Przebieg zmienności funkcji

Jakub Hajto

9 stycznia 2017

Badana funckja

$$f(x) = \frac{x^2(x-11)}{(x-2)^2}$$

1. Dziedzina:
   $D = \mathbb{R}\backslash\{2\}$

2. Zbiór wartości:
   $Z_w =< 0, +\infty)$

3. Miejsca zerowe:
   $f(x) = 0 \iff x = 1 \vee x = 0$

4. Przecięcie z osią OY:
   f(0) = 0

5. Granice na krańcach przedziałów:
   a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
   b) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$
   c) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$
   d) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

6. Asymptoty:
   a) ukośna:
      $y = x + 3$
   b) pionowa:
      $x = 2$

7. Pierwsza pochodna
   $f'(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 4x}{(x-2)^3} = \dfrac{x(x^2 - 6x + 4)}{(x-2)^3} = \dfrac{x(x - 3 + \sqrt{5}(x - 3 - \sqrt{5}))}{(x-2)^3}$

a) $f \nearrow dla x \in (-\infty,0) \cup (3-\sqrt{5},2) \cup (3+\sqrt{5}.\infty)$

b) $f \searrow x \in (0,3-\sqrt{5}) \cup (2,3+\sqrt{5})$

c) Ekstrema lokalne:

i. W $x = 0$ istnieje maximum lokalne równe 0

ii. W $x = \sqrt{5}+3$ istnieje maximum lokalne równe $\frac{1}{2}(11+5\sqrt{5})$

iii. W $x = 3-\sqrt{5}$ istnieje maximum lokalne równe $\frac{1}{2}(11-5\sqrt{5})$

8. Druga pochodna

$f''(x) = \dfrac{8(2x-1)}{(x-2)^4}$

a) Przedziały wypukłości ku górze

$f\cap \Leftrightarrow x \in (-\infty, \frac{1}{2})$

b) Przedziały wypukłości ku dołowi

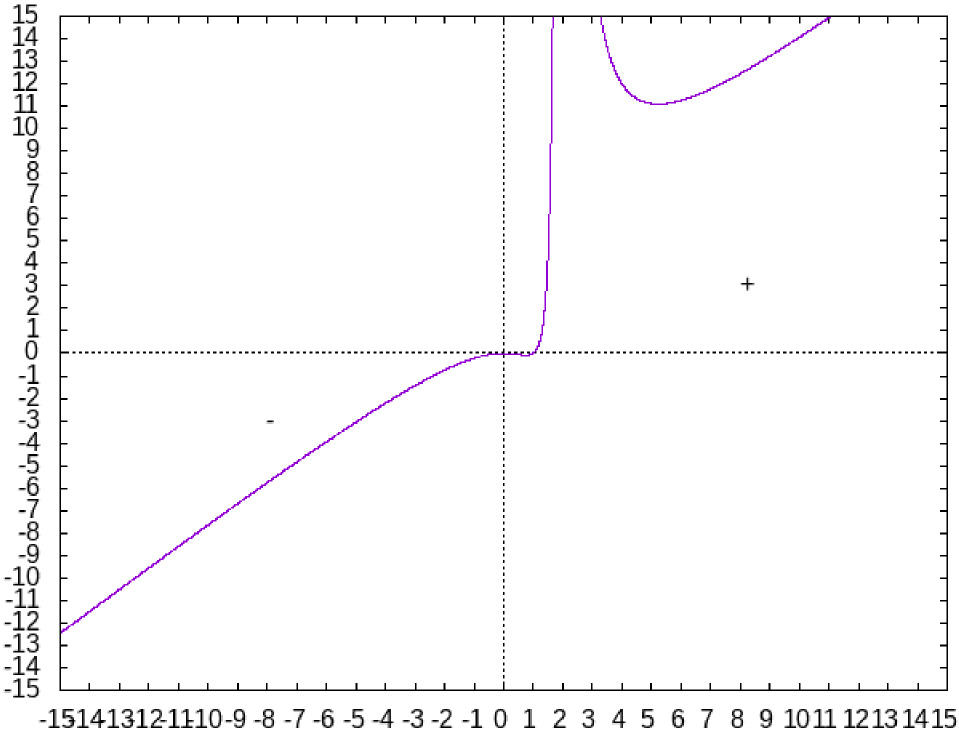
$f\cup \Leftrightarrow x \in (\frac{1}{2}, 2) \cup (2, +\infty)$

c) Punk przegięcia w $x = \frac{1}{2}$

9. Tabela

Przedziały	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, 3-\sqrt{5})$	$3-\sqrt{5}$
$f(x)$	$(-\infty,0)$	0	$(0,-\frac{1}{12})$	$-\frac{1}{12}$	$(-\frac{1}{12}, \frac{1}{2}(11-5\sqrt{5}))$	$\frac{1}{2}(11-5\sqrt{5}$
$f'(x)$	$+$	0	-	-	-	0
$f''(x)$	-	-	-	0	$+$	$+$

Przedziały	$(3-\sqrt{5},2)$	2	$(2,3+\sqrt{5})$	$3+\sqrt{5}$	$(3+\sqrt{5},+\infty)$
$f(x)$	$(\frac{1}{2}(11-5\sqrt{5},+\infty)$	$\times$	$(+\infty, \frac{1}{2}(11+5\sqrt{5})$	$\frac{1}{2}(11+5\sqrt{5})$	$(\frac{1}{2}(11+5\sqrt{5}),+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$\times$	-	0	$+$
$f''(x)$	-	$\times$	-	-	-



15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
-11
-12
-13
-14
-15
-15 -14 -13 -12 -11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
+
-