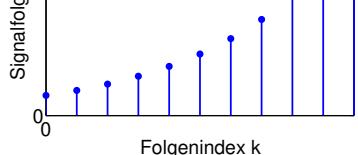
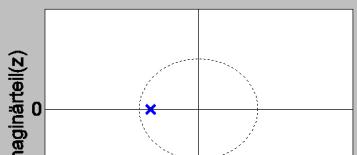
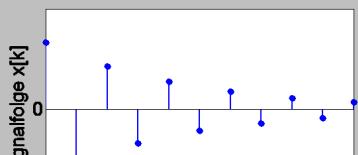
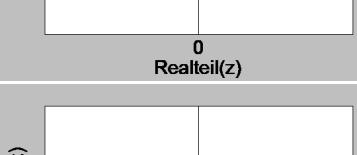
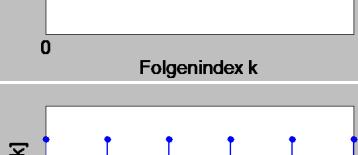
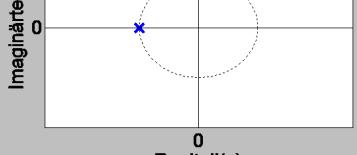
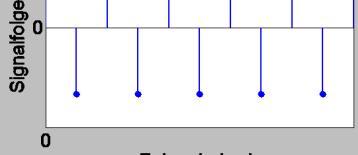
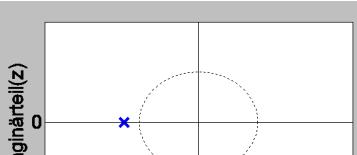
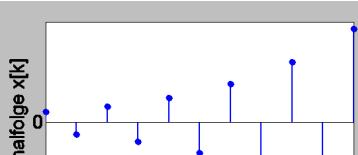
$$x[k] = \lambda_0^k \cdot \sigma[k] \quad (5.33)$$

berechnet zu

$$X(z) = \frac{z}{z - \lambda_0} \quad (5.34)$$

Aus Gleichung (5.34) kann der zu der komplexen Exponentialfolge zugehörige Pol λ_0 in der komplexen z-Ebene abgelesen werden. Liegt der Pol auf der reellen Achse, handelt es sich um eine reelle Folge, die bei negativem Realteil alternierend ist. Für einen Betrag von $|\lambda_0| < 1$ ist die Folge konvergent, für $|\lambda_0| > 1$ ist die Folge divergent und für $|\lambda_0| = 1$ bleibt der Betrag der Folge konstant. Die Lage eines Poles in der z-Ebene kann damit einem Signalverhalten zugeordnet werden, das in Tabelle 5.2 skizziert wird.

Tabelle 5.2: Tabellarische Übersicht über korrespondierende Elemente der s- und z-Ebene

Pollage X(z)	Signalfolge x[k]
	
	
	
	
	
	
	
	

Liegen z-Transformierte mit konjugiert komplexem Polpaare der Form

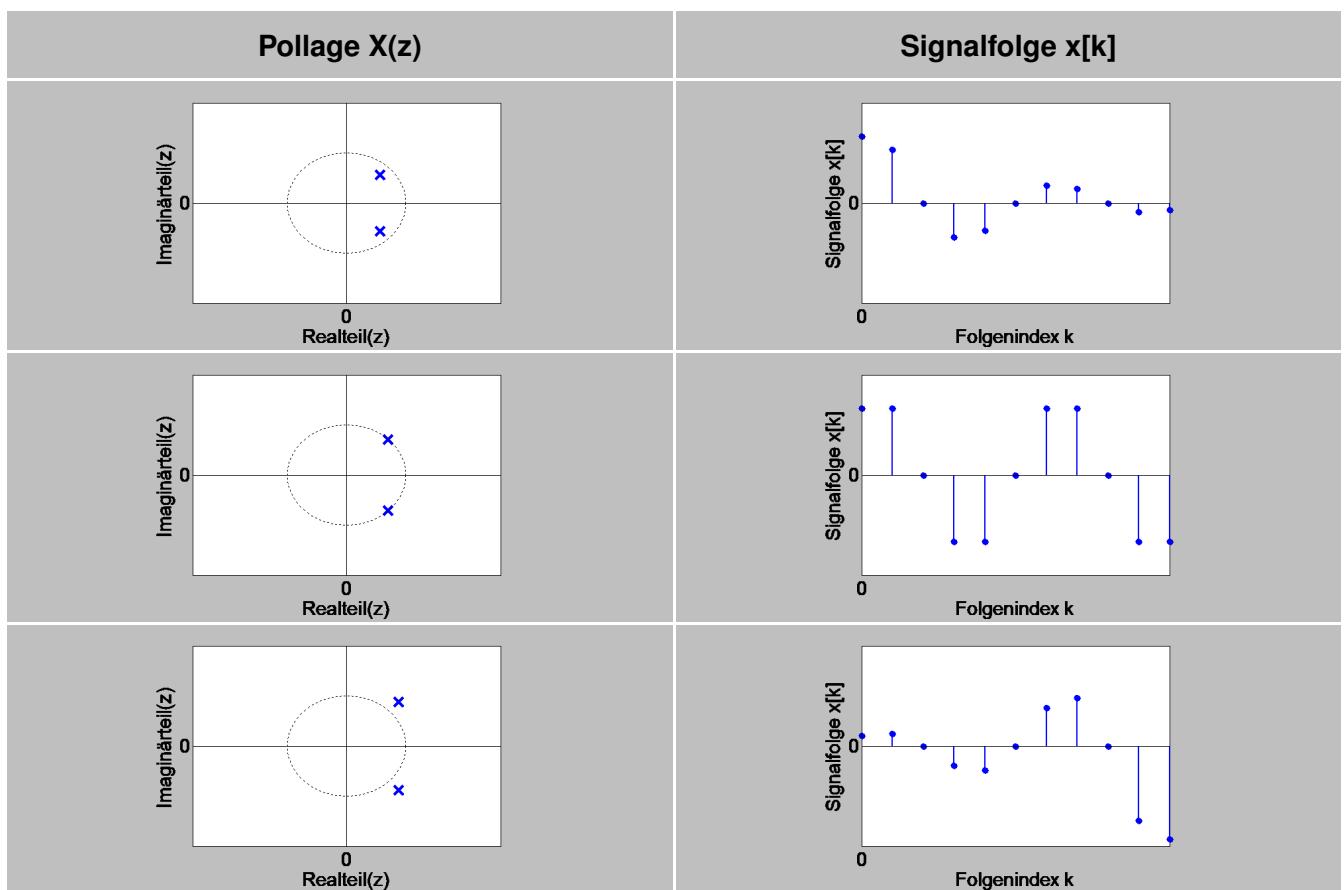
$$X(z) = \frac{z}{z - r_0 \cdot e^{j \cdot \Omega_0}} + \frac{z}{z - r_0 \cdot e^{-j \cdot \Omega_0}} \quad (5.35)$$

vor, handelt es sich im Zeitbereich um Folgen der Form

$$x[k] = r_0^k \cdot (e^{j \cdot \Omega_0 \cdot k} + e^{-j \cdot \Omega_0 \cdot k}) \cdot \sigma[k] = 2 \cdot r_0^k \cdot \cos(\Omega_0 \cdot k) \cdot \sigma[k] \quad (5.36)$$

Für einen Betrag von $|r_0| < 1$ ist die Folge konvergent, für $|r_0| > 1$ ist die Folge divergent und für $|r_0| = 1$ bleibt der Betrag der Folge konstant. Die Frequenz steigt mit wachsender Phase Ω_0 des Pols, das Maximum wird erreicht für Pole mit einer Phase $\Omega_0 = \pm \pi$. Diese Interpretation entspricht bei entsprechender Umrechnung der Pole dem Zusammenhang zwischen der Pollage in der s-Ebene und der zugehörigen Zeitfunktion. Die Lage eines Poles in der z-Ebene kann damit einem Signalverhalten zugeordnet werden, das in Tabelle 5.3 skizziert wird.

Tabelle 5.3: Zusammenhang zwischen Pollage und Signalfolge bei konjugiert komplexen Polpaaren



Im Online-Portal *Systemtheorie Online* verdeutlicht die *Applikation Signalabtastung und Signalrekonstruktion* grafisch, welche Effekte durch Anti-Aliasing-Filter, reale Abtastung und reale Rekonstruktion entstehen.

5.2 Rechenregeln der z-Transformation

Wie bei den bisher vorgestellten Transformationen besitzt die z-Transformation Rechenregeln, die das Rechnen und die Berechnung weiterer Korrespondenzen vereinfachen. Sie werden hergeleitet und ihr Nutzen an Beispielen verdeutlicht.

5.2.1 Linearität

Wie die Laplace- und die Fourier-Transformation ist auch die z-Transformation eine lineare Transformation. Durch Einsetzen in die Definitionsgleichung

$$Z\{\nu_1 \cdot x_1[k] + \nu_2 \cdot x_2[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} (\nu_1 \cdot x_1[k] + \nu_2 \cdot x_2[k]) \cdot z^{-k} \quad (5.37)$$

und durch Anwendung des Distributivgesetzes

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\nu_1 \cdot x_1[k] + \nu_2 \cdot x_2[k]) \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \nu_1 \cdot x_1[k] \cdot z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} \nu_2 \cdot x_2[k] \cdot z^{-k} = \nu_1 \cdot X_1(z) + \nu_2 \cdot X_2(z) \quad (5.38)$$

wird die Linearitätseigenschaft bewiesen.

Beispiel: Linearität

Gesucht wird die z-Transformierte der Folge $x[k]$

$$x[k] = 2 \cdot \sigma[k] + 5 \cdot 3^k \cdot \sigma[k] \quad (5.39)$$

Die z-Transformierten der Sprung- und Exponentialfolge sind bekannt. Damit ergibt sich $X(z)$ zu

$$X(z) = 2 \cdot \frac{z}{z-1} + 5 \cdot \frac{z}{z-3} \quad (5.40)$$

5.2.2 Verschiebung der Folge nach rechts

Bereits bei der Herleitung der verschobenen Impuls- und Sprungfolge wird die Verschiebungsregel der z-Transformation angedeutet. Die allgemeine Herleitung für eine Zeitverschiebung nach rechts ergibt sich für den Fall, dass $x[k]$ eine kausale Folge ist, aus

$$\begin{aligned} Z\{x[k - k_0]\} &= \sum_{k=0}^{\infty} x[k - k_0] \cdot z^{-k} = \sum_{k=k_0}^{\infty} x[k - k_0] \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] \cdot z^{-(k+k_0)} = z^{-k_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x[k] \cdot z^{-k} \\ &= z^{-k_0} \cdot X(z) \end{aligned} \quad (5.41)$$

Diskrete Systeme lassen sich über Differenzengleichungen beschreiben. Aus diesem Grund ist die Verschiebungsregel von vergleichbarer Bedeutung wie die Differentiationsregel der Laplace-Transformation.

Beispiel: Verschiebung nach rechts

Eine Rechteckfolge von 0 bis 4 kann im Zeitbereich dargestellt werden als

$$x[k] = \sigma[k] - \sigma[k-5] \quad (5.42)$$

Daraus ergibt sich mit der Verschiebungsregel die z-Transformierte zu

$$X(z) = \frac{z}{z-1} \cdot (1 - z^{-5}) \quad (5.43)$$

5.2.3 Verschiebung der Folge nach links

Die Regel zur Verschiebung nach links kann ähnlich hergeleitet werden wie die Regel zur Verschiebung nach rechts.

$$Z\{x[k+k_0]\} = \sum_{k=0}^{\infty} x[k+k_0] \cdot z^{-k} = z^{k_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x[k+k_0] \cdot z^{-(k+k_0)} = z^{k_0} \cdot \sum_{k=k_0}^{\infty} x[k] \cdot z^{-k} \quad (5.44)$$

Um die Summe bei $k = 0$ beginnen zu lassen, müssen einige Summanden addiert und wieder subtrahiert werden. Damit ergibt sich die Verschiebungsregel für eine Verschiebung nach links.

$$\begin{aligned} Z\{x[k+k_0]\} &= z^{k_0} \cdot \sum_{k=0}^{k_0-1} x[k] \cdot z^{-k} + z^{k_0} \cdot \sum_{k=k_0}^{\infty} x[k] \cdot z^{-k} - z^{k_0} \cdot \sum_{k=0}^{k_0-1} x[k] \cdot z^{-k} \\ &= z^{k_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x[k] \cdot z^{-k} - z^{k_0} \cdot \sum_{k=0}^{k_0-1} x[k] \cdot z^{-k} = z^{k_0} \cdot X(z) - z^{k_0} \cdot \sum_{k=0}^{k_0-1} x[k] \cdot z^{-k} \end{aligned} \quad (5.45)$$

Bei der Diskussion von Systemen im z-Bereich wird sich zeigen, dass sich diese Verschiebungsregel zur Lösung von Differenzengleichungen mit Anfangsbedingungen eignet.

Beispiel: Verschiebung nach links

Die Differenzengleichung

$$x[k] - 0.5 \cdot x[k-1] = 0 \quad (5.46)$$

soll für den Anfangswert $x[0] = 5$ gelöst werden. Dazu wird die Differenzengleichung umgeformt zu

$$x[k+1] - 0.5 \cdot x[k] = 0 \quad (5.47)$$

und die Verschiebungsregel angewendet.

$$z^1 \cdot X(z) - x[0] \cdot z^1 + 0.5 \cdot X(z) = 0 \quad (5.48)$$

Auflösen nach $X(z)$ führt zu der z-Transformierten

$$X(z) = \frac{z \cdot x[0]}{z + 0.5} = \frac{z \cdot 5}{z + 0.5} \quad (5.49)$$

Mit Hilfe der bereits diskutierten Rechenregeln kann die z-Transformierte in den Zeitbereich zurücktransformiert werden.

$$x[k] = 5 \cdot (-0.5)^k \cdot \sigma[k] \quad (5.50)$$

5.2.4 Modulation

Eine Modulation einer Folge $x[k]$ mit der Exponentialfolge λ^k lässt sich im z-Bereich darstellen als

$$Z\{\lambda^k \cdot x[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \cdot x[k] \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] \cdot \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{-k} = X\left(\frac{z}{\lambda}\right) \quad (5.51)$$

Beispiel: Modulation

Die Modulationsregel kann zum Nachweis der z-Transformierten der Exponentialfolge angewendet werden. Die z-Transformierte der Sprungfolge ist bekannt. Die Exponentialfolge ergibt sich aus

$$x[k] = \lambda^k \cdot \sigma[k] \quad (5.52)$$

Nach der Modulationsregel ist damit die z-Transformierte der Exponentialfolge

$$X(z) = \frac{z}{z-1} \Big|_{z=\frac{z}{\lambda}} = \frac{\frac{z}{\lambda}}{\frac{z}{\lambda}-1} = \frac{z}{z-\lambda} \quad (5.53)$$

5.2.5 Lineare Gewichtung

Die Eigenschaft der linearen Gewichtung ergibt sich durch Ableitung der z-Transformierten.

$$\frac{dX}{dz} = \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} x[k] \cdot z^{-k} = -k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x[k] \cdot z^{-k-1} = -z^{-1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot x[k] \cdot z^{-k} \quad (5.54)$$

Multiplikation der Gleichung mit $-z$ führt zu der gesuchten Rechenregel der linearen Gewichtung.

$$Z\{k \cdot x[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot x[k] \cdot z^{-k} = -z \cdot \frac{dX}{dz} \quad (5.55)$$

Beispiel: Gewichtung

Die lineare Gewichtung wird dazu verwendet, die z-Transformierte der Rampenfolge

$$x[k] = k \cdot \sigma[k] \quad (5.56)$$

zu berechnen. Mit der Regel für die lineare Gewichtung und der z-Transformierten der Sprungfolge ergibt sich

$$X(z) = -z \cdot \frac{d}{dz} \frac{z}{z-1} = -z \cdot \frac{z-1-z}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2} \quad (5.57)$$

5.2.6 Differenz

Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Werte entspricht der Ableitung im zeitkontinuierlichen Bereich. Ihre z-Transformierte ergibt sich direkt aus dem Verschiebungssatz zu

$$Z\{x[k] - x[k-1]\} = (1 - z^{-1}) \cdot X(z) = \frac{z-1}{z} \cdot X(z) \quad (5.58)$$

Beispiel: Differenz

Die Impulsfolge kann dargestellt werden als Differenz zweier Sprungfolgen:

$$\delta[k] = \sigma[k] - \sigma[k-1] \quad (5.59)$$

Damit ergibt sich ihre z-Transformierte zu

$$X(z) = \frac{z-1}{z} \cdot \frac{z}{z-1} = 1 \quad (5.60)$$

Das Ergebnis stimmt mit der Berechnung über die Definitionsgleichung überein.

5.2.7 Summation

Dem Integral für zeitkontinuierliche Funktionen entspricht bei Folgen die Summation. Zum Beweis der Summationsregel wird die Folge $x[k]$ dargestellt als Differenz zweier Summen:

$$x[k] = \sum_{\kappa=0}^k x[\kappa] - \sum_{\kappa=0}^{k-1} x[\kappa] \quad (5.61)$$

Die z-Transformation der Gleichung ergibt

$$X(z) = (1 - z^{-1}) \cdot Z\left(\sum_{\kappa=0}^k x[\kappa]\right) = \frac{z-1}{z} \cdot Z\left(\sum_{\kappa=0}^k x[\kappa]\right) \quad (5.62)$$

Durch Umstellen ergibt sich die Summationsregel der z-Transformation

$$Z\left\{\sum_{\kappa=0}^k x[\kappa]\right\} = \frac{z}{z-1} \cdot X(z) \quad (5.63)$$

Beispiel: Summation

Die Sprungfolge kann als Summe über die Impulsfolge dargestellt werden.

$$\sigma[k] = \sum_{\kappa=0}^k \delta[\kappa] \quad (5.64)$$

Entsprechend ist der Zusammenhang zwischen den beiden z-Transformierten

$$Z\{\sigma[k]\} = Z\left\{\sum_{\kappa=0}^k \delta[\kappa]\right\} = 1 \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{z}{z-1} \quad (5.65)$$

Auch die Rampenfolge lässt sich als Summe über die Sprungfolge beschreiben. Dabei ist zu beachten, dass die Rampenfolge für $k = 0$ den Wert 0 besitzt. Damit ergibt sich für die Summe der Startwert $k = 1$ und die Summenformel der Rampenfolge lautet

$$x[k] = \sum_{\kappa=0}^k \sigma[\kappa-1] \quad (5.66)$$

Mit der Summations- und Verschiebungsregel ergibt sich die z-Transformierte zu

$$X(z) = \frac{z}{z-1} \cdot z^{-1} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{z}{(z-1)^2} \quad (5.67)$$

Das Ergebnis stimmt mit der Berechnung über die lineare Gewichtung überein.

5.2.8 Multiplikation

Die Multiplikationsregel wird im folgenden Abschnitt mit Hilfe der Rücktransformation hergeleitet. Sie wird hier der Vollständigkeit halber aufgeführt.

$$Z\{x[k] \cdot y[k]\} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \oint Y\left(\frac{z}{v}\right) \cdot X(v) \cdot v^{-1} dv \quad (5.68)$$

5.2.9 Faltung

Der Faltungssatz ist für die Berechnung von Systemantworten von großer Bedeutung und wird ausführlich in Kapitel 8 behandelt. Die z-Transformierte der Faltung zweier Folgen ergibt sich durch Einsetzen in die Definitionsgleichung der z-Transformation zu

$$Z\{g[k] * x[k]\} = Z\left\{\sum_{\kappa=0}^{\infty} g[\kappa] \cdot x[k-\kappa]\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\kappa=0}^{\infty} g[\kappa] \cdot x[k-\kappa] \cdot z^{-k} \quad (5.69)$$

Vertauschen der Summationsreihenfolge und Substitution ergibt

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\kappa=0}^{\infty} x[\kappa] \cdot g[k-\kappa] \cdot z^{-k} &= \sum_{\kappa=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x[\kappa] \cdot g[k-\kappa] \cdot z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x[\kappa] \cdot \sum_{\kappa=0}^{\infty} g[k-\kappa] \cdot z^{-k} \cdot z^{\kappa} \cdot z^{-\kappa} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x[\kappa] \cdot z^{-\kappa} \cdot \sum_{\kappa=0}^{\infty} g[k-\kappa] \cdot z^{-k} \cdot z^{\kappa} \cdot z^{-(k-\kappa)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x[\kappa] \cdot z^{-\kappa} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} g[n] \cdot z^{-n} = G(z) \cdot X(z) \end{aligned} \quad (5.70)$$

Diese Rechenregel wird bei der Diskussion zeitdiskreter Systeme im Bildbereich aufgegriffen.

5.2.10 Anfangswertsatz

Analog zu den Grenzwertsätzen der Laplace-Transformation ergeben sich Anfangs- und Endwertsätze der z-Transformation. Die Definitionsgleichung der z-Transformation lautet

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] \cdot z^{-k} = x[0] + x[1] \cdot z^{-1} + x[2] \cdot z^{-2} + \dots \quad (5.71)$$

Im Grenzfall $z \rightarrow \infty$ werden alle Summanden, die einen Faktor z^{-k} mit $k > 0$ besitzen, zu null. Übrig bleibt demnach der Ausdruck

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \quad (5.72)$$

Da bei der Herleitung des Anfangswertsatzes keine Einschränkung gemacht wird, kann diese Regel immer angewendet werden.

Beispiel: Anfangswertsatz

Die kausale Exponentialfolge besitzt die z-Transformierte

$$X(z) = \frac{z}{z - \lambda_0} \quad (5.73)$$

Für den Grenzübergang $z \rightarrow \infty$ ergibt sich der Anfangswert zu

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{z - \lambda_0} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{\lambda_0}{z}} = 1 \quad (5.74)$$

Das Ergebnis stimmt mit dem Wert $x[0]$ im Zeitbereich überein.

5.2.11 Endwertsatz

Zur Berechnung des Grenzwertes der Folge $x[k]$ für $k \rightarrow \infty$ wird vorausgesetzt, dass dieser Grenzwert existiert. Zur Herleitung des Endwertsatzes wird die z-Transformierte $X(z)$ des Signals $x[k]$ dargestellt als ein Produkt zweier z-Transformierter

$$X(z) = \frac{z}{z-1} \cdot Y(z) \quad (5.75)$$

Diese Gleichung kann mit der Faltungsregel in den Zeitbereich transformiert werden.

$$x[k] = \sum_{\kappa=0}^{\infty} y[\kappa] \cdot \sigma[k-\kappa] = \sum_{\kappa=0}^k y[\kappa] \quad (5.76)$$

Für den Grenzwert $k \rightarrow \infty$ kann die Summe dargestellt werden als

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x[k] = \sum_{\kappa=0}^{\infty} y[\kappa] = \sum_{\kappa=0}^{\infty} y[\kappa] \cdot 1^{-\kappa} = Y(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \cdot X(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot X(z) \quad (5.77)$$

Mit der Definitionsgleichung der z-Transformation

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y[k] \cdot z^{-k} \quad (5.78)$$

ergibt sich für $z = 1$ der Endwertsatz der z-Transformation

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x[k] = \sum_{\kappa=0}^{\infty} h[\kappa] \cdot 1^{-\kappa} = H(1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \cdot X(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot X(z) \quad (5.79)$$

Beispiel: Endwertsatz

Die kausale Exponentialfolge besitzt die z-Transformierte

$$X(z) = \frac{z}{z - \lambda_0} \quad (5.80)$$

Mit dem Grenzübergang $z \rightarrow 1$ des Ausdrucks

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot \frac{z}{z - \lambda_0} = 0 \quad (5.81)$$

ergibt sich der Endwert von $x[k]$ für $k \rightarrow \infty$ zu null. Das Ergebnis stimmt mit dem Grenzwert im Zeitbereich überein, wenn die Basis λ_0 einen Betrag $|\lambda_0| < 1$ aufweist, also wenn ein Grenzwert existiert.

5.2.12 Zusammenfassung der Rechenregeln zur z-Transformation

Zur besseren Übersicht stellt Tabelle 5.4 die wesentlichen Eigenschaften der z-Transformation noch einmal zusammen.

Tabelle 5.4: Rechenregeln der z-Transformation

Regel	Funktion $x(t)$	Laplace-Transformierte $X(s)$
Linearität	$\nu_1 \cdot x_1(t) + \nu_2 \cdot x_2(t)$	$\nu_1 \cdot X_1(s) + \nu_2 \cdot X_2(s)$
Zeitverschiebung nach rechts	$x[k - k_0]$ für $k_0 > 0$	$z^{-k_0} \cdot X(z)$
Zeitverschiebung nach links	$x[k + k_0]$ für $k_0 > 0$	$z^{k_0} \cdot X(z) - z^{k_0} \cdot \sum_{n=0}^{k_0-1} x[n] \cdot z^{-n}$
Modulation	$\lambda^k \cdot x[k]$	$X\left(\frac{z}{\lambda}\right)$
lineare Gewichtung	$k \cdot x[k]$	$-z \cdot \frac{d}{dz} \cdot X(z)$
Differenz	$x[k] - x[k - 1]$	$\frac{z - 1}{z} \cdot X(z)$
Summation	$\sum_{\kappa=0}^k x[\kappa]$	$\frac{z}{z - 1} \cdot X(z)$
Multiplikation	$x_1[k] \cdot x_2[k]$	$\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \oint X_1\left(\frac{z}{v}\right) \cdot X_2(v) \cdot v^{-1} dv$
Faltung	$g[k] * x[k]$	$G(z) \cdot X(z)$
Anfangswert	$x[0]$	$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$
Endwert	$\lim_{k \rightarrow \infty} x[k]$	$\lim_{z \rightarrow 1} ((z - 1) \cdot X(z))$

5.2.13 Korrespondenzen der z-Transformation

Die Rechenregeln zur z-Transformation erlauben die Berechnung weiterer Korrespondenzen. Tabelle 5.5 stellt wichtige Korrespondenzen der z-Transformation zusammen.

Tabelle 5.5: Korrespondenzen der z-Transformation 1/2

Nr	Zeitfunktion $x(t)$	Konvergenz- bereich	Laplace-Transformierte $X(s)$
1	$\delta(t)$	$s \in C$	1
2	$\delta(t - t_0)$	$s \in C$	$e^{-t_0 \cdot s}$
3	$1 \cdot \sigma(t)$	$Re(s) > 0$	$\frac{1}{s}$
4	$t \cdot \sigma(t)$	$Re(s) > 0$	$\frac{1}{s^2}$
5	$\frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot \sigma(t)$	$Re(s) > 0$	$\frac{1}{s^3}$
6	$\frac{1}{n!} \cdot t^n \cdot \sigma(t)$	$Re(s) > 0$	$\frac{1}{s^{n+1}}$ für $n = 0, 1, \dots$
7	$e^{\lambda \cdot t} \cdot \sigma(t)$	$Re(s) > \text{Re}(\lambda)$	$\frac{1}{s - \lambda}$
8	$t \cdot e^{\lambda \cdot t} \cdot \sigma(t)$	$Re(s) > \text{Re}(\lambda)$	$\frac{1}{(s - \lambda)^2}$
9	$\frac{1}{n!} \cdot t^n \cdot e^{\lambda \cdot t} \cdot \sigma(t)$	$Re(s) > \text{Re}(\lambda)$	$\frac{1}{(s - \lambda)^{n+1}}$ für $n = 0, 1, \dots$
10	$\frac{1}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}} \cdot \sigma(t)$	$Re(s) > -\frac{1}{T}$	$\frac{1}{1 + T \cdot s}$
11	$\delta(t) - \frac{1}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}} \cdot \sigma(t)$	$Re(s) > -\frac{1}{T}$	$\frac{T \cdot s}{1 + T \cdot s}$
12	$(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \cdot \sigma(t)$	$Re(s) > 0$	$\frac{1}{s \cdot (1 + T \cdot s)}$
13	$\frac{t}{T^2} \cdot e^{-\frac{t}{T}} \cdot \sigma(t)$	$Re(s) > -\frac{1}{T}$	$\frac{1}{(1 + T \cdot s)^2}$
14	$(t - T \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T}})) \cdot \sigma(t)$	$Re(s) > 0$	$\frac{1}{s^2 \cdot (1 + T \cdot s)}$

5.3 Rücktransformation

Für den Einsatz der z-Transformation bei der Lösung linearer Differenzengleichungen ist eine inverse z-Transformation für die Rücktransformation erforderlich. Sie lässt sich zunächst als mathematische Umkehrformel angeben. Alternativ kann die Rücktransformation mit der Partialbruchzerlegung auf bekannte Korrespondenzen zurückgeführt werden. Als weitere Variante kann ein Potenzreihenansatz für die Rücktransformation gewählt werden.

5.3.1 Definition der inversen z-Transformation

Die Berechnung einer Folge $x[k]$ aus ihrer z-Transformierten ergibt sich ohne Beweis über ein Umlaufintegral [Foel03]

$$x[k] = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \oint X(z) \cdot z^{k-1} dz \quad (5.82)$$

Gleichung (5.82) zur inversen z-Transformation wird an dieser Stelle genutzt, um die Rechenregel zur Multiplikation von Folgen zu beweisen. Die z-Transformierte ist definiert als

$$Z\{x[k] \cdot y[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] \cdot y[k] \cdot z^{-k} \quad (5.83)$$

Wird die Folge $x[k]$ als Umlaufintegral ausgedrückt, ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} x[k] \cdot y[k] \cdot z^{-k} &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\oint X(v) \cdot v^{k-1} dv \right) \cdot y[k] \cdot z^{-k} \\ &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} y[k] \cdot \oint X(v) \cdot v^{-1} \cdot \left(\frac{z}{v}\right)^{-k} dv \end{aligned} \quad (5.84)$$

Mit einigen Umformungen kann die Modulationsregel angewendet werden

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} x[k] \cdot y[k] \cdot z^{-k} &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} y[k] \cdot \oint X(v) \cdot v^{-1} \cdot \left(\frac{z}{v}\right)^{-k} dv \\ &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \oint \sum_{k=0}^{\infty} y[k] \cdot \left(\frac{z}{v}\right)^{-k} \cdot X(v) \cdot v^{-1} dv \\ &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \cdot \oint Y\left(\frac{z}{v}\right) \cdot X(v) \cdot v^{-1} dv \end{aligned} \quad (5.85)$$

Damit ist die Multiplikationsregel hergeleitet. Wie bereits bei der inversen Laplace-Transformation wird die Definition der Rücktransformation aber in der Praxis nicht verwendet. Stattdessen wird die Funktion $X(z)$ so umgeformt, dass bekannte Korrespondenzen genutzt werden können. Dieser Ansatz führt zur Rücktransformation über eine Partialbruchzerlegung oder über einen Potenzreihenansatz.

5.3.2 Rücktransformation über Partialbruchzerlegung

In den bisher behandelten Beispielen und Rechenregeln sind immer gebrochen rationale Funktionen der Form

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m \cdot z^m}{\sum_{n=0}^N a_n \cdot z^n} = \frac{b_M}{a_N} \cdot \frac{\prod_{m=1}^M (z - \beta_m)}{\prod_{n=1}^N (z - \alpha_n)} \quad (5.86)$$

entstanden. Da es sich bei $x[k]$ um ein kausales Signal handelt, ist der Zählergrad M maximal so groß wie der Nennergrad N ($M \leq N$). Die Koeffizienten a_n und b_m sind reelle Koeffizienten. Damit sind die Polstellen α_n und Nullstellen β_m von $X(z)$ entweder reell oder konjugiert komplex zueinander.

Diese gebrochen rationale Funktionen $X(z)$ lassen sich nur in seltenen Fällen direkt über eine bekannte Korrespondenz zurücktransformieren. Im Allgemeinen ist eine Zerlegung der Funktion mit der Partialbruchzerlegung notwendig. Nach der Zerlegung liegen einzelne Partialbrüche vor, die auf bekannte Korrespondenzen zurückgeführt werden können.

Vorbereitung der Partialbruchzerlegung falls Zählergrad M gleich Nennergrad N

Falls der Zählergrad M und der Nennergrad N gleich groß sind, muss vor der Partialbruchzerlegung eine Polynomdivision durchgeführt werden. Dadurch entsteht ein konstanter Summand

$$X_0 = \frac{b_M}{a_N} \quad (5.87)$$

Da die inverse z-Transformierte zu einer Konstanten die Impulsfolge ist, entspricht diesem Summanden im Zeitbereich der Folgenwert für $k = 0$

$$x[k] = \frac{b_M}{a_N} \cdot \delta[k] \quad (5.88)$$

Das folgende Beispiel verdeutlicht diesen Zusammenhang.

Beispiel: Zählergrad gleich Nennergrad

Die z-Transformierte $X(z)$ soll in den Zeitbereich zurück transformiert werden. Da der Zählergrad genauso groß ist wie der Nennergrad, wird eine Polynomdivision durchgeführt. Um auf einen Ausdruck der Korrespondenztafel zu kommen, muss der Restbruch mit z erweitert werden.

$$X(z) = \frac{2 \cdot z - 3}{z - 3} = 2 + \frac{3}{z - 3} = 2 + \frac{3 \cdot z}{z - 3} \cdot z^{-1} \quad (5.89)$$

Damit kann die Folge im Zeitbereich aus der Korrespondenztafel und der Verschiebungsregel bestimmt werden zu

$$x[k] = 2 \cdot \delta[k] + 3 \cdot 3^{k-1} \cdot \sigma[k-1] \quad (5.90)$$

Partialbruchzerlegung für einfache Pole bei $z \neq 0$

Besitzt die z-Transformierte $X(z)$ nur einfache Pole, kann Sie mit Hilfe der Partialbruchzerlegung dargestellt werden als

$$X(z) = \frac{1}{a_N} \cdot \frac{\sum_{m=0}^M b_m \cdot z^m}{\prod_{n=1}^N (z - \alpha_n)} = \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{z - \alpha_n} \quad (5.91)$$

Die Koeffizienten A_n der einzelnen Partialbrüche können wie bei der Laplace-Transformation auf unterschiedliche Arten berechnet werden:

- Ausmultiplizieren

Die Gleichung wird mit den Polstellen multipliziert. Anschließend werden die Polstellen eingesetzt, und es ergibt sich ein Gleichungssystem für die Koeffizienten A_n .

- Residuensatz

einzelnen Koeffizienten werden über den Residuensatz berechnet, der grundsätzlich auf dem gleichen Verfahren basiert

$$A_n = (X(z) \cdot (z - \alpha_n))|_{z=\alpha_n} \quad (5.92)$$

Jeder einzelne Partialbruch hat die Form

$$X_n(z) = \frac{A_n}{z - \alpha_n} = A_n \cdot \frac{z}{z - \alpha_n} \cdot z^{-1} \quad (5.93)$$

Im Zeitbereich ergibt sich damit für jeden Partialbruch eine kausale Exponentialfolge, die um einen Folgenindex nach rechts verschoben ist:

$$x_n[k] = Z^{-1} \left\{ \frac{A_n}{z - \alpha_n} \right\} = A_n \cdot \alpha_n^{k-1} \cdot \sigma[k-1] \quad (5.94)$$

Die Summe der einzelnen Partialbrüche entspricht deshalb im Zeitbereich der Folge

$$Z^{-1} \left\{ \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{z - \alpha_n} \right\} = \sum_{n=1}^N A_n \cdot \alpha_n^{k-1} \cdot \sigma[k-1] \quad (5.95)$$

Beispiel: Partialbruchzerlegung für einfache Pole bei $z \neq 0$

Die z-Transformierte $X(z)$ soll in den Zeitbereich zurücktransformiert werden. Ihr Zählergrad ist kleiner als der Nennergrad, und sie hat zwei einfache Pole.

$$X(z) = \frac{z}{z^2 + 3 \cdot z + 2} = \frac{z}{(z+1) \cdot (z+2)} = \frac{A_1}{z+1} + \frac{A_2}{z+2} \quad (5.96)$$

Ausmultiplizieren der Gleichung führt zu

$$z = A_1 \cdot (z+2) + A_2 \cdot (z+1) \quad (5.97)$$

Einsetzen der Polstellen $\alpha_1 = -1$ und $\alpha_2 = -2$ führt zu

$$A_1 = -1 \quad (5.98)$$

und

$$A_2 = 2 \quad (5.99)$$

Alternativ hätte der Residuensatz ergeben

$$A_1 = \left. \left(\frac{z}{(z+1) \cdot (z+2)} \cdot (z+1) \right) \right|_{z=-1} = \left. \left(\frac{z}{z+2} \right) \right|_{z=-1} = \frac{-1}{-1+2} = -1 \quad (5.100)$$

und

$$A_2 = \left(\frac{z}{(z+1) \cdot (z+2)} \cdot (z+2) \right) \Big|_{z=-2} = \left(\frac{z}{z+1} \right) \Big|_{z=-2} = \frac{-2}{-2+1} = 2 \quad (5.101)$$

Sind die Koeffizienten der Partialbrüche bestimmt, kann die z-Transformierte mit den bekannten Korrespondenzen in den Zeitbereich zurücktransformiert werden.

$$X(z) = \frac{-1}{z+1} + \frac{2}{z+2} = \frac{-z}{z+1} \cdot z^{-1} + \frac{2 \cdot z}{z+2} \cdot z^{-1} \quad (5.102)$$

Es ergibt sich die Folge

$$x[k] = -1 \cdot (-1)^{k-1} \cdot \sigma[k-1] + 2 \cdot (-2)^{k-1} \cdot \sigma[k-1] \quad (5.103)$$

Partialbruchzerlegung für mehrfache Pole bei $z \neq 0$

Liegt ein P-facher Pol an der Stelle α vor, muss der Teil der z-Transformierten dargestellt werden als

$$X(z) = \frac{B(z)}{(z - \alpha)^P} = \sum_{n=1}^P \frac{A_n}{(z - \alpha)^n} \quad (5.104)$$

Die Koeffizienten A_n der einzelnen Partialbrüche können wieder auf unterschiedliche Arten berechnet werden:

- Ausmultiplizieren

Die Gleichung wird mit den Polstellen multipliziert. Anschließend wird die Polstelle und $P - 1$ weitere Werte für z eingesetzt, und es ergibt sich ein Gleichungssystem für die Koeffizienten A_n .

- Residuensatz

Die einzelnen Koeffizienten werden über den Residuensatz berechnet

$$A_n = \frac{1}{(P-n)!} \cdot \frac{d^{P-n}}{dz^{P-n}} \left(X(z) \cdot (z - \alpha)^P \right) \Big|_{z=\alpha} \quad (5.105)$$

Die Rücktransformation kann mit Korrespondenz 9 angegeben werden zu

$$x[k] = \sum_{n=1}^P A_n \cdot \binom{k-1}{n-1} \cdot \alpha^{k-n} \cdot \sigma[k-n] \quad (5.106)$$

Beispiel: Partialbruchzerlegung für mehrfache Pole bei $z \neq 0$

Die z-Transformierte $X(z)$ soll in den Zeitbereich zurücktransformiert werden. Ihr Zählergrad ist kleiner als der Nennergrad und sie hat einen doppelten Pol an der Stelle $\alpha = 0.5$. Damit lautet der Ansatz für die Partialbruchzerlegung

$$X(z) = \frac{z}{(z - 0.5)^2} = \frac{A_1}{z - 0.5} + \frac{A_2}{(z - 0.5)^2} \quad (5.107)$$

Ausmultiplizieren führt zu der Gleichung

$$z = A_1 \cdot (z - 0.5) + A_2 \quad (5.108)$$

Einsetzen der Zahlenwerte $z = 0.5$ und $z = 0$ ergibt

$$A_2 = 0.5 \quad (5.109)$$

und

$$A_1 = 2 \cdot A_2 = 1 \quad (5.110)$$

Alternativ könnte der Residuensatz verwendet werden:

$$A_1 = \frac{d}{dz} \left(X(z) \cdot (z - 0.5)^2 \right) \Big|_{z=0.5} = \frac{dz}{dz} \Big|_{z=0.5} = 1 \quad (5.111)$$

und

$$A_2 = 1 \cdot X(z) \cdot (z - 0.5)^2 \Big|_{z=z_\infty} = z \Big|_{z=0.5} = 0.5 \quad (5.112)$$

Die Funktion $X(z)$ kann damit in folgende Partialbrüche aufgeteilt werden:

$$X(z) = \frac{z}{(z - 0.5)^2} = \frac{1}{z - 0.5} + \frac{0.5}{(z - 0.5)^2} = \frac{z}{z - 0.5} \cdot z^{-1} + \frac{0.5 \cdot z}{(z - 0.5)^2} \cdot z^{-1} \quad (5.113)$$

Zur Rücktransformation werden die Korrespondenzen 5 und 6 sowie der Verschiebungssatz verwendet.

$$x[k] = 0.5^{k-1} \cdot \sigma[k-1] + (k-1) \cdot 0.5^{k-1} \cdot \sigma[k-1] \quad (5.114)$$

Alternativ ist eine Rücktransformation mit Korrespondenz 9 möglich

$$\begin{aligned} x[k] &= \binom{k-1}{0} \cdot 0.5^{k-1-1+1} \cdot \sigma[k-1-1+1] + 0.5 \cdot \binom{k-1}{1} \cdot 0.5^{k-1-2+1} \cdot \sigma[k-1-2+1] \\ &= 0.5^{k-1} \cdot \sigma[k-1] + (k-1) \cdot 0.5^{k-1} \cdot \sigma[k-2] \end{aligned} \quad (5.115)$$

Da der zweite Summand für $k = 1$ zu null wird, sind beide Lösungen identisch.

Sonderfall N-facher Pol bei $z = 0$

Wenn nur Pole an der Stelle $z = 0$ vorliegen, so sind alle Koeffizienten $a_n = 0$ bis auf den Koeffizienten a_N . Damit gilt

$$X(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m \cdot z^m}{a_N \cdot z^N} = \sum_{m=0}^M \frac{b_m}{a_N} \cdot z^{m-N} = \frac{b_0}{a_N} \cdot z^{-N} + \frac{b_1}{a_N} \cdot z^{1-N} + \dots + \frac{b_M}{a_N} \cdot z^{M-N} \quad (5.116)$$

Da bei kausalen Signalen alle Exponenten der komplexen Variablen z immer $M - N < 0$ sind, kann der Verschiebungssatz der z-Transformation für eine Verschiebung nach rechts angewendet werden. Die Folge $x[k]$ im Zeitbereich ist damit

$$x[k] = \frac{b_0}{a_N} \cdot \delta[k-N] + \frac{b_1}{a_N} \cdot \delta[k-N+1] + \dots + \frac{b_M}{a_N} \cdot \delta[k-N+M] \quad (5.117)$$

Beispiel: N-facher Pol an der Stelle $z = 0$

Die z-Transformierte $X(z)$ soll in den Zeitbereich zurücktransformiert werden. Sie hat einen 4-fachen Pol an der Stelle $z = 0$.

$$X(z) = \frac{z^4 + 2 \cdot z^3 + 3 \cdot z^2 + 2 \cdot z + 1}{9 \cdot z^4} = \frac{1}{9} \cdot (1 + 2 \cdot z^{-1} + 3 \cdot z^{-2} + 2 \cdot z^{-3} + 1 \cdot z^{-4}) \quad (5.118)$$

Mit dem Verschiebungssatz der z-Transformation ergibt sich im Zeitbereich die Folge

$$x[k] = \frac{1}{9} \cdot \delta[k] + \frac{2}{9} \cdot \delta[k-1] + \frac{3}{9} \cdot \delta[k-2] + \frac{2}{9} \cdot \delta[k-3] + \frac{1}{9} \cdot \delta[k-4] \quad (5.119)$$

Zusammenfassung der Ansätze für die Partialbruchzerlegung

Tabelle 5.6 fasst die Ansätze für die Partialbruchzerlegung zusammen. Dabei wird von einer z-Transformierten

Tabelle 5.6: Tabellarische Übersicht über korrespondierende Elemente der s- und z-Ebene

Pollage	Ansatz Partialbruchzerlegung
Einfache reelle oder komplexe Pole α_n	$X(z) = \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{z - \alpha_n}$
p-facher reeller oder komplexer Pol α_n	$X(z) = \sum_{n=1}^P \frac{A_n}{(z - \alpha)^n}$
Ausschließlich Polstellen an der Stelle $z = 0$	$X(z) = \sum_{m=0}^M \frac{b_m}{a_N} \cdot z^{m-N}$

5.3.3 Rücktransformation über Reihenentwicklung

Funktionen können über Potenzreihen beschrieben werden. Für gebrochen rationale Funktionen ergeben sich die Potenzreihen aus einer Polynomdivision von Zähler- und Nennerpolynom. Diese Division ist im allgemeinen Fall jedoch nicht endlich. Es kann ein Polynom mit unendlich vielen Summanden entstehen, die mit der Verschiebungsregel rücktransformiert werden können.

Die Darstellung von Funktionen $X(z)$ über sogenannte Laurent-Reihen sowie die entsprechende Rücktransformation sind in [Oppo04] beschrieben.

Beispiel: Inverse z-Transformation über Reihenentwicklung

Die Funktion $X(z)$ soll mit Hilfe einer Reihenentwicklung in den Zeitbereich transformiert werden. Durch Polynomdivision werden die Glieder der Potenzreihe berechnet zu

$$X(z) = \frac{z}{z + 0.5} = 1 + 0.5 \cdot z^{-1} + 0.25 \cdot z^{-2} + 0.125 \cdot z^{-3} + 0.0625 \cdot z^{-4} + \dots \quad (5.120)$$

Rücktransformation ergibt mit Anwendung der Verschiebungsregel

$$x[k] = \delta[k] + 0.5 \cdot \delta[k-1] + 0.25 \cdot \delta[k-2] + 0.125 \cdot \delta[k-3] + 0.0625 \cdot \delta[k-4] + \dots \quad (5.121)$$

An diesem Beispiel zeigt sich, dass die Potenzreihe nicht endlich ist. Für eine exakte Lösung von $x[k]$ müssten unendlich viele Glieder berechnet werden.

5.4 z-Transformation mit MATLAB

Die z-Transformation wird bei abgetasteten Systemen angewendet, die im folgenden Kapitel diskutiert werden. Sie ist eine wichtige Voraussetzung für die Beschreibung zeitdiskreter Systeme im Bildbereich und den Entwurf zeitdiskreter Filter. Die Darstellungen in den letzten Abschnitten haben gezeigt, dass die Berechnungen zur z-Transformation schnell aufwendig werden. Deshalb wird hier die computerunterstützte Berechnung und Interpretation der z-Transformierten mit MATLAB vorgestellt.

Zur Berechnung der z-Transformation und inversen z-Transformation sind folgende Verfahren von Interesse:

- Darstellung von Folgen
- z-Transformation und inverse z-Transformation
- Umformung und Vereinfachung von Ausdrücken
- Partialbruchzerlegung

Diese Punkte werden für MATLAB beschrieben. Weitere Informationen finden sich in der MATLAB-Hilfe zur *Symbolic Math Toolbox*.

5.4.1 Darstellung von Folgen

Für die Berechnung der z-Transformation sind zunächst einige Befehle notwendig, mit denen Folgen dargestellt werden können. Tabelle 5.7 stellt die wesentlichen Befehle zur Darstellung von Folgen zusammen.

Tabelle 5.7: Tabellarische Übersicht über Befehle zur Darstellung von Folgen in MATLAB

Befehl	Beschreibung
<code>syms z k x X</code>	Definition von Variablen für die symbolische Berechnung, hier werden die Variable z, der Folgenindex k, die Folge x und ihre z-Transformierte X definiert
<code>heaviside(k)</code>	Sprungfolge
<code>heaviside(k) - heaviside(k - 1)</code>	Zeitdiskrete Impulsfolge berechnet über Differenz zweier Sprungfolgen, <code>dirac(k)</code> kann bei zeitdiskreten Signalen nicht verwendet werden
<code>+ - * /</code>	Arithmetische Operationen können wie gewohnt verwendet werden
<code>a^k</code>	Potenzfunktion kann wie gewohnt verwendet werden
<code>sin(k), cos(k), exp(k)</code>	Auswahl von wesentlichen Funktionen, weitere Funktionen sind in der MATLAB-Hilfe beschrieben

Die Berechnung der Folgen sowie der entsprechenden z-Transformierten wird an einem Beispiel verdeutlicht.

Beispiel: Folgendefinition

Für die Folge

$$x[k] = 2 \cdot \sigma[k] + 5 \cdot 3^{k-1} \cdot \sigma[k-1] + \delta[k-3] \quad (5.122)$$

ergibt sich in MATLAB die Folgendefinition aus folgender Befehlssequenz

```

1 % Definition der symbolischen Variablen
2 syms x X k z;
3
4 % Definition der Folge
5 x = 2*heaviside(k) + 5*3^(k-1)*heaviside(k-1) + (heaviside(k-3)-heaviside(k-4));

```

Zunächst werden die symbolischen Variablen x, X, k und z definiert, die zur Berechnung der Folge und später zur Berechnung der z-Transformierten benötigt werden. Anschließend wird die Folge definiert. Da MATLAB die einseitige z-Transformation durchführt, könnte die Sprungfolge $\sigma[k]$ weggelassen werden. Die Impulsfolge wird als Differenz zweier Sprünge dargestellt.

5.4.2 z-Transformation und inverse z-Transformation

Sind die Folgen definiert, können sie in den z-Bereich transformiert werden. Zur z-Transformation und inversen z-Transformation stehen zwei direkte Befehle zur Verfügung. Sie sind in Tabelle 5.8 zusammengestellt.

Tabelle 5.8: Befehle zur z- und inversen z-Transformation

Befehl	Beschreibung
$X = ztrans(x, k, z)$	z-Transformation der symbolisch definierten Folge x mit dem Folgenindex k in den z-Bereich mit der Variable z
$x = iztrans(X, z, k)$	inverse z-Transformation der symbolisch definierten z-Transformierten X mit der Variable z in den Zeitbereich mit dem Folgenindex k
$symsum(x, k, a, b)$	Symbolische Berechnung der Summe einer Folge x mit dem Folgenindex k in den Grenzen von a bis b

MATLAB führt die einseitige z-Transformation aus. Damit sind die Ergebnisse für die Folge $x[k] = 1$ und $x[k] = \sigma[k]$ identisch.

Beispiel: z-Transformation mit MATLAB

Die Folge x[k] mit

$$x[k] = 2 \cdot \sigma[k] + 5 \cdot 3^{k-1} \cdot \sigma[k-1] + \delta[k-3] \quad (5.123)$$

soll in den z-Bereich transformiert werden. Als Ergebnis wird mit den Rechenregeln der z-Transformation die z-Transformierte

$$X(z) = 2 \cdot \frac{z}{z-1} + 5 \cdot z^{-1} \cdot \frac{z}{z-3} + z^{-3} \quad (5.124)$$

erwartet. Die Berechnung in MATLAB ergibt sich mit dem Befehl

```
1 % Transformation der Folge in den z-Bereich
2 X = ztrans(x, k, z)
```

Das von MATLAB berechnete Ergebnis lautet

```
1 X =
2
3 2*z/(z-1)+5/9*z/(1/3*z-1)-5/3+1/z^3
```

Während die Übereinstimmung für den ersten und letzten Summanden direkt deutlich wird, ist die Übereinstimmung des mittleren Summanden erst nach Umformungen erkennbar.

$$\frac{5}{9} \cdot \frac{z}{\frac{1}{3} \cdot z - 1} - \frac{5}{3} = \frac{5}{3} \cdot \frac{z}{z-3} - \frac{5}{3} \cdot \frac{z-3}{z-3} = \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{z}{z-3} - \frac{z-3}{z-3} \right) = 5 \cdot \frac{z}{z-3} \cdot z^{-1} \quad (5.125)$$

Die Rücktransformation soll an demselben Beispiel geübt werden.

```
1 % Transformation der Folge in den z-Bereich
2 y = iztrans(X, z, k)
```

Es ergibt sich das Ergebnis

```
1 y =
2
3 2+5/3*3^k-5/3*charfcn[0](k)+charfcn[3](k)
```

Die bei dem Ergebnis verwendete $\text{charfcn}[k_0](k)$ -Folge entspricht der Impulsfolge an der Stelle k_0 . Damit sind die Ergebnisse identisch.

5.4.3 Umformung und Vereinfachung von Ausdrücken

Bereits diese einfachen Beispiele haben gezeigt, dass die Berechnung der z-Transformierten oder inversen z-Transformierten weniger aufwendig ist, als die Umformung des Ergebnisses in die gewohnte Form. Deshalb werden in Tabelle 5.9 einige Befehle zur Umformung und Vereinfachung von Ausdrücken vorgestellt.

Tabelle 5.9: Befehle zur z- und inversen z-Transformation

Befehl	Beschreibung
<code>collect(x, k)</code>	Sortiert den Ausdruck x nach Potenzen der Variable k
<code>expand(x)</code>	Multipliziert den Ausdruck x aus
<code>factor(x)</code>	Stellt einen Ausdruck x als Produkt von Faktoren dar
<code>simple(x)</code>	Erstellt die kürzeste Darstellungsform für den Ausdruck x
<code>pretty(x)</code>	Stellt den Ausdruck x in einer grafischen Form dar
<code>[r, p, k] = residue(b, a)</code>	Berechnung der Partialbrüche mit Koeffizient r, Pol p und Konstante k bei gegebener gebrochen rationaler Funktion mit den Koeffizienten b und a
<code>[a, b] = residue(r, p, k)</code>	Berechnung der Koeffizienten b und a einer gebrochen rationalen Funktion bei gegebenen Partialbrüchen mit Koeffizient r, Pol p und Konstante k

Die genaue Bezeichnung der einzelnen Befehle kann in der MATLAB-Hilfe nachgeschlagen werden. Hier soll an zwei Beispielen der Umgang mit den Befehlen verdeutlicht werden.

Beispiel: z-Transformation einer harmonischen Folge mit MATLAB

Die z-Transformierte einer Cosinus-Folge errechnet sich mit MATLAB mit folgender Sequenz:

```

1 % Definition der symbolischen Variablen
2 syms f TA k z x X;
3
4 % Definition der Kosinusfolge
5 x = cos(2*pi*f*k*TA);
6
7 X = ztrans(x,k,z);
8 pretty(simple(X))
9
10          2
11          z - z cos(2 pi f TA)
12  -----
13                  2
14          1 - 2 z cos(2 pi f TA) + z

```

Das Ergebnis entspricht Korrespondenz 15. Leider ist die z-Transformierte oft nicht so leicht zu interpretieren wie in diesem Fall. Insbesondere bei harmonischen Folgen ergeben sich aufgrund der Additionstheoreme viele unterschiedliche Darstellungsformen, sodass der Vorteil der symbolischen Berechnung der z-Transformierten oft einem hohen Aufwand für die Umformung der berechneten z-Transformierten gegenübersteht.

Beispiel: Partialbruchzerlegung mit MATLAB

Der Befehl `residue` rechnet die unterschiedlichen Darstellungsformen für gebrochen rationale Funktionen ineinander um. Die Berechnung wird numerisch durchgeführt, der Befehl ist deshalb kein Teil der Symbolic Math Toolbox. Bei einfachen Polen wird folgende Nomenklatur zugrunde gelegt:

$$\frac{b_1 \cdot z^M + b_2 \cdot z^{M-1} + b_3 \cdot z^{M-2} + \dots + b_M \cdot z + b_{M+1}}{a_1 \cdot z^N + a_2 \cdot z^{N-1} + a_3 \cdot z^{N-2} + \dots + a_N \cdot z + a_{N+1}} = \frac{r_1}{z - p_1} + \frac{r_2}{z - p_2} + \dots + \frac{r_N}{z - p_N} + k \quad (5.126)$$

Treten bei der Partialbruchzerlegung vielfache Pole p_n auf, so werden sie mit aufsteigender Potenz dargestellt:

$$\frac{b_1 \cdot z^M + b_2 \cdot z^{M-1} + b_3 \cdot z^{M-2} + \dots + b_M \cdot z + b_{M+1}}{a_1 \cdot z^N + a_2 \cdot z^{N-1} + a_3 \cdot z^{N-2} + \dots + a_N \cdot z + a_{N+1}} = \dots + \frac{r_n}{z - p_n} + \frac{r_{n+1}}{(z - p_n)^2} + \frac{r_{n+2}}{(z - p_n)^3} + \dots \quad (5.127)$$

Bei der Partialbruchzerlegung wird folgendes Beispiel berechnet. Die Rechnung soll mit MATLAB nachvollzogen werden.

$$X(z) = \frac{z}{z^2 + 3 \cdot z + 2} = \frac{z}{(z+1) \cdot (z+2)} = \frac{-1}{z+1} + \frac{2}{z+2} \quad (5.128)$$

Die Partialbruchzerlegung ergibt sich mit MATLAB mit folgender Sequenz:

```

1 % Definition der gebrochen rationalen Funktion über Koeffizienten - Vektoren
2 b = [1 0];
3 a = [1 3 2];
4
5 % Berechnung der Partialbrüche
6 [r,p,k] = residue(b,a)

```

MATLAB reagiert mit der Aussgabe

```

1 r = [2 -1]
2 p = [-2 -1]
3 k =

```

Das Ergebnis entspricht der analytischen Rechnung. Im Gegensatz zur analytischen Berechnung der z-Transformierten kann die Partialbruchzerlegung fast immer vorteilhaft eingesetzt werden.

5.5 Literatur

5.5.1 Literaturstellen mit besonders anschaulicher Darstellung

- [Lyon04] Lyons, Richard G.: Understanding Digital Signal Processing, Prentice Hall, New Jersey, 2004
- [Schei05] Scheithauer, Rainer: Signale und Systeme, 2. Auflage, B.G. Teubner Stuttgart, 2005
- [Stea99] Stearns, Samuel: Digitale Verarbeitung analoger Signale, 7. Auflage, Oldenbourg Verlag München, 1999

5.5.2 Literaturstellen mit praktischen Anwendungen

- [Wern08] Werner, Martin: Signale und Systeme, Vieweg Studium Technik, Wiesbaden, 2008
- [Meye08] Meyer, Martin: Signalverarbeitung – Analoge und digitale Signale, Systeme und Filter, Vieweg Studium Technik, Wiesbaden, 2008

5.5.3 Literatur zu MATLAB

- [Schw07] Schweizer, Wolfgang: MATLAB kompakt, Oldenbourg Verlag München, 2007
- [Stei07] Stein, Ulrich: Einstieg in das Programmieren mit MATLAB, Fachbuchverlag Leipzig, 2007

5.5.4 Weiterführende Literatur

- [Opp04] Oppenheim, Alan: Zeitdiskrete Signalverarbeitung, 2. überarbeitete Auflage, Pearson Studium, 2004
- [Kamm98] Kammeyer, Karl: Digitale Signalverarbeitung, B.G. Teubner Stuttgart, 1998

6 Zeitdiskrete Systeme im z-Bereich

In Kapitel 5 wird die z-Transformation von Signalen vorgestellt und an Beispielen vertieft. Die z-Transformation kann zur analytischen Lösung von Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten eingesetzt werden. Es wird sich zeigen, dass die analytische Lösung von Differenzengleichungen mit Hilfe der z-Transformation einfacher und übersichtlicher ist als die Vier-Schritt-Methode im Zeitbereich.

Die Lösung von linearen Differenzengleichungen führt zu dem Begriff der Übertragungsfunktion für zeitdiskrete Systeme. Sie weist Parallelen zur Übertragungsfunktion zeitkontinuierlicher Systeme auf. Auch die Interpretation der Übertragungsfunktion ist ähnlich. So lassen sich zum Beispiel Stabilitätsaussagen und Aussagen zur Schwingungsneigung sowie zur Sprungfähigkeit an der Pollage der Übertragungsfunktion ablesen. Wesentlich dabei ist, den in Kapitel 5 beschriebenen Zusammenhang zwischen der s- und z-Ebene zu kennen.

Die Interpretation der unterschiedlichen Systeme führt zur Einteilung in Systeme mit endlicher und unendlicher Impulsantwort. Aufgrund ihrer Impulsantworten werden sie als Finite-Impulse-Response-Systeme (FIR-Systeme) beziehungsweise Infinite-Impulse-Response-Systeme (IIR-Systeme) bezeichnet. Bei dem Entwurf zeitdiskreter Systeme wird sich zeigen, dass FIR- und IIR-Systeme grundsätzlich unterschiedliche Entwurfsverfahren erfordern.

In der Praxis wird die Simulation und Interpretation zeitdiskreter Systeme mit Programmen wie MATLAB und Simulink durchgeführt. Die dazu erforderlichen Befehle und Methoden werden kurz vorgestellt und an Beispielen verdeutlicht.

6.1 Lösung von Differenzengleichungen mit der z-Transformation

Differenzengleichungen beschreiben das Verhalten zeitdiskreter Systeme ähnlich, wie Differentialgleichungen das Verhalten zeitkontinuierlicher Systeme beschreiben. Differenzengleichungen können im Zeitbereich gelöst werden. Das Verfahren dazu wird in Kapitel 0 vorgestellt. Es besteht aus mehreren Schritten und ist insbesondere bei Berücksichtigung von Anfangsbedingungen aufwendig. Eine effizientere Möglichkeit zur Lösung von Differenzengleichungen wird mit der z-Transformation erreicht. Das Vorgehen wird in Bild 6.1 skizziert.

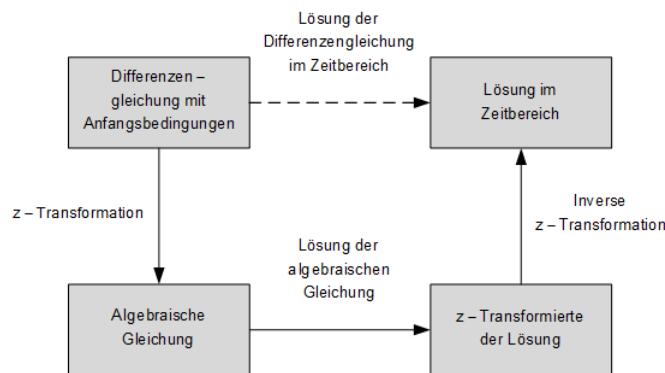


Bild 6.1: Verfahren zur Lösung von Differenzengleichungen mit der z-Transformation

Die Differenzengleichung wird mit Hilfe der z-Transformation in den z-Bereich transformiert. Aufgrund der Rechenregeln der z-Transformation ergibt sich eine algebraische Gleichung, die im z-Bereich gelöst wird. Mit Hilfe der Rücktransformation über Partialbruchzerlegung wird die Lösung im Zeitbereich bestimmt.

6.1.1 Lösung linearer Differenzengleichungen ohne Anfangsbedingungen

Zur Lösung der Differenzengleichung wird von der allgemeinen Form ausgegangen

$$\sum_{n=0}^N c_n \cdot y[k-n] = \sum_{l=0}^L d_l \cdot u[k-l] \quad (6.1)$$

Mit der Verschiebungsregel nach rechts ergibt sich die z-Transformierte der Gleichung zu

$$\sum_{n=0}^N c_n \cdot Y(z) \cdot z^{-n} = \sum_{l=0}^L d_l \cdot U(z) \cdot z^{-l} \quad (6.2)$$

Nach Ausklammern der beiden z-Transformierten $Y(z)$ und $U(z)$

$$Y(z) \cdot \sum_{n=0}^N c_n \cdot z^{-n} = U(z) \cdot \sum_{l=0}^L d_l \cdot z^{-l} \quad (6.3)$$

kann die Gleichung nach der z-Transformierten des Ausgangssignals $Y(z)$ aufgelöst werden.

$$Y(z) = \frac{\sum_{l=0}^L d_l \cdot z^{-l}}{\sum_{n=0}^N c_n \cdot z^{-n}} \cdot U(z) \quad (6.4)$$

Die Lösung im z-Bereich ist eine gebrochen rationale Funktion, die mit Hilfe der Partialbruchzerlegung und den bekannten Korrespondenzen in den Zeitbereich zurück transformiert werden kann. Dieses Vorgehen wird an der Differenzengleichung eines rekursiven Tiefpasses verdeutlicht.

Beispiel: Rekursiver Tiefpass ohne Anfangsbedingungen

Es soll die Reaktion eines rekursiven Tiefpasses auf einen Sprung der Eingangsgröße $u[k]$ von der Höhe U_0 berechnet werden. Das Eingangssignal besitzt die z-Transformierte

$$U(z) = \frac{z}{z-1} \cdot U_0 \quad (6.5)$$

Das Übertragungsverhalten des rekursiven Tiefpasses wird mit der Differenzengleichung

$$y[k] - GF \cdot y[k-1] = (1 - GF) \cdot u[k] \quad (6.6)$$

beschrieben. Die Transformation der Gleichung in den z-Bereich ergibt

$$Y(z) \cdot (1 - GF \cdot z^{-1}) = (1 - GF) \cdot \frac{z}{z-1} \cdot U_0 \quad (6.7)$$

Auflösen nach der z-Transformierten des Ausgangssignals $Y(z)$ führt zu

$$Y(z) = \frac{z}{z-GF} \cdot (1 - GF) \cdot \frac{z}{z-1} \cdot U_0 \quad (6.8)$$

Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung kann $Y(z)$ dargestellt werden als

$$Y(z) = \frac{z}{z-GF} \cdot (1 - GF) \cdot \frac{z}{z-1} \cdot U_0 = \left((-GF) \cdot \frac{z}{z-GF} + \frac{z}{z-1} \right) \cdot U_0 \quad (6.9)$$

Die Darstellung mit Partialbrüchen ermöglicht die Rücktransformation in den Zeitbereich zu

$$y[k] = ((-GF) \cdot GF^k \cdot \sigma[k] + \sigma[k]) \cdot U_0 = (1 - GF^{k+1}) \cdot U_0 \cdot \sigma[k] \quad (6.10)$$

Ein Vergleich mit der über die Faltungssumme berechneten Systemantwort in Bild 6.2 zeigt identische Ausgangssignale.

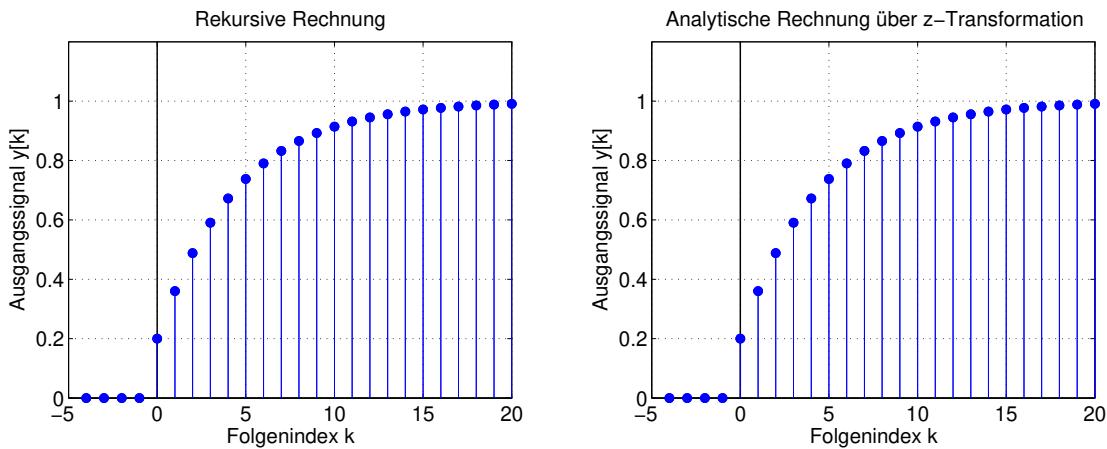


Bild 6.2: Ausgangssignal eines rekursiven Tiefpasses mit GF = 0.8 bei einem Eingangssprung ($U_0 = 1$)

6.1.2 Lösung linearer Differenzengleichungen mit Anfangsbedingungen

Zur Lösung linearer Differenzengleichungen mit Anfangsbedingungen wird wieder von der allgemeinen Form der Differenzengleichung ausgegangen

$$\sum_{n=0}^N c_n \cdot y[k-n] = \sum_{l=0}^L d_l \cdot u[k-l] \quad (6.11)$$

Aufgrund der Zeitinvarianz kann das System um N nach links verschoben werden. Es ergibt sich die Gleichung

$$\sum_{n=0}^N c_n \cdot y[k-n+N] = \sum_{l=0}^L d_l \cdot u[k-l+N] \quad (6.12)$$

Da das Argument der Folge $y[k-n+N]$ damit immer größer gleich k ist, muss bei der Transformation der Gleichung in den z-Bereich die Verschiebungsregel nach links angewendet werden. Im z-Bereich ergibt sich die Gleichung

$$\sum_{n=0}^N c_n \cdot \left(Y(z) \cdot z^{N-n} - z^{N-n} \cdot \sum_{k=0}^{N-n-1} y[k] \cdot z^{-k} \right) = \sum_{l=0}^L d_l \cdot \left(U(z) \cdot z^{N-l} - z^{N-l} \cdot \sum_{k=0}^{N-l-1} u[k] \cdot z^{-k} \right) \quad (6.13)$$

Dieses Vorgehen ähnelt sehr der Lösung von Differentialgleichungen mit Anfangsbedingungen bei der Laplace-Transformation. In der allgemeinen Form erscheint es aufwendig. Bei praktischer Anwendung bestehen die Summen mit den Anfangswerten aber oft nur aus einzelnen Werten, sodass sich die Gleichung stark vereinfacht.

Beispiel: RC-Tiefpass mit Anfangsbedingungen

Das Vorgehen wird wieder an der Differenzengleichung eines rekursiven Tiefpasses verdeutlicht.

$$y[k] - GF \cdot y[k-1] = (1 - GF) \cdot u[k] \quad (6.14)$$

Es soll die Reaktion des Tiefpasses auf einen Sprung der Eingangsgröße $u[k]$ von der Höhe U_0 und für die Anfangsbedingungen $y[0] = 2$ berechnet werden. Zur Berücksichtigung der Anfangsbedingungen muss bei der Transformation der Gleichung in den z-Bereich die Verschiebungsregel nach links angewendet werden. Eine Index-Transformation führt zu

$$y[k+1] - GF \cdot y[k] = (1 - GF) \cdot u[k+1] \quad (6.15)$$

Die Transformation in den z-Bereich ergibt

$$z \cdot Y(z) - z \cdot y[0] - GF \cdot Y(z) = (1 - GF) \cdot (z \cdot U(z) - z \cdot u[0]) \quad (6.16)$$

Durch Einsetzen von $U(z)$ und $u[0] = 0$ sowie Umformung

$$(z - GF) \cdot Y(z) = (1 - GF) \cdot \left(\frac{z^2}{z-1} \cdot U_0 - z \cdot U_0 \right) + z \cdot y[0] = (1 - GF) \cdot U_0 \cdot \left(\frac{z^2}{z-1} \right) + z \cdot y[0] \quad (6.17)$$

ergibt sich die Lösung im z-Bereich

$$Y(z) = (1 - GF) \cdot U_0 \cdot \left(\frac{z^2}{(z-1) \cdot (z-GF)} \right) + \frac{z}{z-GF} \cdot y[0] \quad (6.18)$$

Der erste Term der z-Transformierten ist identisch zu dem Fall ohne Anfangsbedingungen in Gleichung (6.8). Der zweite Teil beschreibt das Systemverhalten aufgrund der Anfangsbedingung und kann mit der Korrespondenztafel in den Zeitbereich zurücktransformiert werden. Es ergibt sich das Ausgangssignal

$$y[k] = (1 - GF^{k+1}) \cdot U_0 \cdot \sigma[k] + y[0] \cdot GF^k \cdot \sigma[k] \quad (6.19)$$

Die Anfangsbedingung klingt ähnlich wie im zeitkontinuierlichen Bereich exponentiell ab. Bild 6.3 stellt die beiden Signalanteile dar.

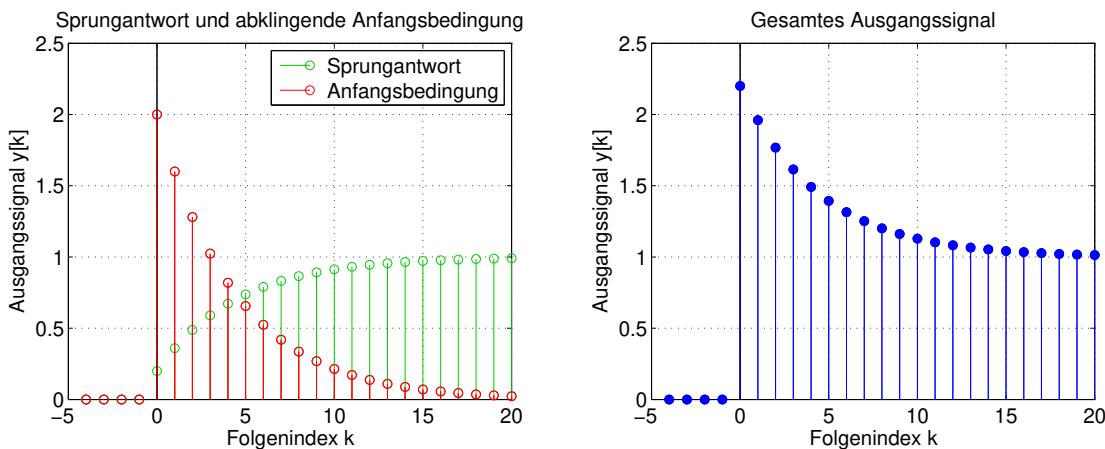


Bild 6.3: Ausgangssignal eines rekursiven Tiefpasses mit $GF = 0.8$ bei einem Eingangssprung und Anfangsbedingung $y[0] = 2$)

6.1.3 Vorgehen zur Lösung linearer Differenzengleichungen

Die beiden Abschnitte zeigen das Vorgehen zur Lösung linearer Differenzengleichungen ohne und mit Anfangsbedingungen, das in Tabelle 6.1 zusammengefasst ist.

Tabelle 6.1: Vorgehen bei der Berechnung der Systemantwort mit der z-Transformation

Schritt	Lösung einer Differenzengleichung	
	ohne Anfangsbedingungen	mit Anfangsbedingungen
1	Differenzengleichung	Verschobene Differenzengleichung
	$\sum_{n=0}^N c_n \cdot y[k-n] = \sum_{l=0}^L d_l \cdot u[k-l]$	$\sum_{n=0}^N c_n \cdot y[k-n+N] = \sum_{l=0}^L d_l \cdot u[k-l+N]$
2	Transformation der Differenzengleichung in den z-Bereich unter Verwendung der entsprechenden Verschiebungsregel	
3	Berechnung der z-Transformierten Y(z)	
4	Rücktransformation mit Hilfe der Partialbruchzerlegung und den bekannten Korrespondenzen	

Tabelle 6.2: Vorgehen bei der Berechnung der Systemantwort mit der z-Transformation

Schritt	Lösung einer Differenzengleichung	
	ohne Anfangsbedingungen	mit Anfangsbedingungen
1	Differenzengleichung	Verschobene Differenzengleichung
	$\sum_{n=0}^N c_n \cdot y[k-n] = \sum_{l=0}^L d_l \cdot u[k-l]$	$\sum_{n=0}^N c_n \cdot y[k-n+N] = \sum_{l=0}^L d_l \cdot u[k-l+N]$
2	Transformation der Differenzengleichung in den z-Bereich unter Verwendung der entsprechenden Verschiebungsregel	
3	Berechnung der z-Transformierten Y(z)	
4	Rücktransformation mit Hilfe der Partialbruchzerlegung und den bekannten Korrespondenzen	

Tabelle 6.3: Beispiel für eine Urliste: Messwerte von 100 Widerständen mit einem Sollwert von $R = 1k\Omega$

Messung	Messwerte Klebermenge m / mg									
1 - 5	983	988	985	987	988	987	986	985	986	991
6 - 10	987	986	987	986	985	988	986	986	988	985
11- 15	985	989	986	986	985	992	988	989	986	986
16 - 20	985	986	986	986	989	988	986	986	986	987
21 - 25	989	986	986	985	988	990	986	986	988	987
26 - 30	985	989	987	985	986	990	986	985	986	988
31 - 35	985	988	984	988	986	985	987	989	986	987
36 - 40	987	987	985	987	986	986	986	987	985	989

6.2 Übertragungsfunktion zeitdiskreter Systeme

Im zeitkontinuierlichen Bereich werden Systeme durch die Übertragungsfunktion $G(s)$ charakterisiert. Sie ergibt sich aus der Laplace-Transformierten der Differentialgleichung bei verschwindenden Anfangsbedingungen. Dasselbe Verfahren wird auch bei zeitdiskreten Systemen angewendet. Zur Berechnung der z-Transformierten $Y(z)$ kann die Verschiebungsregel verwendet werden. Im Fall verschwindender Anfangsbedingungen ergibt sich

$$\sum_{n=0}^N c_n \cdot y[k-n] = \sum_{l=0}^L d_l \cdot u[k-l] \quad (6.20)$$

Alternativ kann die Berechnung über die Faltungsregel durchgeführt werden. Aus der Faltung im Zeitbereich

$$y[k] = \sum_{\kappa=0}^k g[\kappa] \cdot u[k-\kappa] = \sum_{\kappa=0}^k g[k-\kappa] \cdot u[\kappa] \quad (6.21)$$

folgt im z-Bereich

$$Y(z) = G(z) \cdot U(z) \quad (6.22)$$

Durch einen Vergleich der beiden Darstellungen ergibt sich die Übertragungsfunktion für zeitdiskrete Systeme aus der Gleichung

$$Y(z) = G(z) \cdot U(z) = \frac{\sum_{l=0}^L d_l \cdot z^{-l}}{\sum_{n=0}^N c_n \cdot z^{-n}} \cdot U(z) \quad (6.23)$$

Die Übertragungsfunktion beschreibt den Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgangssignal im z-Bereich.

6.2.1 Bestimmung der Differenzengleichung aus der Übertragungsfunktion

Wie später gezeigt wird, ist das Ergebnis eines Filterentwurfs eine Übertragungsfunktion $G(z)$, die die definierten Filtereigenschaften besitzt. Um den Filter zum Beispiel in Form eines Mikro-Controller-Programms realisieren zu können, muss die Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\sum_{l=0}^L d_l \cdot z^{-l}}{\sum_{n=0}^N c_n \cdot z^{-n}} \quad (6.24)$$

in eine Differenzengleichung umgeformt werden. Durch Ausmultiplizieren der beiden Brüche ergibt sich die Gleichung

$$Y(z) \cdot \sum_{n=0}^N c_n \cdot z^{-n} = U(z) \cdot \sum_{l=0}^L d_l \cdot z^{-l} \quad (6.25)$$

Sie kann mit der Verschiebungsregel in den Zeitbereich zurücktransformiert werden.

$$\sum_{n=0}^N c_n \cdot y[k-n] = \sum_{l=0}^L d_l \cdot u[k-l] \quad (6.26)$$

Es wird deutlich, dass die Koeffizienten von Differenzengleichung und Übertragungsfunktion identisch sind. Zur Realisierung eines Filters wird der aktuelle Ausgangswert aus den vergangenen Ein- und Ausgangswerten berechnet. Dabei kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit $c_0 = 1$ gesetzt werden.

$$y[k] = \sum_{l=0}^L d_l \cdot u[k-l] - \sum_{n=1}^N c_n \cdot y[k-n] \quad (6.27)$$

Die Gleichung ist Grundlage für die technische Realisierung zeitdiskreter Systeme.

Beispiel: Systemrealisierung

Gegeben ist ein System mit der Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0.5 \cdot z}{z - 0.5} = \frac{0.5}{1 - 0.5 \cdot z^{-1}} \quad (6.28)$$

Ausmultiplizieren

$$Y(z) \cdot (1 - 0.5 \cdot z^{-1}) = 0.5 \cdot U(z) \quad (6.29)$$

und Rücktransformation ergibt mit der Verschiebungsregel

$$y[k] - 0.5 \cdot y[k-1] = 0.5 \cdot u[k] \quad (6.30)$$

Zur Realisierung des Filters als Algorithmus muss die Gleichung nach $y[k]$ aufgelöst werden. Das aktuelle Ausgangssignal des Filters errechnet sich damit zu

$$y[k] = \frac{1}{2} \cdot (u[k] + y[k-1]) \quad (6.31)$$

Diese Gleichung kann zum Beispiel als Software in einem Controller oder als zeitdiskrete Schaltung realisiert werden.

6.2.2 Impuls- und Sprungantwort

Die Übertragungsfunktion $G(z)$ ist die z -Transformierte der Impulsantwort. Das ergibt sich unmittelbar aus der Definitionsgleichung, wenn für $U(z)$ die z -Transformierte des Impulses

$$U(z) = 1 \quad (6.32)$$

eingesetzt wird:

$$Y(z) = G(z) \cdot U(z) = G(z) \cdot 1 = G(z) \quad (6.33)$$

Bei Anregung des Systems mit einer Sprungfolge mit der z -Transformierten

$$U(z) = \frac{z}{z-1} \quad (6.34)$$

ergibt sich die z -Transformierte des Ausgangssignals zu

$$Y(z) = G(z) \cdot U(z) = G(z) \cdot \frac{z}{z-1} = H(z) \quad (6.35)$$

Diese Gleichung kann mit der Summationsregel rücktransformiert werden, und es ergibt sich

$$h[k] = \sum_{\kappa=0}^k g[\kappa] \quad (6.36)$$

Die Sprungantwort ergibt sich aus der Summe der einzelnen Folgenwerte der Impulsantwort. Dieses Ergebnis entspricht sinngemäß den Eigenschaften zeitkontinuierlicher Systeme. Dort ist die Sprungantwort $h(t)$ das Integral der Impulsantwort $g(t)$. Umgekehrt kann die Impulsantwort aus der Sprungantwort berechnet werden. Im z -Bereich gilt:

$$H(z) = \frac{z}{z-1} \cdot G(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \cdot G(z) \quad (6.37)$$

Diese Gleichung kann in den Zeitbereich zurücktransformiert werden.

$$g[k] = h[k] - h[k-1] \quad (6.38)$$

Auch dieses Ergebnis entspricht sinngemäß den Eigenschaften zeitkontinuierlicher Systeme. Dort ist die Impulsantwort $g(t)$ die erweiterte Ableitung der Sprungantwort $h(t)$. Für zeitkontinuierliche Systeme wird der Endwert der Sprungantwort als Verstärkung definiert. Um den Begriff der Verstärkung für zeitdiskrete Systeme zu definieren, wird der Grenzwert untersucht.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h[k] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot H(z) = G(1) \quad (6.39)$$

Die Verstärkung eines zeitdiskreten Systems ergibt sich aus dem Wert der Übertragungsfunktion an der Stelle $z = 1$. Tabelle 6.2 fasst die Zusammenhänge von Impuls- und Sprungantwort zusammen.

Tabelle 6.4: Übersicht zum Zusammenhang von Impuls- und Sprungantwort

Eigenschaft	Zeitbereich	z-Bereich
Impulsantwort	$g[k] = h[k] - h[k-1]$	$G(z) = H(z) \cdot (1 - z^{-1})$
Sprungantwort	$h[k] = \sum_{\kappa=0}^k g[\kappa]$	$H(z) = G(z) \cdot \frac{z}{z-1}$
Verstärkung des Systems	$\lim_{k \rightarrow \infty} h[k]$	$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot H(z) = G(1)$

Zur Vertiefung des Begriffes der Sprungantwort werden ein zeitkontinuierliches und ein zeitdiskretes System verglichen, die an den Stellen $t = k \cdot T_A$ dieselben Werte aufweisen.

$$g[k] = g(k \cdot T_A) \quad (6.40)$$

Die Sprungantwort des zeitkontinuierlichen Systems ergibt sich aus dem Integral

$$h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau \quad (6.41)$$

Die Sprungantwort des zeitdiskreten Systems ergibt sich aus der Summe

$$h[k] = \sum_{\kappa=0}^k g[\kappa] \quad (6.42)$$

Während das Integral die Fläche unter der Impulsantwort bis zum Punkt t repräsentiert, nähert die Summe die Fläche über Rechtecke. Die Breite der Rechtecke ist bei zeitdiskreten Systemen auf den Wert eins normiert. Aus diesem Grund gilt:

$$h[k] \neq h(k \cdot T_A) \quad (6.43)$$

Die Abtastzeit kann dadurch berücksichtigt werden, dass die Sprungantwort $h[k]$ mit der Abtastzeit T_A multipliziert wird. Damit wird die Breite der Rechtecke von 1 auf T_A geändert.

$$h[k] \cdot T_A \approx h(k \cdot T_A) \quad (6.44)$$

Auch nach dieser Korrektur sind die Sprungantworten nicht identisch, da die Fläche unter der zeitkontinuierlichen Impulsantwort im zeitdiskreten Fall nur über Rechtecke approximiert wird.

Beispiel: Vergleich von Sprungantworten

Gegeben ist ein zeitkontinuierliches System mit der Impulsantwort

$$g(t) = 2 \cdot e^{-\frac{t}{10 \text{ ms}}} \cdot \sigma(t) \quad (6.45)$$

Das System wird mit einer Abtastzeit $T_A = 1 \text{ ms}$ abgetastet. Es ergeben sich die Folgenwerte

$$g[k] = 2 \cdot e^{-\frac{k}{10}} \cdot \sigma[k] \quad (6.46)$$

Die Sprungantwort des zeitkontinuierlichen Systems lautet

$$h(t) = \int_0^t 2 \cdot e^{-\frac{\tau}{10}} d\tau = -20 \text{ ms} \cdot e^{-\frac{\tau}{10}} \Big|_0^t = 20 \text{ ms} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{10}}\right) \cdot \sigma(t) \quad (6.47)$$

Die Sprungantwort des zeitdiskreten Systems errechnet sich zu

$$h[k] = \sum_{\kappa=0}^k 2 \cdot e^{-\frac{\kappa}{10}} = 2 \cdot \sum_{\kappa=0}^k \left(e^{-\frac{1}{10}}\right)^{\kappa} = 2 \cdot \frac{1 - e^{-\frac{k+1}{10}}}{1 - e^{-\frac{1}{10}}} \quad (6.48)$$

Durch die Multiplikation der Sprungantwort mit der Abtastzeit T_A ergibt sich die Näherung

$$h(k \cdot T_A) \approx h[k] \cdot T_A = 2 \text{ ms} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{k+1}{10}}}{1 - e^{-\frac{1}{10}}} \quad (6.49)$$

Die Impuls- und Sprungantworten sind in Bild 6.4 dargestellt.

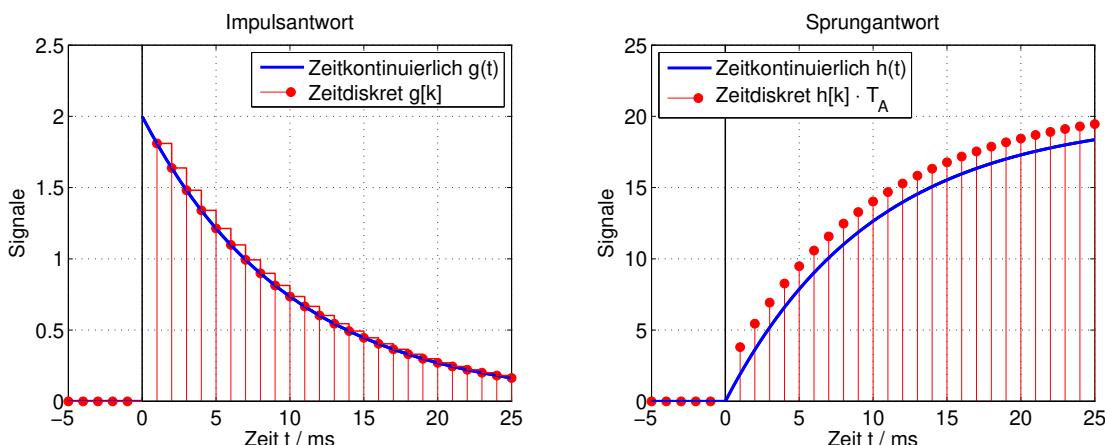


Bild 6.4: Vergleich der Sprungantworten eines zeitdiskreten und eines zeitkontinuierlichen Systems mit identischen Impulsantworten $g[k] = g(k \cdot T_A)$

Es wird deutlich, dass die Sprungantworten nur näherungsweise gleich sind. Grund dafür ist die Approximation der Fläche unter der Impulsantwort mit den in Bild 6.4 eingezeichneten Rechtecken. Ein ausführlicher Vergleich zwischen zeitkontinuierlichen und zeitdiskreten Systemen wird in Kapitel 9 vorgenommen.

6.3 Interpretation der Übertragungsfunktion

Gebrochen rationale Übertragungsfunktionen charakterisieren lineare, zeitinvariante Systeme im z-Bereich. An der Übertragungsfunktion lassen sich auch ohne Rücktransformation in den Zeitbereich wichtige Systemeigenschaften ablesen. In diesem Abschnitt werden wichtige Zusammenhänge zwischen der Übertragungsfunktion im z-Bereich und dem Systemverhalten im Zeitbereich hergeleitet.

6.3.1 Exkurs in die Darstellungsformen von Übertragungsfunktionen

Bei der Diskussion der Übertragungsfunktion werden unterschiedliche Darstellungsformen genutzt. Sie werden an dieser Stelle miteinander verglichen und ihre Bedeutung für die Systemtheorie herausgearbeitet.

Darstellungsformen zeitdiskreter LTI-Systeme

Die Übertragungsfunktion von zeitdiskreten LTI-Systemen kann auf unterschiedliche Art dargestellt werden. Die Beschreibung eines Systems mit der Differenzengleichung

$$\sum_{n=0}^N c_n \cdot y[k-n] = \sum_{l=0}^L d_l \cdot u[k-l] \quad (6.50)$$

ist direkt mit einer Übertragungsfunktion der Form

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\sum_{l=0}^L d_l \cdot z^{-l}}{\sum_{n=0}^N c_n \cdot z^{-n}} \quad (6.51)$$

verknüpft. Um ein System mit Hilfe von Speichergliedern zu realisieren, wird die Gleichung nach $Y(z)$ aufgelöst.

$$Y(z) = \sum_{l=0}^L d_l \cdot U(z) \cdot z^{-l} - \sum_{n=1}^N c_n \cdot Y(z) \cdot z^{-n} = d_0 \cdot U(z) + \sum_{n=1}^N (d_n \cdot U(z) - c_n \cdot Y(z)) \cdot z^{-n} \quad (6.52)$$

Es ergibt sich die in Bild 6.5 gezeigte kanonische Darstellungsform von Systemen mit Speichergliedern.

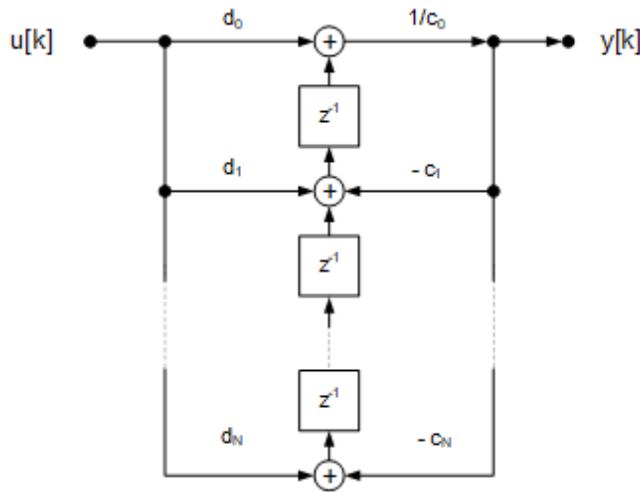


Bild 6.5: Kanonisches Blockschaltbild eines linearen, zeitinvarianten Systems im zeitkontinuierlichen Bereich

Durch Erweiterung der Übertragungsfunktion (6.51) mit z^N ergibt sich eine Übertragungsfunktion, bei der für $d_0 \neq 0$ Zähler- und Nennergrad identisch sind.

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^N \cdot \sum_{l=0}^L d_l \cdot z^{-l}}{z^N \cdot \sum_{n=0}^N c_n \cdot z^{-n}} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m \cdot z^m}{\sum_{n=0}^N a_n \cdot z^n} \quad (6.53)$$

Diese Darstellungsform wird bei der Rücktransformation einer z-Transformierten $G(z)$ durch Partialbruchzerlegung eingesetzt.

Beispiel: Darstellungsformen von Übertragungsfunktionen

Gegeben ist ein System mit der Differenzengleichung

$$y[k] + 3 \cdot y[k-1] + 2 \cdot y[k-2] = u[k] + 4 \cdot u[k-1] \quad (6.54)$$

und der daraus resultierenden Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1 + 4 \cdot z^{-1}}{1 + 3 \cdot z^{-1} + 2 \cdot z^{-2}} \quad (6.55)$$

Auflösen nach $Y(z)$ ergibt

$$Y(z) = U(z) + (4 \cdot U(z) - 3 \cdot Y(z) - 2 \cdot Y(z) \cdot z^{-1}) \cdot z^{-1} \quad (6.56)$$

Bild 6.6 zeigt die kanonische Darstellungsform des Systems mit Speichergliedern.

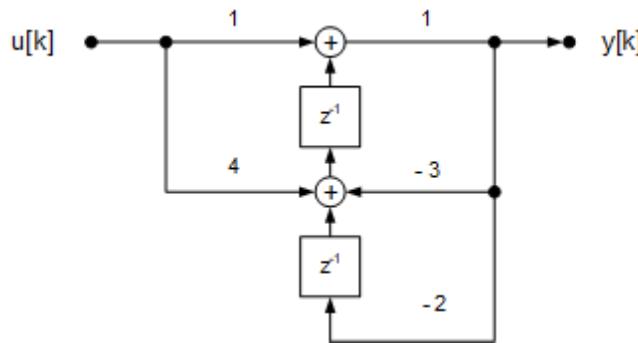


Bild 6.6: Kanonisches Blockschaltbild Systems mit der Differenzengleichung (6.54)

Die Übertragungsfunktion hat im Zähler eine Ordnung von $M = 1$ und im Nenner eine Ordnung $N = 2$. Erweitern der Übertragungsfunktion mit z^2 führt zu der Darstellung

$$G(z) = \frac{z^2 + 4 \cdot z}{z^2 + 3 \cdot z + 2} \quad (6.57)$$

Zähler- und Nennerpolynom haben denselben Grad $N = 2$. Nach Polynomdivision ergibt sich eine echt gebrochen rationale Funktion

$$G(z) = \frac{z^2 + 4 \cdot z}{z^2 + 3 \cdot z + 2} = 1 + \frac{z - 2}{z^2 + 3 \cdot z + 2} \quad (6.58)$$

Sie kann als Summe von Partialbrüchen dargestellt

$$G(z) = 1 + \frac{z - 2}{z^2 + 3 \cdot z + 2} = 1 - \frac{3}{z + 1} + \frac{4}{z + 2} = 1 - 3 \cdot \frac{z}{z + 1} \cdot z^{-1} + 4 \cdot \frac{z}{z + 2} \cdot z^{-1} \quad (6.59)$$

und in den Zeitbereich zurücktransformiert werden.

$$g[k] = \delta[k] - 3 \cdot (-1)^{k-1} \cdot \sigma[k-1] + 4 \cdot (-2)^{k-1} \cdot \sigma[k-1] \quad (6.60)$$

Darstellungsformen zeitkontinuierlicher LTI-Systeme

Auch bei zeitkontinuierlichen Systemen kann die Übertragungsfunktion auf unterschiedliche Arten dargestellt werden. In Teil A dieser Buchreihe wird in Kapitel 5 ausgehend von einer Differentialgleichung N-ter Ordnung

$$\sum_{n=0}^N a_n \cdot \frac{d^n y}{dt^n} = \sum_{m=0}^M b_m \cdot \frac{d^m u}{dt^m} \quad (6.61)$$

die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m \cdot s^m}{\sum_{n=0}^N a_n \cdot s^n} \quad (6.62)$$

bestimmt. Die Interpretation des Systems erfolgt anhand dieser Darstellungsform mit Zähler- und Nennerpolynom. Da die Differentiation im Zeitbereich nicht kausal ist, kann diese Darstellungsform jedoch nicht zur Simulation zeitkontinuierlicher LTI-Systeme verwendet werden. Deshalb wird im Abschnitt 3.5 von Teil A dieser Buchreihe die Differentialgleichung N-mal integriert. Analog zu Gleichung (6.51) ergibt sich der Ausdruck

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m \cdot s^m}{\sum_{n=0}^N a_n \cdot s^n} = \frac{\frac{1}{s^N} \cdot \sum_{m=0}^M b_m \cdot s^m}{\frac{1}{s^N} \cdot \sum_{n=0}^N a_n \cdot s^n} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m \cdot s^{m-N}}{\sum_{n=0}^N a_n \cdot s^{n-N}} = \frac{\sum_{l=0}^N d_l \cdot s^{-l}}{\sum_{n=0}^N c_n \cdot s^{-n}} \quad (6.63)$$

Ausmultiplizieren der Gleichung

$$Y(s) \cdot \sum_{n=0}^N c_n \cdot s^{-n} = U(s) \cdot \sum_{l=0}^N d_l \cdot s^{-l} \quad (6.64)$$

und Auflösen nach Y(s) führt mit $c_0 = 1$ zu dem Ausdruck

$$\begin{aligned} Y(s) &= U(s) \cdot \sum_{l=0}^N d_l \cdot s^{-l} - Y(s) \cdot \sum_{n=1}^N c_n \cdot s^{-n} \\ &= \sum_{l=0}^N d_l \cdot U(s) \cdot s^{-l} - \sum_{n=1}^N c_n \cdot Y(s) \cdot s^{-n} \end{aligned} \quad (6.65)$$

Um die Integrierer zusammenfassen zu können, wird die erste Summe zerlegt.

$$Y(s) = \sum_{l=0}^N d_l \cdot U(s) \cdot s^{-l} - \sum_{n=1}^N c_n \cdot Y(s) \cdot s^{-n} = d_0 \cdot U(s) + \sum_{l=1}^N d_l \cdot U(s) \cdot s^{-l} - \sum_{n=1}^N c_n \cdot Y(s) \cdot s^{-n} \quad (6.66)$$

Damit können die beiden übrigen Summen zusammengefasst werden.

$$Y(s) = d_0 \cdot U(s) + \sum_{n=1}^N (d_l \cdot U(s) - c_n \cdot Y(s)) \cdot s^{-n} \quad (6.67)$$

Es ergibt sich die in Bild 6.7 gezeigte kanonische Darstellungsform von Systemen mit Integrierern.

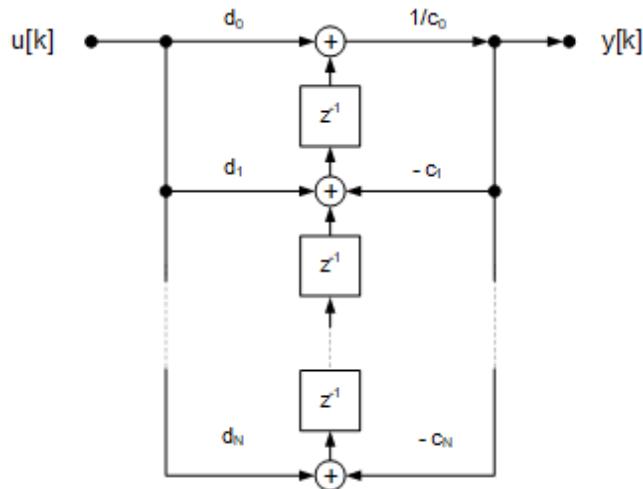


Bild 6.7: Kanonisches Blockschaltbild eines linearen, zeitinvarianten Systems im zeitkontinuierlichen Bereich

Beispiel: Darstellungsformen der Übertragungsfunktion für ein Feder-Masse-Dämpfer-Systems

Die unterschiedlichen Darstellungsformen für zeitkontinuierliche Systeme werden anhand eines Feder-Masse-Dämpfer-Systems mit der Differentialgleichung

$$F_E(t) = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + D \cdot \frac{dx}{dt} + c \cdot x(t) \quad (6.68)$$

verdeutlicht. Eingangssignal ist der Kraftverlauf $F_E(t)$, Ausgangssignal ist die Auslenkung $x(t)$. Transformation in den Laplace-Bereich ergibt bei verschwindenden Anfangsbedingungen die Gleichung

$$F_E(s) = m \cdot s^2 \cdot X(s) + D \cdot s \cdot X(s) + c \cdot X(s) \quad (6.69)$$

Damit lautet die Übertragungsfunktion

$$\frac{X(s)}{F_E(s)} = \frac{1}{m \cdot s^2 + D \cdot s + c} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s^2 + \frac{D}{m} \cdot s + \frac{c}{m}} \quad (6.70)$$

Auf Basis dieser Darstellung und den Polen des Systems

$$\alpha_{1,2} = -\frac{D}{2 \cdot m} \pm \sqrt{\frac{D^2}{4 \cdot m^2} - \frac{c}{m}} \quad (6.71)$$

können die Systemeigenschaften diskutiert werden. Andererseits erfolgt die Systemsimulation über eine Darstellungsform

$$\frac{X(s)}{F_E(s)} = \frac{\frac{1}{s^2}}{m + \frac{D}{s} + \frac{c}{s^2}} \quad (6.72)$$

Sie kann nach $X(s)$ aufgelöst werden

$$X(s) = \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{1}{s^2} \cdot F_E(s) - \frac{D}{s} \cdot X(s) - \frac{c}{s^2} \cdot X(s) \right) \quad (6.73)$$

Es ergibt sich das in Bild 6.8 dargestellte kanonische Blockschaltbild.

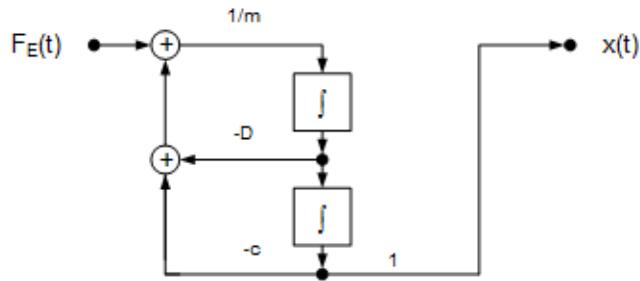


Bild 6.8: Kanonisches Blockschaltbild eines Feder-Masse-Dämpfer-Systems

Je nach Anwendungsfall wird die Darstellung mit Zähler- und Nennerpolynom oder die Darstellung über Integrierglieder mit der Laplace-Transformierten $1/s$ verwendet.

Zusammenfassung der Darstellungsformen von Übertragungsfunktionen

Übertragungsfunktionen werden damit sowohl bei zeitkontinuierlichen als auch bei zeitdiskreten Systemen in zwei Darstellungsformen behandelt. Sie sind in Tabelle 6.3 zusammen mit ihrer Anwendung dargestellt.

Tabelle 6.5: Übersicht zu Darstellungsformen von Übertragungsfunktionen und ihrer Anwendung

Anwendung	Zeitkontinuierliche Systeme	Zeitdiskrete Systeme
Mathematische Diskussion der Übertragungsfunktion	$G(s) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m \cdot s^m}{\sum_{n=0}^N a_n \cdot s^n}$	$G(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m \cdot z^m}{\sum_{n=0}^N a_n \cdot z^n}$
Darstellungsform zur Realisierung der Systeme	$G(s) = \frac{\sum_{l=0}^L d_l \cdot s^{-l}}{\sum_{n=0}^N c_n \cdot s^{-n}}$	$G(z) = \frac{\sum_{l=0}^L d_l \cdot z^{-l}}{\sum_{n=0}^N c_n \cdot z^{-n}}$

Die folgende Diskussion der Übertragungsfunktion zeitdiskreter Systeme bezieht sich damit auf eine Übertragungsfunktion der Form

$$G(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m \cdot z^m}{\sum_{n=0}^N a_n \cdot z^n} \quad (6.74)$$

6.3.2 Pol-Nullstellen-Diagramme

Die Interpretation der Übertragungsfunktion erlaubt Aussagen über Stabilität, Schwingungsneigung und Sprungfähigkeit von Systemen. Ein wesentlicher Schritt zur Interpretation des Systems ist die Analyse der unterschiedlichen Pole α_n und der unterschiedlichen Nullstellen β_m . Dazu wird die Übertragungsfunktion durch Linearfaktoren dargestellt.

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m \cdot z^m}{\sum_{n=0}^N a_n \cdot z^n} = \frac{b_M}{a_N} \cdot \frac{(z - \beta_1)^{M_1} \cdot (z - \beta_2)^{M_2} \cdot \dots}{(z - \alpha_1)^{N_1} \cdot (z - \alpha_2)^{N_2} \cdot \dots} \quad (6.75)$$

Die Pole α_n und Nullstellen β_m können zur besseren Übersicht in der komplexen Ebene dargestellt werden. Dabei werden Nullstellen mit einem Kreis und Pole mit einem Kreuz dargestellt, ihre Vielfachheit N_n und M_m wird in Klammern angegeben. Die Diagramme werden als Pol-Nullstellen-Diagramme oder als Pole-Zero-Maps bezeichnet.

Beispiel: Pol-Nullstellen-Diagramm

Ein System mit der Differenzengleichung

$$y[k] - 0.2 \cdot y[k-1] + 0.15 \cdot y[k-2] = u[k] + 1.5 \cdot u[k-1] \quad (6.76)$$

weist eine Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1 + 1.5 \cdot z^{-1}}{1 - 0.2 \cdot z^{-1} + 0.15 \cdot z^{-2}} = \frac{z^2 + 1.5 \cdot z}{z^2 - 0.2 \cdot z + 0.15} = \frac{z \cdot (z + 1.5)}{(z - 0.5) \cdot (z + 0.3)} \quad (6.77)$$

auf. Sie besitzt die Nullstellen $\beta_1 = -1.5$ und $\beta_2 = 0$, sowie die reellen Polstellen $\alpha_1 = -0.3$ und $\alpha_2 = 0.5$. Es ergibt sich das in Bild 6.9 dargestellte Pol-Nullstellen-Diagramm.

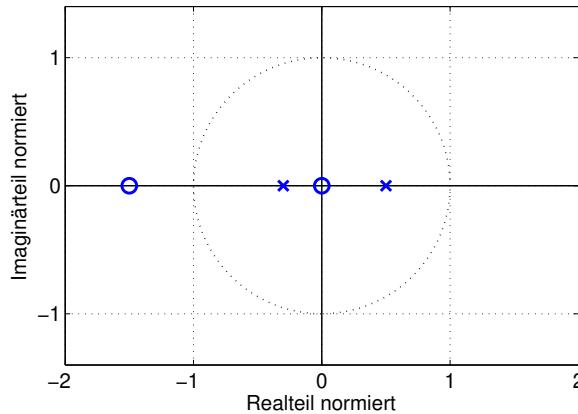


Bild 6.9: Pol-Nullstellen-Diagramm des Systems aus Gleichung (6.75)

Das Pol-Nullstellen-Diagramm bietet einen guten Überblick über die Lage der Pole und Nullstellen in der komplexen Ebene.

6.3.3 Übertragungsfunktion und Kausalität von Systemen

Zur Überprüfung der Kausalität eines Systems mit der Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m \cdot z^m}{\sum_{n=0}^N a_n \cdot z^n} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m \cdot z^{m-N}}{\sum_{n=0}^N a_n \cdot z^{n-N}} \quad (6.78)$$

werden Zähler- und Nennerpolynom durch z^N dividiert. Ausmultiplizieren und Auflösen der Summen führt zur Gleichung

$$Y(z) \cdot (a_N + \dots + a_0 \cdot z^{-N}) = U(z) \cdot (b_M \cdot z^{M-N} + \dots + b_0 \cdot z^{-N}) \quad (6.79)$$

Rücktransformation ergibt für verschwindende Anfangsbedingungen

$$a_N \cdot y[k] + \dots + a_0 \cdot y[k-N] = b_M \cdot u[k+M-N] + \dots + b_0 \cdot u[k-N] \quad (6.80)$$

Das System ist kausal, wenn $y[k]$ nur von aktuellen und vergangenen Eingangswerten abhängt. Das ist der Fall, wenn die Bedingung $M \leq N$ erfüllt ist. Der Zählergrad der Übertragungsfunktion darf maximal so groß sein wie der Nennergrad, damit das System kausal ist.

Beispiel: Nicht kausales System

Gegeben ist ein System mit der Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{3 \cdot z^2 + z + 2}{2 \cdot z + 1} \quad (6.81)$$

Der Zählergrad $M = 2$ ist größer als der Nennergrad $N = 1$. Das System ist demnach nicht kausal. Umformen der Übertragungsfunktion führt zu

$$Y(z) \cdot (2 \cdot z + 1) = U(z) \cdot (3 \cdot z^2 + z + 2) \quad (6.82)$$

beziehungsweise

$$Y(z) \cdot (2 + z^{-1}) = U(z) \cdot (3 \cdot z + 1 + 2 \cdot z^{-1}) \quad (6.83)$$

Rücktransformation führt bei verschwindenden Anfangsbedingungen zu der Differenzengleichung

$$2 \cdot y[k] + y[k - 1] = 3 \cdot u[k + 1] + u[k] + 2 \cdot u[k - 1] \quad (6.84)$$

Der aktuelle Ausgangswert

$$y[k] = \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot u[k + 1] + u[k] + 2 \cdot u[k - 1] - y[k - 1]) \quad (6.85)$$

ist von dem zukünftigen Wert $u[k+1]$ abhängig, das System ist damit nicht kausal.

6.3.4 Übertragungsfunktion mit Zählergrad M gleich Nennergrad N

Für kausale Systeme ist der Zählergrad M der Übertragungsfunktion kleiner oder gleich dem Nennergrad N . Für den Fall $M = N$ muss vor der Partialbruchzerlegung eine Polynomdivision durchgeführt werden. Dadurch entsteht im Ausdruck für die Übertragungsfunktion $G(z)$ ein konstanter Summand. Da die inverse z-Transformierte zu einer Konstanten die Impulsfolge $\delta[k]$ ist, entspricht diesem Summand im Zeitbereich der Folgenwert für $k = 0$

$$g[k = 0] = \frac{b_M}{a_N} \quad (6.86)$$

Alle weiteren Summanden der Partialbruchzerlegung werden im Zeitbereich mit Sprungfunktionen der Form $\sigma[k - 1]$ multipliziert und sind erst für $k > 0$ von null verschieden. Damit ist ein System nur dann sprunghfähig, wenn der Zählergrad M gleich dem Nennergrad N ist.

Beispiel: Sprunghfähiges System

Die Übertragungsfunktion $G(z)$ soll interpretiert werden. Da der Zählergrad genauso groß ist wie der Nennergrad, wird eine Polynomdivision durchgeführt. Um auf einen Ausdruck der Korrespondenztafel zu kommen, muss der Restbruch mit z erweitert werden.

$$G(z) = \frac{2 + z^{-1}}{1 - 0.2 \cdot z^{-1}} = \frac{2 \cdot z + 1}{z - 0.2} = 2 + \frac{1.4}{z - 0.2} = 2 + \frac{1.4 \cdot z}{z - 0.2} \cdot z^{-1} \quad (6.87)$$

Damit kann die Impulsantwort mit der Korrespondenztafel und der Verschiebungsregel bestimmt werden zu

$$g[k] = 2 \cdot \delta[k] + 1.4 \cdot 0.2^{k-1} \cdot \sigma[k - 1] \quad (6.88)$$

Sie springt an der Stelle $k = 0$ auf den Wert 2.

6.3.5 Partialbruchzerlegung mit einfachen reellen Polen

Besitzt die Übertragungsfunktion einfache reelle Pole $\alpha_n \neq 0$, kann sie über die Partialbruchzerlegung dargestellt werden als

$$G(z) = \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{z - \alpha_n} \quad (6.89)$$

Jeder einzelne Partialbruch hat die Form

$$G_n(z) = \frac{A_n}{z - \alpha_n} = A_n \cdot \frac{z}{z - \alpha_n} \cdot z^{-1} \quad (6.90)$$

Im Zeitbereich ergibt sich damit für jeden Partialbruch eine Exponentialfunktion, die um einen Folgenindex nach rechts verschoben ist:

$$g_n[k] = A_n \cdot \alpha_n^{k-1} \cdot \sigma[k-1] \quad (6.91)$$

Die Summe der einzelnen Partialbrüche entspricht deshalb im Zeitbereich der Folge

$$g[k] = \sum_{n=1}^N A_n \cdot \alpha_n^{k-1} \cdot \sigma[k-1] \quad (6.92)$$

Der Betrag der Pole α_n entscheidet über die Frage, ob die Impulsantwort konvergent oder divergent ist und damit über die Stabilität des Systems.

Die Impulsantwort beginnt bei sprungfähigen Systemen bei $k = 0$ und bei nicht sprungfähigen Systemen bei $k = 1$, und sie ist unendlich lang. Deshalb werden wird die Impulsantwort als Infinite-Impulse-Response und die Systeme als Infinite-Impulse-Response-Systeme (IIR-Systeme) bezeichnet. IIR-Systeme sind daran zu erkennen, dass zumindest ein Pol α_n der Übertragungsfunktion nicht im Koordinatenursprung liegt.

Beispiel: Übertragungsfunktion mit einfachen reellen Polen

Die untenstehende Übertragungsfunktion $G(z)$ soll interpretiert werden. Ihr Zählergrad ist kleiner als der Nennergrad, und sie hat zwei einfache reelle Pole. Die Übertragungsfunktion kann in Partialbrüche zerlegt werden.

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{3 \cdot z^{-1} - 3.5 \cdot z^{-2}}{1 - 2 \cdot z^{-1} + 0.75 \cdot z^{-2}} = \frac{3 \cdot z - 3.5}{z^2 - 2 \cdot z + 0.75} = \frac{3 \cdot z - 3.5}{(z - 0.5) \cdot (z - 1.5)} \\ &= \frac{2}{z - 0.5} + \frac{1}{z - 1.5} = \frac{2 \cdot z}{z - 0.5} \cdot z^{-1} + \frac{z}{z - 1.5} \cdot z^{-1} \end{aligned} \quad (6.93)$$

Durch Rücktransformation errechnet sich die Impulsantwort zu

$$g[k] = g_1[k] + g_2[k] = 2 \cdot 0.5^{k-1} \cdot \sigma[k-1] + 1.5^{k-1} \cdot \sigma[k-1] \quad (6.94)$$

In Bild 6.10 sind die Lage der Pole und Nullstellen sowie die Impulsantwort des Systems dargestellt.

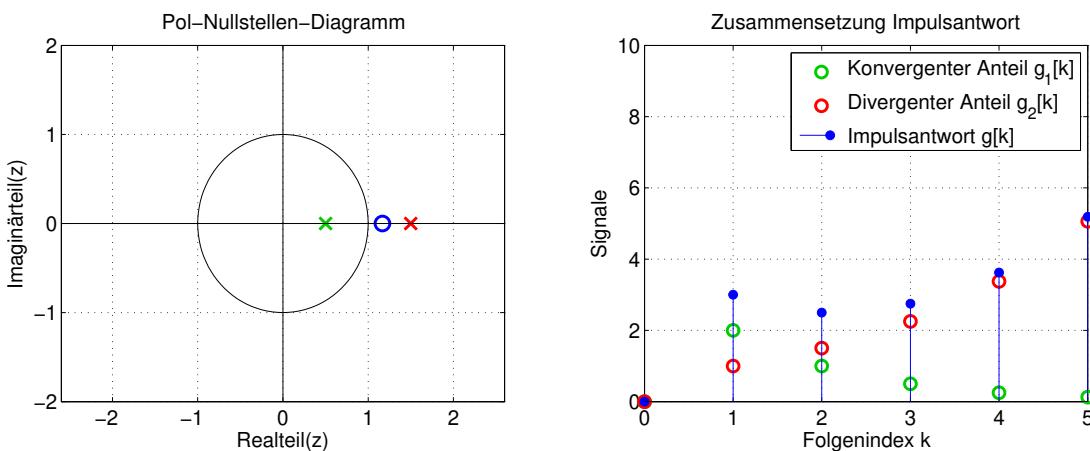


Bild 6.10: Lage der Pol- und Nullstellen sowie und Impulsantwort bei einfachen reellen Polen

Der Pol an der Stelle $\alpha_1 = 0.5$ liegt innerhalb des Einheitskreises, der korrespondierende Teil der Impulsantwort $g_1[k]$ ist konvergent. Der Pol an der Stelle $\alpha_2 = 1.5$ liegt außerhalb des Einheitskreises und führt zu einem divergenten Anteil $g_2[k]$ an der Impulsantwort. Die Summe der Impulsantworten ist damit divergent. Sobald ein Pol der Übertragungsfunktion außerhalb des Einheitskreises liegt, divergiert die Impulsantwort, und das System ist instabil. Ausführlich wird die Stabilität von Systemen in Abschnitt 6.3.11 diskutiert.

6.3.6 Übertragungsfunktionen mit mehrfachen Polen

Liegt ein N-facher Pol an der Stelle $\alpha \neq 0$ vor, ergibt sich für die Partialbruchzerlegung dieses Teils der Übertragungsfunktion der Ansatz

$$G(z) = \frac{B(z)}{(z - \alpha)^N} = \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{(z - \alpha)^n} \quad (6.95)$$

Die Rücktransformation der einzelnen Summanden kann mit Korrespondenz 9 angegeben werden zu

$$g_n[k] = A_n \cdot \binom{k-1}{n-1} \cdot \alpha^{k-n} \cdot \sigma[k-n] \quad (6.96)$$

Zum Beispiel ergibt sich für einen zweifachen Pol

$$g[k] = \sum_{n=1}^2 A_n \cdot \binom{k-1}{n-1} \cdot \alpha^{k-n} \cdot \sigma[k-n] = A_1 \cdot \alpha^{k-1} \cdot \sigma[k-1] + A_2 \cdot (k-1) \cdot \alpha^{k-2} \cdot \sigma[k-2] \quad (6.97)$$

Die Impulsantwort ist unendlich lang, es handelt sich also um ein IIR-System. Der Ausdruck

$$\binom{k-1}{n-1} = \frac{(k-1)!}{(n-1)! \cdot (k-1-n+1)!} = \frac{(k-1)!}{(n-1)! \cdot (k-n)!} \quad (6.98)$$

führt zu einem Polynom in k mit der Ordnung $n - 1$. Da die Exponentialfunktion für $\alpha \neq 1$ stärker steigt oder fällt als jede Potenz von k , ist die Stabilitätsbetrachtung von diesem Ausdruck unabhängig. Deshalb bestimmt auch in diesem Fall der Betrag des Poles α , ob die Impulsantwort gegen den Wert null konvergiert, und entscheidet damit über die Stabilität des Systems. Der Sonderfall eines Poles mit dem Betrag 1 wird in Abschnitt 6.3.11 diskutiert.

Beispiel: Übertragungsfunktion mit mehrfachen reellen Polen

Die untenstehende Übertragungsfunktion $G(z)$ soll interpretiert werden. Ihr Zählergrad ist kleiner als der Nennergrad, und sie hat einen doppelten Pol an der Stelle $\alpha = -0.5$. Es ergibt sich die Partialbruchzerlegung

$$G(z) = \frac{z+1}{(z+0.5)^2} = \frac{1}{z+0.5} + \frac{0.5}{(z+0.5)^2} = \frac{z}{z+0.5} \cdot z^{-1} - \frac{-0.5 \cdot z}{(z+0.5)^2} \cdot z^{-1} \quad (6.99)$$

Zur Rücktransformation werden die Korrespondenzen 5 und 6 sowie der Verschiebungssatz verwendet.

$$g[k] = g_1[k] + g_2[k] = (-0.5)^{k-1} \cdot \sigma[k-1] - (k-1) \cdot (-0.5)^{k-1} \cdot \sigma[k-2] \quad (6.100)$$

In Bild 6.11 sind die Lage der Nullstelle und Pole sowie die Impulsantwort des Systems dargestellt.

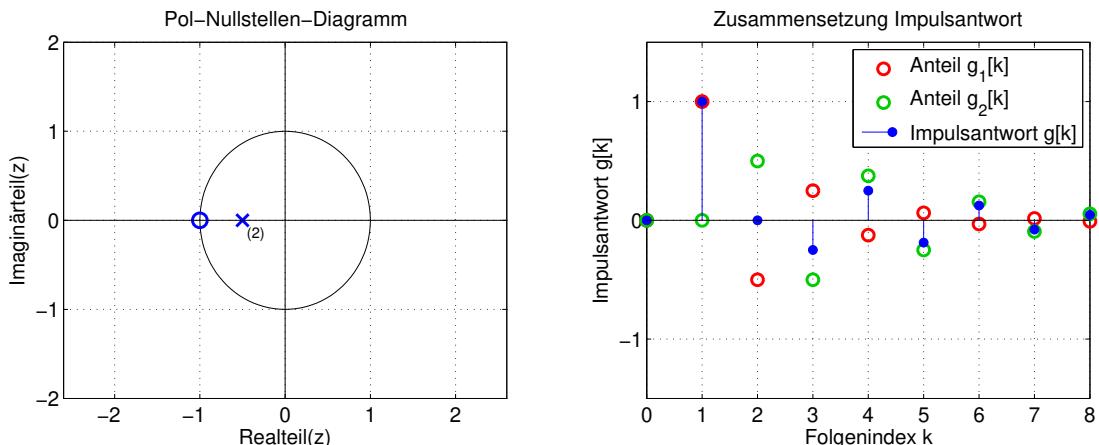


Bild 6.11: Lage der Nullstelle und Pole sowie die Impulsantwort bei mehrfachem reellenm Pol

Da der mehrfache Pol innerhalb des Einheitskreises liegt, ist das System stabil. Aufgrund des negativen Vorzeichens sind die beiden Teile der Impulsantwort alternierend, und es ergibt sich eine schwingende Impulsantwort. Besitzt die Übertragungsfunktion einen einfachen oder mehrfachen Pol mit negativem Vorzeichen,

$$G(z) = \frac{z}{z - r_0 \cdot e^{j\cdot\pi}} \quad (6.101)$$

wechselt das Vorzeichen der Impulsantwort des zeitdiskreten Systems. Die Impulsantwort schwingt mit der normierten Kreisfrequenz π .

$$g[k] = r_0^k \cdot e^{j\cdot\pi\cdot k} \cdot \sigma[k] = r_0^k \cdot (-1)^k \cdot \sigma[k] \quad (6.102)$$

Diese Systemeigenschaft besitzt im zeitkontinuierlichen Bereich kein Äquivalent.

6.3.7 Übertragungsfunktion mit konjugiert komplexem Polpaar

Im Fall konjugiert komplexer Polpaare weist die Übertragungsfunktion Partialbrüche der Form

$$G(z) = \frac{A_1}{z - r \cdot e^{j\varphi}} + \frac{A_2}{z - r \cdot e^{-j\varphi}} = \frac{A}{z - r \cdot e^{j\varphi}} + \frac{A^*}{z - r \cdot e^{-j\varphi}} = \frac{A \cdot e^{j\varphi_A}}{z - r \cdot e^{j\varphi}} + \frac{A \cdot e^{-j\varphi_A}}{z - r \cdot e^{-j\varphi}} \quad (6.103)$$

auf. Damit das System reelle Koeffizienten a_n und b_m besitzt, müssen die Koeffizienten der Partialbrüche A_1 und A_2 ebenfalls konjugiert komplex zueinander sein. Die Impulsantwort errechnet sich zu

$$\begin{aligned} g[k] &= A \cdot e^{j\varphi_A} \cdot (r \cdot e^{j\varphi})^{k-1} \cdot \sigma[k-1] + A \cdot e^{-j\varphi_A} \cdot (r \cdot e^{-j\varphi})^{k-1} \cdot \sigma[k-1] \\ &= A \cdot r^{k-1} (e^{j\varphi_A} \cdot e^{j\varphi \cdot (k-1)} + e^{-j\varphi_A} \cdot e^{-j\varphi \cdot (k-1)}) \cdot \sigma[k-1] \\ &= 2 \cdot A \cdot r^{k-1} \cdot \cos(\varphi \cdot (k-1) + \varphi_A) \cdot \sigma[k-1] \end{aligned} \quad (6.104)$$

Die Folge ist eine gedämpfte harmonische Folge. Die Phasenlage φ des Polpaars definiert, mit welcher Frequenz die Folge schwingt. Der Betrag der Pole r ist für das Abfallen beziehungsweise Ansteigen der Amplitude verantwortlich. Die Koeffizienten A und A^* bestimmen über die Amplitude und Phasenlage der Impulsantwort. Die Impulsantwort ist wieder unendlich lang, es handelt sich also erwartungsgemäß um ein IIR-System.

Beispiel: Übertragungsfunktion mit konjugiert komplexem Polpaar

Die z-Transformierte $G(z)$ soll in den Zeitbereich zurücktransformiert werden. Ihr Zählergrad ist kleiner als der Nennergrad, und sie hat ein konjugiert komplexes Polpaar an der Stelle $\alpha = +0.5 \pm 0.5j$. Es ergibt sich die Partialbruchzerlegung

$$G(z) = \frac{2 \cdot z}{z^2 - z + 0.5} = \frac{1 - j}{z - 0.5 - 0.5j} + \frac{1 + j}{z - 0.5 + 0.5j} = \frac{\sqrt{2} \cdot e^{-j\pi/4}}{z - \frac{e^{j\pi/4}}{\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{2} \cdot e^{j\pi/4}}{z - \frac{e^{-j\pi/4}}{\sqrt{2}}} \quad (6.105)$$

Die Rücktransformation führt nach den Ausführungen oben zu der Impulsantwort

$$g[k] = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{k-1} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} \cdot (k-1) - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \sigma[k-1] \quad (6.106)$$

In Bild 6.12 sind die Lage der Pole und Nullstelle sowie die Impulsantwort des Systems dargestellt.

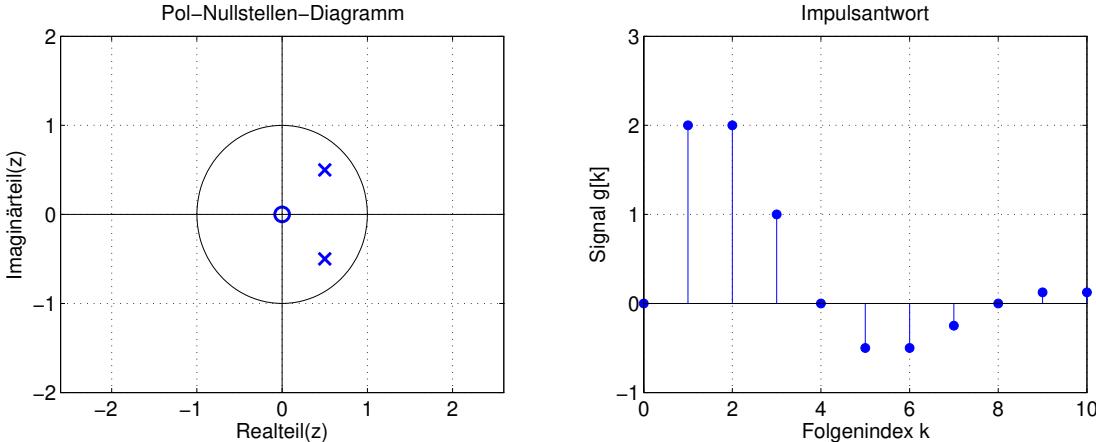


Bild 6.12: Lage der Nullstelle und Pole sowie die Impulsantwort bei konjugiert komplexem Polpaar

Die Impulsantwort eines zeitdiskreten Systems mit konjugiert komplexem Polpaar schwingt. Liegen die Pole innerhalb des Einheitskreises nimmt die Amplitude der Schwingung ab.

6.3.8 Übertragungsfunktion mit N-fachem Pol im Koordinatenursprung

Wenn die Übertragungsfunktion $G(z)$ nur Pole an der Stelle $\alpha = 0$ besitzt, sind alle Koeffizienten $a_n = 0$ bis auf den Koeffizienten a_N . Damit gilt

$$G(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m \cdot z^m}{a_N \cdot z^N} = \sum_{m=0}^M \frac{b_m}{a_N} \cdot z^{m-N} = \frac{b_0}{a_N} \cdot z^{-N} + \frac{b_1}{a_N} \cdot z^{1-N} + \dots + \frac{b_M}{a_N} \cdot z^{M-N} \quad (6.107)$$

Bei kausalen Systemen ist der Zählergrad M kleiner oder gleich dem Nennergrad N . Damit sind alle Exponenten der komplexen Variablen z kleiner oder gleich null, und es kann der Verschiebungssatz der z -Transformation angewendet werden. Die Impulsantwort ergibt sich damit zu

$$g[k] = \frac{b_0}{a_N} \cdot \delta[k - N] + \frac{b_1}{a_N} \cdot \delta[k - N + 1] + \dots + \frac{b_M}{a_N} \cdot \delta[k - N + M] \quad (6.108)$$

Die Impulsantwort besteht aus $N + 1$ Impulsen. Die Koeffizienten der Impulse entsprechen den Koeffizienten der Übertragungsfunktion $G(z)$. Im Gegensatz zu den bisher behandelten Impulsantworten ist sie nur an $N + 1$ Stellen von null verschieden. Deshalb wird die Impulsantwort als Finite-Impulse-Response und die Systeme als Finite-Impulse-Response-Systeme (FIR-Systeme) bezeichnet.

Beispiel: N-facher Pol im Koordinatenursprung

Die Übertragungsfunktion $G(z)$ soll in den Zeitbereich zurücktransformiert werden. Sie hat einen 4-fachen Pol an der Stelle $\alpha = 0$. Das System besitzt eine endliche Impulsantwort.

$$G(z) = \frac{z^4 + 2 \cdot z^3 + 3 \cdot z^2 + 2 \cdot z + 1}{9 \cdot z^4} = \frac{1}{9} \cdot (1 + 2 \cdot z^{-1} + 3 \cdot z^{-2} + 2 \cdot z^{-3} + 1 \cdot z^{-4}) \quad (6.109)$$

Mit dem Verschiebungssatz der z -Transformation ergibt sich im Zeitbereich die Folge

$$g[k] = \frac{1}{9} \cdot \delta[k] + \frac{2}{9} \cdot \delta[k - 1] + \frac{3}{9} \cdot \delta[k - 2] + \frac{2}{9} \cdot \delta[k - 3] + \frac{1}{9} \cdot \delta[k - 4] \quad (6.110)$$

Die Werte der Impulsantwort sind identisch zu den Koeffizienten des Filters. In Bild 6.13 sind die Lage der Pole und Nullstellen sowie die Impulsantwort des Systems dargestellt.

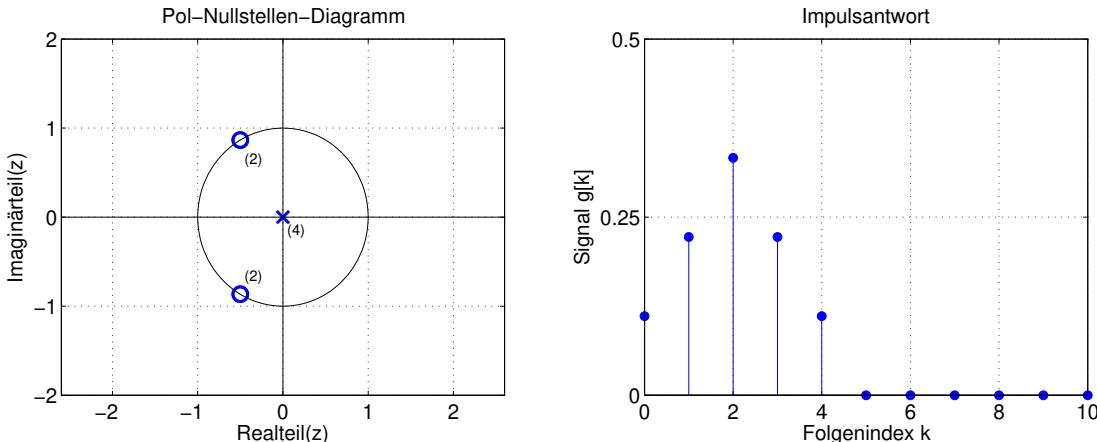


Bild 6.13: Pollage und Impulsantwort bei Polen im Koordinatenursprung

Die Impulsantwort hat $N + 1 = 5$ von null verschiedene Werte. Für $k \geq 5$ bleibt die Impulsantwort null.

6.3.9 Übertragungsfunktion invertierbarer Systeme

Bei der Übertragung von Signalen ist es unter Umständen erforderlich, Verzerrungen einer Übertragungsstrecke zu kompensieren. Dazu wird ein System verwendet, das ein inverses Systemverhalten aufweist. Angenommen ein Signal wird über ein System $G_1(z)$ übertragen, das die Form

$$G_1(z) = \frac{z - \beta}{z - \alpha} \quad (6.111)$$

aufweist. Zur Kompensation wird ein System verwendet, das im Idealfall folgende Bedingung erfüllt

$$G_1(z) \cdot G_2(z) = 1 \quad (6.112)$$

In diesem Fall würden die Verzerrungen, die durch die Signalübertragung im System $G_1(z)$ entstanden sind, ideal kompensiert. Auflösen der Bedingung führt zu der Übertragungsfunktion

$$G_2(z) = \frac{1}{G_1(z)} = \frac{1}{\frac{z - \beta}{z - \alpha}} = \frac{z - \alpha}{z - \beta} \quad (6.113)$$

Die Nullstellen der Übertragungsfunktion $G_1(z)$ werden zu Polen der inversen Übertragungsfunktion $G_2(z)$. Das inverse System $G_2(z)$ muss stabil sein, damit es realisierbar ist. Damit darf ein System, dessen Verhalten kompensiert werden soll, nur Nullstellen innerhalb des Einheitskreises besitzen. Bild 6.14 zeigt ein Beispiel für die Pol- und Nullstellensetzung invertierbarer und nicht invertierbarer Systeme.

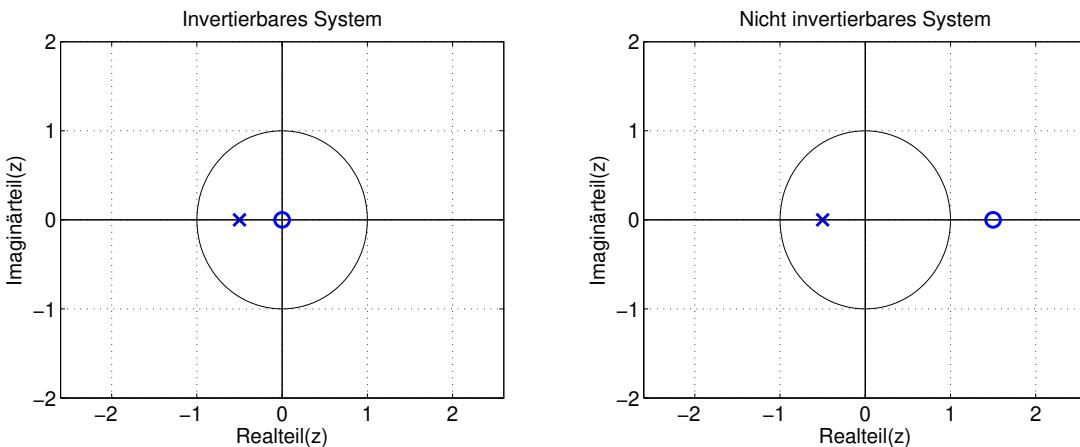


Bild 6.14: Pollage für ein invertierbares und ein nicht invertierbares System

Beide Systeme sind stabil, da der Pol bei beiden Systemen im Einheitskreis liegt. Das linke System ist invertierbar, da die Nullstelle innerhalb des Einheitskreises liegt. Das rechte System ist wegen der Lage der Nullstelle außerhalb des Einheitskreises nicht invertierbar.

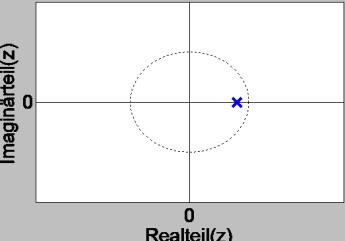
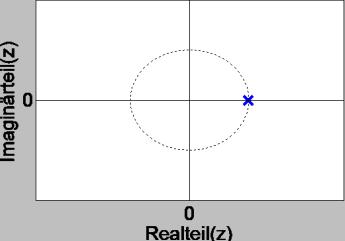
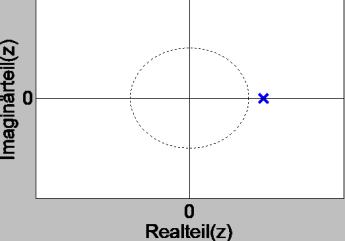
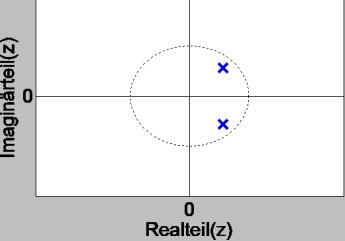
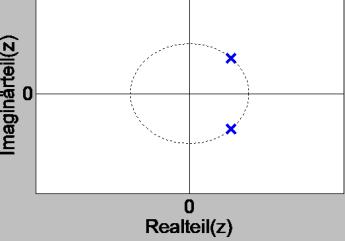
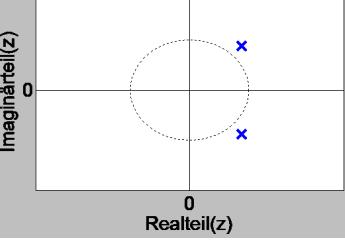
6.3.10 Zusammenfassung Interpretation der Übertragungsfunktion

Bei der Interpretation von Übertragungsfunktionen werden unterschiedliche Systemeigenschaften aufgezeigt. Tabelle 6.4 fasst die an der Übertragungsfunktion ablesbaren Systemeigenschaften zusammen. Der Zusammenhang zwischen Pollage und Impulsantwort ist für einfache reelle Pole und für konjugiert komplexe Polpaare in Tabelle 6.5 dargestellt.

Tabelle 6.6: Tabellarische Übersicht der an der Übertragungsfunktion ablesbaren Systemeigenschaften

Eigenschaft	Übertragungsfunktion
Kausalität	Zählergrad M \leq Nennergrad N
Sprungfähigkeit	Zählergrad M = Nennergrad N
Schwingungsneigung	negative reelle Pole oder konjugiert komplexe Polpaare
System mit endlicher Impulsantwort Finite-Impulse-Response (FIR-System)	Alle Pole im Koordinatenursprung
System mit unendlicher Impulsantwort Infinite-Impulse-Response (IIR-System)	Mindestens ein Pol nicht im Koordinatenursprung
Stabile invertierbare Systeme	Pole und Nullstellen innerhalb des Einheitskreises, Zählergrad M = Nennergrad N
Verstärkung	Übertragungsfunktion $G(z = 1)$

Tabelle 6.7: Tabellarische Übersicht über korrespondierende Elemente der s- und z-Ebene

Pollage $X(z)$	Signalfolge $x[k]$
	
	
	
	
	
	

6.3.11 Stabilität und Pole der Übertragungsfunktion

Bei der Einführung des Begriffes der Stabilität in Abschnitt 4.4.4 wird gezeigt, dass asymptotisch stabile Systeme eine abklingende Impulsantwort aufweisen müssen. Die Übertragungsfunktion $G(z)$ ist die z-Transformierte der Impulsantwort $g[k]$. Deshalb kann die Stabilitätsbetrachtung auch im z-Bereich erfolgen. Liegen ausschließlich Pole mit einem Betrag $|\alpha_n| < 1$ vor, konvergiert die Impulsantwort $g[k]$ für $k \rightarrow \infty$ gegen null. Das System ist asymptotisch stabil. Liegt mindestens ein Pol mit einem Betrag $|\alpha_n| > 1$ vor, divergiert die Impulsantwort. Das System ist instabil. Bei einem Pol mit einem Betrag $|\alpha| = 1$ entscheidet die Mehrfachheit über die Konvergenz. Zu der Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{B(z)}{(z - e^{j\cdot\varphi})^N} = \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{(z - e^{j\cdot\varphi})^n} \quad (6.114)$$

gehört die Impulsantwort

$$g[k] = \sum_{n=1}^N A_n \cdot \binom{k-1}{n-1} \cdot e^{j\cdot\varphi\cdot(k-n)} \cdot \sigma[k-n] \quad (6.115)$$

Der Binomialkoeffizient zum Beispiel für $n = 2$ zu einem Faktor

$$\binom{k-1}{2-1} = \frac{(k-1)!}{(2-1)! \cdot (k-2)!} = (k-1) \quad (6.116)$$

Der Faktor steigt linear mit dem Folgenindex k . Er wird mit einer Exponentialfunktion multipliziert, deren Betrag konstant ist. Damit divergiert die Impulsantwort für eine Vielfachheit $N \geq 2$.

Beispiel: Stabilitätsnachweis über Pollage

Ein System mit der Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{1}{z^3 + 0.1 \cdot z^2 - 0.25 \cdot z - 0.025} \quad (6.117)$$

soll auf Stabilität geprüft werden. Die Übertragungsfunktion des Systems kann in Linearfaktorschreibweise dargestellt werden.

$$G(z) = \frac{1}{(z + 0.5) \cdot (z + 0.1) \cdot (z - 0.5)} \quad (6.118)$$

Alle Pole weisen einen Betrag $r < 1$ auf, das System ist damit stabil.

Beispiel: Stabilitätsprüfung eines Systems mit doppeltem Pol

Ein System mit der Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{1}{(z - 0.2) \cdot (z + 1)^2} \quad (6.119)$$

weist einen Pol an der Stelle $\alpha_1 = 0.2$ und einen doppelten Pol an der Stelle $\alpha_2 = -1$ auf. Es ergeben sich die Partialbruchdarstellung

$$G(z) = \frac{1}{(z - 0.2) \cdot (z + 1)^2} = \frac{0.6944}{z - 0.2} - \frac{0.6944}{z + 1} + \frac{1.25}{(z + 1)^2} \quad (6.120)$$

und die Impulsantwort

$$g[k] = 0.6944 \cdot 0.2^{k-1} \cdot \sigma[k-1] - 0.6944 \cdot (-1)^{k-1} \cdot \sigma[k-1] + 1.25 \cdot (k-1) \cdot (-1)^{k-1} \cdot \sigma[k-1] \quad (6.121)$$

Wegen des letzten Summanden divergiert die Impulsantwort. Er ergibt sich aus dem doppelten Pol α_2 mit einem Betrag von $|\alpha_2| = 1$. Das System ist instabil.

Die Analyse der Pollage führt zu einer Stabilitätsbewertung, die in Tabelle 6.6 zusammengefasst ist. Unter Berücksichtigung der in Bild 5.2 gezeigten Abbildung vom Laplace-Bereich in den z-Bereich entsprechen die Stabilitätskriterien denen zeitkontinuierlicher Systeme im Laplace-Bereich.

Tabelle 6.8: Zusammenhang zwischen Polen der Übertragungsfunktion und der Stabilität von zeitdiskreten LTI-Systemen, die sich über lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten beschreiben lassen

Eigenschaft	Pole α_n der Übertragungsfunktion
Asymptotisch stabiles System	Alle Pole α_n besitzen einen Betrag $ \alpha_n < 1$
Grenzstabiles System	Alle Lösungen α_n besitzen einen Betrag $ \alpha_n < 1$, zusätzlich liegt mindestens eine einfache Lösung mit Betrag $ \alpha_n = 1$ vor
Instabiles System	Es existiert mindestens eine Lösung α_n mit einem Betrag $ \alpha_n > 1$ oder eine mehrfache Lösung mit Betrag $ \alpha_n = 1$

Diese Diskussion der Pollage entspricht der Diskussion von Lösungen der charakteristischen Gleichung in Abschnitt 4.3.3. Bei der Pollage werden die Pole der Übertragungsfunktion bestimmt:

$$\alpha^N + a_1 \cdot \alpha^{N-1} + a_2 \cdot \alpha^{N-2} + \dots + a_N = 0 \quad (6.122)$$

In Abschnitt 4.3.3 werden die Lösungen der charakteristischen Gleichung analysiert.

$$\lambda^N + a_1 \cdot \lambda^{N-1} + a_2 \cdot \lambda^{N-2} + \dots + a_N = 0 \quad (6.123)$$

Unter der Annahme, dass in der Übertragungsfunktion keine gemeinsamen Pole und Nullstellen auftreten, sind beide Gleichungen identisch, sodass die Diskussion der Lösungen zu identischen Aussagen führen muss. Damit haben aber auch beide Gleichungen das Problem, dass sie nur für Systeme mit einer Ordnung $N = 3$ analytisch gelöst werden können. Für Ordnungen $N > 3$ kann eine Lösung nur numerisch bestimmt werden.

6.4 Analyse und Simulation zeitdiskreter Systeme mit MATLAB

6.4.1 Interpretation der Übertragungsfunktion mit MATLAB

Neben den MATLAB-Funktionen, die bei der z-Transformation behandelt werden, bietet MATLAB die Möglichkeit, eine Übertragungsfunktion im z-Bereich zu definieren und zu interpretieren. Tabelle 6.7 stellt einige MATLAB-Befehle zur Interpretation von Übertragungsfunktionen zusammen. Dabei wird bei der Übertragungsfunktion von folgender Darstellungsform ausgegangen:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^N b_m \cdot z^m}{\sum_{n=0}^N a_n \cdot z^n} \quad (6.124)$$

Tabelle 6.9: Tabellarische Übersicht über Befehle zur Interpretation von Übertragungsfunktionen in MATLAB

Befehl	Beschreibung
<code>G = tf([bM ... b0],[aN ... a0],TA);</code>	Definition der Übertragungsfunktion über Zähler- und Nennerpolynom sowie der Abtastzeit TA
<code>zero(G)</code>	Berechnung der Nullstellen der Übertragungsfunktion
<code>pole(G)</code>	Berechnung der Pole der Übertragungsfunktion
<code>pzmap(G)</code>	Darstellung der Pole und Nullstellen in der z-Ebene
<code>impulse(G)</code>	Berechnung / Darstellung der Impulsantwort
<code>step(G)</code>	Berechnung / Darstellung der Sprungantwort

Einige dieser Funktionen haben Erweiterungen, die sich aus der MATLAB-Hilfe ergeben und die hier nicht detailliert dargestellt werden sollen.

Beispiel: Interpretation der Übertragungsfunktion mit MATLAB

Zur Interpretation der Übertragungsfunktion mit MATLAB wird das Beispiel einer Übertragungsfunktion mit konjugiert komplexen Polstellen aufgegriffen, um die MATLAB-Ergebnisse mit den analytisch berechneten Ergebnissen vergleichen zu können. Die Übertragungsfunktion lautet:

$$G(z) = \frac{2 \cdot z}{z^2 - z + 0.5} \quad (6.125)$$

Die Definition erfolgt über die Koeffizienten von Zähler- und Nennerpolynom, die jeweils als Vektor dargestellt werden. Dabei ist zu beachten, dass MATLAB die Koeffizienten der höchsten Potenz von z als ersten Wert erwartet. Um MATLAB anzuzeigen, dass es sich um ein zeitdiskretes System handelt, wird die Abtastzeit als dritter Parameter angegeben. Hier wird die Abtastzeit $T_A = 1$ gewählt.

```

1 % Definition der Übertragungsfunktion
2 b = [2 0];
3 a = [1 -1 0.5];
4 ta = 1;
5 g = tf(b,a,ta);

```

Ist die Übertragungsfunktion definiert, können Pole und Nullstellen berechnet werden. Weiterhin ist die Darstellung der Pole und Nullstellen in der z-Ebene möglich.

```

1 % Berechnung der Pole und Nullstellen
2 pole(g);
3 zero(g);
4
5 % Darstellung der Pole und Nullstellen in der komplexen z-Ebene
6 pzmap(g);

```

Mit diesen Befehlen gibt MATLAB die Pole und Nullstellen an und stellt sie wie in Bild 6.15 als Grafik dar.

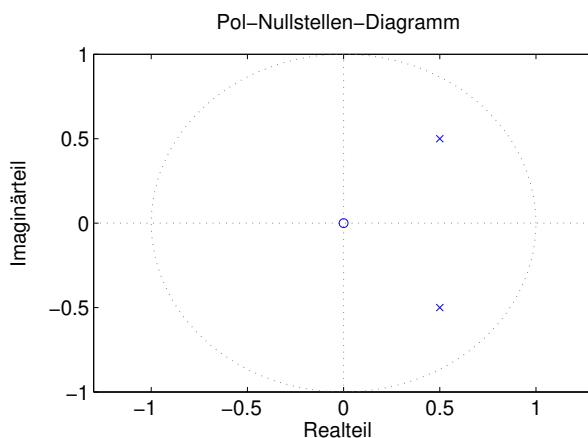


Bild 6.15: Pole und Nullstellen in der komplexen z-Ebene (Befehl pzmap)

Dabei wird neben den Polen und Nullstellen gleich der Einheitskreis mit eingezeichnet, um die Stabilitätseigenschaften direkt ablesen zu können.

Die Impuls- und Sprungantworten werden mit dem Befehlen impulse(g,10) und step(g,10) dargestellt, wobei der Parameter 10 den größten Folgenindex festlegt.

```

1 % Darstellung der Impulsantwort
2 subplot(1,2,1);
3 impulse(g,10);
4
5 % Darstellung der Sprungantwort
6 subplot(1,2,2);
7 step(g,10);

```

MATLAB stellt die Ergebnisse als Stufenfunktion dar. Für das Beispiel ergeben sich die in Bild 6.16 dargestellten Signalverläufe.

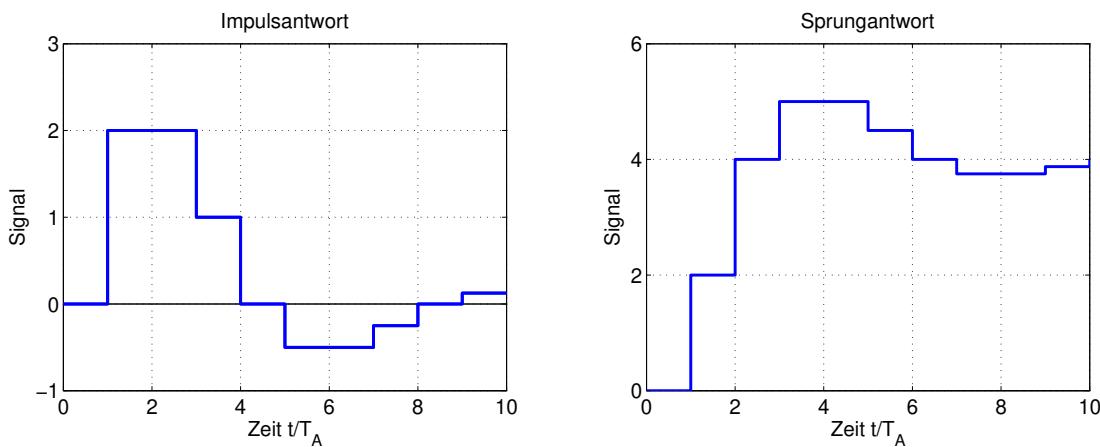


Bild 6.16: Impuls- und Sprungantwort berechnet mit MATLAB

Alternativ kann die Grafik unterdrückt und die Ergebnisse als Vektor abgespeichert werden.

```

1 % Ergebnis der Sprungantwort
2 [y1 , t ] = impulse(g,10) ;
3 [y2 , t ] = step(g,10) ;
```

Weitere Informationen zu dem Verfahren können der MATLAB-Hilfe entnommen werden.

6.4.2 Simulation eines zeitdiskreten Systems mit SIMULINK

Neben der Berechnung von Systemantworten in MATLAB können Systeme als Blockschaltbilder in SIMULINK dargestellt werden. Dazu stellt SIMULINK verschiedene elementare Übertragungsglieder zur Verfügung. Mit ihnen lassen sich Strukturen sehr detailliert darstellen oder als Übertragungsfunktionen implementieren.

Signalquellen

Mit Hilfe von Signalquellen werden Eingangssignale generiert. Neben den typischen Signalformen wie Sprung-, Rampen, Rechteck und Sinusfunktion erlaubt SIMULINK die Erzeugung von Signalquellen über selbst definierte Variablen oder sogenannte mat-Files. Damit ist es zum Beispiel auch möglich, gemessene Daten als Signalquelle zu verwenden, indem die Messdaten als mat-File eingebunden werden. Tabelle 6.8 stellt eine Auswahl von Signalquellen in SIMULINK dar.

Tabelle 6.10: Auswahl von Signalquellen in Simulink

Signalquelle	Simulink Symbol	Signalquelle	Simulink Symbol
Konstante		Sinusfunktion	
Sprungfunktion		Zugriff auf Variable im Workspace	
Rampenfunktion		Definition in mat-File	
Rechteckfunktion		Zeit	

Signalpfade und Verknüpfung von Signalpfaden

SIMULINK definiert Systeme über das Verbinden von Funktionsblöcken mit Signalpfaden. Zum Beispiel könnte ein System, das die Gleichung

$$y[k] = 3 \cdot x[k] + 5 \quad (6.126)$$

erfüllt, in SIMULINK über das Modell in Bild 6.17 dargestellt werden.

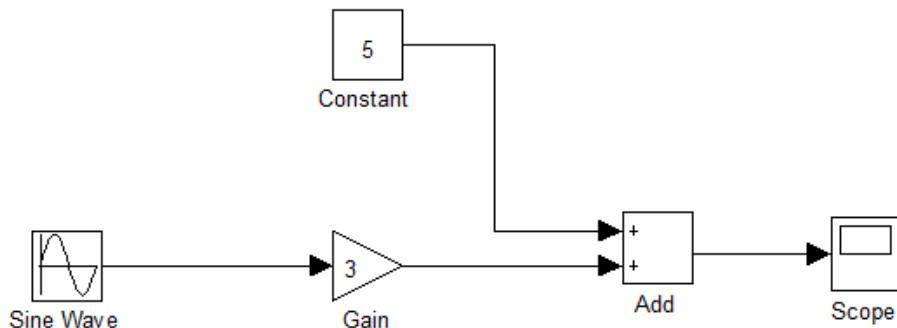
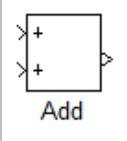
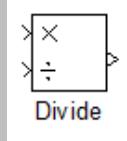
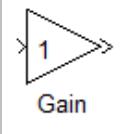
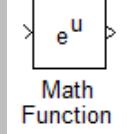


Bild 6.17: Einfaches SIMULINK Modell

Die Signalpfade laufen durch Blöcke, die eine definierte Funktion ausführen. Diese Funktion kann neben Additionen, Subtraktion, Multiplikation und Division auch eine höhere mathematische Funktion sein, die als Math-Function-Block definiert wird. Mit den Blöcken Multiplexer und Demultiplexer können Signale zu einem mehrdimensionalen Signalpfad zusammengefasst beziehungsweise von einem Signalpfad in einzelne Signale zerlegt werden. Tabelle 6.9 stellt eine Auswahl von Verknüpfungen in SIMULINK dar.

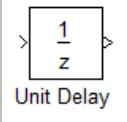
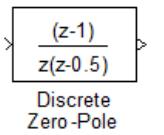
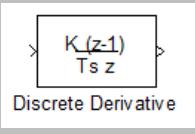
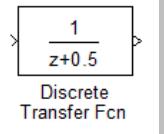
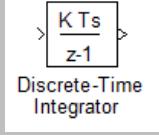
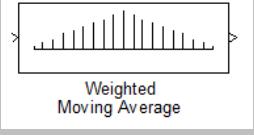
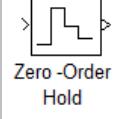
Tabelle 6.11: Auswahl von Funktionen zur Signalverknüpfung

Operation	Simulink Symbol	Operation	Simulink Symbol
Addition von Signalen		Multiplikation / Division von Signalen	
Multiplikation mit einem Faktor, Verstärkung		Mathematische Funktionen	
Multiplexer		Demultiplexer	

Elementare Übertragungsglieder

Neben fest definierten Übertragungsgliedern wie Verzögerung, Ableitung oder Integral bietet SIMULINK die Möglichkeit, Übertragungsglieder über ihre z-Transformierte selbst zu definieren. Die Übertragungsglieder können als gebrochen rationale Funktion oder in Linearfaktor-Schreibweise definiert werden. Tabelle 6.10 zeigt eine Auswahl von Funktionsblöcken für zeitdiskrete Übertragungsfunktionen in SIMULINK.

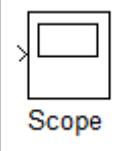
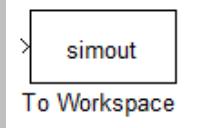
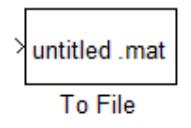
Tabelle 6.12: Auswahl von Funktionen zur Signalverknüpfung

Operation	Simulink Symbol	Operation	Simulink Symbol
Verzögerung		Pol-Nullstellen Übertragungsfunktion	
Ableitung		Gebrochen rationale Übertragungsfunktion	
Integral		Gewichteter Mittelwert	
Zero-Order-Hold		First-Order-Hold	

Signal senken

Die in SIMULINK berechneten Signalpfade enden in sogenannten Signalsenken. Signalsenken stellen das Signal grafisch dar oder speichern das Signal in Variablen oder mat-Files. Tabelle 6.11 stellt eine Auswahl von Signalquellen in SIMULINK dar.

Tabelle 6.13: Auswahl von Funktionen zur Signalverknüpfung

Operation	Simulink Symbol	Operation	Simulink Symbol
Numerische Anzeige	 Display	Grafische Darstellung	 Scope
Speicherung in Ausgangsvariable	 simout To Workspace	Speicherung in mat-File	 untitled .mat To File

Simulationsvarianten zeitdiskreter Systeme

Zeitdiskrete Systeme können auf zweierlei Arten simuliert werden:

- Fixed-Step-Simulation
- Variable-Step-Simulation

Bei der Fixed-Step-Simulation des Systems wird bei den Solver Optionen ein Fixed-Step-Solver-Typ mit dem Solver discrete (no continuous states) verwendet. Die Simulation wird damit in zeitlich konstanten Schritten durchgeführt, die der Abtastzeit entsprechen. Dieser Simulationstyp eignet sich für rein digitale Simulationen.

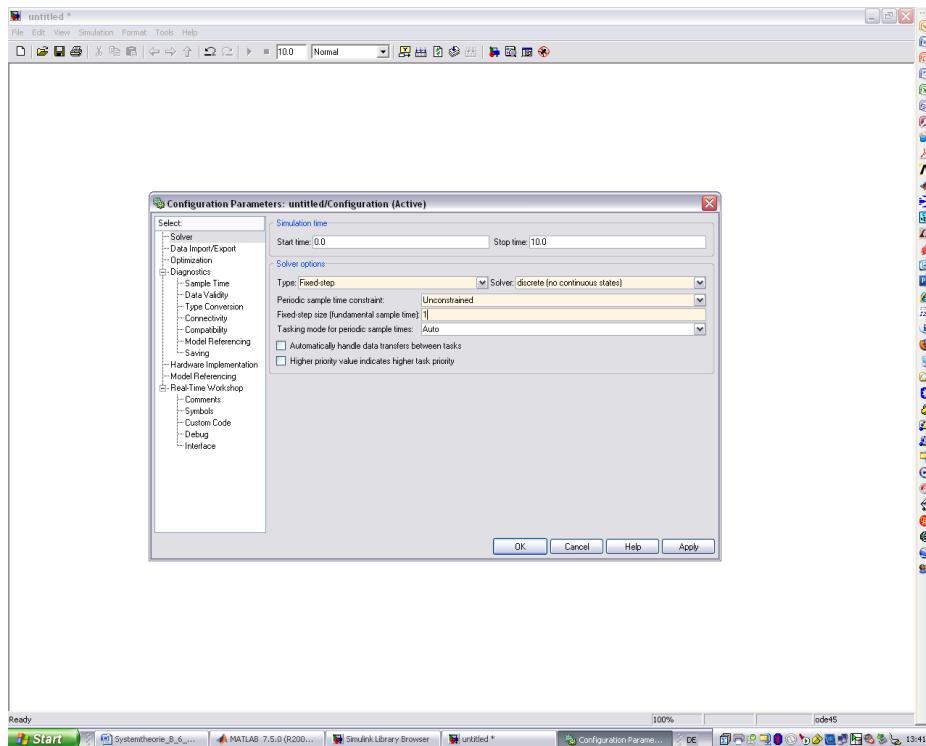


Bild 6.18: Konfiguration in SIMULINK für eine Fixed-Step-Simulation

Alternativ kann zu der Fixed-Step-Simulation eine Simulation mit variabler Schrittweite durchgeführt werden. Die zeitliche Diskretisierung des Signals erfolgt in diesem Fall mit einem Halteglied (Zero-Order-Hold), das das Eingangssignal für eine Periodendauer festhält. Der Vorteil dieser Simulationsart ist, dass die Werte, die sich aus der digitalen Signalerarbeitung ergeben, analog weiterverarbeitet werden können. Zum Beispiel kann eine analoge Tiefpass-Filterung durchgeführt werden.

Beispiel: Vergleich einer zeitkontinuierlichen und zeitdiskreten Simulation

Zur Verdeutlichung der beiden Simulationsarten wird das System mit der Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{2z}{z^2 - z + 0.5} \quad (6.127)$$

einmal mit konstanter Schrittweite (Bild 6.19) und einmal zeitkontinuierlich mit Halteglied (Bild 6.20) simuliert. Das digitale Signal wird anschließend mit einem analogen Tiefpass gefiltert.

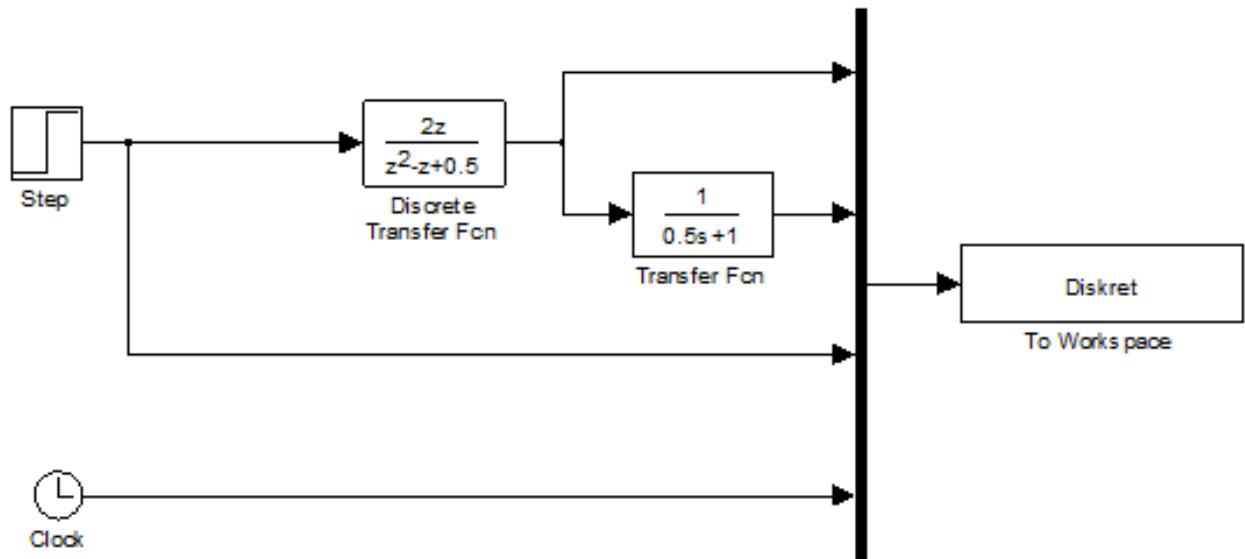


Bild 6.19: SIMULINK-Modell für eine Fixed-Step-Simulation

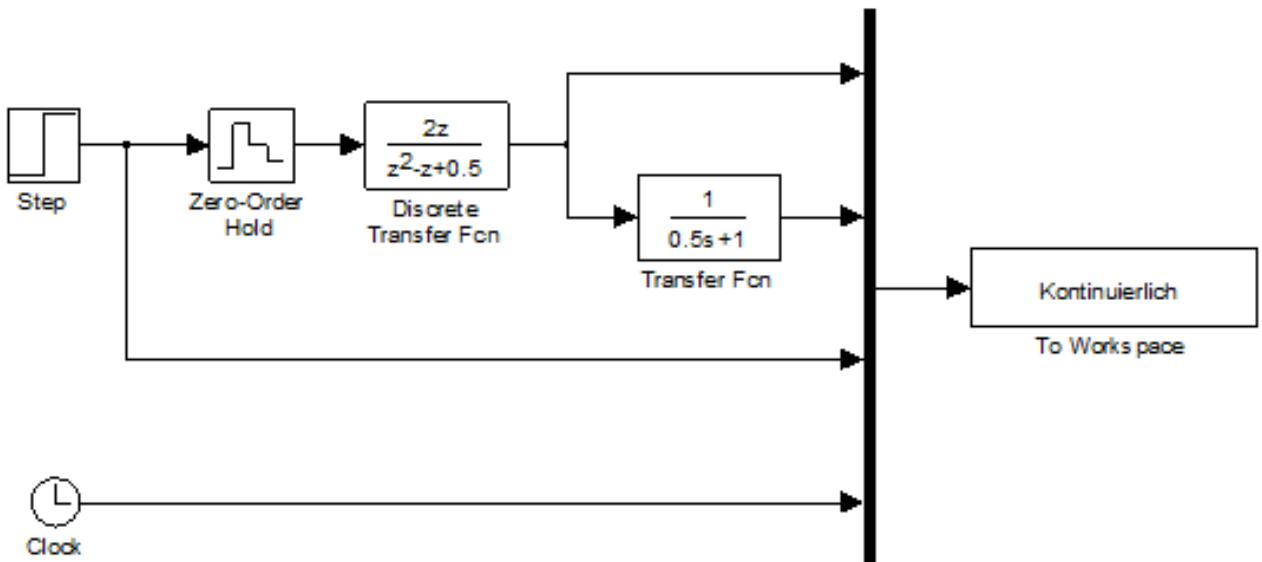


Bild 6.20: SIMULINK-Modell für eine Variable-Step-Simulation

Bei der zeitdiskreten Simulation werden nur Werte zu den Abtastzeiten $k \cdot T_A$ ausgegeben. Damit kann aber auch das Einschwingverhalten des zeitkontinuierlichen Tiefpasses nur an den Zeitpunkten $k \cdot T_A$ berechnet werden. Bild 6.21 vergleicht die Simulationsergebnisse für zeitdiskrete und zeitkontinuierliche Simulation.

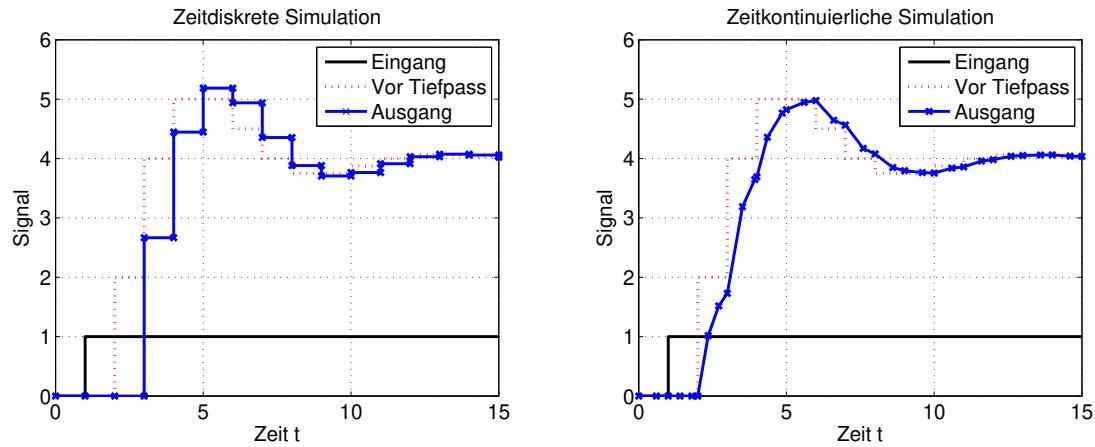


Bild 6.21: Simulationsergebnisse für zeitdiskrete und zeitkontinuierliche Simulation

Bei Aufgabenstellungen mit Signalrekonstruktion oder anderen zeitkontinuierlichen Vorgängen ist es demnach erforderlich, eine zeitkontinuierliche Simulation durchzuführen und die zeitdiskrete Signalverarbeitung über Zero-Order-Hold-Blöcke zu modellieren.

6.5 Literatur

6.5.1 Literaturstellen mit besonders anschaulicher Darstellung

- [Lyon04] Lyons, Richard G.: Understanding Digital Signal Processing, Prentice Hall, New Jersey, 2004
- [Schei05] Scheithauer, Rainer: Signale und Systeme, 2. Auflage, B.G. Teubner Stuttgart, 2005
- [Stea99] Stearns, Samuel: Digitale Verarbeitung analoger Signale, 7. Auflage, Oldenbourg Verlag München, 1999

6.5.2 Literaturstellen mit praktischen Anwendungen

- [Wern08] Werner, Martin: Signale und Systeme, Vieweg Studium Technik, Wiesbaden, 2008
- [Meye08] Meyer, Martin: Signalverarbeitung – Analoge und digitale Signale, Systeme und Filter, Vieweg Studium Technik, Wiesbaden, 2008

6.5.3 Literatur zu MATLAB

- [Schw07] Schweizer, Wolfgang: MATLAB kompakt, Oldenbourg Verlag München, 2007
- [Stei07] Stein, Ulrich: Einstieg in das Programmieren mit MATLAB, Fachbuchverlag Leipzig, 2007

6.5.4 Weiterführende Literatur

- [Opp04] Oppenheim, Alan: Zeitdiskrete Signalverarbeitung, 2. überarbeitete Auflage, Pearson Studium, 2004
- [Kamm98] Kammeyer, Karl: Digitale Signalverarbeitung, B.G. Teubner Stuttgart, 1998

7 Spektrum von Signalfolgen

Die Fourier-Transformation erlaubt es, zeitkontinuierlichen Signalen ein Spektrum und zeitkontinuierlichen Systemen einen Frequenzgang zuzuordnen. Die Fourier-Transformation von Signalfolgen ist für zeitdiskrete Anwendungen das Äquivalent zur bereits diskutierten Fourier-Transformation für zeitkontinuierliche Signale. Sie wird in diesem Kapitel eingeführt und ist wesentliche Voraussetzung für die Beschreibung zeitdiskreter Signale sowie die Analyse zeitdiskreter Systeme im Frequenzbereich.

Die Fourier-Transformierte von Signalfolgen kann über ihre Definitionsgleichung bestimmt werden. Wie bei der z-Transformation kann die eher aufwendige Bestimmung von Korrespondenzen über die Definitionsgleichung vermieden werden, wenn die vorliegende Signalfolge mit Rechenregeln auf Folgen mit bekannten Korrespondenzen zurückgeführt wird. Deshalb werden für die Fourier-Transformation von Signalfolgen die gebräuchlichen Rechenregeln hergeleitet und der Nutzen an Beispielen aufgezeigt. Weiterhin weist die Fourier-Transformation von Signalfolgen Symmetrien auf, die berechnet und an einem Beispiel verdeutlicht werden.

Abschließend wird ein Zusammenhang zwischen der Fourier-Transformation von Signalfolgen, der zeitkontinuierlichen Fourier-Transformation und der z-Transformation hergestellt.

7.1 Grundlagen

7.1.1 Eigenfunktionen zeitdiskreter LTI-Systeme

Lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten beschreiben zeitdiskrete LTI-Systeme. Die Lösungen dieser Differenzengleichungen setzen sich aus Exponentialfolgen zusammen. Eine besondere Stellung nehmen komplexe Exponentialfolgen der Form

$$x[k] = e^{j \cdot \Omega_0 \cdot k} \quad (7.1)$$

ein. Sie werden als Eigenfolgen des Systems bezeichnet. Bei einer Anregung mit diesen Folgen reagiert das System mit einer Folge gleicher normierter Frequenz Ω_0 im Allgemeinen aber unterschiedlicher Amplitude und Phase.

Beispiel: Anregung eines Systems 1. Ordnung mit einer komplexen Exponentialfolge

Ein System mit der Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{z}{z - \lambda} \quad (7.2)$$

wird mit einem Signal

$$x[k] = e^{j \cdot \Omega_0 \cdot k} \cdot \sigma[k] \quad (7.3)$$

angeregt. Das Eingangssignal hat die z-Transformierte

$$X(z) = \frac{z}{z - e^{j \cdot \Omega_0}} \quad (7.4)$$

Die z-Transformierte des Ausgangssignals lautet nach den Darstellungen zur z-Transformation

$$Y(z) = G(z) \cdot X(z) = \frac{z}{z - \lambda} \cdot \frac{z}{z - e^{j \cdot \Omega_0}} \quad (7.5)$$

Über Partialbruchzerlegung und Rücktransformation ergibt sich die Ausgangsfolge $y[k]$ mit

$$\begin{aligned} y[k] &= \frac{\lambda^{k+1}}{\lambda - e^{j \cdot \Omega_0}} \cdot \sigma[k] + \frac{e^{j \cdot \Omega_0}}{e^{j \cdot \Omega_0} - \lambda} \cdot e^{j \cdot \Omega_0 \cdot k} \cdot \sigma[k] = \frac{\lambda^{k+1}}{\lambda - e^{j \cdot \Omega_0}} \cdot \sigma[k] + G(z)|_{z=e^{j \cdot \Omega_0}} \cdot e^{j \cdot \Omega_0 \cdot k} \cdot \sigma[k] \\ &= \frac{\lambda^{k+1}}{\lambda - e^{j \cdot \Omega_0}} \cdot \sigma[k] + A(\Omega_0) \cdot e^{j \cdot \varphi(\Omega_0)} \cdot e^{j \cdot \Omega_0 \cdot k} \cdot \sigma[k] \end{aligned} \quad (7.6)$$

Das System reagiert auf die harmonischen Anregung mit der Kreisfrequenz Ω_0 abgesehen von Einschwingvorgängen mit einem harmonischen Signal derselben Kreisfrequenz. Für den Fall einer harmonischen Anregung müssen demnach nur das Verhältnis der Ein- und Ausgangsamplitude sowie die Phasenverschiebung bestimmt werden. Beide Größen sind von der normierten Kreisfrequenz Ω_0 abhängig. Wie bei zeitkontinuierlichen Signalen wird das Verhältnis der Amplituden als Amplitudengang $A(\Omega)$ und die Phasenverschiebung als Phasengang $\varphi(\Omega)$ bezeichnet.

Das Ausgangssignal ergibt sich aus dem Produkt des Eingangssignals mit einem komplexen Faktor, der zu einer Änderung der Amplitude und der Phase führt. Die Amplitude ergibt sich aus dem Betrag der Übertragungsfunktion $G(z)$ an der Stelle $z = e^{j\cdot\Omega_0}$. Die Phase ergibt sich aus der Phase der Übertragungsfunktion $G(z)$ an der Stelle $z = e^{j\cdot\Omega_0}$. Die Systemreaktion kann damit bei Anregung eines Systems mit einer komplexen Exponentialfunktion vergleichsweise einfach bestimmt werden.

Auch nicht periodische Signale lassen sich als Linearkombination komplexer Exponentialfolgen beschreiben. Für jede einzelne Folge kann die Wirkung des Systems berechnet werden. Das Ausgangssignal ergibt sich aus der Linearkombination von komplexen Exponentialfolgen mit geänderten Amplituden und geänderten Phasen. Die Darstellung von Signalfolgen als Linearkombination komplexer Exponentialfolgen wird als Fourier-Transformation für Signalfolgen bezeichnet. Sie ist Gegenstand dieses Kapitels.

7.1.2 Definitionsgleichung der Fourier-Transformation von Signalfolgen

Das Spektrum eines zeitkontinuierlichen Signals wird nach den Ausführungen in Teil A des Skriptes berechnet über das Integral

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t} dt \quad (7.7)$$

Ein abgetastetes Signal $x_A(t)$

$$x_A(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - k \cdot T_A) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta(t - k \cdot T_A) \quad (7.8)$$

ist zu jedem Zeitpunkt definiert. Sein Spektrum berechnet sich mit Gleichung (7.7) zu

$$X_A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_A(t) \cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - k \cdot T_A) \right) \cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t} dt \quad (7.9)$$

Die Reihenfolge von Summation und Integration kann vertauscht werden. Mit der Ausblendeigenschaft der Impulsfunktion kann der Ausdruck umgeformt werden zu

$$\begin{aligned} X_A(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta(t - k \cdot T_A) \right) \cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - k \cdot T_A) \cdot e^{-j\cdot\omega\cdot t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot e^{-j\cdot\omega k \cdot T_A} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - k \cdot T_A) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot e^{-j\cdot\omega k \cdot T_A} \end{aligned} \quad (7.10)$$

Gleichung (7.10) weist der Folge von Abtastwerten $x[k]$ ein Spektrum $X_A(\omega)$ zu. Dabei tritt die Frequenz ω immer in Kombination mit der Abtastzeit T_A auf. Deshalb wird bei Signalfolgen das Spektrum als Funktion der normierten Kreisfrequenz

$$\Omega = \omega \cdot T_A = \frac{\omega}{f_A} \quad (7.11)$$

dargestellt. Wegen der Periodizität der Exponentialfunktion mit imaginärem Argument ist jeder Summand der Summe in Gleichung (7.10) periodisch in $2\cdot\pi$. Deshalb ist auch das Spektrum der Folge $x[k]$

periodisch in 2π . Es ist damit ausreichend, das Spektrum in den Grenzen von $-\pi \dots +\pi$ darzustellen. Durch die Normierung über die Abtastzeit T_A

$$\omega = \frac{\Omega}{T_A} \quad (7.12)$$

ergibt sich die in Tabelle 7.1 gezeigte Zuordnung zwischen der normierten Frequenz Ω und der Kreisfrequenz ω .

Tabelle 7.1: Zuordnung zwischen der normierten Frequenz Ω und der Kreisfrequenz ω bei der Fourier-Transformation für Folgen

Normierte Kreisfrequenz Ω	Kreisfrequenz ω
$-\pi$	$-\omega_A/2$
$-\pi/2$	$-\omega_A/4$
0	0
$\pi/2$	$\omega_A/4$
π	$\omega_A/2$

Damit ergibt sich die Definitionsgleichung der Fourier-Transformation von Signalfolgen zu

$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot e^{-j\cdot\Omega\cdot k} \quad (7.13)$$

Die Fourier-Transformation für Signalfolgen transformiert beliebige Signalfolgen $x[k]$ in eine kontinuierliche, komplexe Funktion der reellen Variable Ω . Wie bei zeitkontinuierlichen Signalen wird die Funktion $X(\Omega)$ als Spektrum der Signalfolge $x[k]$ bezeichnet. Auch die Schreibweise

$$F\{x[k]\} = X(\Omega) \quad (7.14)$$

sowie das Hantel-Symbol

$$x[k] \circ - \bullet X(\Omega) \quad (7.15)$$

werden von der Fourier-Transformation für zeitkontinuierliche Signale übernommen. Die Fourier-Transformierte kann in kartesischen oder Polar-Koordinaten dargestellt werden.

$$X(\Omega) = X_R(\Omega) + j \cdot X_I(\Omega) = |X(\Omega)| \cdot e^{j \cdot \varphi(\Omega)} \quad (7.16)$$

Bei der Darstellung in kartesischen Koordinaten wird die Fourier-Transformierte in Realteil $X_R(\Omega)$ und Imaginärteil $X_I(\Omega)$ zerlegt. Bei der Darstellung in Polarkoordinaten wird die komplexe Fourier-Transformierte mit Betrag $|X(\Omega)|$ und Phase $\varphi(\Omega)$ dargestellt.

7.1.3 Fourier-Transformation von grundlegenden Signalfolgen

Wie bei der z-Transformation werden zunächst einige Korrespondenzen der Fourier-Transformation von Signalfolgen direkt über die Definitionsgleichung (7.13) berechnet. Dabei ergibt sich das Spektrum einer Signalfolge durch Auswertung einer in der Regel unendlichen, oft aber endlichen Reihe.

Impulsfolge

Aus der Definition der diskreten Impulsfolge

$$x[k] = \delta[k] = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{für ganzzahlige } k \neq 0 \end{cases} \quad (7.17)$$

ergibt sich das Spektrum durch Einsetzen in die Definitionsgleichung zu

$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k] \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot k} = e^{-j \cdot 0 \cdot \Omega} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k] = 1 \quad (7.18)$$

Bild 7.1 stellt die Impulsfolge und ihr Spektrum gegenüber. Wie bereits bei der zeitkontinuierlichen Fourier-Transformation werden zur Darstellung eines Impulses die Frequenzen im gesamten Spektralbereich benötigt.

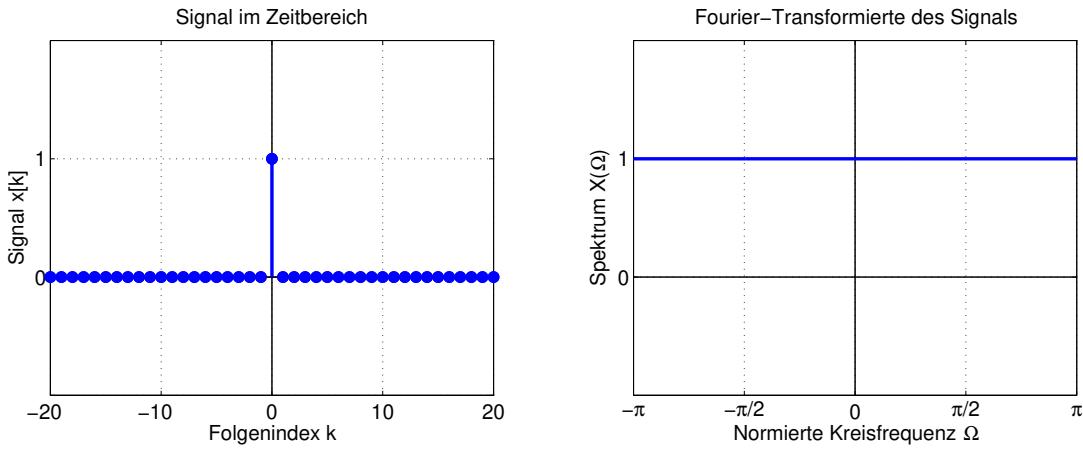


Bild 7.1: Impulsfolge und ihr Spektrum

Wird der Impuls um k_0 verschoben, ändert sich die Fourier-Transformierte zu

$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k - k_0] \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot k} = e^{-j \cdot \Omega \cdot k_0} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k] = e^{-j \cdot \Omega \cdot k_0} \quad (7.19)$$

Eine Verschiebung des Impulses um $k_0 > 0$ nach rechts führt zu einer Multiplikation der Fourier-Transformierten mit $z = e^{-j \cdot \Omega \cdot k_0}$. Diese Multiplikation ändert die Phase des Spektrums, sein Betrag bleibt dagegen konstant.

Kausale Rechteckfolge

Für die Rechteckfolge mit der Definition

$$x[k] = \sigma[k] - \sigma[k - K] \quad (7.20)$$

wird die Summe in der Definitionsgleichung der Fourier-Transformation von Signalfolgen endlich. Mit der endlichen geometrischen Reihe

$$\sum_{k=0}^{K-1} q^k = \frac{1 - q^K}{1 - q} \quad (7.21)$$

ergibt sich die Fourier-Transformierte

$$X(\Omega) = \sum_{k=0}^{\infty} (\sigma[k] - \sigma[k - K]) \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot k} = \sum_{k=0}^{K-1} e^{-j \cdot \Omega \cdot k} = \frac{1 - e^{-j \cdot \Omega \cdot K}}{1 - e^{-j \cdot \Omega}} \quad (7.22)$$

Zur übersichtlicheren Trennung von Betrag und Phase werden aus Nenner und Zähler Exponentialfunktionen ausgeklammert, sodass konjugiert komplexe Exponentialfunktionen entstehen. Sie werden zu einer Sinusfunktion zusammengefasst.

$$X(\Omega) = \frac{1 - e^{-j \cdot \Omega \cdot K}}{1 - e^{-j \cdot \Omega}} = \frac{e^{-j \cdot \frac{\Omega \cdot K}{2}}}{e^{-j \cdot \frac{\Omega}{2}}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{K \cdot \Omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)} = e^{-j \cdot \frac{\Omega \cdot (K-1)}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{K \cdot \Omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)} \quad (7.23)$$

Bild 7.2 stellt die Rechteckfolge für $K_1 = 5$ und $K_2 = 10$ und den zugehörigen Betrag des Spektrums gegenüber.

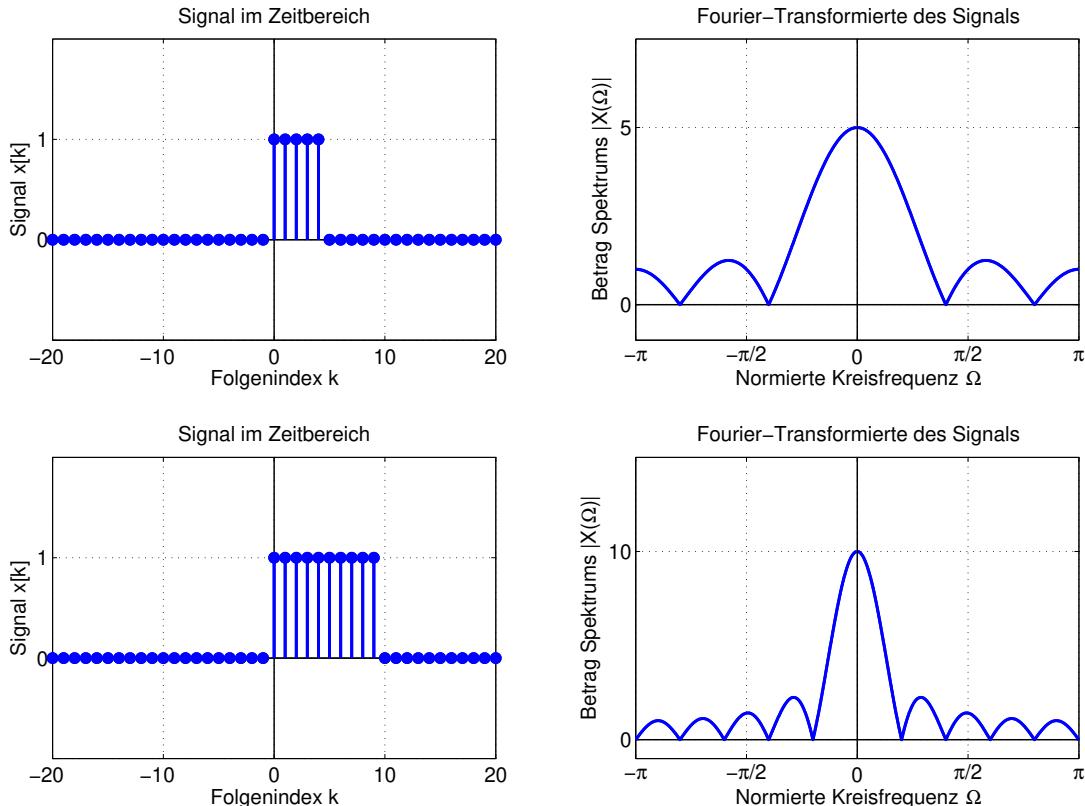


Bild 7.2: Rechteckfolge und Betrag ihres Spektrums für $K_1 = 5$ und $K_2 = 10$

Die erste Nullstelle Ω_0 des Spektrums liegt an der Stelle

$$\Omega_0 = \frac{2 \cdot \pi}{K} \quad (7.24)$$

Wird diese Nullstelle als Maß für die Breite des Spektrums angesehen, wird klar, dass das Spektrum mit sinkender Zahl K von Abtastwerten breiter wird. Im Extremfall liegt mit $x[k] = \delta[k]$ ein einziger Abtastwert vor, und das Spektrum wird mit $X(\Omega) = 1$ beliebig breit.

Kausale Exponentiellefolge

Die kausale Potenzfolge ist definiert als

$$x[k] = \lambda^k \cdot \sigma[k] \quad (7.25)$$

Ihre Fourier-Transformierte ergibt sich aus der Definitionsgleichung zu

$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda^k \cdot \sigma[k] \cdot e^{-j \cdot k \cdot \Omega} = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda \cdot e^{-j \cdot \Omega})^k \quad (7.26)$$

Mit der Summationsformel für die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \text{ für } |q| < 1 \quad (7.27)$$

ergibt sich für $|\lambda| < 1$ die Fourier-Transformierte

$$F\{\lambda^k \cdot \sigma[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda \cdot e^{-j\cdot\Omega})^k = \frac{1}{1 - \lambda \cdot e^{-j\cdot\Omega}} \quad (7.28)$$

Die Fourier-Transformierte der kausalen Exponentialfolge kann auf diese Art nur für $|\lambda| < 1$ berechnet werden. Für $|\lambda| \geq 1$ existiert sie nicht. Bild 7.3 stellt die kausale Exponentialfolgen mit $\lambda = 0.9$ und $\lambda = -0.9$ sowie den Betrag ihrer Spektren dar.

Sowohl für $\lambda = 0.9$, als auch für $\lambda = -0.9$ klingen die Signalfolgen $x[k]$ ab. Wegen des negativen Vorzeichens handelt es sich bei $\lambda = -0.9$ um eine alternierende Folge. Durch den schnellen Signalwechsel bei der alternierenden Signalfolge besitzt das Spektrum der Exponentialfolge mit $\lambda = -0.9$ hohe Signalanteile bei den normierten Frequenzen $\Omega = \pm \pi$, die der Abtastfrequenz $\pm \omega_A/2$ entsprechen. Im Gegensatz dazu weist das Spektrum der Exponentialfolge mit $\lambda = 0.9$ wesentliche Spektralanteile an der Stelle $\Omega = 0$ auf.

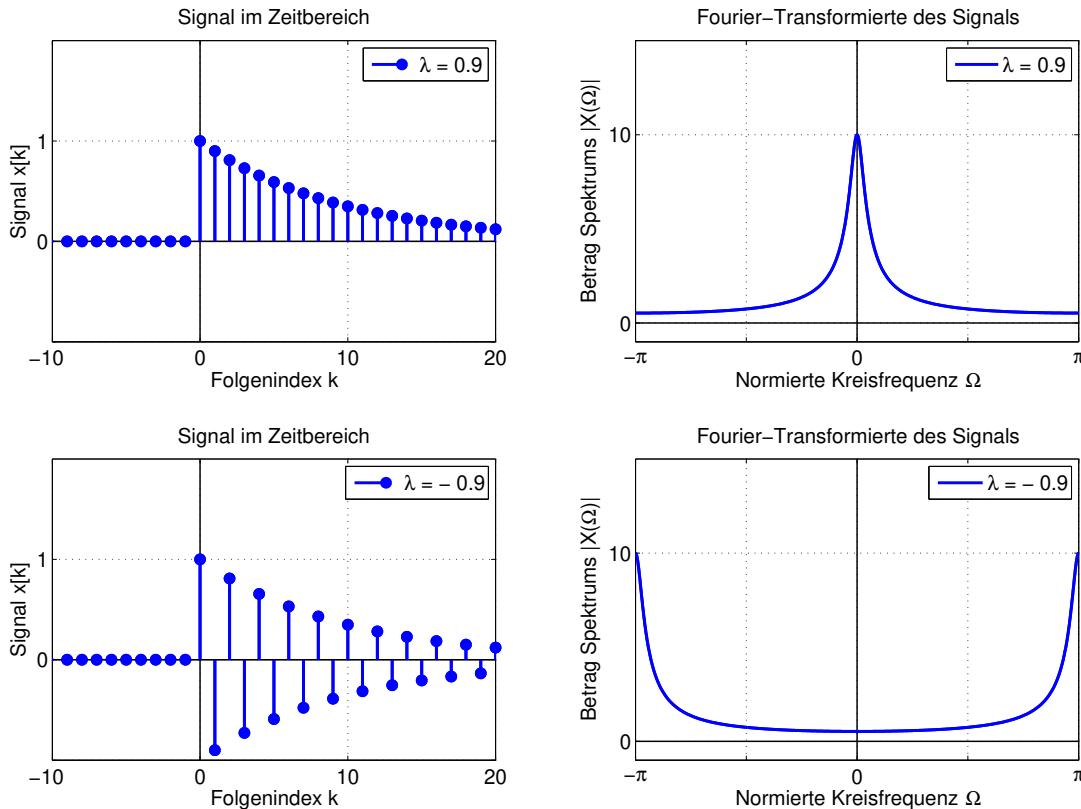


Bild 7.3: Kausale Exponentialfolge und Betrag ihres Spektrums für $\lambda = 0.9$ und $\lambda = -0.9$

7.1.4 Existenz der Fourier-Transformation von Signalfolgen

Bei der Berechnung der Fourier-Transformierten der kausalen Exponentialfolge ergibt sich die Bedingung $|\lambda| < 1$ für die Konvergenz der zu berechnenden Reihe. Daraus resultiert die Frage, unter welchen Bedingungen die Fourier-Transformation von Signalfolgen konvergiert. Bei der Berechnung über die Definitionsgleichung wird die Reihe

$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot e^{-j\cdot\Omega\cdot k} \quad (7.29)$$

ausgewertet. Die Fourier-Transformierte existiert, wenn diese Reihe konvergiert. Eine hinreichende Bedingung für die Existenz der Fourier-Transformierten einer Folge ist ihre absolute Summierbarkeit.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]| < \infty \quad (7.30)$$

Zwei Spezialfälle werden diskutiert, kausale Signalfolgen und zeitlich begrenzte Signalfolgen.

Kausale Signalfolgen

Bei kausalen Signalfolgen kann die Konvergenzbedingung aus der geometrischen Reihe abgeleitet werden. Dabei wird ihre Konvergenz auf eine Betrachtung des Betrages von q reduziert. Um diesen Ansatz anwenden zu können, ist es wie bei der z-Transformation erforderlich, den Betrag der Folge $x[k]$ mit Hilfe einer Exponentialfolge nach oben abzuschätzen.

$$|x[k]| \leq X_{MAX} \cdot r^k \quad (7.31)$$

Mit der Abschätzung der Folge $x[k]$ gilt für $X(\Omega)$

$$|X(\Omega)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} x[k] \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot k} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |x[k]| \cdot |e^{-j \cdot \Omega \cdot k}| \leq \sum_{k=0}^{\infty} X_{MAX} \cdot r^k = X_{MAX} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} r^k \quad (7.32)$$

Damit existiert die Fourier-Transformierte, wenn für den Betrag von r gilt:

$$|r| < 1 \quad (7.33)$$

Also kann die Fourier-Transformierte für alle kausalen Signale, deren z-Transformierte $X(z)$ ausschließlich Pole innerhalb des Einheitskreises besitzt, über die Definitionsgleichung berechnet werden.

Zeitlich begrenzte Signalfolgen

Bei zeitlich begrenzten Signalfolgen mit endlicher Amplitude existiert immer eine Fourier-Transformierte. Zum Beweis wird die Definitionsgleichung der Fourier-Transformation nach oben abgeschätzt.

$$|X(\Omega)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot k} \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]| = \sum_{k=k_1}^{k_2} |x[k]| \quad (7.34)$$

Da die Abtastwerte nur im Bereich $k_1 \leq k \leq k_2$ von null verschieden und ihre Werte begrenzt sind, ist die Summe endlich.

Bei der Berechnung der Fourier-Transformierten von Leistungssignalen in Abschnitt 7.1.6 zeigt sich, dass die Bedingung der absoluten Summierbarkeit eine hinreichende, aber keine notwendige Bedingung ist.

7.1.5 Inverse Fourier-Transformation diskreter Folgen

Das Spektrum einer Signalfolge $X(\Omega)$ ist eine in 2π periodische Funktion. Ähnlich wie bei periodischen Zeitsignalen kann diese Funktion mit Hilfe einer Reihe dargestellt werden. Es ergibt sich die Folge der Abtastwerte

$$x[k] = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) \cdot e^{j \cdot \Omega \cdot k} d\Omega \quad (7.35)$$

Als Beweis wird gezeigt, dass die Fourier-Transformation von Folgen und ihre Rücktransformation invers zueinander sind. Dazu wird die Gleichung für die Fourier-Transformation von Folgen in die Gleichung zur Rücktransformation eingesetzt. Als Ergebnis muss sich die Folge $x[k]$ ergeben.

$$x[k] = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) \cdot e^{j \cdot \Omega \cdot k} d\Omega = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x[\kappa] \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot \kappa} \right) \cdot e^{j \cdot \Omega \cdot k} d\Omega \quad (7.36)$$

Zum Beweis wird die Reihenfolge von Summation und Integration vertauscht, und die beiden Exponentialfunktionen werden zusammengefasst.

$$\begin{aligned} x[k] &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x[\kappa] \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot \kappa} \right) \cdot e^{j \cdot \Omega \cdot k} d\Omega = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x[\kappa] \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j \cdot \Omega \cdot \kappa} \cdot e^{j \cdot \Omega \cdot k} d\Omega \\ &= \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x[\kappa] \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{j \cdot \Omega \cdot (k-\kappa)} d\Omega \end{aligned} \quad (7.37)$$

Das Integral der komplexen Exponentialfunktion über eine volle Periode ist null. Nur für $k = \kappa$ wird aus der komplexen Exponentialfunktion die Zahl eins. Das Ergebnis kann mit der Impulsfolge dargestellt werden. Mit der Ausblendeigenschaft der Impulsfolge ergibt sich

$$\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x[\kappa] \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{j \cdot \Omega \cdot (k-\kappa)} d\Omega = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x[\kappa] \cdot \delta[k - \kappa] = x[k] \quad (7.38)$$

Der Umgang mit der Rücktransformation wird an einem Beispiel vertieft.

Beispiel: Inverse Fourier-Transformation diskreter Folgen

Zu einem rechteckförmigen Spektrum der Form

$$X(\Omega) = \sigma\left(\Omega + \frac{\pi}{2}\right) - \sigma\left(\Omega - \frac{\pi}{2}\right) \quad (7.39)$$

soll die zugehörige Signalfolge $x[k]$ berechnet werden. Dazu wird die Gleichung zur Rücktransformation verwendet. Für $k \neq 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} x[k] &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) \cdot e^{j \cdot \Omega \cdot k} d\Omega = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{j \cdot \Omega \cdot k} d\Omega = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{j \cdot k} \cdot e^{j \cdot \Omega \cdot k} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{j \cdot k} \cdot 2 \cdot j \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot k\right) = \frac{1}{k \cdot \pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot k\right) \end{aligned} \quad (7.40)$$

Für $k = 0$ errechnet sich der Wert $x[0]$ zu

$$x[0] = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j \cdot \Omega}) \cdot e^{j \cdot \Omega \cdot 0} d\Omega = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 d\Omega = \frac{\pi}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{2} \quad (7.41)$$

Wie bei zeitkontinuierlichen Signalen kann aus dem Spektrum $X(\Omega)$ eine eindeutige Signalfolge $x[k]$ berechnet werden. Bild 7.4 stellt die Signalfolge und ihre Fourier-Transformierte gegenüber.

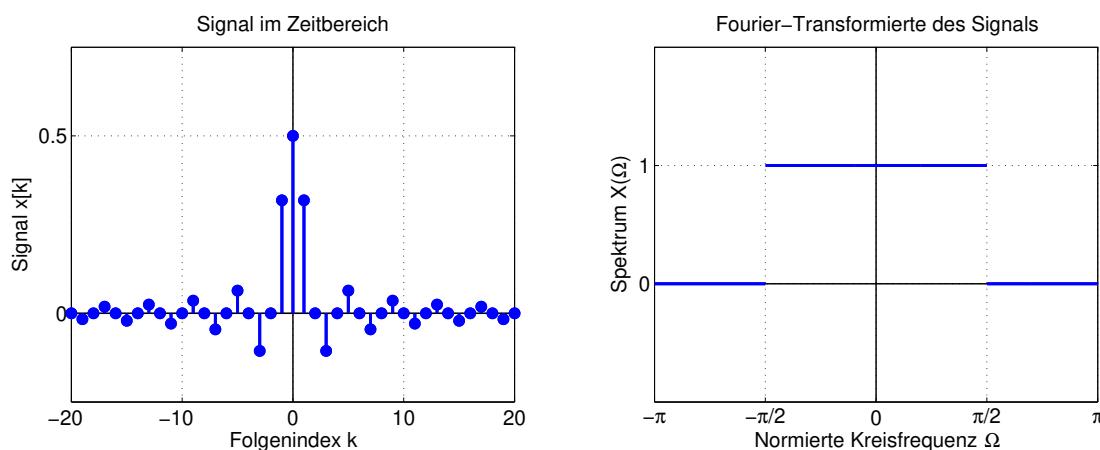


Bild 7.4: Signalfolge und ihr rechteckförmiges Spektrum

7.1.6 Fourier-Transformierte von Leistungssignalfolgen

In Abschnitt 7.1.4 wird eine hinreichende Bedingung für die Existenz der Fourier-Transformierten einer Signalfolge hergeleitet und diskutiert. Es zeigt sich, dass die absolute Summierbarkeit eine hinreichende Bedingung ist. Aus diesem Grund existiert für Energiesignalfolgen immer eine Fourier-Transformierte. Aber auch für Leistungssignalfolgen lässt sich eine Fourier-Transformierte bestimmen. Ähnlich wie im zeitkontinuierlichen Bereich wird dazu die Impulsfunktion im Frequenzbereich verwendet. Da bei zeitdiskreten Signalen das Spektrum periodisch in 2π ist, wird die Signalfolge $x[k]$ zu dem Spektrum

$$X(\Omega) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi \cdot v) \quad (7.42)$$

berechnet. Mit der Definitionsgleichung der inversen Fourier-Transformation von Signalfolgen ergibt sich

$$x[k] = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi \cdot v) \cdot e^{j\Omega \cdot k} d\Omega \quad (7.43)$$

In dem Bereich von $-\pi \leq \Omega \leq \pi$ liegt nur der Impuls an der Stelle $\Omega = 0$. Damit ergibt sich mit der Ausblendeigenschaft der Impulsfunktion

$$x[k] = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\Omega) \cdot e^{j\Omega \cdot k} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \quad (7.44)$$

Diese Folge $x[k]$ ist nach den Ausführungen in Abschnitt 3.1.3 keine Energiesignalfolge, trotzdem besitzt sie eine Fourier-Transformierte. Bild 7.5 stellt die Einsfolge und ihre Fourier-Transformierte gegenüber.

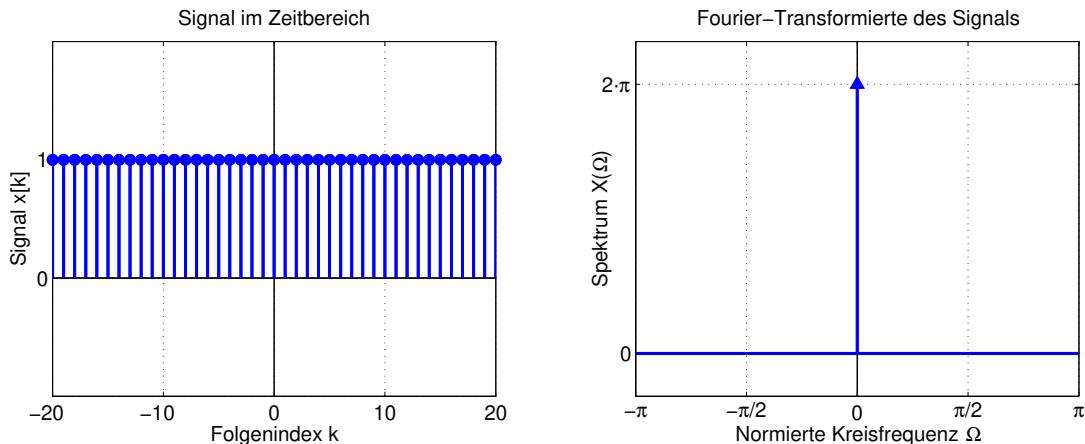


Bild 7.5: Einsfolge und ihr Spektrum

Mit den Rechenregeln zur Fourier-Transformation von Signalfolgen lassen sich mit dieser Korrespondenz weitere Korrespondenzen herleiten.

Beispiel: Korrespondenz der Kosinusfolge

Bei der zeitkontinuierlichen Fourier-Transformation kann das Spektrum einer harmonischen Funktion über die Rücktransformation bestimmt werden. In diesem Beispiel wird diese Idee für Folgen aufgegriffen. Es wird die zu dem Spektrum

$$X(\Omega) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega + \Omega_0 + 2\pi \cdot v) + \delta(\Omega - \Omega_0 + 2\pi \cdot v) \quad (7.45)$$

gehörige Signalfolge $x[k]$ berechnet. Dabei liegt Ω_0 in dem Bereich $0 < \Omega_0 < \pi$. Für die Berechnung der entsprechenden Signalfolge $x[k]$ wird die Gleichung zur Rücktransformation verwendet und der Ausdruck in zwei separate Integrale aufgeteilt.

$$\begin{aligned} x[k] &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) \cdot e^{j \cdot \Omega \cdot k} d\Omega = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} (\delta(\Omega + \Omega_0) + \delta(\Omega - \Omega_0)) \cdot e^{j \cdot \Omega \cdot k} d\Omega \\ &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\Omega + \Omega_0) \cdot e^{j \cdot \Omega \cdot k} d\Omega + \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\Omega - \Omega_0) \cdot e^{j \cdot \Omega \cdot k} d\Omega \end{aligned} \quad (7.46)$$

Jedes Integral kann mit der Ausblendeigenschaft der Impulsfunktion gelöst werden.

$$\begin{aligned} x[k] &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot e^{-j \cdot \Omega_0 \cdot k} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\Omega + \Omega_0) d\Omega + \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot e^{j \cdot \Omega_0 \cdot k} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\Omega - \Omega_0) d\Omega \\ &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot (e^{j \cdot \Omega_0 \cdot k} + e^{-j \cdot \Omega_0 \cdot k}) = \frac{2}{2 \cdot \pi} \cdot \cos(\Omega_0 \cdot k) = \frac{1}{\pi} \cdot \cos(k \cdot \Omega_0) \end{aligned} \quad (7.47)$$

Damit ergibt sich die Korrespondenz zur Kosinusfolge zu

$$F\{\cos(k \cdot \Omega_0)\} = \pi \cdot \sum_{v=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega + \Omega_0 + 2 \cdot \pi \cdot v) + \delta(\Omega - \Omega_0 + 2 \cdot \pi \cdot v) \quad (7.48)$$

Bild 7.6 stellt eine Kosinusfolge mit $\Omega_0 = \pi/3$ und ihre Fourier-Transformierten dar.

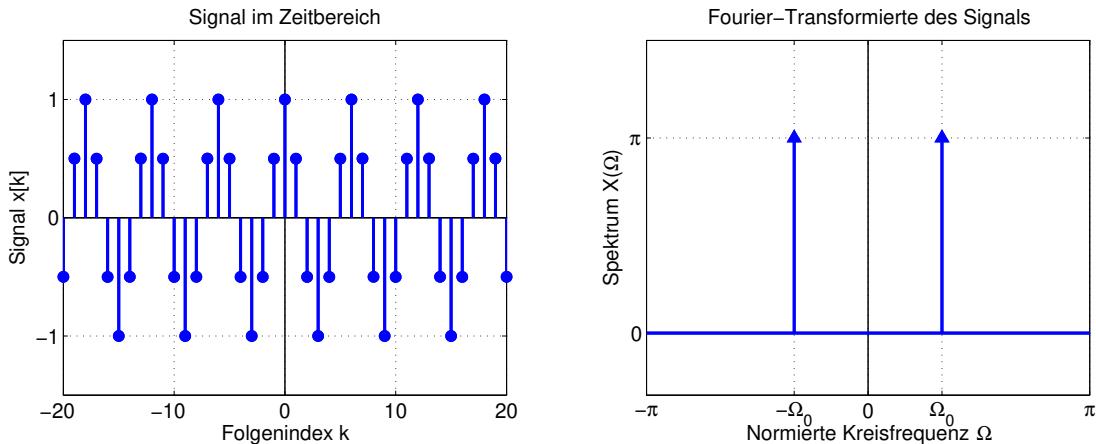


Bild 7.6: Kosinusfolge und ihr Spektrum

Auf demselben Weg kann die Fourier-Transformierte der Sinusfolge hergeleitet werden.

7.1.7 Symmetrieeigenschaften der Fourier-Transformation von Signalfolgen

Bei der Anwendung der Fourier-Transformation können Symmetriebedingungen genutzt werden, um aus existierenden Korrespondenzen weitere Korrespondenzen abzuleiten. Insbesondere bei reellen Zahlenfolgen können die Symmetriebedingungen für eine schnelle Plausibilisierung von Ergebnissen verwendet werden.

Im Folgenden werden die wesentlichen Symmetrieeigenschaften für komplexe und reelle Signalfolgen zusammengefasst. Weitere Symmetrieregeln und ihre Herleitung sind in [Oppe04] zu finden. Dabei wird davon ausgegangen, dass zur Signalfolge $x[k]$ das Spektrum $X(\Omega)$ gehört.

Tabelle 7.2: Symmetrieregeln der Fourier-Transformation für komplexe Signalfolgen

Folge $x[k]$	Fourier-Transformierte $X(\Omega)$
Gerade Folge	Reelles Spektrum $X(\Omega)$
Ungerade Folge	Imaginäres Spektrum $X(\Omega)$
Konjugiert komplexe Folge $x^*[k]$	$X * (-\Omega)$
Gespiegelte konjugiert komplexe Folge $x^*[-k]$	$X * (\Omega)$

Tabelle 7.3: Symmetrieregeln der Fourier-Transformation für reelle Signalfolgen $x[k]$

Regel	Anmerkung
$X(\Omega) = X^*(-\Omega)$	Fourier-Transformierte einer reellen Folge ist konjugiert symmetrisch
$X_R(\Omega) = X_R(-\Omega)$	Realteil der Fourier-Transformierten ist gerade
$X_I(\Omega) = -X_I(-\Omega)$	Imaginärteil der Fourier-Transformierten ist ungerade
$ X(\Omega) = X(-\Omega) $	Betrag der Fourier-Transformierten ist gerade
$\varphi(\Omega) = -\varphi(-\Omega)$	Phase der Fourier-Transformierten ist ungerade

Beispiel: Fourier-Transformierten der kausalen Exponentialfolge

Es wird die Fourier-Transformierte der kausalen Exponentialfolge

$$x[k] = \lambda^k \cdot \sigma[k] \quad (7.49)$$

diskutiert. Das Spektrum der kausalen Exponentialfolge berechnet sich zu

$$X(\Omega) = \frac{1}{1 - \lambda \cdot e^{-j\cdot\Omega}} = \frac{1}{1 - \lambda \cdot \cos(\Omega) - j \cdot \lambda \cdot \sin(\Omega)} \quad (7.50)$$

Die konjugiert symmetrische Fourier-Transformierte ergibt sich zu

$$X^*(-\Omega) = \frac{1}{1 - \lambda \cdot \cos(-\Omega) + j \cdot \lambda \cdot \sin(-\Omega)} = \frac{1}{1 - \lambda \cdot \cos(\Omega) - j \cdot \lambda \cdot \sin(\Omega)} \quad (7.51)$$

Beide Transformierten stimmen erwartungsgemäß überein. Die Spektren der beiden Folgen sind in Bild 7.7 sowohl als Real- und Imaginärteil, als auch als Betrag und Phase dargestellt.

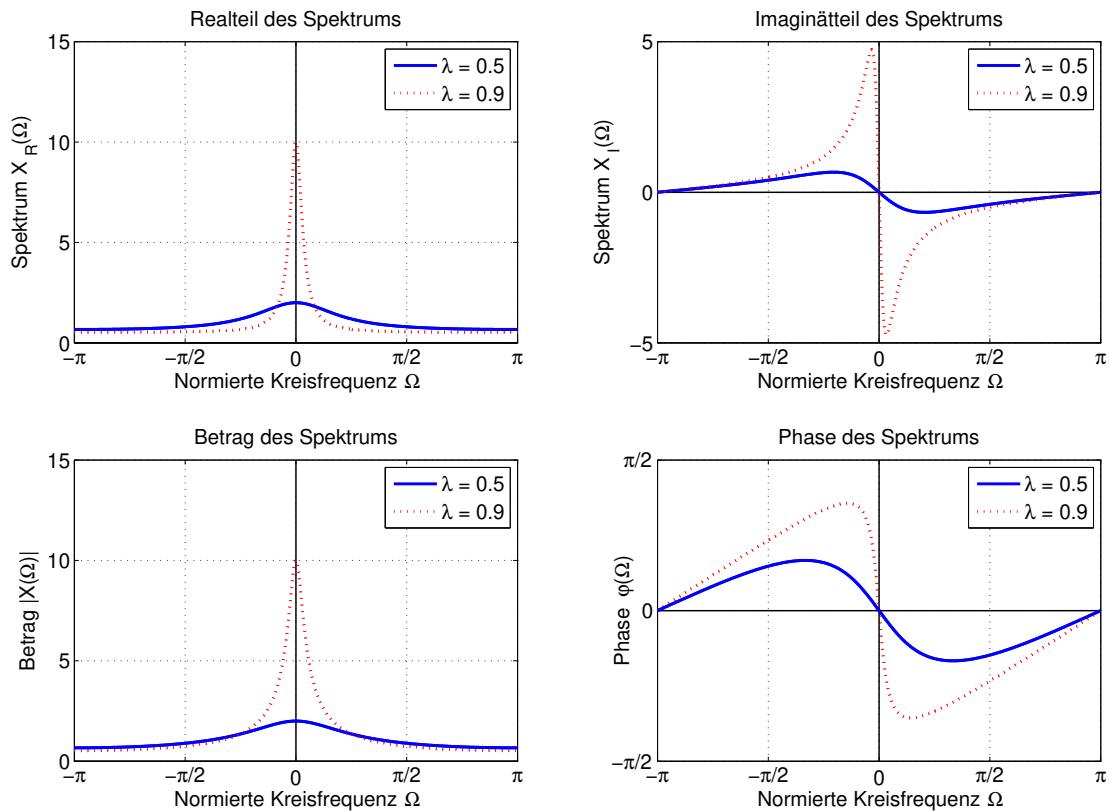


Bild 7.7: Spektren der kausalen Exponentialfolgen mit $\lambda = 0.5$ und $\lambda = 0.9$

Der Realteil des Spektrums ist gerade, der Imaginärteil ist ungerade. Der Betrag des Spektrums ist gerade, die Phase ungerade. Damit entsprechen die Symmetrien den in Tabelle 7.3 dargestellten Symmetrieregeln.

7.2 Rechenregeln der Fourier-Transformation von Signalfolgen

Wie andere Transformationen besitzt die Fourier-Transformation von Signalfolgen Rechenregeln, die die Berechnung weiterer Korrespondenzen vereinfachen. Die Regeln werden im Folgenden hergeleitet und jeweils an einem Beispiel verdeutlicht. Sie entsprechen weitgehend den Rechenregeln für die Fourier-Transformation zeitkontinuierlicher Signale. Am Ende dieses Abschnittes sind alle Rechenregeln in einer Übersicht zusammengestellt.

7.2.1 Linearität

Wie die übrigen Integraltransformationen ist auch die Fourier-Transformation von Signalfolgen eine lineare Transformation. Durch Einsetzen in die Definitionsgleichung ergibt sich

$$F\{\nu_1 \cdot x_1[k] + \nu_2 \cdot x_2[k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\nu_1 \cdot x_1[k] + \nu_2 \cdot x_2[k]) \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot k} \quad (7.52)$$

Im Fall absolut summierbarer Reihen besitzen beide Folgen $x_1[k]$ und $x_2[k]$ eigene Fourier-Transformierte $X_1(\Omega)$ und $X_2(\Omega)$. In dem Fall gilt das Distributivgesetz

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\nu_1 \cdot x_1[k] + \nu_2 \cdot x_2[k]) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \Omega} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \nu_1 \cdot x_1[k] \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot k} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \nu_2 \cdot x_2[k] \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot k} \\ &= \nu_1 \cdot X_1(\Omega) + \nu_2 \cdot X_2(\Omega) \end{aligned} \quad (7.53)$$

Damit ist die Linearitätseigenschaft für Signalfolgen, die eine Fourier-Transformierte besitzen, bewiesen.

Beispiel: Linearität

Mit Hilfe der Linearität kann zum Beispiel die Fourier-Transformierte der Summe zweier kausaler Exponentialfolgen errechnet werden.

$$F\left\{3 \cdot \frac{1}{2^k} \cdot \sigma[k] - 2 \cdot \frac{1}{5^k} \cdot \sigma[k]\right\} = \frac{3}{1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j \cdot \Omega}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{5} \cdot e^{-j \cdot \Omega}} = \frac{6}{2 - 1 \cdot e^{-j \cdot \Omega}} - \frac{10}{5 - 1 \cdot e^{-j \cdot \Omega}} \quad (7.54)$$

7.2.2 Verschiebung im Zeitbereich

Ist das Spektrum $X(\Omega)$ einer Signalfolge $x[k]$ bekannt, ergibt sich das Spektrum der verschobenen Folge durch Einsetzen in die Definitionsgleichung zu

$$F\{x[k - k_0]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k - k_0] \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot k} \quad (7.55)$$

Da die Summation von $-\infty$ bis $+\infty$ durchgeführt wird, kann der Index k um k_0 verschoben werden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} F\{x[k - k_0]\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k - k_0] \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot (k+k_0)} \\ &= e^{-j \cdot \Omega \cdot k_0} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot k} = e^{-j \cdot \Omega \cdot k_0} \cdot X(\Omega) \end{aligned} \quad (7.56)$$

Das Spektrum ändert nur seine Phase, der Betrag bleibt unverändert.

Beispiel: Verschiebung im Zeitbereich kombiniert mit Linearität

Als Beispiel wird die Fourier-Transformierte der in Bild 7.8 dargestellten Signalfolge berechnet. Sie berechnet sich aus der Differenz zweier Rechteckfolgen der Länge $K = 5$, von denen die erste um $k_1 = 1$ nach rechts und die zweite Rechteckfolge um $k_2 = -5$ nach links verschoben ist.

$$x[k] = \sigma[k-1] - \sigma[k-6] - (\sigma[k+5] - \sigma[k]) \quad (7.57)$$

Entsprechend ergibt sich die Fourier-Transformierte zu

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= e^{-j \cdot \frac{4\Omega}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{5\Omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)} \cdot e^{-j \cdot \Omega} - e^{-j \cdot \frac{4\Omega}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{5\Omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)} \cdot e^{-j \cdot (-5) \cdot \Omega} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{5\Omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)} \cdot (e^{-j \cdot 3\Omega} - e^{j \cdot 3\Omega}) \end{aligned} \quad (7.58)$$

Der Betrag des Spektrums ist in Bild 7.8 dargestellt.

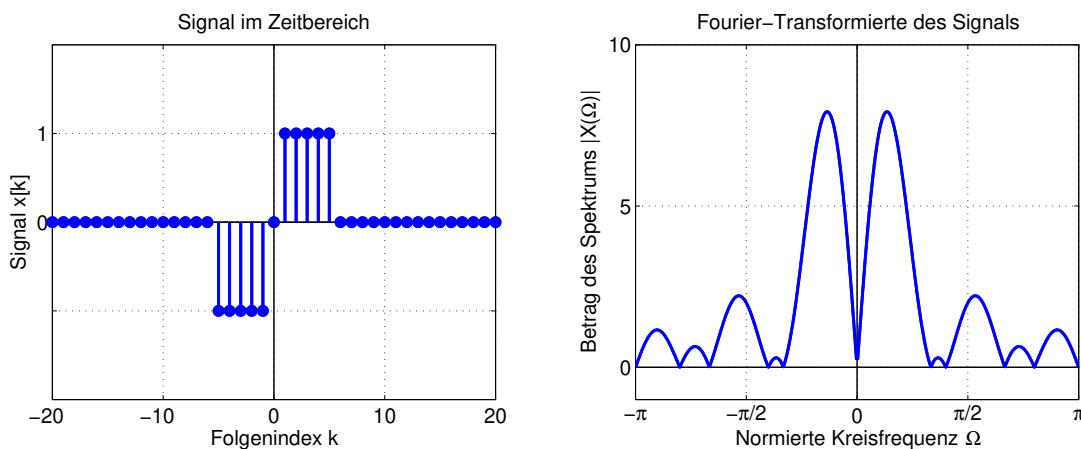


Bild 7.8: Signalfolge und Betrag des Spektrums für das Beispiel Verschiebung im Zeitbereich kombiniert mit Linearität

7.2.3 Verschiebung im Frequenzbereich

Eine Verschiebung kann nicht nur im Zeitbereich, sondern auch im Frequenzbereich erfolgen. In diesem Fall ergibt sich die zugehörige Zeitfunktion aus

$$\begin{aligned} X(\Omega - \Omega_0) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot e^{-j \cdot k \cdot (\Omega - \Omega_0)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot e^{-j \cdot k \cdot \Omega} \cdot e^{j \cdot k \cdot \Omega_0} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot e^{j \cdot k \cdot \Omega_0} \cdot e^{-j \cdot k \cdot \Omega} = F\{x[k] \cdot e^{j \cdot k \cdot \Omega_0}\} \end{aligned} \quad (7.59)$$

Beispiel: Frequenzverschiebung

Typisches Beispiel für eine Frequenzverschiebung ist eine Modulation. Dabei wird eine Folge $x[k]$ mit einer harmonischen Folge multipliziert.

$$y[k] = x[k] \cdot \cos(\Omega_0 \cdot k) = x[k] \cdot \frac{1}{2} \cdot (e^{j \cdot \Omega_0 \cdot k} + e^{-j \cdot \Omega_0 \cdot k}) \quad (7.60)$$

Durch die Multiplikation verschiebt sich das ursprüngliche Spektrum $X(\Omega)$ um Ω_0 nach links und rechts.

$$Y(\Omega) = \frac{1}{2} \cdot (X(\Omega + \Omega_0) + X(\Omega - \Omega_0)) \quad (7.61)$$

Das Spektrum wird damit aus dem ursprünglichen Spektralbereich in einen Spektralbereich um $\pm \Omega_0$ verschoben. Bild 7.9 stellt die Auswirkung einer Modulation auf den Spektralbereich grafisch dar.

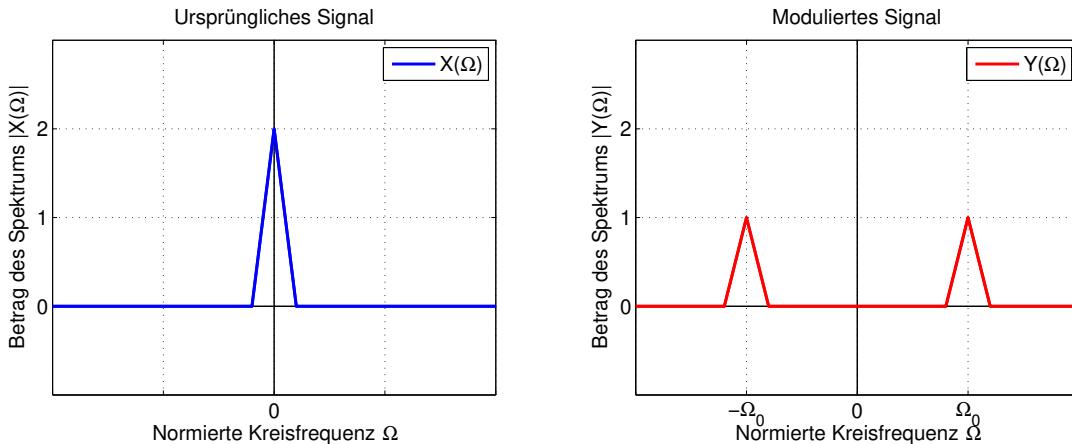


Bild 7.9: Beispiel für die Verschiebung eines Spektralbereiches durch Modulation

7.2.4 Zeitliche Spiegelung

Ist das Spektrum $X(\Omega)$ einer Signalfolge $x[k]$ bekannt, ergibt sich das Spektrum der Folge $x[-k]$ durch Einsetzen in die Definitionsgleichung zu

$$F\{x[-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[-k] \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{j \cdot \Omega \cdot n} = X(-\Omega) \quad (7.62)$$

Beispiel: Zeitliche Spiegelung

Als Anwendungen der zeitlichen Spiegelung wird das Spektrum der Folge

$$x[k] = \lambda^{|k|} \quad (7.63)$$

für $|\lambda| < 1$ berechnet werden. Das Spektrum der einseitigen Exponentialfolge wird über die Definitionsgleichung berechnet.

$$F\{\lambda^k \cdot \sigma[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda \cdot e^{-j\cdot\Omega})^k = \frac{1}{1 - \lambda \cdot e^{-j\cdot\Omega}} \quad (7.64)$$

Diese Folge wird achsensymmetrisch ergänzt. Das Signal ergibt sich durch die Summe einer kausalen Exponentialfunktion, der gespiegelten Funktion und einer Impulsfolge, die den Wert an der Stelle $k = 0$ korrigiert.

$$x[k] = \lambda^k \cdot \sigma[k] + \lambda^{-k} \cdot \sigma[-k] - \delta[k] \quad (7.65)$$

Das Spektrum errechnet sich mit der Regel der zeitlichen Spiegelung und der Linearität zu

$$X(\Omega) = \frac{1}{1 - \lambda \cdot e^{-j\cdot\Omega}} + \frac{1}{1 - \lambda \cdot e^{j\cdot\Omega}} - 1 \quad (7.66)$$

Die Folge $x[k]$ und der Betrag des Spektrums sind in Bild 7.10 dargestellt.

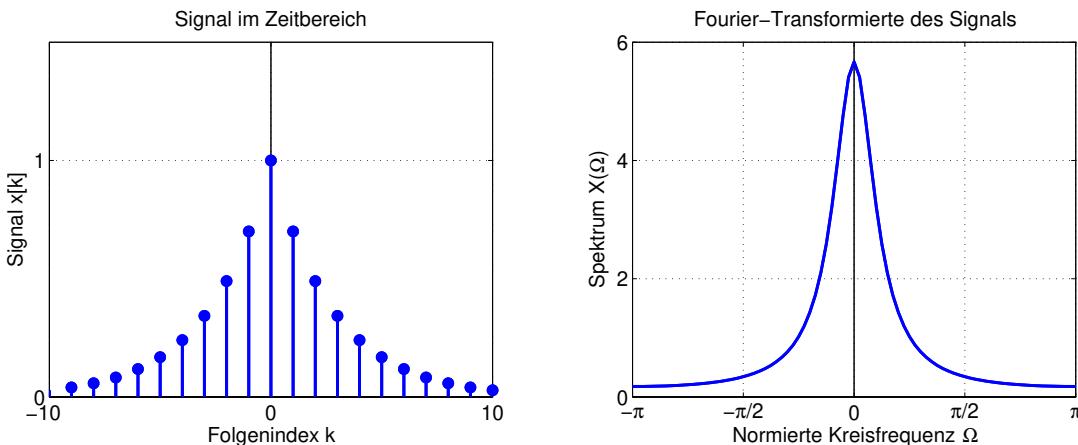


Bild 7.10: Achsensymmetrische Exponentialfolge und ihr Spektrum für $\lambda = 0.7$

7.2.5 Differenz von Folgen

Ist das Spektrum $X(\Omega)$ einer Signalfolge $x[k]$ bekannt, ergibt sich das Spektrum der Differenz zweier aufeinanderfolgender Folgenwerte $x[k] - x[k - 1]$ durch Anwendung der Verschiebungsregel zu

$$F\{x[k] - x[k - 1]\} = X(\Omega) \cdot (1 - e^{-j\cdot\Omega}) \quad (7.67)$$

Die Differenzregel ist damit eine Anwendung der Verschiebungsregel. Da die Differenz aber der Differentialzeit kontinuierlicher Signale entspricht, wird sie als eigene Rechenregel dargestellt.

7.2.6 Summe von Folgen

Ist das Spektrum $X(\Omega)$ einer Signalfolge $x[k]$ bekannt, ergibt sich das Spektrum der Summe aller Folgenwerte zu

$$F\left\{\sum_{\kappa=-\infty}^k x[\kappa]\right\} = \frac{1}{1 - e^{-j\cdot\Omega}} \cdot X(\Omega) + \pi \cdot X(0) \cdot \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega + 2\cdot\pi\cdot\nu) \quad (7.68)$$

Diese Regel wird ohne Beweis und Beispiel aufgeführt. Der Beweis wird über die Faltungsregel in Kombination mit der Fourier-Transformierten einer Sprungfolge in einer Übungsaufgabe geführt.

7.2.7 Differentiation im Frequenzbereich

Wird das Spektrum $X(\Omega)$ einer Signalfolge $x[k]$ abgeleitet, wird die Folge im Zeitbereich linear gewichtet. Es ergibt sich die Rechenregel

$$F\{k \cdot x[k]\} = j \cdot \frac{dX}{d\Omega} \quad (7.69)$$

Der Beweis ergibt sich aus einer Umformung der Definitionsgleichung.

$$\frac{dX}{d\Omega} = \frac{d}{d\Omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot e^{-j\cdot\Omega\cdot k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} -j \cdot k \cdot x[k] \cdot e^{-j\cdot\Omega\cdot k} = -j \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} k \cdot x[k] \cdot e^{-j\cdot\Omega\cdot k} \quad (7.70)$$

Beispiel: Differentiation im Frequenzbereich

Die Rechenregel zur Differentiation im Frequenzbereich kann dazu verwendet werden, das Spektrum der Folge

$$x[k] = k \cdot (\sigma[k+K] - \sigma[k-(K+1)]) = k \cdot y[k] \quad (7.71)$$

zu berechnen. Mit der Regel für die Differentiation im Frequenzbereich und dem Spektrum der Rechteckfolge $y[k]$ ergibt sich

$$X(\Omega) = -j \cdot \frac{dY}{d\Omega} = -j \cdot \frac{d}{d\Omega} \frac{\sin(K \cdot \Omega)}{\sin(\frac{\Omega}{2})} = -j \cdot \frac{K \cdot \cos(K \cdot \Omega) \cdot \sin(\frac{\Omega}{2}) - \frac{1}{2} \cdot \cos(\frac{\Omega}{2}) \cdot \sin(K \cdot \Omega)}{\sin^2(\frac{\Omega}{2})} \quad (7.72)$$

7.2.8 Faltung im Zeitbereich

Das Ausgangssignal zeitdiskreter LTI-System errechnet sich über die Faltungssumme.

$$y[k] = g[k] * u[k] = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} g[\kappa] \cdot u[k-\kappa] = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} g[k-\kappa] \cdot u[\kappa] \quad (7.73)$$

Sind die Spektren $G(\Omega)$ der Signalfolge $g[k]$ und $U(\Omega)$ der Signalfolge $u[k]$ bekannt, errechnet sich das Spektrum des Ausgangssignals über das Produkt der beiden Spektren

$$Y(\Omega) = G(\Omega) \cdot U(\Omega) \quad (7.74)$$

Der Beweis kann wie bei der z-Transformation durch Einsetzen in die Definitionsgleichung geführt werden.

$$F\{g[k] * u[k]\} = F\left\{ \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} g[\kappa] \cdot u[k-\kappa] \right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} g[\kappa] \cdot u[k-\kappa] \cdot e^{-j\cdot\Omega\cdot k} \quad (7.75)$$

Vertauschen der Summationsreihenfolge und Substitution ergibt

$$\begin{aligned} F\{g[k] * u[k]\} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} g[\kappa] \cdot u[k-\kappa] \cdot e^{-j\cdot\Omega\cdot k} = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[\kappa] \cdot u[k-\kappa] \cdot e^{-j\cdot\Omega\cdot k} \\ &= \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} g[\kappa] \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k-\kappa] \cdot e^{-j\cdot\Omega\cdot k} \cdot e^{j\cdot\Omega\cdot\kappa} \cdot e^{-j\cdot\Omega\cdot\kappa} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n] \cdot e^{-j\cdot\Omega\cdot n} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k-\kappa] \cdot e^{-j\cdot\Omega\cdot(k-\kappa)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n] \cdot e^{-j\cdot\Omega\cdot n} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m] \cdot e^{-j\cdot\Omega\cdot m} \\ &= G(\Omega) \cdot U(\Omega) \end{aligned} \quad (7.76)$$

Die Faltungsregel ist eine wesentliche Rechenregel der Fourier-Transformation für Signalfolgen, da sich das Ausgangssignal eines linearen zeitinvarianten Systems aus der Faltung von Eingangsfolge und Impulsantwort ergibt. Die Faltungsregel wird im Kapitel 1 detailliert aufgegriffen.

7.2.9 Multiplikation im Zeitbereich

Neben der Faltung ist bei der digitalen Signalverarbeitung die Multiplikation im Zeitbereich eine wichtige Operation. Sie wird verwendet, um den Ausschnitt eines Signals zu beschreiben, indem das Signal $x[k]$ mit einer sogenannten Fensterfunktion $w[k]$ multipliziert wird. Die Rechenregel zur Multiplikation im Zeitbereich ermöglicht die Berechnung des Spektrums von dem Signalausschnitt.

Sind die Spektren $X(\Omega)$ einer Signalfolge $x[k]$ und $W(\Omega)$ einer Signalfolge $w[k]$ bekannt, errechnet sich das Spektrum des Signals, das aus dem Produkt der beiden Signale

$$y[k] = x[k] \cdot w[k] \quad (7.77)$$

entsteht, durch Einsetzen der Signale in die Definitionsgleichung

$$Y(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot w[k] \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot k} \quad (7.78)$$

Die Substitution der Folge $w[k]$ durch ihre inverse Fourier-Transformierte

$$Y(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} W(\Theta) \cdot e^{j \cdot k \cdot \Theta} d\Theta \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot k} \quad (7.79)$$

und Tauschen der Reihenfolge von Integration und Summation

$$Y(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} W(\Theta) \cdot e^{j \cdot k \cdot \Theta} d\Theta \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot k} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} W(\Theta) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot e^{j \cdot (\Theta - \Omega) \cdot k} d\Theta \quad (7.80)$$

führt unter Anwendung der Verschiebungsregel im Frequenzbereich zu

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} W(\Theta) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot e^{j \cdot (\Theta - \Omega) \cdot k} d\Theta = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} W(\Theta) \cdot X(\Omega - \Theta) d\Theta \\ &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot X(\Omega) * W(\Omega) \end{aligned} \quad (7.81)$$

Die Multiplikation zweier Folgen im Zeitbereich führt demnach zu einer Faltung der entsprechenden Spektren im Frequenzbereich.

Beispiel: Fensterung als Multiplikation im Zeitbereich

Als Beispiel wird eine Kosinusfolge betrachtet, von der ein Ausschnitt über zwei Periodendauern liegt. Der Signalausschnitt ist in Bild 7.11 dargestellt und kann mathematisch beschrieben werden als

$$\begin{aligned} y[k] &= w[k] \cdot x[k] = (\sigma[k+10] - \sigma[k-11]) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{10} \cdot k\right) \\ &= (\sigma[k+10] - \sigma[k-11]) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{5} \cdot k\right) \end{aligned} \quad (7.82)$$

Das Spektrum der Folge $w[k]$ ergibt sich aus der berechneten Rechteckfolge und der Verschiebungsregel zu

$$W(\Omega) = \frac{\sin\left(\frac{21 \cdot \Omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)} \quad (7.83)$$

Das Spektrum der Kosinusfolge $x[k]$ wird berechnet zu

$$X(\Omega) = \pi \cdot \left(\delta\left(\Omega + \frac{\pi}{5}\right) + \delta\left(\Omega - \frac{\pi}{5}\right) \right) \quad (7.84)$$

Die Multiplikation im Zeitbereich führt zu Faltung im Frequenzbereich. Die Faltung der beiden Spektren führt zu einer Verschiebung von $W(\Omega)$ an die Stellen der Impulse. Damit ergibt sich für das Spektrum $Y(\Omega)$

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \pi \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{21 \cdot (\Omega + \frac{\pi}{5})}{2}\right)}{\sin\left(\frac{(\Omega + \frac{\pi}{5})}{2}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{21 \cdot (\Omega - \frac{\pi}{5})}{2}\right)}{\sin\left(\frac{(\Omega - \frac{\pi}{5})}{2}\right)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sin\left(21 \cdot \left(\frac{\Omega}{2} + \frac{\pi}{10}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2} + \frac{\pi}{10}\right)} + \frac{\sin\left(21 \cdot \left(\frac{\Omega}{2} - \frac{\pi}{10}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2} - \frac{\pi}{10}\right)} \right) \end{aligned} \quad (7.85)$$

Signal und Betrag des Spektrums sind in Bild 7.11 dargestellt.

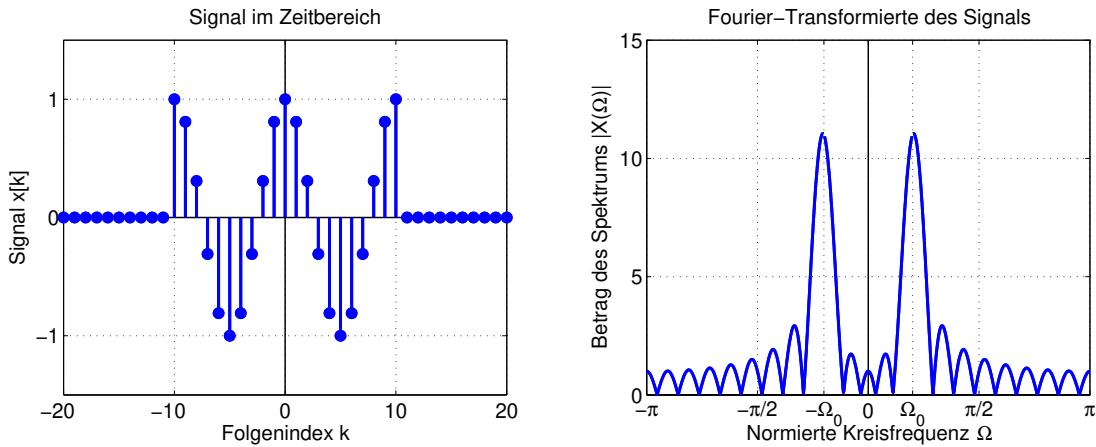


Bild 7.11: Ausschnitt einer Kosinusfolge und das entsprechende Spektrum

Durch die Multiplikation der Folge mit einer Rechteckfolge wird das Signal ausgeschnitten. Im Frequenzbereich falten sich die Spektren der beiden Signale, wobei das Spektrum der Kosinusfunktion aus zwei Impulsen an den Stellen $\pm \Omega_0$ besteht. Durch die Faltung wird das Spektrum der Rechteckfolge an die Stellen $\pm \Omega_0$ verschoben. Der Effekt, der bei der Fensterung von Signalen entsteht, wird bei der Schätzung von Spektren in Kapitel 1 weiter vertieft. Zusätzlich wird das Spektrum wegen der Abtastung periodisch in $2 \cdot \pi$ wiederholt.

7.2.10 Parsevalsche Gleichung

Die Parsevalsche Gleichung drückt aus, dass die Summe über dem Quadrat einer Folge gleich dem Integral über dem Quadrat ihrer Transformierten ist. Wie bei zeitkontinuierlichen Signalen wird es dazu verwendet, die Energie eines Signals im Zeitbereich oder im Frequenzbereich zu berechnen.

$$E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot x^*[k] = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) \cdot X^*(\Omega) d\Omega \quad (7.86)$$

Der Beweis dieser Rechenregel ergibt sich aus der Faltungsregel. Der linke Teil der Gleichung entspricht der Faltungssumme von $x[k]$ und $x^*[-k]$ an der Stelle $k = 0$.

$$x[k] * x^*[-k]|_{k=0} = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x[\kappa] \cdot x^*[-(k-\kappa)] \Big|_{k=0} = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x[\kappa] \cdot x^*[-k+\kappa] \Big|_{k=0} = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x[\kappa] \cdot x^*[\kappa] \quad (7.87)$$

Der Faltung im Zeitbereich entspricht die Multiplikation im Frequenzbereich. Mit den Spektren

$$x[k] \circ - \bullet X(\Omega) \quad (7.88)$$

und

$$x^*[-k] \circ - \bullet X^*(\Omega) \quad (7.89)$$

sowie der Definitionsgleichung für die inverse Fourier-Transformierte an der Stelle $k = 0$ ergibt sich

$$\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} x[\kappa] \cdot x^*[\kappa] = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) \cdot X^*(\Omega) \cdot e^{j \cdot k \cdot \Omega} d\Omega \Big|_{k=0} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) \cdot X^*(\Omega) d\Omega \quad (7.90)$$

Der Ausdruck $X(\Omega) \cdot X^*(\Omega)$ entspricht dem Betragsquadrat $|X(\Omega)|^2$ und wird als Energiedichtetespektrum bezeichnet. Es ist insbesondere bei der Berechnung stochastischer Prozesse von Bedeutung und wird in Teil C dieser Buchreihe wieder aufgegriffen.

7.2.11 Zusammenfassung der Rechenregeln zur Fourier-Transformation von Signalfolgen

Zur besseren Übersicht stellt Tabelle 7.4 die wesentlichen Eigenschaften der Fourier-Transformation von Signalfolgen noch einmal zusammen.

Tabelle 7.4: Rechenregeln der Fourier-Transformation von Signalfolgen

Regel	Funktion $x(t)$	Laplace-Transformierte $X(s)$
Linearität	$\nu_1 \cdot x_1(k) + \nu_2 \cdot x_2(k)$	$\nu_1 \cdot X_1(\Omega) + \nu_2 \cdot X_2(\Omega)$
Zeitverschiebung	$x[k - k_0]$	$e^{-j \cdot \Omega \cdot k_0} \cdot X(\Omega)$
Frequenzverschiebung	$x[k] \cdot e^{j \cdot k \cdot \Omega_0}$	$X(\Omega - \Omega_0)$
Zeitliche Spiegelung	$x[-k]$	$X(-\Omega)$
Differenz	$x[k] - x[k - 1]$	$X(\Omega) \cdot (1 - e^{-j \cdot \Omega})$
Summation	$\sum_{\kappa=-\infty}^k x[\kappa]$	$\frac{1}{1 - e^{-j \cdot \Omega}} \cdot X(\Omega) + \pi \cdot X(0) \cdot \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega + 2 \cdot \pi \cdot \nu)$
lineare Gewichtung	$k \cdot x[k]$	$j \cdot \frac{dX}{d\Omega}$
Faltung	$g[k] * u[k]$	$G(\Omega) \cdot U(\Omega)$
Multiplikation	$x[k] \cdot w[k]$	$\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot X(\Omega) * W(\Omega)$
Parsevalsche Gleichung	$E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot x^*[k]$	$E = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) \cdot X^*(\Omega) d\Omega$

Mit Hilfe der zusammengestellten Rechenregeln lassen sich weitere Korrespondenzen bestimmen.

Beispiel: Fourier-Transformierte der Sprungfolge

Die Rechenregeln der zeitdiskreten Fourier-Transformation werden angewendet, um die Korrespondenz der Sprungfolge zu bestimmen. Die Sprungfolge kann in zwei Anteile zerlegt werden, in die konstante Folge

$$x_1[k] = 0.5 \quad (7.91)$$

und die Folge

$$x_2[k] = \begin{cases} -0.5 & \text{für } k < 0 \\ +0.5 & \text{für } k \geq 0 \end{cases} \quad (7.92)$$

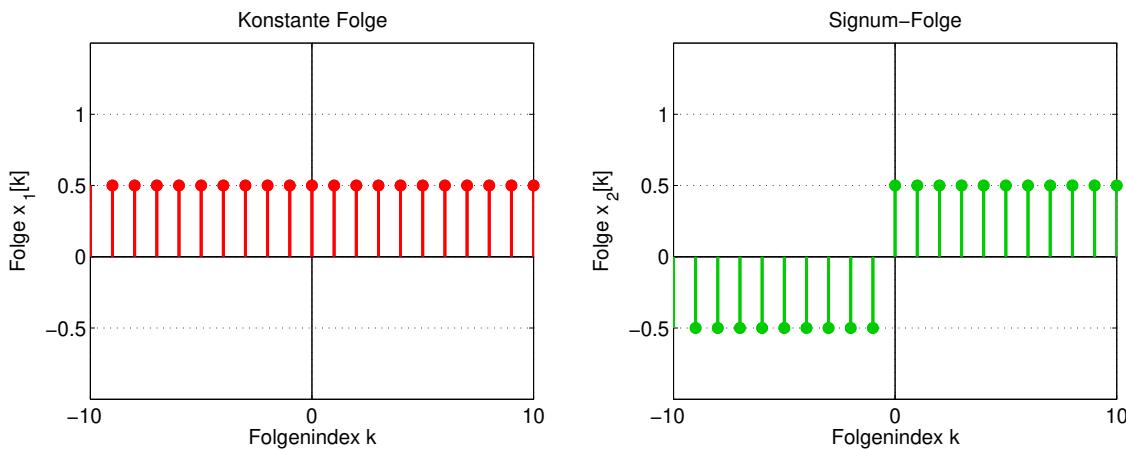


Bild 7.12: Zerlegung der Sprungfolge in eine konstante Folge und eine Signum-Folge

Die Summe der beiden Folgen ergibt die Sprungfolge. Für den Teil $x_1[k]$ kann die Fourier-Transformierte mit der Korrespondenz der Einsfolge und der Linearität angegeben werden zu

$$X_1(\Omega) = \pi \cdot \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2 \cdot \pi \cdot \nu) \quad (7.93)$$

Zur Ermittlung der Fourier-Transformierten des zweiten Teils $x_2[k]$ wird die Impulsfolge verwendet. Sie kann dargestellt werden als

$$\delta[k] = x_2[k] - x_2[k-1] \quad (7.94)$$

Die Fourier-Transformierte der Impulsfolge ist 1 und eine Verschiebung der Funktion um $k_0 = 1$ führt zur Multiplikation der Fourier-Transformierten mit e^{-j} . Damit ergibt sich für die Fourier-Transformierte

$$1 = (1 - e^{-j \cdot \Omega}) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2[k] \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot k} = (1 - e^{-j \cdot \Omega}) \cdot X_2(e^{j \cdot \Omega}) \quad (7.95)$$

und durch Auflösen

$$X_2(\Omega) = \frac{1}{1 - e^{-j \cdot \Omega}} \quad (7.96)$$

Durch Superposition von Gleichung (7.93) und Gleichung (7.96) ergibt sich die Fourier-Transformierte des diskreten Einheitssprungs zu

$$F(\sigma[k]) = \frac{1}{1 - e^{-j \cdot \Omega}} + \pi \cdot \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2 \cdot \pi \cdot \nu) \quad (7.97)$$

Bild 7.13 stellt den diskreten Einheitssprung und den Betrag seiner Fourier-Transformierten gegenüber.

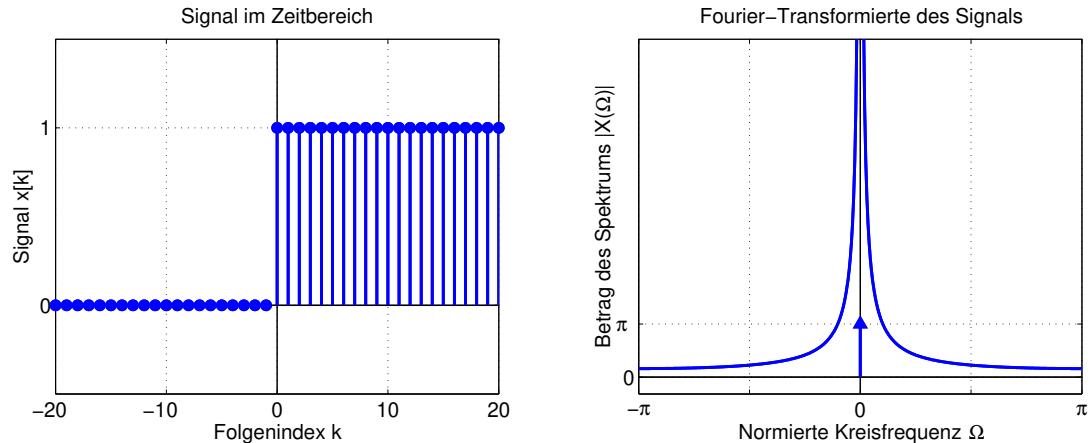


Bild 7.13: Diskreter Einheitssprung und der Betrag seines Spektrums

7.2.12 Korrespondenzen der Fourier-Transformation von Signalfolgen

Tabelle 7.5 stellt wichtige Korrespondenzen der Fourier-Transformation von Signalfolgen zusammen.

Tabelle 7.5: Korrespondenzen der Laplace-Transformation (2/2)

Nr	Folge $x[k]$	Fourier-Transformierte $X(\Omega)$
1	$\delta[k]$	1
2	1	$2 \cdot \pi \cdot \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega + 2 \cdot \pi \cdot \nu)$
3	$\delta[k - k_0]$	$e^{-j \cdot \Omega \cdot k_0}$
4	$\lambda^k \cdot \sigma[k]$	$\frac{1}{1 - \lambda \cdot e^{-j \cdot \Omega}}$ für $ \lambda < 1$
5	$(k+1) \cdot \lambda^k \cdot \sigma[k]$	$\frac{1}{(1 - \lambda \cdot e^{-j \cdot \Omega})^2}$ für $ \lambda < 1$
6	$\sigma[k]$	$\frac{1}{1 - e^{-j \cdot \Omega}} + \pi \cdot \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega + 2 \cdot \pi \cdot \nu)$
7	$e^{j \cdot \Omega \cdot k_0}$	$2 \cdot \pi \cdot \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 + 2 \cdot \pi \cdot \nu)$
8	$x[k] = \sigma[k] - \sigma[k - k_0]$	$e^{-j \cdot \frac{\Omega \cdot (k_0 - 1)}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{k_0 \cdot \Omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$
9	$\sin[\Omega_0 \cdot k]$	$j \cdot \pi \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega + \Omega_0 + 2 \cdot \pi \cdot n) - \delta(\Omega - \Omega_0 + 2 \cdot \pi \cdot n)$
10	$\cos[\Omega_0 \cdot k]$	$\pi \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega + \Omega_0 + 2 \cdot \pi \cdot n) + \delta(\Omega - \Omega_0 + 2 \cdot \pi \cdot n)$
11	$\text{sgn}[k]$	$\frac{2}{1 - e^{-j \cdot \Omega}}$

7.3 Fourier-Transformation von Signalfolgen und andere Integraltransformationen

Bei der Diskussion der Fourier-Transformation von Signalfolgen in den vorangegangenen Abschnitten wird auf die Ähnlichkeit zur Fourier-Transformation von Signalfolgen und der z-Transformation verwiesen. Zur Verbesserung des Verständnisses wird der Zusammenhang zwischen der Fourier-Transformation von Signalfolgen und den anderen Integraltransformationen weiter vertieft.

7.3.1 Zusammenhang zwischen Fourier-Transformation von Signalfolgen und Fourier-Transformation kontinuierlicher Signale

In Kapitel 7.1.2 wird die Definitionsgleichung der Fourier-Transformation für Folgen über die Fourier-Transformation von ideal abgetasteten Signalen hergeleitet. Der Zusammenhang zwischen den unterschiedlichen Signalen und ihren Spektren wird in diesem Abschnitt weiter vertieft. In Bild 7.14 sind die unterschiedlichen Signale und ihre Spektren dargestellt.

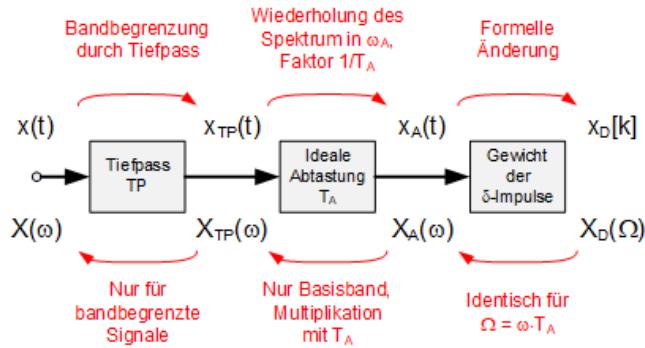


Bild 7.14: Zusammenhang zwischen den Spektren des zeitkontinuierlichen Signals $x(t)$, des abgetasteten Signals $x_A(t)$ und der Fourier-Transformierten der entsprechenden Folge $x_D[k]$

Das zeitkontinuierliche Signal $x(t)$ besitzt ein Spektrum $X(\omega)$. Um das Abtasttheorem zu erfüllen, wird es mit einem Tiefpass bandbegrenzt. Es entsteht das Signal $x_{TP}(t)$ mit dem Spektrum $X_{TP}(\omega)$. Wegen der Abtastung ist das Spektrum $X_A(\omega)$ periodisch in ω_A und mit dem Kehrwert der Abtastzeit $1/T_A$ skaliert. Die Folge $x_D[k]$ der Abtastwerte besitzt das Spektrum $X_D(\Omega)$, das für $\Omega = \omega \cdot T_A$ dem Spektrum $X_A(\omega)$ entspricht. Das Basisband von dem Spektrum $X_A(\omega)$ entspricht dem Spektrum $X_{TP}(\omega)$ und, wenn das Signal $x(t)$ bandbegrenzt ist, auch dem Spektrum $X(\omega)$. Dieser Zusammenhang der verschiedenen Signale und ihrer Spektren wird an einem Beispiel illustriert.

Beispiel: Zusammenhang zwischen Spektren zeitkontinuierlicher Signale und Signalfolgen

Gegeben ist ein kausales, zeitkontinuierliches Signal

$$x(t) = (e^{-t} - e^{-2 \cdot t}) \cdot \sigma(t) \quad (7.98)$$

Das Signal besitzt die Laplace-Transformierte

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s+2} \quad (7.99)$$

Da die Laplace-Transformierte nur Pole in der negativen Halbebene besitzt, ergibt sich das Spektrum $X(\omega)$ zu

$$X(\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega + 1} \cdot \frac{1}{j \cdot \omega + 2} = \frac{1}{2 - \omega^2 + 3 \cdot j \cdot \omega} \quad (7.100)$$

Das zeitkontinuierliche Signal $x(t)$ sowie der Betrag des zugehörigen Spektrums $|X(\omega)|$ sind in Bild 7.15 dargestellt.

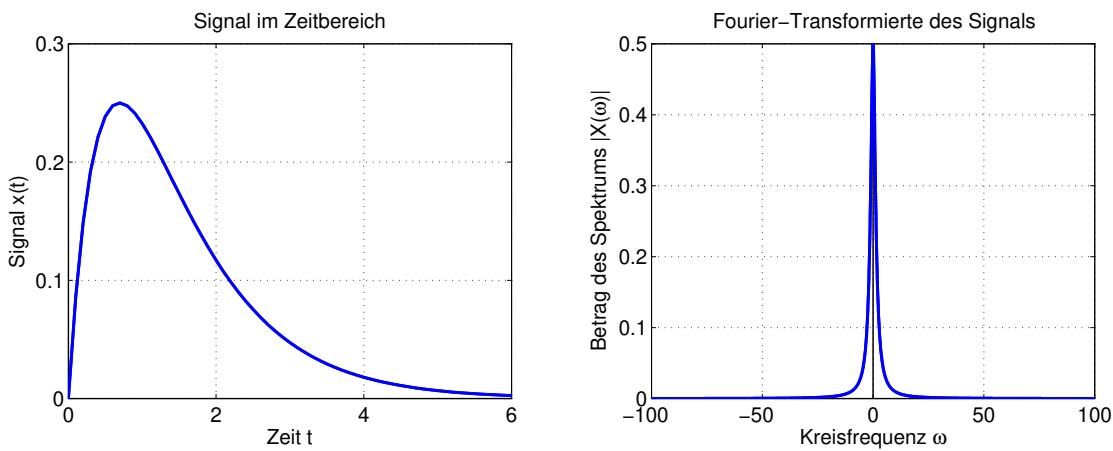


Bild 7.15: Zeitkontinuierliches Signal $x(t)$ sowie der Betrag des zugehörigen Spektrums $|X(\omega)|$

Das Signal wird mit einer Abtastzeit $T_A = \pi/25$ abgetastet. Dadurch wird das Spektrum periodisch in $\omega_A = 50$ wiederholt und mit dem Faktor $1/T_A = 25/\pi$ multipliziert. Das Spektrum des ideal abgetasteten Signals $x_A(t)$ ist in Bild 7.16 dargestellt.

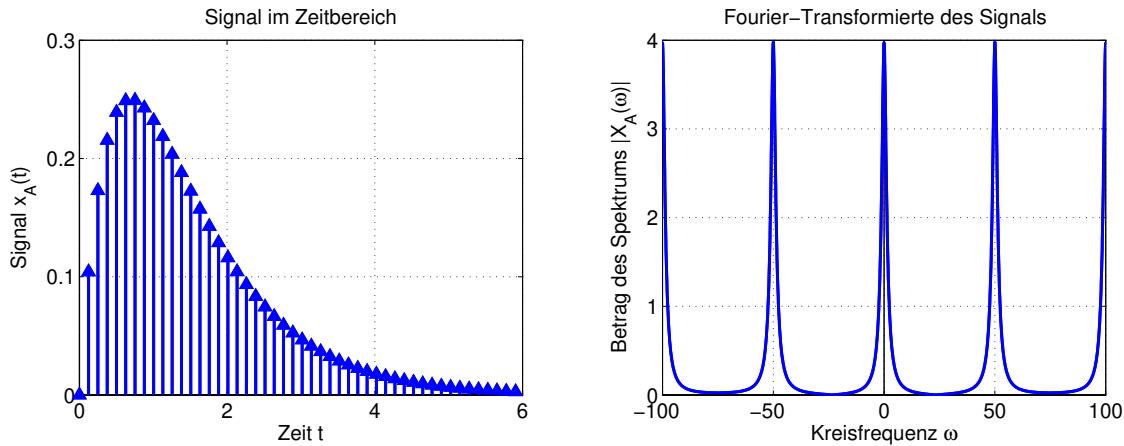


Bild 7.16: Ideal abgetastetes Signal $x_A(t)$ sowie der Betrag des zugehörigen Spektrums $|X_A(\omega)|$

Das Spektrum der zugehörigen Signalfolge

$$x_D[k] = (e^{-k \cdot T_A} - e^{-2 \cdot k \cdot T_A}) \cdot \sigma[k] \quad (7.101)$$

ist kontinuierlich und errechnet sich über die Definitionsgleichung der Fourier-Transformation für Folgen zu

$$X_D(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_D[k] \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (e^{-k \cdot T_A} - e^{-2 \cdot k \cdot T_A}) \cdot \sigma[k] \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot k} \quad (7.102)$$

Da es sich um eine kausale Folge handelt, kann die Summe auf zwei geometrische Reihen zurückgeführt und berechnet werden.

$$\begin{aligned} X_D(\Omega) &= \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-k \cdot T_A} - e^{-2 \cdot k \cdot T_A}) \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot k} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k \cdot T_A} \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot k} - \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2 \cdot k \cdot T_A} \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-T_A - j\Omega})^k - \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-2 \cdot T_A - j\Omega})^k = \frac{1}{1 - e^{-T_A - j\Omega}} - \frac{1}{1 - e^{-2 \cdot T_A - j\Omega}} \end{aligned} \quad (7.103)$$

Bild 7.17 zeigt die Signalfolge $x_D[k]$ und den Betrag des Spektrums der Signalfolge $|X_D(\Omega)|$ im Vergleich zum Spektrum $X_A(\omega)$ des ideal abgetasteten Signals $x_A(t)$, wobei $X_A(\omega)$ mit normierter Frequenz dargestellt ist.

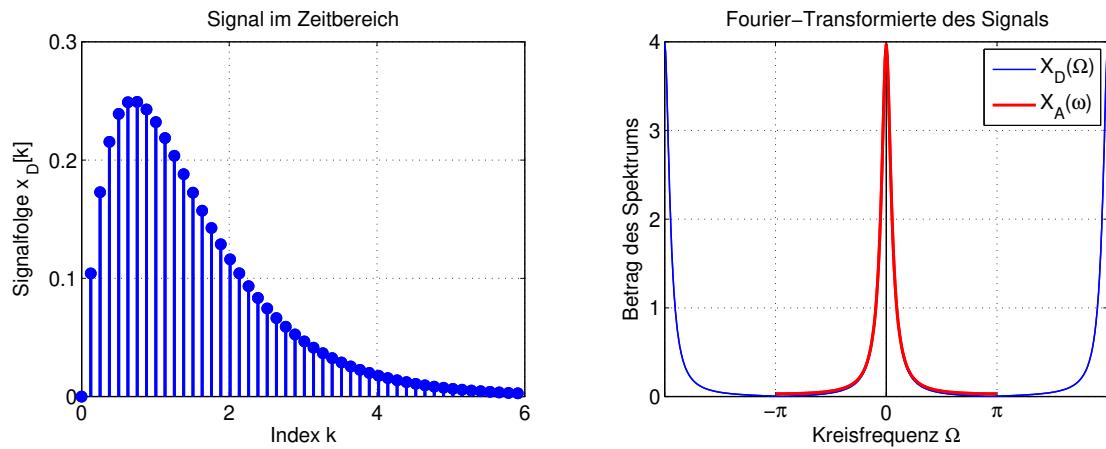


Bild 7.17: Folge der Abtastwerte $x_D[k]$ sowie der Betrag des zugehörigen Spektrums $|X_D(\Omega)|$

Ein Vergleich der unterschiedlichen Spektren zeigt, dass mit der Fourier-Transformation der Signalfolge $x_D[k]$ das Spektrum des zeitkontinuierlichen Signals berechnet werden kann, wenn das Abtasttheorem eingehalten wird. Allerdings müssen dazu unendlich viele Abtastwerte $x_D[k]$ vorliegen, was normalerweise nicht der Fall ist. Die Bestimmung des Spektrums eines Signals bei einer endlichen Anzahl von Abtastwerten wird in Kapitel 1 diskutiert.

7.3.2 Zusammenhang zwischen z-Transformation und Fourier-Transformation kausaler Signalfolgen

Bei dem Vergleich der Definitionsgleichungen der z-Transformation

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] \cdot z^{-k} \quad (7.104)$$

und der Fourier-Transformation von kausalen Folgen

$$X(\Omega) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] \cdot e^{-j \cdot k \cdot \Omega} \quad (7.105)$$

fällt auf, dass die Variable z der z-Transformation bei der Fourier-Transformation von kausalen Folgen durch den Ausdruck $e^{j\omega}$ ersetzt wird. Grafisch gesehen wird bei dem Übergang von der z-Transformierten auf die Fourier-Transformierte das Spektrum über dem Einheitskreis abgewickelt.

Beispiel: Zusammenhang zwischen z-Transformation und Fourier-Transformation von Signalfolgen

Dieser Sachverhalt wird anhand eines Signals mit der z-Transformierten

$$X(z) = \frac{z^2}{z^2 - z + 0.5} \quad (7.106)$$

anschaulich dargestellt. Bild 7.18 zeigt die Pol-Nullstellenverteilung der z-Transformierten X(z).

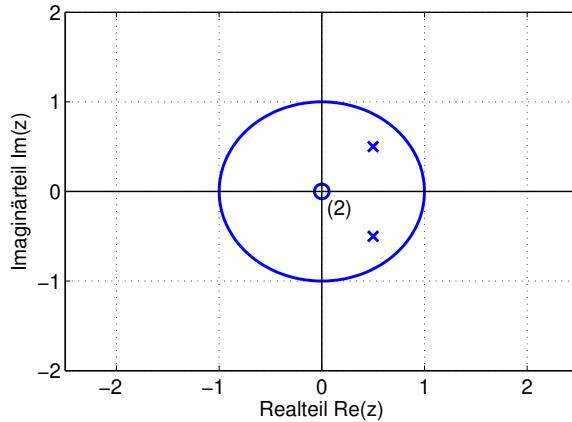


Bild 7.18: Pol-Nullstellenverteilung der z-Transformierten X(z)

Die z-Transformierte X(z) hat ein konjugiertes Polpaar an der Stelle $\alpha = 0.5 \pm 0.5j$ und eine doppelte Nullstelle $\beta = 0$. Beide Pole liegen innerhalb des Einheitskreises. Der Betrag der z-Transformierten und der Betrag der Fourier-Transformierten werden in Bild 7.19 verglichen.

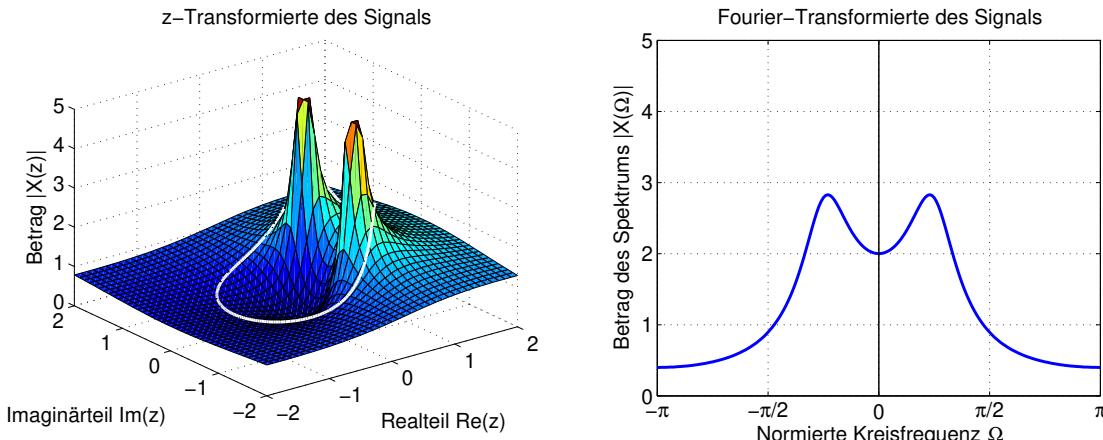


Bild 7.19: Vergleich des Betrags der z-Transformierten X(z) und der Fourier-Transformierten

In der linken Grafik ist der Betrag der z-Transformierten dargestellt. An den beiden Polen wird der Betrag der Übertragungsfunktion unendlich groß, in der Grafik wird er auf den Wert 5 begrenzt. Außerdem ist mit dem weißen Kreis der Betrag der Übertragungsfunktion über dem Einheitskreis dargestellt. Die Abwicklung dieses Kreises entspricht dem in der rechten Grafik dargestellten Betrag des Spektrums. Der Betrag des Spektrums ist nahe den Polen groß und sinkt mit steigendem Abstand zu den Polen ab.

Bild 7.20 stellt die Phase der z-Transformierten und die Phase der Fourier-Transformierten dar.

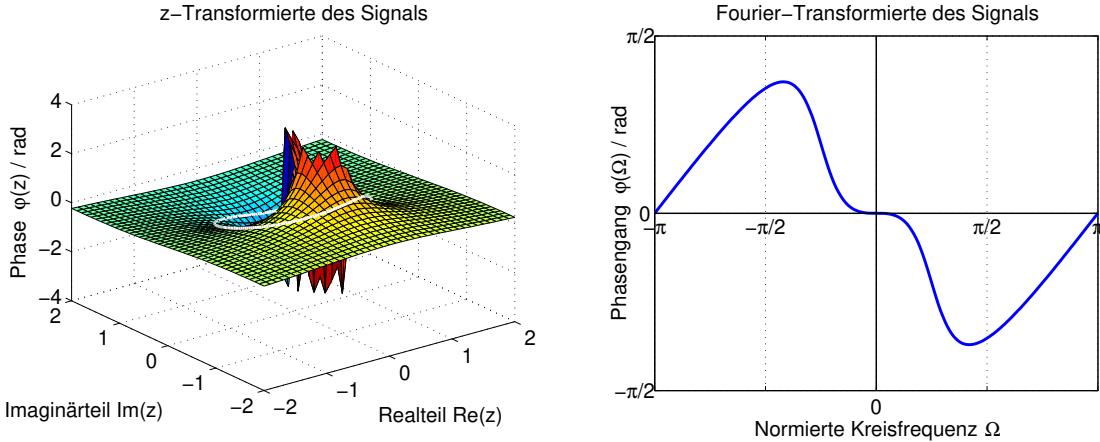


Bild 7.20: Vergleich der Phase der z-Transformierten $X(z)$ und der Fourier-Transformierten

In der linken Grafik ist die Phase der z-Transformierten dargestellt. Zwischen der Nullstelle und den Polen im Koordinatenursprung ändert sich die Phase von $-\pi$ auf π . Aufgrund der räumlichen Darstellung ist dieser Sprung leider verdeckt. Mit dem weißen Kreis ist die Phase der Übertragungsfunktion über dem Einheitskreis dargestellt. Die Abwicklung dieses Kreises entspricht der in der rechten Grafik dargestellten Phase des Spektrums. Die Phasenänderung des Spektrums ist nahe den Polen groß und sinkt mit steigendem Abstand zu den Polen ab.

Der Vergleich zeigt, dass die Fourier-Transformierte einer Folge aus der z-Transformierten über die Substitution $z = e^{j\omega}$ gewonnen werden kann. Dazu ist es allerdings erforderlich, dass der Einheitskreis im Konvergenzbereich der z-Transformierten liegt. Nach den Ausführungen zur z-Transformation in Kapitel 5.1 ist das der Fall, wenn alle Pole der z-Transformierten im Einheitskreis liegen.

Beispiel: Berechnung der Fourier-Transformierten aus der z-Transformierten

Die Fourier-Transformierte eines Signals mit der z-Transformierten

$$X(z) = \frac{z^2}{z^2 - z + 0.5} \quad (7.107)$$

soll berechnet werden. Die Pole der z-Transformierten liegen nach Bild 7.18 innerhalb des Einheitskreises. Damit ergibt sich die Fourier-Transformierte aus

$$X(\Omega) = X(z)|_{z=e^{j\Omega}} = \frac{e^{j \cdot 2 \cdot \Omega}}{e^{j \cdot 2 \cdot \Omega} - e^{j \cdot \Omega} + 0.5} \quad (7.108)$$

Der Betrag des Spektrums ist bereits in Bild 7.19 dargestellt.

7.4 Berechnung von Korrespondenzen der Fourier-Transformation von Signalfolgen

In den vorangegangenen Abschnitten werden unterschiedliche Methoden zur Berechnung von Korrespondenzen der Fourier-Transformation von Signalfolgen diskutiert. Zur besseren Übersicht stellt Bild 7.21 die unterschiedlichen Methoden zusammen und gibt die Bedingungen an, unter denen die entsprechenden Methoden angewendet werden können.

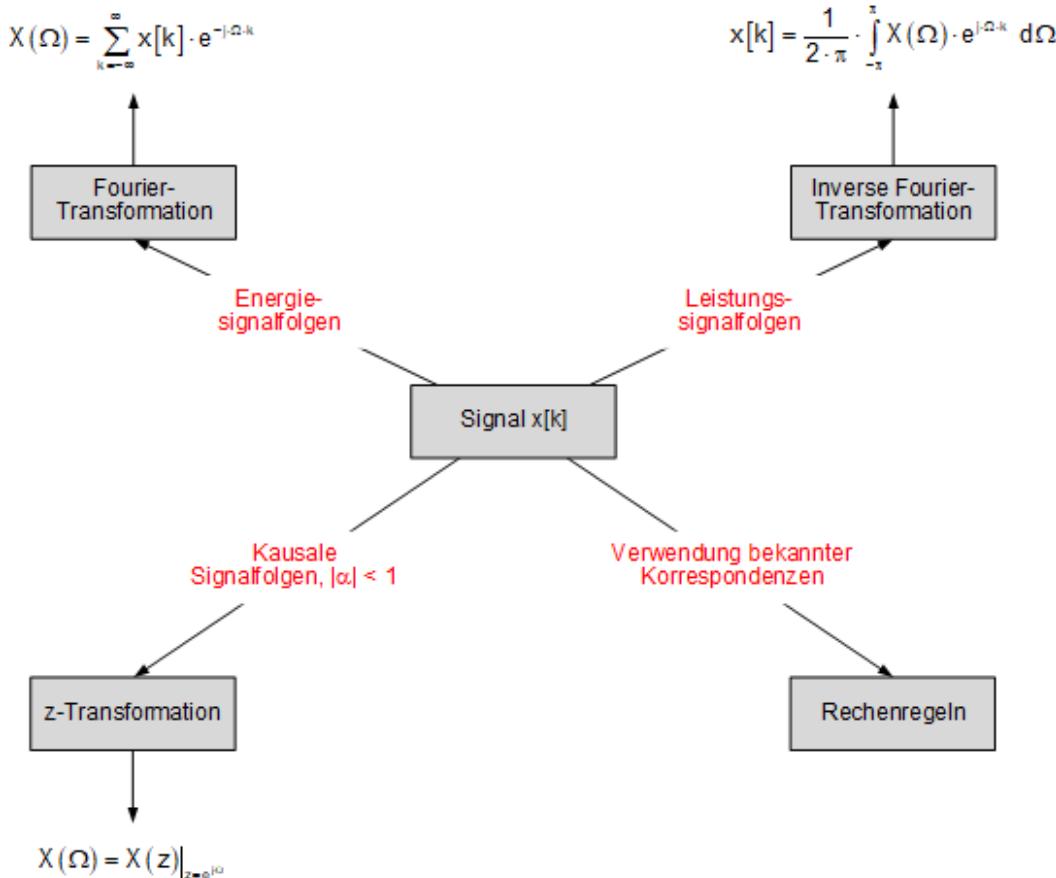


Bild 7.21: Methoden zur Berechnung von Korrespondenzen der Fourier-Transformation von Signalfolgen

Korrespondenzen der Fourier-Transformation können über die Definitionsgleichungen der Fourier-Transformation und der inversen Fourier-Transformation berechnet werden, wenn die entsprechenden Integrale konvergieren. Bei Energiesignalfolgen ist das für die Definitionsgleichung der Fourier-Transformation generell der Fall. Bei Leistungssignalfolgen wird ausgehend von einer Fourier-Transformierten $X(\Omega)$ die zugehörige Signalfolge $x[k]$ bestimmt.

Aus der z-Transformierten $X(z)$ ergibt sich die Fourier-Transformierte $X(\Omega)$ durch Substitution, wenn die Signalfolge $x[k]$ kausal ist und die Pole von $X(z)$ im Einheitskreis ($|\alpha| < 1$).

7.5 Literatur

7.5.1 Literaturstellen mit besonders anschaulicher Darstellung

- [Lyon04] Lyons, Richard G.: Understanding Digital Signal Processing,
Prentice Hall, New Jersey, 2004
- [Schei05] Scheithauer, Rainer: Signale und Systeme,
2. Auflage, B.G. Teubner Stuttgart, 2005
- [Stea99] Stearns, Samuel: Digitale Verarbeitung analoger Signale,
7. Auflage, Oldenbourg Verlag München, 1999

7.5.2 Literaturstellen mit praktischen Anwendungen

- [Wern08] Werner, Martin: Signale und Systeme,
Vieweg Studium Technik, Wiesbaden, 2008
- [Meye08] Meyer, Martin: Signalverarbeitung – Analoge und digitale Signale, Systeme und Filter,
Vieweg Studium Technik, Wiesbaden, 2008

7.5.3 Literatur zu MATLAB

- [Schw07] Schweizer, Wolfgang: MATLAB kompakt,
Oldenbourg Verlag München, 2007
- [Stei07] Stein, Ulrich: Einstieg in das Programmieren mit MATLAB,
Fachbuchverlag Leipzig, 2007

7.5.4 Weiterführende Literatur

- [Oppre04] Oppenheim, Alan: Zeitdiskrete Signalverarbeitung,
2. überarbeitete Auflage, Pearson Studium, 2004
- [Kamm98] Kammeyer, Karl: Digitale Signalverarbeitung,
B.G. Teubner Stuttgart, 1998

8 Frequenzgang zeitdiskreter Systeme

In Kapitel 4 und 6 werden Systeme im Zeit- und Bildbereich behandelt. Es wird gezeigt, wie Systemantworten berechnet werden können. Außerdem wird das Verhalten der Systeme mit Hilfe von Übertragungsfunktionen beschrieben.

Die Fourier-Transformation für zeitkontinuierliche Signale und Systeme ermöglicht es, die Änderung des Spektrums eines Signals beim Durchlaufen eines dynamischen Systems zu beschreiben. Die Änderung kann durch die Multiplikation des Spektrums vom Eingangssignal mit dem Frequenzgang des Systems beschrieben werden. Dieser Zusammenhang wird auf verschiedene Arten auch für zeitdiskrete Systeme hergeleitet.

Der Frequenzgang eines zeitdiskreten Systems kann wie bei zeitkontinuierlichen Systemen mit Ortskurven, Frequenzgangkennlinien und Bode-Diagrammen beschrieben werden. Alle Darstellungsformen werden eingeführt, wobei sich die Darstellungen im Wesentlichen auf Frequenzgangkennlinien und Bode-Diagramme konzentrieren.

Besonders anschauliche Darstellungen von Frequenzgangkennlinien ergeben sich für Systeme mit gebrochen rationalen Übertragungsfunktionen. Für die Darstellung der zugehörigen Frequenzgangskennlinien können die Übertragungsfunktionen in Linearfaktoren zerlegt werden. Damit lässt sich der Frequenzgang eines Systems auf die Summe der logarithmierten Amplituden- und Phasengänge von Linearfaktoren zurückführen. Dieses Verfahren wird vorgestellt und an Beispielen vertieft.

Systeme mit endlicher Impulsantwort (FIR-Systeme) weisen oft eine Symmetrie auf, die das Berechnen des Frequenzgangs vereinfacht. Erfüllt die Symmetrie bestimmte Anforderungen, wird der Phasengang von FIR-Systemen linear. Die Anforderungen werden analysiert und Vorteile eines linearen Phasengangs werden an Beispielen verdeutlicht.

Das Kapitel schließt mit Übungsaufgaben zum Frequenzgang zeitdiskreter Systeme. Diese Übungsaufgaben verdeutlichen den Zusammenhang zwischen Zeitbereich, Bildbereich und Frequenzbereich.

8.1 Motivation und Herleitung

Der Begriff des Frequenzgangs eines zeitdiskreten Systems kann auf unterschiedlichen Wegen erklärt werden. Um das Wissen aus zeitkontinuierlichen Systemen, der Systembeschreibung im Zeit- und im z-Bereich sowie die Fourier-Transformation von Signalfolgen miteinander zu vernetzen, werden an dieser Stelle unterschiedliche Motivationen und Herleitungen vorgestellt.

8.1.1 Berechnung des Frequenzgangs aus der Differenzengleichung eines Systems

Ausgangspunkt für die Herleitung des Frequenzgangs eines Systems ist die Differenzengleichung

$$\sum_{n=0}^N c_n \cdot y[k-n] = \sum_{m=0}^M d_m \cdot u[k-m] \quad (8.1)$$

Mit der Verschiebungsregel der Fourier-Transformation für Signalfolgen kann die Gleichung in den Frequenzbereich transformiert werden:

$$\sum_{n=0}^N c_n \cdot Y(\Omega) \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot n} = \sum_{m=0}^M d_m \cdot U(\Omega) \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot m} \quad (8.2)$$

Durch Ausklammern von $U(\Omega)$ und $Y(\Omega)$ ergibt sich

$$G(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{U(\Omega)} = \frac{\sum_{m=0}^M d_m \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot m}}{\sum_{n=0}^N c_n \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot n}} \quad (8.3)$$

Die resultierende Funktion $G(\Omega)$ wird als Frequenzgang des Systems bezeichnet. In Abschnitt 8.1.3 wird sich zeigen, dass der Frequenzgang $G(\Omega)$ für kausale und stabile Systeme gleichzeitig die Fourier-Transformierte der Impulsantwort $g[k]$ ist.

Beispiel: Rekursives Tiefpass-Filter

Das Vorgehen wird am Beispiel eines rekursiven Tiefpassfilters verdeutlicht. Die Transformation der Differenzengleichung

$$y[k] - GF \cdot y[k-1] = (1 - GF) \cdot u[k] \quad (8.4)$$

in den Frequenzbereich führt mit $0 < GF < 1$ zu der Gleichung

$$Y(\Omega) - GF \cdot Y(\Omega) \cdot e^{-j\cdot\Omega} = (1 - GF) \cdot U(\Omega) \quad (8.5)$$

Ein Auflösen der Gleichung führt zu der Übertragungsfunktion

$$G(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{U(\Omega)} = \frac{1 - GF}{1 - GF \cdot e^{-j\cdot\Omega}} \quad (8.6)$$

Der Frequenzgang wird im Abschnitt 8.2 dargestellt und interpretiert.

8.1.2 Berechnung des Frequenzgangs aus der Übertragungsfunktion $G(z)$ eines Systems

Die Berechnung der Übertragungsfunktion $G(\Omega)$ wird in Abschnitt 8.1.1 formal genauso durchgeführt wie die Berechnung der Übertragungsfunktion im z -Bereich. Ein Vergleich der Fourier- und der z -Transformierten der Differenzengleichung

$$\sum_{n=0}^N c_n \cdot Y(z) \cdot z^{-n} = \sum_{m=0}^M d_m \cdot U(z) \cdot z^{-m} \quad (8.7)$$

zeigt, dass die beiden Transformierten und damit auch die beiden Übertragungsfunktionen übereinstimmen, wenn die Variable z durch den Ausdruck $e^{j\cdot\Omega}$ substituiert wird. Aus Kapitel 7.3.2 ist bekannt, dass diese Substitution nur dann durchgeführt werden darf, wenn der Einheitskreis im Konvergenzbereich der z -Transformierten $G(z)$ liegt. Das ist bei asymptotisch stabilen Systemen der Fall, sodass für asymptotisch stabile Systeme gilt:

$$G(\Omega) = G(z)|_{z=e^{j\cdot\Omega}} \quad (8.8)$$

Beispiel: Rekursives Tiefpass-Filter

Das rekursive Tiefpass-Filter hat im z-Bereich die Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{1 - GF}{1 - GF \cdot z^{-1}} \quad (8.9)$$

Der Pol der Übertragungsfunktion $G(z)$ liegt an der Stelle

$$\alpha = GF \quad (8.10)$$

Für $0 < GF < 1$ liegt der Pol innerhalb des Einheitskreises. Da in diesem Fall das System stabil ist, ergibt sich für diesen Fall der Frequenzgang des Systems zu

$$G(\Omega) = G(z)|_{z=e^{j\Omega}} = \frac{1 - GF}{1 - GF \cdot e^{-j\Omega}} \quad (8.11)$$

8.1.3 Faltungsregel der Fourier-Transformation von Signalfolgen

Bei der Beschreibung von zeitdiskreten Systemen wird das Ausgangssignal $y[k]$ eines Systems über die Faltung von Eingangssignal $u[k]$ und Impulsantwort $g[k]$ berechnet.

$$y[k] = g[k] * u[k] = u[k] * g[k] \quad (8.12)$$

Mit der Faltungsregel der Fourier-Transformation ergibt sich im Frequenzbereich der Zusammenhang

$$Y(\Omega) = G(\Omega) \cdot U(\Omega) = U(\Omega) \cdot G(\Omega) \quad (8.13)$$

Das Spektrum $Y(\Omega)$ des Ausgangssignals $y[k]$ errechnet sich aus dem Produkt der Spektren der Impulsantwort $G(\Omega)$ und des Spektrums des Eingangssignals $U(\Omega)$. Charakteristisch für das System ist die Übertragungsfunktion $G(\Omega)$, die sich aus dem Quotienten der Fourier-Transformierten von Aus- und Eingangssignal ergibt.

$$G(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{U(\Omega)} \quad (8.14)$$

Sie entspricht gemäß der obigen Herleitung der Fourier-Transformierten der Impulsantwort $g[k]$.

Beispiel: Rekursives Tiefpass-Filter

Für ein rekursives Filter mit der Differenzengleichung

$$y[k] - GF \cdot y[k - 1] = (1 - GF) \cdot u[k] \quad (8.15)$$

ergibt sich für $0 < GF < 1$ die gegen null konvergierende Impulsantwort

$$g[k] = GF^k \cdot \sigma[k] \quad (8.16)$$

Aus der Impulsantwort wird mit den Rechenregeln der Fourier-Transformation der Frequenzgang bestimmt zu

$$G(\Omega) = \frac{1 - GF}{1 - GF \cdot e^{-j \cdot \Omega}} \quad (8.17)$$

Alle Wege, den Frequenzgang des rekursiven Filters zu beschreiben, führen damit zu demselben Ergebnis.

8.1.4 Reaktion zeitdiskreter Systeme auf eine kausale, harmonische Anregung

Bei zeitkontinuierlichen, kausalen Systemen wird gezeigt, dass ein System bei Anregung mit einer kausalen harmonischen Anregung mit einem Signal antwortet, das sich aus einem Einschwingvorgang und einer harmonischen Antwort gleicher Frequenz zusammensetzt. Dieser Gedanke wird an dieser Stelle aufgegriffen und auf zeitdiskrete Systeme angewendet. Dazu wird zunächst die Systemreaktion auf ein Eingangssignal $u_1[k]$ der Form

$$u_1[k] = e^{j \cdot \Omega \cdot k} \cdot \sigma[k] \quad (8.18)$$

berechnet. Da das System und die Eingangsfolge kausal sind, ist die Ausgangsfolge für $k < 0$ null. Für $k \geq 0$ ergibt sich die Ausgangsfolge aus einer endlichen Faltungssumme.

$$y_1[k] = g[k] * u_1[k] = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} g[\kappa] \cdot u_1[k-\kappa] = \sum_{\kappa=0}^k g[\kappa] \cdot e^{j \cdot \Omega \cdot (k-\kappa)} = e^{j \cdot \Omega \cdot k} \cdot \sum_{\kappa=0}^k g[\kappa] \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot \kappa} \quad (8.19)$$

Um auf die Gleichungen für die Fourier-Transformation zu kommen, wird die Summe erweitert:

$$\begin{aligned} y_1[k] &= e^{j \cdot \Omega \cdot k} \cdot \sum_{\kappa=0}^k g[\kappa] \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot \kappa} = e^{j \cdot \Omega \cdot k} \cdot \sum_{\kappa=0}^{\infty} g[\kappa] \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot \kappa} \cdot \sigma[k] - e^{j \cdot \Omega \cdot k} \cdot \sum_{\kappa=k+1}^{\infty} g[\kappa] \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot \kappa} \cdot \sigma[k] \\ &= e^{j \cdot \Omega \cdot k} \cdot G(\Omega) \cdot \sigma[k] - e^{j \cdot \Omega \cdot k} \cdot \sum_{\kappa=k+1}^{\infty} g[\kappa] \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot \kappa} \cdot \sigma[k] \end{aligned} \quad (8.20)$$

Analog ergibt sich für die Eingangsfolge

$$u_2[k] = e^{-j \cdot \Omega \cdot k} \cdot \sigma[k] \quad (8.21)$$

die Ausgangsfolge

$$\begin{aligned} y_2[k] &= e^{-j \cdot \Omega \cdot k} \cdot \sum_{\kappa=0}^k g[n] \cdot e^{j \cdot \Omega \cdot \kappa} = e^{-j \cdot \Omega \cdot k} \cdot \sum_{\kappa=0}^{\infty} g[\kappa] \cdot e^{j \cdot \Omega \cdot \kappa} \cdot \sigma[k] - e^{-j \cdot \Omega \cdot k} \cdot \sum_{\kappa=k+1}^{\infty} g[\kappa] \cdot e^{j \cdot \Omega \cdot \kappa} \cdot \sigma[k] \\ &= e^{-j \cdot \Omega \cdot k} \cdot G(-\Omega) \cdot \sigma[k] - e^{-j \cdot \Omega \cdot k} \cdot \sum_{\kappa=k+1}^{\infty} g[\kappa] \cdot e^{j \cdot \Omega \cdot \kappa} \cdot \sigma[k] \end{aligned} \quad (8.22)$$

Mit der Eulerschen Formel kann damit die Systemreaktion auf eine kausale, harmonische Anregung der Form

$$u[k] = A \cdot \cos(\Omega \cdot k) \cdot \sigma[k] = \frac{A}{2} \cdot (e^{j \cdot \Omega \cdot k} + e^{-j \cdot \Omega \cdot k}) \cdot \sigma[k] \quad (8.23)$$

berechnet werden. Es ergibt sich die Folge

$$\begin{aligned} y[k] &= \frac{A}{2} \cdot \left(e^{j \cdot \Omega \cdot k} \cdot G(\Omega) - e^{j \cdot \Omega \cdot k} \cdot \sum_{\kappa=k+1}^{\infty} g[\kappa] \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot \kappa} \right) \cdot \sigma[k] \\ &\quad + \frac{A}{2} \cdot \left(e^{-j \cdot \Omega \cdot k} \cdot G(-\Omega) - e^{-j \cdot \Omega \cdot k} \cdot \sum_{\kappa=k+1}^{\infty} g[\kappa] \cdot e^{j \cdot \Omega \cdot \kappa} \right) \cdot \sigma[k] \\ &= \frac{A}{2} \cdot (e^{j \cdot \Omega \cdot k} \cdot G(\Omega) + e^{-j \cdot \Omega \cdot k} \cdot G(-\Omega)) \cdot \sigma[k] \\ &\quad - \frac{A}{2} \cdot \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} g[n] \cdot e^{j \cdot \Omega \cdot (k-n)} + \sum_{n=k+1}^{\infty} g[n] \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot (k-n)} \right) \cdot \sigma[k] \end{aligned} \quad (8.24)$$

Aufgrund der Symmetrieregeln der Fourier-Transformation ist

$$G(-\Omega) = |G(\Omega)| \cdot e^{-j \cdot \varphi(\Omega)} \quad (8.25)$$

und $y[k]$ kann vereinfacht werden zu

$$\begin{aligned} y[k] &= \frac{A}{2} \cdot |G(\Omega)| \cdot \left(e^{j \cdot \Omega \cdot k} \cdot e^{j \cdot \varphi(\Omega)} + e^{-j \cdot \Omega \cdot k} \cdot e^{-j \cdot \varphi(\Omega)} \right) \cdot \sigma[k] \\ &\quad - \frac{A}{2} \cdot \left(\sum_{\kappa=k+1}^{\infty} g[\kappa] \cdot e^{j \cdot \Omega \cdot (k-\kappa)} + \sum_{\kappa=k+1}^{\infty} g[\kappa] \cdot e^{-j \cdot \Omega \cdot (k-\kappa)} \right) \cdot \sigma[k] \\ &= A \cdot |G(\Omega)| \cdot \cos(\Omega \cdot k + \varphi(\Omega)) \cdot \sigma[k] - A \cdot \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} g[n] \cdot \cos(\Omega \cdot (k-n)) \right) \cdot \sigma[k] \end{aligned} \quad (8.26)$$

Der erste Term beschreibt die Systemreaktion auf die harmonische Anregung. Sie besitzt die gleiche Frequenz wie das Eingangssignal. Die Amplitude wird mit dem Betrag des Frequenzgangs $|G(\Omega)|$ multipliziert, die Phase ändert sich gegenüber dem Eingangssignal um die Phase des Frequenzgangs $\varphi(\Omega)$. Der zweite Term beschreibt das Einschwingen des Systems. Bei stabilen Systemen konvergiert die Impulsantwort $g[k]$ für $k \rightarrow \infty$ gegen null, sodass der zweite Summand bei stabilen Systemen gegen null geht. Damit gelten für zeitdiskrete Systeme bezüglich der Reaktion des Systems auf kausale, harmonische Anregungen dieselben Gesetzmäßigkeiten wie bei zeitkontinuierlichen Systemen.

8.2 Grafische Darstellung des Frequenzgangs

An dem Frequenzgang kann das Amplitudenverhältnis von Ein- und Ausgangssignal sowie die Phasenverschiebung als Funktion der normierten Kreisfrequenz Ω abgelesen werden. Die Beschreibung des Frequenzgangs erfolgt über den Amplitudengang und den Phasengang von Systemen. Sie werden in diesem Abschnitt berechnet und interpretiert. Der Frequenzgang zeitdiskreter Systeme entspricht der Fourier-Transformierten der Impulsantwort.

$$G(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k] \cdot e^{-j \cdot k \cdot \Omega} \quad (8.27)$$

Wegen der Periodizität der Exponentialfunktion mit imaginärem Argument ist jeder Summand der Summe in Gleichung (8.27) periodisch in 2π . Damit ist der Frequenzgang eines zeitdiskreten Systems analog zu dem Spektrum von Signalfolgen periodisch in 2π . Deshalb ist es ausreichend, den Frequenzgang in einem Bereich von $-\pi \dots +\pi$ darzustellen. Der Frequenzgang kann in kartesischen Koordinaten oder Polar-Koordinaten dargestellt werden. Bei der Darstellung in kartesischen Koordinaten wird der Frequenzgang in Realteil $G_R(\Omega)$ und Imaginärteil $G_I(\Omega)$ zerlegt. Bei der Darstellung in Polarkoordinaten wird der Frequenzgang mit Betrag $|G(\Omega)|$ und Phase $\varphi(\Omega)$ dargestellt.

$$G(\Omega) = G_R(\Omega) + j \cdot G_I(\Omega) = |G(\Omega)| \cdot e^{j \cdot \varphi(\Omega)} = A(\Omega) \cdot e^{j \cdot \varphi(\Omega)} \quad (8.28)$$

Der Betrag der Übertragungsfunktion $A(\Omega)$ wird als Amplitudengang und die Phase der Übertragungsfunktion $\varphi(\Omega)$ wird als Phasengang bezeichnet. Analog zu den Darstellungen des Frequenzgangs zeitkontinuierlicher Signale kann der Frequenzgang von Signalfolgen entweder als Ortskurve oder als Frequenzgangskennlinie dargestellt werden.

8.2.1 Ortskurven

Bei der Ortskurve wird der Frequenzgang in der komplexen Ebene abgebildet. Dazu werden für unterschiedliche Frequenzen $-\pi \leq \Omega \leq \pi$ Real- und Imaginärteil des Frequenzgangs bestimmt und die entsprechenden Punkte in die komplexe Ebene eingezeichnet.

Beispiel: Rekursives Tiefpass-Filter

In Kapitel 8.1 wird der Frequenzgang des rekursiven Tiefpasses erster Ordnung mit $0 < GF < 1$ berechnet.

$$G(\Omega) = \frac{1 - GF}{1 - GF \cdot e^{-j \cdot \Omega}} \quad (8.29)$$

Der Frequenzgang kann durch eine konjugiert komplexe Erweiterung in Real- und Imaginärteil aufgeteilt werden.

$$\begin{aligned} G(\Omega) &= \frac{1 - GF}{1 - GF \cdot e^{-j \cdot \Omega}} = \frac{1 - GF}{1 - GF \cdot \cos(\Omega) + j \cdot GF \cdot \sin(\Omega)} \\ &= (1 - GF) \cdot \frac{1 - GF \cdot \cos(\Omega) - j \cdot GF \cdot \sin(\Omega)}{(1 - GF \cdot \cos(\Omega))^2 + GF^2 \cdot \sin^2(\Omega)} \\ &= (1 - GF) \cdot \frac{1 - GF \cdot \cos(\Omega)}{1 + GF^2 - 2 \cdot GF \cdot \cos(\Omega)} - j \cdot (1 - GF) \cdot \frac{GF \cdot \sin(\Omega)}{1 + GF^2 - 2 \cdot GF \cdot \cos(\Omega)} \end{aligned} \quad (8.30)$$

Alternativ kann der Frequenzgang in Polarkoordinaten dargestellt werden, es ergibt sich der Betrag

$$A(\Omega) = |G(\Omega)| = \sqrt{\frac{1 - GF}{1 - GF \cdot \cos(\Omega) + j \cdot GF \cdot \sin(\Omega)}} = \frac{1 - GF}{\sqrt{1 + GF^2 - 2 \cdot GF \cdot \cos(\Omega)}} \quad (8.31)$$

und die Phase

$$\begin{aligned} \varphi(\Omega) &= \varphi_Z(\Omega) - \varphi_N(\Omega) = \arctan\left(\frac{Im(Z)}{Re(Z)}\right) - \arctan\left(\frac{Im(N)}{Re(N)}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{0}{1 - GF}\right) - \arctan\left(\frac{GF \cdot \sin(\Omega)}{1 - GF \cdot \cos(\Omega)}\right) = -\arctan\left(\frac{GF \cdot \sin(\Omega)}{1 - GF \cdot \cos(\Omega)}\right) \end{aligned} \quad (8.32)$$

Für den Frequenzbereich $-\pi \leq \Omega \leq \pi$ ergeben sich für $GF = 0.5$ und $GF = 0.9$ folgende Ortskurven.