Olasılı Dağılım ve Fonksiyonları

Hakan Mehmetcik

2024-11-28

Rastgele Değişkenler ve Olasılık Dağılımları

Sayısal değişkenlerden bahsettiğimizde, aslında rastgele bir olayın sayısal bir özetini ifade eden bir **rastgele değişkenden** söz ederiz.

- **Kesikli Rastgele Değişken:** Sayılabilir sayıda sonuca sahip bir rastgele değişkendir.
- **Sürekli Rastgele Değişken:** Sayılamayacak kadar çok (sonsuz) sonuca sahip bir rastgele değişkendir.

Kesikli Rastgele Değişken Örnekleri

- Bir ailedeki çocuk sayısı,
- Sinemada bir Cuma gecesi seyirci sayısı,
- Bir doktor muayenehanesindeki hasta sayısı,
- Onluk bir kutuda bulunan hatalı ampul sayısı.

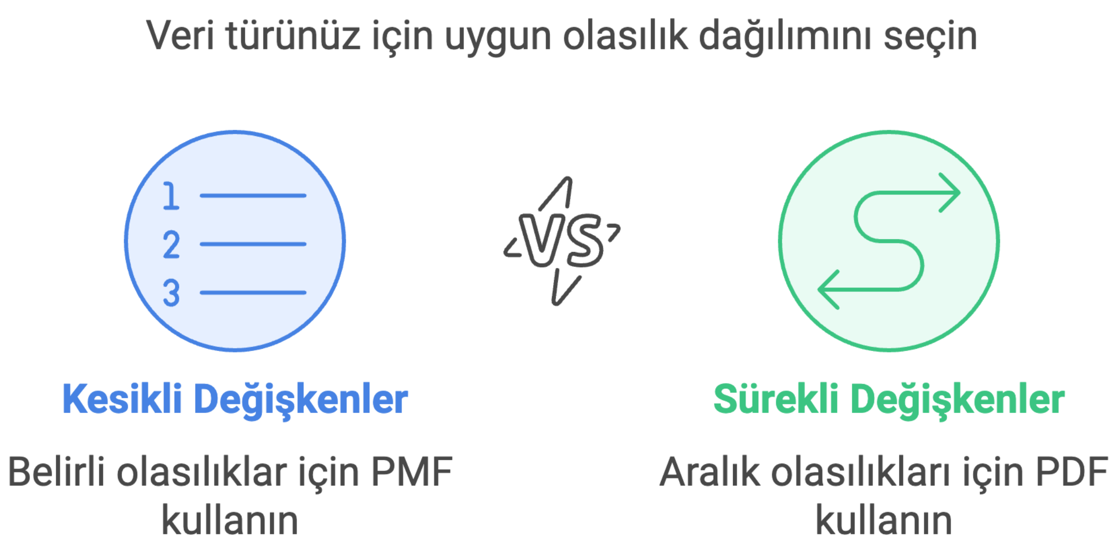
Sürekli Rastgele Değişken Örnekleri

- Kütle,
- Sıcaklık,
- Enerji,
- Hız,
- Uzunluk vb.

Olasılık Dağılımı (Probability Distribution)

Bir **olasılık dağılımı**, rastgele bir değişkenin alabileceği tüm olası değerleri ve bu değerlerin gerçekleşme olasılıklarını sistematik bir şekilde gösteren matematiksel bir modeldir. Rastgele değişkenin türüne bağlı olarak, olasılık dağılımı farklı şekillerde ifade edilebilir:

1. **Kesikli Rastgele Değişkenler İçin:**
   - Kesikli değişkenlerde olasılık dağılımı, her bir sonucun belirli bir olasılığa sahip olduğu bir liste ya da tablo şeklinde ifade edilir. Bu tür dağılımlar **olasılık kütle fonksiyonu (Probability Mass Function, PMF)** ile tanımlanır.
2. **Sürekli Rastgele Değişkenler İçin:**
   - Sürekli değişkenlerde olasılık dağılımı, rastgele değişkenin belirli bir aralıktaki değerleri almasının olasılığını gösterir. Sürekli dağılımlar **olasılık yoğunluk fonksiyonu (Probability Density Function, PDF)** ile ifade edilir ve toplam olasılık 1'e eşittir.



Kesikli Olasılık Dağılımı Örneği

Bir madeni paranın iki kez atılması durumunda, yazıların sayısını ifade eden rastgele değişkeni XXX olarak tanımlayalım. Olasılık dağılımı şu şekilde ifade edilebilir:

X (Yazı Sayısı)	$(P(X))$ Olasılık
0 (Hiç yazı yok)	$P(X = 0) = 0.25$
1 (Bir yazı)	$P(X = 1) = 0.50$
2 (İki yazı)	$P(X = 2) = 0.25$

- **Açıklama:** X'in alabileceği değerler 0,1,2'dir ve bu değerlerin gerçekleşme olasılıklarının toplamı 1'e eşittir.

Sürekli Olasılık Dağılımı Örneği

Bir aracın hızını (X) ölçtüğümüzü düşünelim. Hız sürekli bir değişkendir ve 0 ile 120 km/s arasında bir değer alabilir. Bu durumda, hızı tanımlayan olasılık yoğunluk fonksiyonu (PDF) şu şekilde ifade edilebilir:

$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{120} & \text{eğer } 0 \leq X \leq 120 \\ 0 & \text{diğer durumlar için} \end{cases}$$

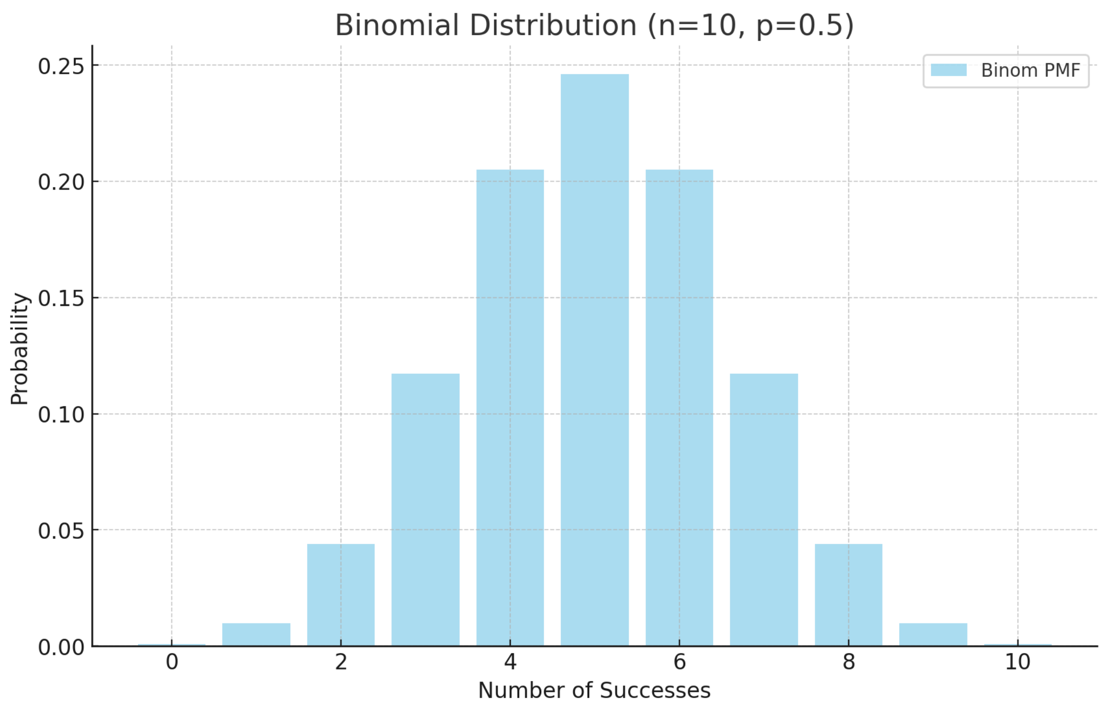
Bu PDF'yi kullanarak belirli bir hız aralığındaki olasılığı hesaplayabiliriz:

- Örneğin, aracın hızının 60 ile 80 km/s arasında olma olasılığı:

$$P(60 \leq X \leq 80) = \int_{60}^{80} \frac{1}{120} \, dx = \frac{80 - 60}{120} = \frac{20}{120} = 0.167$$

Olasılık Dağılımlarının Kullanım Alanları

1. **Kesikli Dağılımlar:**
   - **Binom Dağılımı:** Örneğin, bir ürünü üreten makinenin belirli bir üretim partisindeki kusurlu ürün sayısını modellemek.



Grafik, 10 denemeli ($n = 10$) ve başarı olasılığı 0.5 ($p = 0.5$) olan bir binom dağılımını gösterir.

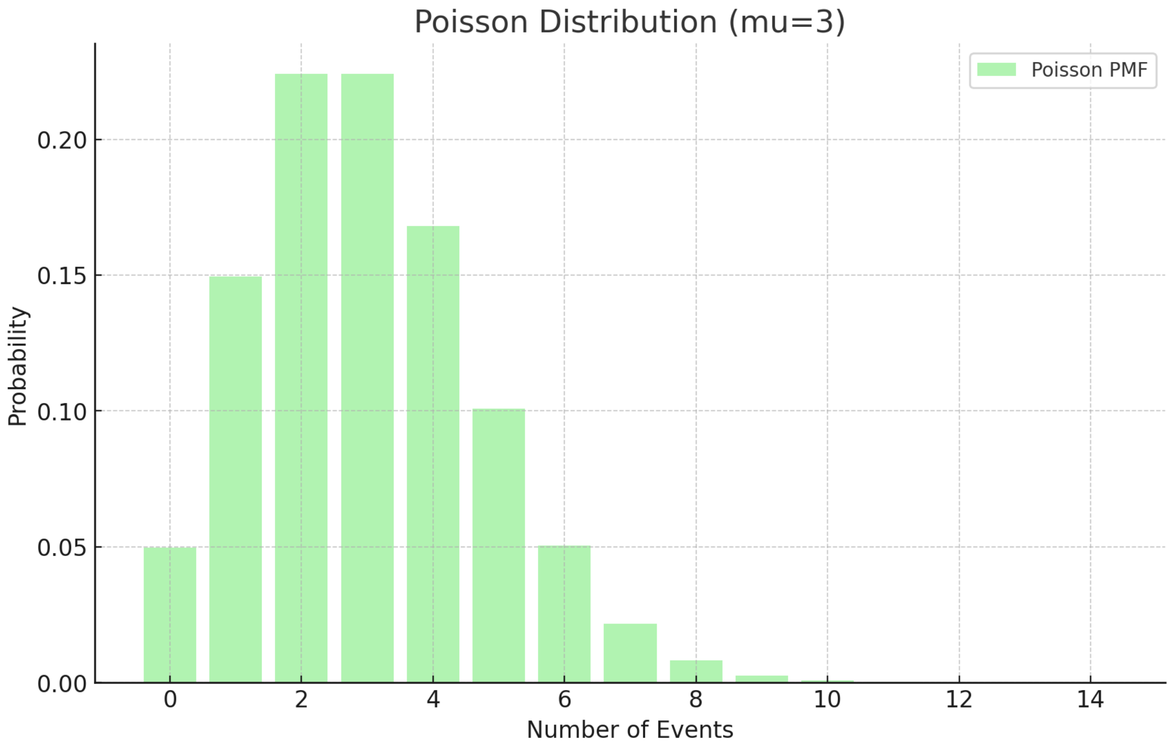
Çubuklar, belirli bir başarı sayısının olasılığını temsil eder.

Binom Dağılımının Ana Özellikleri:

1. **Kesikli sonuçlar:** Sonuçlar sayılabilir. Örneğin, bir madeni parayı 10 kez atarsınız ve yazı gelme sayısını sayarsınız.
2. **Sabit deneme sayısı:** Örneğin, madeni parayı tam 10 kez atacağınızı bilirsiniz.
3. **İki olası sonuç:** Her atış, yazı veya tura ile sonuçlanır.
4. **Sabit olasılık:** Yazı gelme olasılığı her atışta aynıdır.

Basitçe söylemek gerekirse: Bir deneyi belirli sayıda tekrarlıyorsanız ve her denemenin yalnızca iki olası sonucu varsa (örneğin, başarılı/başarısız), binom dağılımını kullanabilirsiniz.

- **Poisson Dağılımı:** Belirli bir zamanda bir mağazaya gelen müşteri sayısını modellemek.



Grafik, ortalaması ($\mu = 3$) olan bir Poisson dağılımını temsil eder.

Çubuklar, belirli bir olay sayısının (örneğin, bir saatte mağazaya gelen müşteri sayısı) gerçekleşme olasılığını gösterir.

Poisson Dağılımının Ana Özellikleri:

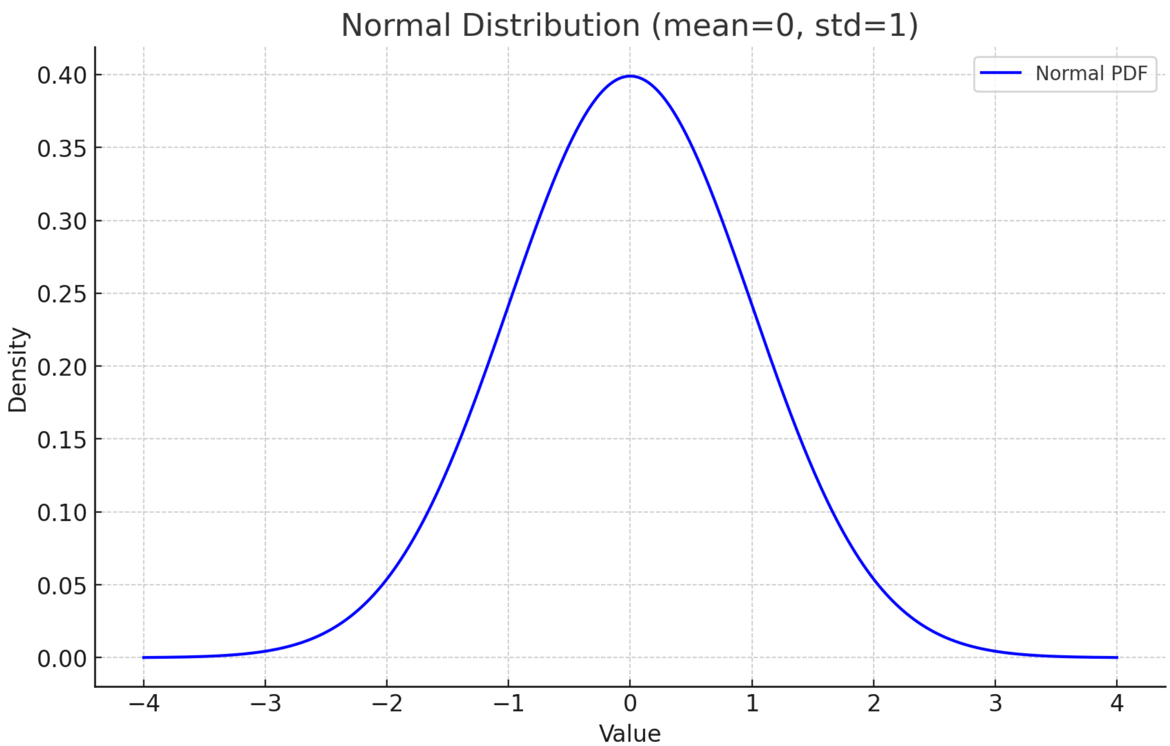
1. **Nadir olayları modellemek:** Olaylar nadir ve bağımsız bir şekilde meydana gelir.
2. **Sabit bir ortalama hız** (λ): Belirli bir zaman aralığında ortalama olay sayısı sabittir.
3. **Sabit zaman/mekân aralığı:** Olayların meydana geldiği aralık sabittir.
4. **Kesikli sonuçlar:** Sonuçlar (örneğin, olay sayısı) tam sayı olarak ifade edilir.

Örnek: Bir otobüs durağında bir saatte otobüs gelme sayısını modellemek için Poisson dağılımını kullanabilirsiniz. Eğer ortalama olarak saatte 3 otobüs geliyorsa ($\lambda = 3$) , bu dağılım otobüs sayısının olasılıklarını hesaplamanıza olanak tanır.

Basitçe: Poisson dağılımını, belirli bir aralıktaki olay sayısını modellemek için kullanırsınız.

Sürekli Dağılımlar:

- **Normal Dağılım:** Örneğin, bir popülasyondaki bireylerin boy uzunluklarını modellemek.



Grafik, ortalama ($\mu = 0$) ve standart sapması ($\sigma = 1$) olan standart normal dağılımın yoğunluk fonksiyonunu (PDF) gösterir.

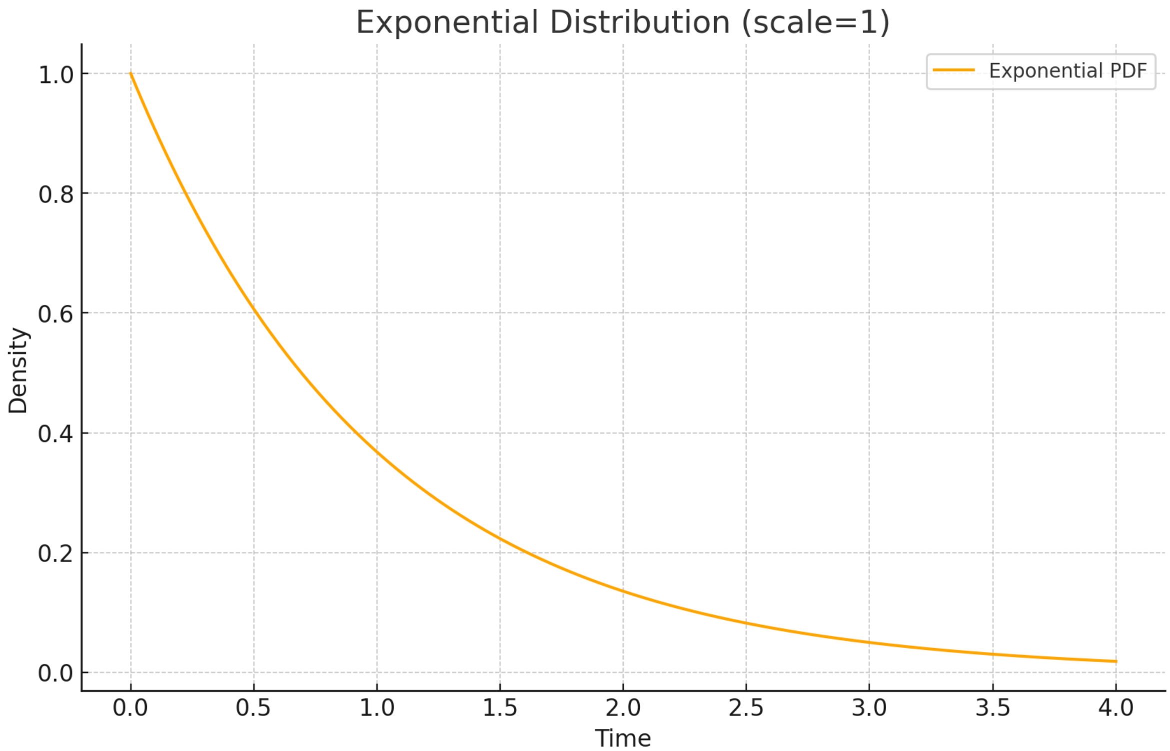
Çizgi, sürekli verilerin simetrik bir şekilde dağıldığı çan şeklini temsil eder.

Normal Dağılımın Ana Özellikleri:

1. **Sürekli sonuçlar:** Sonuçlar ölçülebilir, ancak sayılabilir değildir. Boy ölçüleri milimetreye kadar değişebilir ve sonsuz sayıda hassas değer alabilir.
2. **Ortalamaya göre simetri:** Çan eğrisi ortada (ortalama boy civarında) en yüksek değerine ulaşır ve yanlara doğru simetrik olarak azalır. Çoğu insan ortalama boya yakındır, çok azı çok kısa veya çok uzundur.
3. **Teorik olarak sonsuz değer aralığı:** Pratikte boylar makul bir aralıkta olsa da, teoride normal dağılım sonsuz olasılıkları kapsar.

Basitçe ifade etmek gerekirse: Bir şeyi ölçüyorsanız ve sonuçlar simetrik bir çan eğrisi oluşturuyorsa normal dağılımı kullanabilirsiniz. Bu genellikle boy, kilo, sınav notları gibi sürekli ve merkezi bir değerin etrafında değişen veriler için geçerlidir.

- **Üstel Dağılım:** Belirli bir cihazın arızalanma süresini modellemek.



Grafik, ölçek parametresi ($\lambda^{-1} = 1$) olan üstel dağılımın yoğunluk fonksiyonunu (PDF) gösterir.

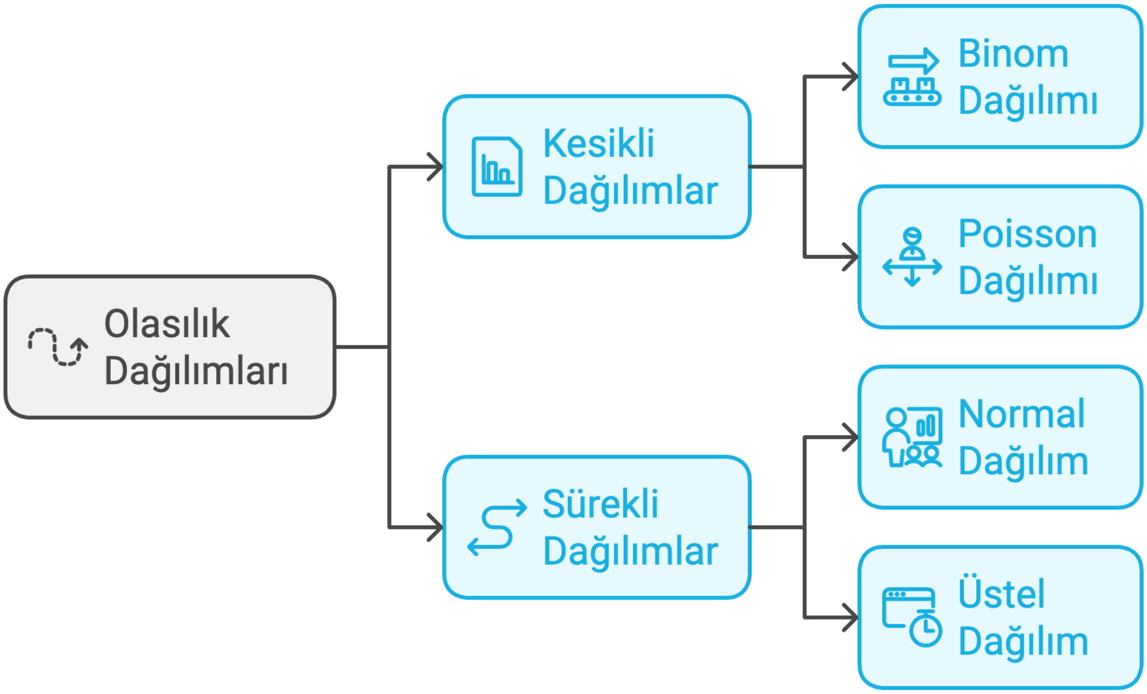
Çizgi, olaylar arasındaki süreyi modellemek için kullanılan bu dağılımın negatif eğimli olduğunu gösterir.

Üstel Dağılımın Ana Özellikleri:

1. **Sürekli sonuçlar:** Olaylar arasındaki süre ölçülebilir ve sürekli bir değişkendir.
2. **Hafif eğimli azalan eğri:** Daha kısa süreler daha olasıdır; ancak daha uzun sürelerin olasılığı sıfır değildir.
3. **Bağımsız olaylar:** İki olay arasındaki süre bir önceki olaydan bağımsızdır.
4. **Tek parametre** (λ): Ortalama hızın tersi ($1/\lambda 1$), beklenen süreyi temsil eder.

Örnek: Bir ATM'de müşteriler arasında geçen süreyi modellemek için üstel dağılım kullanılabilir. Eğer ortalama olarak iki müşteri arasında 2 dakika geçiyorsa ($\lambda = 0.5$), üstel dağılım bu sürelerin dağılımını tanımlar.

Basitçe: Üstel dağılım, olaylar arasındaki süreyi modellemek için kullanılır.



Kullanım Farklılıkları

- **Binom Dağılımı:**
  - Kesikli sonuçlara ve sabit sayıda denemeye sahiptir.
  - Her denemenin iki olası sonucu vardır (örneğin, evet/hayır, geçme/kalma).
  - Örneğin, bir seçimde evet oyu verenlerin sayısı veya 10 üründen kaçının kusurlu olduğu gibi durumlarda kullanılır.
- **Normal Dağılım:**
  - Sürekli verilere uygulanır ve genellikle ortalama çevresinde kümelenir.
  - Boy, kilo veya test skorları gibi ölçümlerde sıklıkla kullanılır.
  - İstatistiksel çıkarımlar için matematiksel özelliklerinden dolayı oldukça kullanışlıdır.
- **Poisson Dağılımı:**

  - Kesikli bir dağılımdır.
  - Belirli bir zaman veya mekân aralığında gerçekleşen olayların sayısını modellemek için kullanılır.
  - Örneğin, bir kütüphanede bir saatte alınan ödünç kitap sayısını modellemek.

- **Üstel Dağılım:**
  - Sürekli bir dağılımdır.
  - İki olay arasındaki süreyi modellemek için kullanılır.
  - Örneğin, bir mağazaya gelen müşteriler arasında geçen süreyi modellemek.

Poisson ve Üstel Dağılımın İlişkisi

Poisson ve üstel dağılımlar birbirine bağlıdır:

- **Poisson dağılımı, belirli bir süre içindeki olayların sayısını modellemek için kullanılırken;**
- **Üstel dağılım, bu olaylar arasındaki süreyi modellemek için kullanılır.**

Örneğin, bir çağrı merkezinde bir saatte alınan çağrı sayısını modellemek için Poisson dağılımını, çağrılar arasındaki bekleme süresini modellemek için ise üstel dağılımı kullanabilirsiniz.

Genel Not

Olasılık dağılımları, istatistik ve veri analizinde rastgele değişkenlerin davranışlarını anlamak ve modellemek için kritik öneme sahiptir. Dağılımlar, örnekleme, hipotez testi ve tahmin gibi birçok alanda temel araçlardır.

R Fonksiyonları

R'da farklı dağılım türleri için çeşitli fonksiyonlar bulunmaktadır.

Dağılım	Yoğunluk Fonksiyonu	Dağılım Fonksiyonu	Ters Dağılım Fonksiyonu	Rastgele Sayı Üretme

Özet Tablo

Dağılım	Yoğunluk Fonksiyonu	Dağılım Fonksiyonu	Ters Dağılım Fonksiyonu	Rastgele Sayı Üretme
Normal	`dnorm`	`pnorm`	`qnorm`	`rnorm`
Binomial	`dbinom`	`pbinom`	`qbinom`	`rbinom`
Poisson	`dpois`	`ppois`	`qpois`	`rpois`
Exponential	`dexp`	`pexp`	`qexp`	`rexp`
Uniform	`dunif`	`punif`	`qunif`	`runif`
t-Dağılımı	`dt`	`pt`	`qt`	`rt`
Chi-Square	`dchisq`	`pchisq`	`qchisq`	`rchisq`

Bu fonksiyonlar, çeşitli dağılımlar üzerinde hesaplama yapmanıza ve rastgele veri üretmenize olanak tanır.

Bu fonksiyonlar genellikle dört ana işlevi yerine getirir:

Özet Karşılaştırma

Fonksiyon Türü	Amaç	Örnek
Yoğunluk (Density)	Belirli bir x değeri için yoğunluk ya da olasılığı hesaplar.	`dnorm(0, mean=0, sd=1)`
Dağılım (Distribution)	Belirli bir x değerine kadar olan toplam olasılığı hesaplar ($X \leq x$).	`pnorm(1, mean=0, sd=1)`
Ters Dağılım (Quantile)	Belirli bir olasılığa (p) karşılık gelen x değerini hesaplar.	`qnorm(0.95, mean=0, sd=1)`
Rastgele Üretim (Random)	Belirli bir dağılımdan rastgele veri üretir.	`rnorm(10, mean=0, sd=1)`

1. **Yoğunluk Fonksiyonu (Density Function):** Belirli bir x değerinin olasılık yoğunluğunu hesaplar (ör. `dnorm`, `dbinom`).

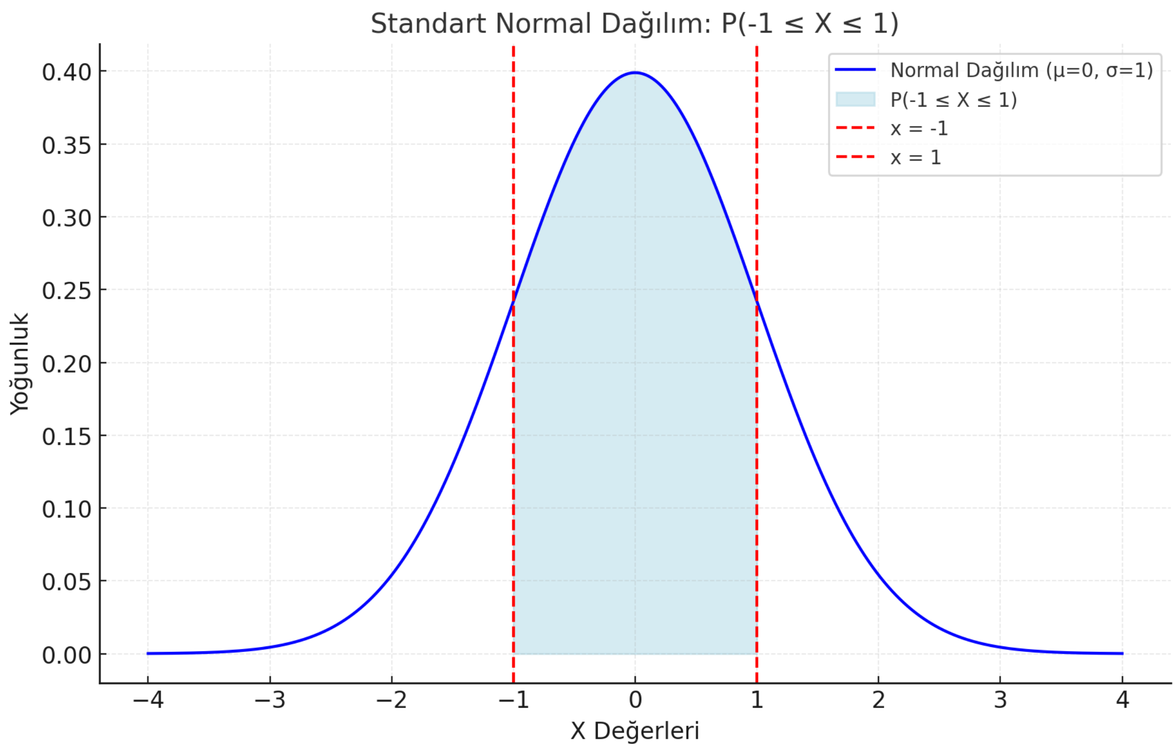
Yoğunluk fonksiyonu, bir rastgele değişkenin belirli bir x değerine sahip olma olasılık yoğunluğunu hesaplar. Kesikli dağılımlar için bu, x'in olasılığını verir. Sürekli dağılımlarda ise yoğunluk değerleri, olasılık olarak değil, birim aralığındaki yoğunluk olarak yorumlanır.

```
dbinom(3, size = 10, prob = 0.5)  # 10 denemede tam 3 başarı olasılığı
```

```
[1] 0.1171875
```

```
pnorm(1, mean=0, sd=1) - pnorm(-1, mean=0, sd=1)  # -1 ile 1 arasındaki olasılık
```

```
[1] 0.6826895
```



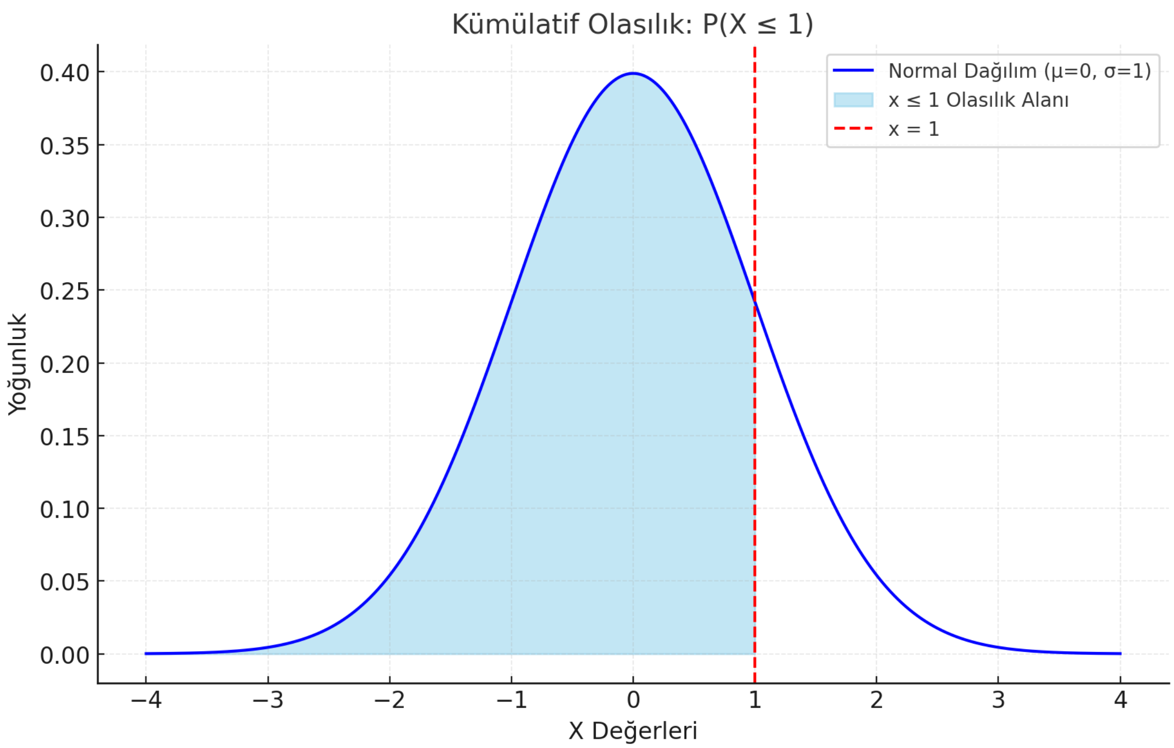
Grafikte, standart normal dağılım ($\mu = 0, \sigma = 1$) gösterilmektedir. Kırmızı kesik çizgiler $x = -1$'i temsil ederken, mavi gölgeli alan $P(-1 \leq X \leq 1)$ kümülatif olasılığını ifade etmektedir. Bu alan, dağılımın bu iki değer arasında olma olasılığını gösterir.

2. **Dağılım Fonksiyonu (Distribution Function):** Belirli bir x değerine kadar olan kümülatif olasılığı hesaplar (ör. `pnorm`, `pbinom`).

Dağılım fonksiyonu, belirli bir x değerine kadar olan kümülatif olasılığı hesaplar. Bu, rastgele değişkenin $X \leq x$ olma olasılığını ifade eder. Örneğin, bir zar atıldığında $x \leq 3$ gelme olasılığını hesaplamak için:

```r
pbinom(3, size = 10, prob = 0.5)  # En fazla 3 başarı olasılığı
```

```
[1] 0.171875
```



Grafikte, standart normal dağılım $(\mu = 0, \sigma = 1)$ gösterilmektedir. Kırmızı kesik çizgi $x = 1$'i temsil ederken, mavi gölgeli alan $P(X \leq 1)$ kümülatif olasılığını göstermektedir. Bu, X rastgele değişkeninin 1'den küçük veya eşit olma olasılığıdır.

3. **Ters Dağılım Fonksiyonu (Quantile Function):** Belirli bir olasılık için ilgili x değerini hesaplar (ör. `qnorm`, `qbinom`).

Ters dağılım fonksiyonu, belirli bir olasılık değerine karşılık gelen x değerini verir. Bu, belirli bir yüzdelik dilimdeki değeri bulmak için kullanılır.

Örneğin, binom dağılımında %95'lik dilimde kaç başarı olabileceğini bulmak:

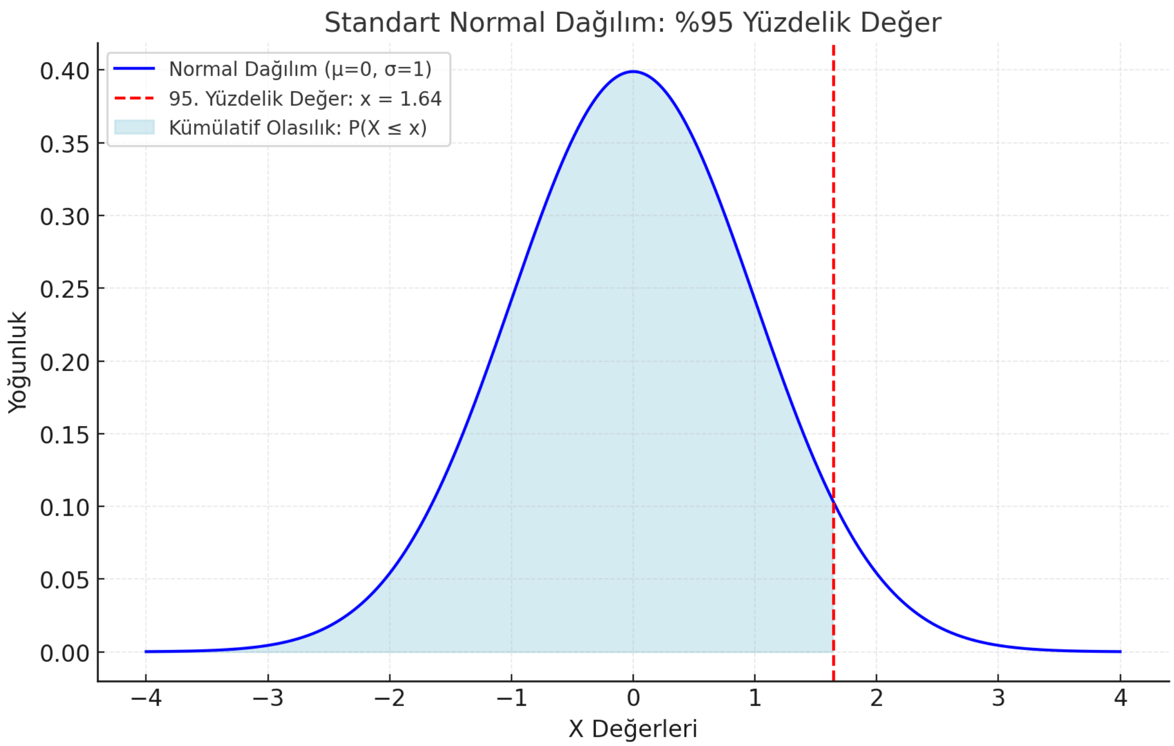
```r
qbinom(0.95, size = 10, prob = 0.5)  # %95 yüzdelik başarı sayısı
```

```
[1] 8
```

Ya da örneğin sürekli bir dağılımda belirli bir yüzdelik dilim (p) için karşılık gelen x değeri:

```r
qnorm(0.95, mean = 0, sd = 1)  # %95 yüzdelik değer
```

```
[1] 1.644854
```



Grafikte, standart normal dağılım ($\mu = 0, \sigma = 1$) ve %95 yüzdelik değeri gösterilmektedir. Kırmızı kesik çizgi x değerinin %95'lik dilime denk geldiği noktayı işaret eder ($x \approx 1.645$). Mavi gölgeli alan, bu değerin altında kalan toplam olasılığı temsil eder ($P(X \leq 1.645) = 0.95$).

4. **Rastgele Sayı Üretme (Random Generation):** Belirli bir dağılımdan rastgele veri üretir (ör. `rnorm`, `rbinom`).

Bu fonksiyonlar, belirli bir dağılımdan rastgele değerler üretmek için kullanılır. Araştırmalarda simülasyon yapmak, deneysel veriler oluşturmak veya algoritmalar test etmek için idealdir.

Örneğin, binom dağılımından rastgele 10 değer üretmek:

```r
rbinom(10, size = 10, prob = 0.5)  # Rastgele 10 başarı sayısı
```

```
 [1] 8 4 6 6 3 4 6 6 4 7
```

Ya da, normal dağılımdan rastgele 10 değer üretmek:

```r
rnorm(10, mean = 0, sd = 1)  # Normal dağılımdan rastgele değerler
```

```
 [1]  1.20028241 -1.67871083  1.79176727 -0.48880829 -0.07764628 -2.09253587
 [7]  1.20250857 -0.05975232 -0.64259598 -0.15494846
```