



Проект по Небесна Механика

Хакан Сунай Халил, Компютърни науки,

3^{ти} курс, 2^{ра} група,

ФН: 81406, 30^{ти} май 2019г.

Софийски университет “Св. Климент Охридски”

Факултет по математика и информатика

Задача 1.

Пресметнете координатите и скоростите на планетите в деня, в който сте родени.

В задачата на Кеплер орбитата на планетата зависи от 6 елемента, следователно необходимите параметри са:

- **a** - дължина на голямата полуос
- **e** - ексцентрицитет
- **i** - наклонение на плоскостта на орбитата
- **θ** - дължина на възела
- **$g + \theta$** - дължина на перихелия
- **l** - средна аномалия, (**l_0** е средната аномалия в момента **t_0**)

Първите шест от тези параметри са константи, а последният - средната аномалия **l** е линейна функция на времето **t**.

Съществува и допълнителен елемент, който ни е необходим - ексцентричната аномалия **u**. За този параметър е в сила е уравнението на Кеплер

$$l = u - e \cdot \sin u$$

Сплеснатостта на елипсата се характеризира с ексцентрицитета **e**:

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \in [0; 1)$$

Където **b** - дължина на малката полуос.

Връзката на елиптичните елементи с декартовите координати в R^3

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(i) & -\sin(i) \\ 0 & 0 & \cos(i) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(g) & -\sin(g) & 0 \\ \sin(g) & \cos(g) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Кеплеровите елементи и техните стойности са взети от следния сайт:

https://ssd.jpl.nasa.gov/txt/aprx_pos_planets.pdf

	a [au, au/cty]	e [, /cty]	I [deg, deg/cty]	L [deg, deg/cty]	ϖ [deg, deg/cty]	Ω [deg, deg/cty]
Mercury	0.38709927 0.00000037	0.20563593 0.00001906	7.00497902 -0.00594749	252.25032350 149472.67411175	77.45779628 0.16047689	48.33076593 -0.12534081
Venus	0.72333566 0.00000390	0.00677672 -0.00004107	3.39467605 -0.00078890	181.97909950 58517.81538729	131.60246718 0.00268329	76.67984255 -0.27769418
EM Bary	1.00000261 0.00000562	0.01671123 -0.00004392	-0.00001531 -0.01294668	100.46457166 35999.37244981	102.93768193 0.32327364	0.0 0.0
Mars	1.52371034 0.00001847	0.09339410 0.00007882	1.84969142 -0.00813131	-4.55343205 19140.30268499	-23.94362959 0.44441088	49.55953891 -0.29257343
Jupiter	5.20288700 -0.00011607	0.04838624 -0.00013253	1.30439695 -0.00183714	34.39644051 3034.74612775	14.72847983 0.21252668	100.47390909 0.20469106
Saturn	9.53667594 -0.00125060	0.05386179 -0.00050991	2.48599187 0.00193609	49.95424423 1222.49362201	92.59887831 -0.41897216	113.66242448 -0.28867794
Uranus	19.18916464 -0.00196176	0.04725744 -0.00004397	0.77263783 -0.00242939	313.23810451 428.48202785	170.95427630 0.40805281	74.01692503 0.04240589
Neptune	30.06992276 0.00026291	0.00859048 0.00005105	1.77004347 0.00035372	-55.12002969 218.45945325	44.96476227 -0.32241464	131.78422574 -0.00508664
Pluto	39.48211675 -0.00031596	0.24882730 0.00005170	17.14001206 0.00004818	238.92903833 145.20780515	224.06891629 -0.04062942	110.30393684 -0.01183482

Следва да направим промяна на градусите на θ , $g + \theta$ в Радиани ($\times \frac{\pi}{180}$)

Също така, обръщаме i в градуси ($\times \frac{\pi}{180}$).

Стойностите на μ (маса на планетата/маса на слънцето) за планетите са следните:

	μ
Меркурий	1/6023600
Венера	1/408523
Земя	1/328900,5
Марс	1/3098708
Юпитер	1/1047,34
Сатурн	1/3497,8
Уран	1/22902,9
Нептун	1/19402
Плутон	1/135000000

$$\gamma = 1 + \mu$$

$$n = \sqrt{\frac{\gamma}{a^3}}$$

Величината n наричаме средно движение.

Средното движение е моментът на преминаване през перихелия на планета (т.е. начало на епоха).

Преди малко говорихме за уравнението на Кеплер, сега ще го дефинираме. Уравнение на Кеплер наричаме връзката между средната и ексцентричната аномалия.

$$l = u - e \cdot \sin(u) \text{ - уравнение на Кеплер.}$$

Въвеждаме t - времето от рождената дата до 2000г. в години.

Моята рождена дата е **4^{ти} септември 1997г.**

$$\Rightarrow \text{бройдни}(01.01.2000 - 04.09.1997) = 849 \text{ дни}$$

$$\Rightarrow t = \frac{849}{365.25}$$

$$\Rightarrow t = 2.324435318$$

От решението на задачата на Кеплер в декартови координати:

$$l = \sqrt{\gamma} a^{-\frac{3}{2}} (T - T_0)$$

$$\Rightarrow l = n[t(2\pi) - T_0] = u - e \sin(u)$$

$$u = l + e \sin(l + e \sin(l + e \sin(l)))$$

$$r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q \cdot a \cdot \left(\cos(u) - e; \sin(u); \sqrt{1 - e^2}; 0 \right)$$

$$v = Q \cdot \frac{\left(-\sin(u); \cos(u); \sqrt{1 - e^2}; 0 \right) \cdot a \cdot n}{1 - e \cdot \cos(u)}$$

Където Q е от Основна формула на сферичната тригонометрия

(Теорема. Всяка матрица $Q \in SO(3, \mathbb{R})$ може да се представи аналитично във вида:

$$Q = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(i) & -\sin(i) \\ 0 & \sin(i) & \cos(i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(g) & -\sin(g) & 0 \\ \sin(g) & \cos(g) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

Ротация на ъгъл θ Ротация на ъгъл i Ротация на ъгъл g
 около Oz около Ox около Oy

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(g) - \sin(\theta)\sin(g)\cos(i) & -\cos(\theta)\sin(g) - \sin(\theta)\cos(g)\cos(i) & \sin(\theta)\sin(i) \\ \sin(\theta)\cos(g) + \cos(\theta)\sin(g)\cos(i) & -\sin(\theta)\sin(g) + \cos(\theta)\cos(g)\cos(i) & -\cos(\theta)\sin(i) \\ \sin(g)\sin(i) & \cos(g)\sin(i) & \cos(i) \end{pmatrix}$$

Където $\theta, g \in [0, 2\pi]$ и $i \in [0, \pi]$

Гореописаният алгоритъм се повтаря за всяка планета.

	R - разположение			V - скорост			R	V
Меркурий	0.359449	-0.04128 9	0.02557	-0.15282	1.69884	0.14342	0.36272	1.7117
Венера	-0.10902 2	-0.71624 3	-0.042824	1.1573562	-0.181981 1	0.0053125	0.72576	1.1716
Земя	0.95913	-0.31012	0	0.29209	0.94804	0	1.008	0.99202
Марс	-0.25399	-1.45397	-0.041042	0.832215	-0.071247	0.015676	1.4766	0.83541
Юпитер	3.835841	-3.28657 4	-0.089438	0.2804341	0.3537659	0.0067583	5.0521	0.45149
Сатурн	9.046689	2.539559	-0.056624	-0.104665	0.311212	0.014194	9.3965	0.32865
Уран	11.95767	-15.8037 3	-0.16035	0.1805633	0.1272664	0.0023186	19.8184	0.22092
Нептун	14.56402	-26.3648 5	-0.9074	0.1585851	0.0892471	-0.001208 9	30.1337	0.18198
Плутон	-13.7023	-26.0267	-6.0618	0.172976	-0.095956	-0.046265	30.0315	0.20315

Задача 2: Пресметнете елементите на Делоне и Поанкаре (от първи и втори вид) в деня, в който сте родени

Елементите на Делоне – $L, G, \Theta, l, g, \theta$ се изразяват чрез орбиталните елементи:

- a - дължина на голямата полуос,
- e - ексцентрицитет,
- i - наклонение на плоскостта на орбитата,
- l - средна аномалия, (l_0 е средната аномалия в момента t_0),
- $g + \theta$ - дължина на перихелия,
- θ - дължина на възела.

Както следва:

$*(l, L), (G, g)$ и (Θ, θ) са спрегнати канонични променливи,

$$L = \mu \sqrt{\gamma a}$$

$$G = \mu \sqrt{\gamma a (1 - e^2)} \Rightarrow G = L \sqrt{1 - e^2}$$

$$\Theta = \mu \sqrt{\gamma a (1 - e^2)} \cos(i) \Rightarrow \Theta = G \cos(i)$$

Като при това l, g и θ съвпадат и в двата случая.

Елементите на Делоне – $L, G, \Theta, l, g, \theta$ са константи с хамилтони:

$$\hat{H} = - \frac{\mu^3 \gamma^2}{2L^2}$$

Обръщаме θ в **радиани** ($* \frac{\pi}{180}$), а i в **градуси** ($* \frac{\pi}{180}$)

T_0 е моментът на преминаване през перихелия на планета (начало на епоха).

$$l = \sqrt{\gamma} a^{-3/2} (t - T_0)$$

$l = u - e \sin(u)$ - уравнение на Кеплер.

$$\Rightarrow u = l + e \sin(l + e \sin(l + e \sin(l)))$$

$$n = \sqrt{\frac{\gamma}{a^3}}$$

Използваме t от предната задача $\Rightarrow t = 2.324435318$.

$$l = n(t(2\pi) - T_0)$$

И чрез $\lambda = l + g + \theta$ (дължина на епохата) ще можем да изразим елементите от двете системи на Поанкаре, и по-точно:

Първа система от шест елемента, характеризираща орбитите на планетите:

$$\begin{pmatrix} L & L - G & G - \Theta \\ l + g + \theta & -g - \theta & -\theta \end{pmatrix}$$

И втората:

$$\begin{pmatrix} L & \xi := \sqrt{2(L-G)} \cos(g + \theta) & p := \sqrt{2(G-\Theta)} \cos(\theta) \\ \lambda := l + g + \theta & \eta := \sqrt{2(L-G)} \sin(g + \theta) & q := \sqrt{2(G-\Theta)} \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Елементи на **Делоне**:

	L	G	Θ	l	g	θ	H
Меркурий	1.0328e-07	1.0108e-07	1.0033e-07	63.715	0.50836	0.84352	-2.1449e-07
Венера	2.0814e-06	2.0814e-06	2.0777e-06	24.636	0.95859	1.3383	-1.6928e-06
Земя	3.0404e-06	3.0400e-06	3.0400e-06	14.562	1.7966	0	-1.5202e-06
Марс	3.9826e-07	3.9654e-07	3.9633e-07	8.1089	-1.2829	0.86497	-1.0595e-07
Юпитер	0.0021787	0.0021762	0.0021757	1.5742	-1.4965	1.7536	-9.1860e-05
Сатурн	8.8298e-04	8.8174e-04	8.8091e-04	-0.24832	-0.36764	1.9838	-1.4995e-05
Уран	1.9127e-04	1.9106e-04	1.9104e-04	2.6571	1.6919	1.2918	-1.1377e-06
Нептун	2.8263e-04	2.8262e-04	2.8249e-04	-1.6582	-1.5153	2.3001	-8.5709e-07
Плутон	4.6544e-08	4.5090e-08	4.3088e-08	0.31824	1.9856	1.9252	-9.3807e-11

Първа система на **Поанкаре**:

	L	L-G	G-θ	$l + g + \theta$	$-g - \theta$	$-\theta$
Меркурий	1.0328e-07	2.20e-09	7.50e-10	65.06688	-1.35188	-0.84352
Венера	2.0814e-06	0	3.70e-09	26.93289	-2.29689	-1.3383
Земя	3.0404e-06	4.00e-10	0.00e+00	16.3586	-1.7966	0
Марс	3.9826e-07	1.72e-09	2.10e-10	7.69097	0.41793	-0.86497
Юпитер	0.0021787	0.0000025	0.0000005	1.8313	-0.2571	-1.7536
Сатурн	8.8298e-04	1.24e-06	8.30e-07	1.36784	-1.61616	-1.9838
Уран	1.9127e-04	2.10e-07	2.00e-08	5.6408	-2.9837	-1.2918
Нептун	2.8263e-04	1.00e-08	1.30e-07	-0.8734	-0.7848	-2.3001
Плутон	4.6544e-08	1.45e-09	2.00e-09	4.22904	-3.9108	-1.9252

Втора система на **Поанкаре**:

	L	ξ	ρ	$\lambda = l + g + \theta$	η	q
Меркурий	1.0328e-07	1.4384e-05	2.5823e-05	65.06688	-6.4652e-05	-2.9014e-05
Венера	2.0814e-06	-5.7473e-06	1.9688e-05	26.93289	-6.4729e-06	-8.3148e-05
Земя	3.0404e-06	-6.2462e-06	0	16.3586	-2.7192e-05	0
Марс	3.9826e-07	5.3698e-05	1.3181e-05	7.69097	2.3844e-05	-1.5466e-05
Юпитер	0.0021787	0.0021675	-1.9299e-04	1.8313	-5.6977e-04	-0.0010440
Сатурн	8.8298e-04	-7.1412e-05	-5.1684e-04	1.36784	-0.0015738	-0.0011795
Уран	1.9127e-04	-6.4210e-04	5.1285e-05	5.6408	-1.0223e-04	-1.7904e-04
Нептун	2.8263e-04	9.5162e-05	-3.4604e-04	-0.8734	-9.5042e-05	-3.8724e-04
Плутон	4.6544e-08	-3.8747e-05	-2.1959e-05	4.22904	3.7507e-05	-5.9354e-05

Код

Задача 1.

solvePlanet.m

```
function res = solvePlanet(a, e, i, L, w, Omega, myu, t)
    tita = Omega * pi/180;
    g = (w - Omega) * pi/180;
    i = i * pi/180;

    Theta = [cos(tita), -sin(tita), 0;
             sin(tita),  cos(tita), 0;
             0,          0, 1];

    I = [cos(i), 0, -sin(i);
         0, 1, 0;
         sin(i), 0, cos(i)];

    G = [cos(g), -sin(g), 0;
         sin(g),  cos(g), 0;
         0, 0, 1] ;

    Q = Theta*I*G;

    gamma = 1 + myu;
    n = sqrt(gamma / a^3);
    to = ((w - L) / n) * pi/180;
    l = n * (-t * 2*pi - to);
    u = l + e * sin(l + e * sin(l + e * sin(l)));

    r = Q * a * [cos(u) - e; sin(u) * sqrt(1 - e^2); 0]
    v = Q * [-sin(u); cos(u) * sqrt(1 - e^2); 0] * a * n / (1 - e*cos(u))

    disp(['Normed V = ', num2str(norm(v))])
    disp(['Normed R = ', num2str(norm(r))])

end
```

Problem1.m

```

nasaData=[0.387  0.205 7.004  252.250 77.457  48.330  1/6023600;
          0.723  0.006 3.394  181.979 131.602 76.679  1/408523;
          1      0.016 0      100.464 102.937 0      1/328900.5;
          1.523  0.093 1.849  -4.553  -23.943 49.559  1/3098708;
          5.202  0.048 1.304  34.396  14.728  100.473 1/1047.34;
          9.536  0.053 2.485  49.954  92.598  113.662 1/3497.8;
          19.189 0.047 0.772  313.238 170.954 74.016  1/22902.9;
          30.069 0.008 1.770  -55.120 44.964  131.784 1/19402;
          39.482 0.248 17.140 238.929 224.068 110.303 1/135000000];

time=2.324435318;

for i=1:9
    disp(['Planet No.', num2str(i)])
    solvePlanet(nasaData(i, 1), nasaData(i, 2), nasaData(i, 3),
               nasaData(i, 4), nasaData(i, 5), nasaData(i, 6),
               nasaData(i, 7), time)
end

```

Задача 2.**findElements.m**

```

function res = findElements(a, e, i, L, w, Omega, myu, t)
    i = i * pi/180;
    n = sqrt(1 / a^3);
    to = ((w - L) / n) * pi/180;

    gamma = 1 + myu;
    capL = myu * sqrt(gamma*a)
    capG = capL * sqrt(1 - e^2)
    capTheta = capG*cos(i)

    l = n * (t*2*pi - to)
    g = (w - Omega) * pi/180
    theta = Omega * pi/180
    H = -myu*gamma / (2*a)

```

```

FirstPoincare11 = capL
FirstPoincare12 = capL - capG
FirstPoincare13 = capG - capTheta
FirstPoincare21 = 1 + g + theta
FirstPoincare22 = -g - theta
FirstPoincare23 = -theta

# L
SecondPoincare11 = FirstPoincare11

#  $\xi$ 
SecondPoincare12 = sqrt(2 * (capL - capG)) * cos(g + theta)

# p
SecondPoincare13 = sqrt(2 * (capG - capTheta)) * cos(theta)

#  $\lambda = 1 + g + \theta$ 
SecondPoincare21 = FirstPoincare21

#  $\eta$ 
SecondPoincare22 = -sqrt(2 * (capL - capG)) * sin(g + theta)

# q
SecondPoincare23 = -sqrt(2 * (capG - capTheta)) * sin(theta)

end

```


Problem2.m

```

nasaData=[0.387  0.205  7.004  252.250  77.457  48.330  1/6023600;
           0.723  0.006  3.394  181.979  131.602  76.679  1/408523;
           1      0.016  0      100.464  102.937  0      1/328900.5;
           1.523  0.093  1.849  -4.553  -23.943  49.559  1/3098708;
           5.202  0.048  1.304  34.396  14.728  100.473  1/1047.34;
           9.536  0.053  2.485  49.954  92.598  113.662  1/3497.8;
           19.189 0.047  0.772  313.238  170.954  74.016  1/22902.9;
           30.069 0.008  1.770  -55.120  44.964  131.784  1/19402;
           39.482 0.248  17.140  238.929  224.068  110.303  1/135000000];

time=2.324435318;

```



```
for i=1:9
    disp(['Planet No.', num2str(i)])
    findElements(nasaData(i, 1), nasaData(i, 2), nasaData(i, 3),
        nasaData(i, 4), nasaData(i, 5), nasaData(i, 6),
        nasaData(i, 7), time)
end
```