I LICEUM OGLNOKSZTAŶCĄCE IM. EDWARDA DEMBOWSKIEGO W GLIWICACH

Grzegorz Koperwas

Badanie przebiegu zmienoůci funkcji

$$f\left(x\right) = x^4 - 6x^2 + 8x + 24$$

Gliwce

2019

1. Analiza wzoru funkcji

Dana jest funkcja:

$$f\left(x\right) = x^4 - 6x^2 + 8x + 24$$

Funkcja jest wielomianem wiĬc jej dziedzna jest zbiorem liczb rzeczywistych:

$$D_f = \mathbb{R}$$

Funkcja jest wielomianem wiĬc jest ciąga w dziedzinie. Funkcja jest rêŹniczkowalna w dziedzinie. Funkcja nie jest parzysta, nie jest nieparzysta.

1.1. Miejsca zerowe:

$$p: \quad \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12, \pm24$$

	1	0	-6	8	24
-2		-2	4	4	-24
	1	-2	-2	12	$0 = R$

$$f\left(x\right) = \left(x + 2\right) \cdot \left(x^3 - 2x^2 - 2x + 12\right)$$

	1	-2	-2	12
-2		-2	8	-12
	1	-4	6	$0 = R$

$$f\left(x\right) = \left(x + 2\right)^2 \cdot \underbrace{\left(x^2 - 4x + 6\right)}_{\Delta<0}$$

$$\Delta = 16 - 4 \cdot 6 = \\ = -8 < 0$$

Funkcja posiada miejsce zerowe w punkcie $(-2; 0)$ drugiego stopnia.

1.2. PrzeciĬcie z osią OY

$$f\left(0\right) = 0^4 - 6 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0 + 24 = 24$$

Funkcja przecina oů $0Y$ w punkcie (0; 24).

1.3. Granice na krańcach dziedziny

$$\lim_{x\to-\infty} f\left(x\right) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{x^4}_{\to+\infty} \cdot \left(1 - \underbrace{\frac{6}{x^2} + \frac{8}{x^3} + \frac{24}{x^4}}_{\to 0}\right) = \\ = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x^4}_{\to+\infty} \cdot \left(1 - \underbrace{\frac{6}{x^2} + \frac{8}{x^3} + \frac{24}{x^4}}_{\to 0}\right) = \\ = +\infty$$

Funkcja nie posiada asymptot.

2. Analiza pierwszej pochodnej

Obliczamy pierwszą pochodną:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x + 8$$

Pierwsza pochodna danej funkcji jest wielomianem wiĬc jej dzidziną jest zbiêr liczb rzeczywistych.

$$D_{f'} = \mathbb{R}$$

2.1. Miejsca zerowe pochodnej

$$p : \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$$

	4	0	-12	8
1		4	4	-8
	4	4	-8	$0 = R$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (x-1) \cdot \left(4x^2 + 4x - 8\right) \\
4x^2 + 4x - 8 &= 0 \\
x^2 + x - 2 &= 0 \\
\Delta &= 1 + 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 > 0 \\
\sqrt{\Delta} &= \sqrt{9} = 3 \\
x_{1,2} &= \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 1 \\
f'(x) &= (x-1)^2 \cdot (x+2)
\end{aligned}$$

Pochodna funkcji posiada miejsce zerowe w 1 drugiego stopnia. Pochodna funkcji posiada miejsce zerowe w punkcie -2.

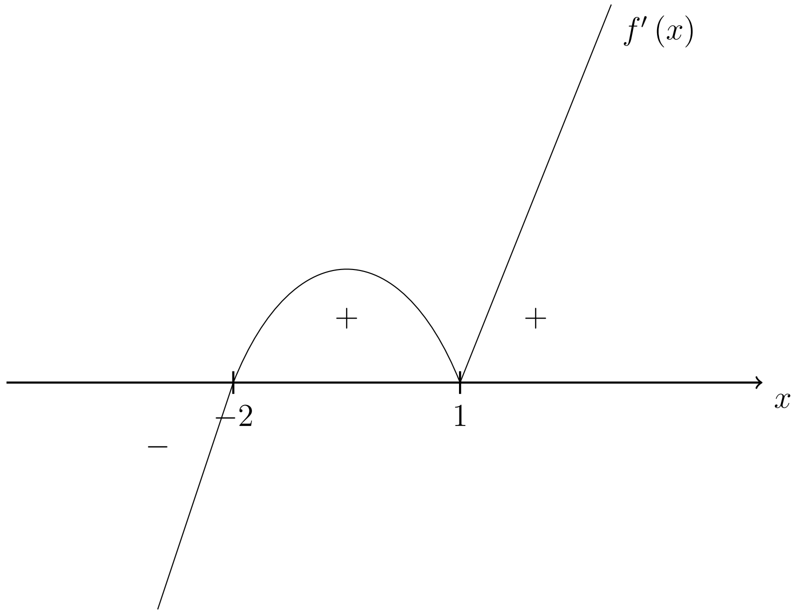
2.2. Wyznaczanie ekstremêw funkcji

Warunek konieczny ekstremum

$$\begin{aligned}
f'(x) = 0 &\Leftrightarrow (x-1)^2 \cdot (x+2) = 0 \\
f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x \in \{-2; 1\}
\end{aligned}$$

Podejrzewam Źe funkcja ma ekstremum w $x_0 = -2$ oraz w $x_1 = 1$.

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 1) \cup (1; +\infty) \\ f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \end{cases}$$



Warunek wystarczający ekstremum

$$\left.\begin{array}{l} x \in S^-(-2,\delta) \Rightarrow f'(x) < 0 \\ x \in S^+(-2,\delta) \Rightarrow f'(x) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-2) = 0 = f_{\min}$$

Funkcja posiada minimum w punkcie $(-2; 0)$.

$$\left.\begin{array}{l} x \in S^-(1,\delta) \Rightarrow f'(x) > 0 \\ x \in S^+(1,\delta) \Rightarrow f'(x) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ funkcja nie posiada ekstremum w $(1; 27)$.

2.3. Monotonicznoůć funkcji

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 1) \cup (1; +\infty) \\ f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \end{cases}$$

wiĬc:

- Funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle -2; +\infty)$.
- Funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty; -2\rangle$.

3. Analiza drugiej pochodnej

$$f''(x) = 12x^2 - 12$$

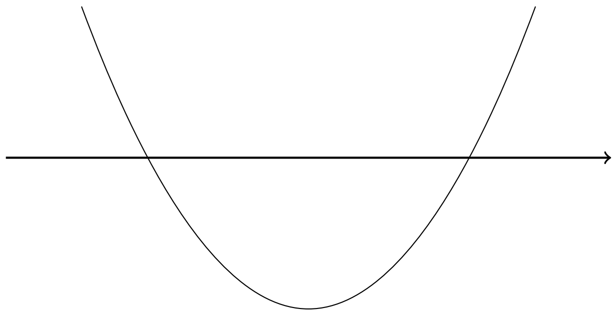
Druga pochodna funkcji jest wielomianem, wiĬc dziedzina drugiej pochodnej to zbiêr liczb rzeczywistych.

$$D_{f''(x)} = \mathbb{R}$$

3.1. Punkty przegiĬcia

Warunek konieczny punktu przegiĬcia

$$
\begin{aligned}
f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 12 &= 0 \\
x^2 - 1 &= 0 \\
(x-1)\cdot(x+1) &= 0 \\
x = 1 \vee x &= -1 \Rightarrow \\
&\Rightarrow x \in \{-1; 1\}
\end{aligned}
$$



$$
\begin{cases}
f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \\
f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 1)
\end{cases}
$$

WiĬc:

- Krzywa jest wypuka w $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$
- Krzywa jest wklĬsa w $(-1; 1)$

Warunek wystarczający punktu przegiĬcia

$$
\left.\begin{array}{l}
x \in S^-(-1; \delta) \Rightarrow f''(x) > 0 \\
x \in S^+(-1; \delta) \Rightarrow f''(x) < 0
\end{array}\right\} \Rightarrow P_1 = (-1; f(-1)) = (-1; 11) \text{ p.p.}
$$

Funkcja posiada punkt przegiĬcia w $(-1; 11)$.

$$
\left.\begin{array}{l}
x \in S^-(1; \delta) \Rightarrow f''(x) < 0 \\
x \in S^+(1; \delta) \Rightarrow f''(x) > 0
\end{array}\right\} \Rightarrow P_2 = (1; f(1)) = (1; 27) \text{ p.p.}
$$

Funkcja posiada punkt przegiĬcia w $(1; 27)$.

4. Tabela przebiegu zmiennoůci funkcji

x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$^{+\infty}\searrow_{0}$ $\smile$	min 0 $\smile$	$_{0}\nearrow^{11}$ $\smile$	11	$_{11}\nearrow^{24}$ $\frown$	24 $\frown$	$_{24}\nearrow^{27}$ $\frown$	27	$_{27}\nearrow^{+\infty}$ $\smile$

Tabela 1: Tabela zmiennoůci funkcji $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 24$