

Przebieg zmienności funkcji

Jakub Hajto

9 stycznia 2017

Badana funkcja

$$f(x) = \frac{x^2(x-11)}{(x-2)^2}$$

1. Dziedzina:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

2. Zbiór wartości:

$$Z_w =]-\infty, +\infty)$$

3. Miejsca zerowe:

$$f(x) = 0 \iff x = 11 \vee x = 0$$

4. Przecięcie z osią OY:

$$f(0) = 0$$

5. Granice na krańcach przedziałów:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

6. Asymptoty:

- a) ukośna:

$$y = x + 3$$

- b) pionowa:

$$x = 2$$

7. Pierwsza pochodna

$$f'(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 4x}{(x-2)^3} = \frac{x(x^2 - 6x + 4)}{(x-2)^3} = \frac{x(x-3 + \sqrt{5}(x-3 - \sqrt{5}))}{(x-2)^3}$$

- a) $f \nearrow dla x \in (-\infty, 0) \cup (3 - \sqrt{5}, 2) \cup (3 + \sqrt{5}, \infty)$
b) $f \searrow x \in (0, 3 - \sqrt{5}) \cup (2, 3 + \sqrt{5})$
c) Ekstrema lokalne:
i. W $x = 0$ istnieje maksimum lokalne równe 0
ii. W $x = \sqrt{5} + 3$ istnieje maksimum lokalne równe $\frac{1}{2}(11 + 5\sqrt{5})$
iii. W $x = 3 - \sqrt{5}$ istnieje maksimum lokalne równe $\frac{1}{2}(11 - 5\sqrt{5})$

8. Druga pochodna

$$f''(x) = \frac{8(2x - 1)}{(x - 2)^4}$$

- a) Przedziały wypukłości ku górze
 $f \cap \Leftrightarrow x \in (-\infty, \frac{1}{2})$
b) Przedziały wypukłości ku dołowi
 $f \cup \Leftrightarrow x \in (\frac{1}{2}, 2) \cup (2, +\infty)$
c) Punkt przegięcia w $x = \frac{1}{2}$

9. Tabela

Przedziały	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, 3 - \sqrt{5})$	$3 - \sqrt{5}$
$f(x)$	$(-\infty, 0)$	0	$(0, -\frac{1}{12})$	$-\frac{1}{12}$	$(-\frac{1}{12}, \frac{1}{2}(11 - 5\sqrt{5}))$	$\frac{1}{2}(11 - 5\sqrt{5})$
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0
$f''(x)$	-	-	-	0	+	+

Przedziały	$(3 - \sqrt{5}, 2)$	2	$(2, 3 + \sqrt{5})$	$3 + \sqrt{5}$	$(3 + \sqrt{5}, +\infty)$
$f(x)$	$(\frac{1}{2}(11 - 5\sqrt{5}), +\infty)$	\times	$(+\infty, \frac{1}{2}(11 + 5\sqrt{5}))$	$\frac{1}{2}(11 + 5\sqrt{5})$	$(\frac{1}{2}(11 + 5\sqrt{5}), +\infty)$
$f'(x)$	+	\times	-	0	+
$f''(x)$	-	\times	-	-	-

