I LICEUM OGÓLNOKSZTAŁCĄCE IM. EDWARDA DEMBOWSKIEGO W GLIWICACH

Grzegorz Koperwas

Badanie przebiegu zmienności funkcji

$$f\left(x\right) = x^4 - 6x^2 + 8x + 24$$

Gliwce

2019

1. Analiza wzoru funkcji

Dana jest funkcja:

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 24$$

Funkcja jest wielomianem więc dziedzna jest zbiorem liczb rzeczywistych:

$$D_f = \mathbb{R}$$

1.1. Miejsca zerowe:

$$p: \quad \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12, \pm24$$

	1	0	−6	8	24
−2		−2	4	4	−24
	1	−2	−2	12	0 = R

$$f(x) = (x+2)\cdot\left(x^3 - 2x^2 - 2x + 12\right)$$

	1	−2	−2	12
−2		−2	8	−12
	1	−4	6	0 = R

$$f(x) = (x+2)^2\cdot\underbrace{\left(x^2 - 4x + 6\right)}_{\Delta<0}$$

$$\Delta = 16 - 4\cdot 6 = \\ = -8 < 0$$

Funkcja posiada miejsce zerowe -2 drugiego stopnia.

1.2. Przecięcie z osią OY

$$f(0) = 0^4 - 6\cdot 0^2 + 8\cdot 0 + 24 = 24$$

Funkcja przecina oś $0Y$ w punkcie $(0; 24)$.

1.3. Granice na krańcach dziedziny

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\underbrace{x^4}_{\to+\infty}\cdot\left(1 - \underbrace{\frac{6}{x^2} + \frac{8}{x^3} + \frac{24}{x^4}}_{\to 0}\right) = \\ = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\underbrace{x^4}_{\to+\infty}\cdot\left(1 - \underbrace{\frac{6}{x^2} + \frac{8}{x^3} + \frac{24}{x^4}}_{\to 0}\right) = \\ = +\infty$$

Funkcja nie posiada asymptot.

2. Analiza pierwszej pochodnej

Obliczamy pierwszą pochodną:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x + 8$$

Pierwsza pochodna danej funkcji jest wielomianem więc jej dzidziną jest zbiór liczb rzeczywistych.

$$D_{f'} = \mathbb{R}$$

2.1. Miejsca zerowe pochodnej

$$p : \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$$

	4	0	−12	8
1		4	4	−8
	4	4	−8	0 = R

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (x-1) \cdot \left(4x^2 + 4x - 8\right) \\
4x^2 + 4x - 8 &= 0 \\
x^2 + x - 2 &= 0 \\
\Delta &= 1 + 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 > 0 \\
\sqrt{\Delta} &= \sqrt{9} = 3 \\
x_{1,2} &= \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 1 \\
f'(x) &= (x-1)^2 \cdot (x+2)
\end{aligned}$$

Pochodna funkcji posiada miejsce zerowe w 1 drugiego stopnia. Pochodna funkcji posiada miejsce zerowe w punkcie -2.

2.2. Wyznaczanie ekstremów funkcji

2.2.1. Warunek konieczny ekstremum

$$\begin{aligned}
f'(x) = 0 &\Leftrightarrow (x-1)^2 \cdot (x+2) = 0 \\
f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x \in \{-2; 1\}
\end{aligned}$$