I LICEUM OGÓLNOKSZTAŁCĄCE IM.
EDWARDA DEMBOWSKIEGO W GLIWICACH

Grzegorz Koperwas

Badanie przebiegu zmienności funkcji

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 24$$

Gliwice

2019

1. Analiza wzoru funkcji

Dana jest funkcja:

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 24$$

Funkcja jest wielomianem więc jej dziedzina jest zbiorem liczb rzeczywistych:

$$D_f = \mathbb{R}$$

Funkcja jest ciągła w dziedzinie. Funkcja jest różniczkowalna w dziedzinie.

1.1. Miejsca zerowe:

$$p: \quad \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12, \pm24$$

	1	0	−6	8	24
−2		−2	4	4	−24
	1	−2	−2	12	$0 = R$

$$f(x) = (x+2) \cdot \left(x^3 - 2x^2 - 2x + 12\right)$$

	1	−2	−2	12
−2		−2	8	−12
	1	−4	6	$0 = R$

$$f(x) = (x+2)^2 \cdot \underbrace{\left(x^2 - 4x + 6\right)}_{\Delta<0}$$

$$\Delta = 16 - 4 \cdot 6 = \\ = -8 < 0$$

Funkcja posiada miejsce zerowe w punkcie $(-2; 0)$ drugiego stopnia.

1.2. Przecięcie z osią OY

$$f(0) = 0^4 - 6 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0 + 24 = 24$$

Funkcja przecina oś $0Y$ w punkcie (0; 24).

1.3. Granice na krańcach dziedziny

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{x^4}_{\to+\infty} \cdot \left(1 - \underbrace{\frac{6}{x^2} + \frac{8}{x^3} + \frac{24}{x^4}}_{\to 0}\right) = \\ = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x^4}_{\to+\infty} \cdot \left(1 - \underbrace{\frac{6}{x^2} + \frac{8}{x^3} + \frac{24}{x^4}}_{\to 0}\right) = \\ = +\infty$$

Funkcja nie posiada asymptot.

1.4. Parzystość i nieparzystość

Parzystość

Funkcja jest parzysta gdy:

$$f(x) = f(-x)$$
$$(-x)^4 - 6 \cdot (-x)^2 - 8x + 24 = x^4 - 6x^2 + 8x + 24$$

By wielomiany były równe, muszą być tego samego stopnia oraz posiadać takie same współczynniki. $-8 \neq 8$ więc wielomiany nie są równe, zatem:

$$f(x) \neq f(-x)$$

Więc funkcja nie jest parzysta.

Nieparzystość

Funkcja jest nieparzysta gdy:

$$-f(x) = f(-x)$$
$$-x^4 + 6x^2 - 8x - 24 = (-x)^4 - 6 \cdot (-x)^2 - 8x + 24$$

By wielomiany były równe, muszą być tego samego stopnia oraz posiadać takie same współczynniki. $24 \neq -24$ więc wielomiany nie są równe, zatem:

$$-f(x) \neq f(-x)$$

Więc funkcja nie jest nieparzysta.

2. Analiza pierwszej pochodnej

Obliczamy pierwszą pochodną:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x + 8$$

Pierwsza pochodna danej funkcji jest wielomianem więc jej dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych.

$$D_{f'} = \mathbb{R}$$

2.1. Miejsca zerowe pochodnej

$$p : \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$$

	4	0	-12	8
1		4	4	-8
	4	4	-8	$0 = R$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (x-1)\cdot\left(4x^2+4x-8\right)\\
4x^2+4x-8 &= 0\\
x^2+x-2 &= 0\\
\Delta &= 1+4\cdot 2\cdot 1 = 9 > 0\\
\sqrt{\Delta} &= \sqrt{9} = 3\\
x_{1,2} &= \frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow x_1=-2,\ x_2=1\\
f'(x) &= (x-1)^2\cdot(x+2)
\end{aligned}
$$

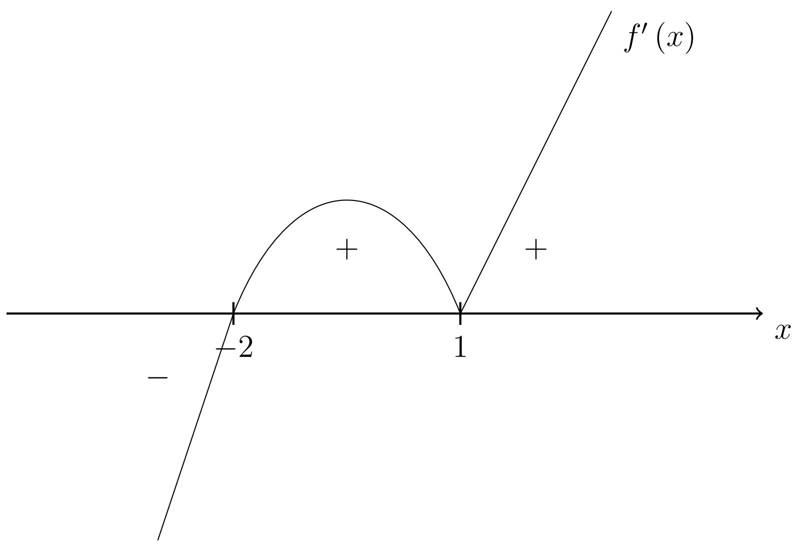
Pochodna funkcji posiada miejsce zerowe w 1 drugiego stopnia. Pochodna funkcji posiada miejsce zerowe w punkcie -2.

2.2. Wyznaczanie ekstremów funkcji

Warunek konieczny ekstremum

$$
\begin{aligned}
f'(x) = 0 &\Leftrightarrow (x-1)^2\cdot(x+2) = 0\\
f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x \in \{-2;1\}
\end{aligned}
$$

Podejrzewam że funkcja ma ekstremum w $x_0=-2$ oraz w $x_1=1$.



$$
\begin{cases}
f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2;1)\cup(1;+\infty)\\
f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-2)
\end{cases}
$$

Warunek wystarczający ekstremum

$$
\left.
\begin{aligned}
x \in S^-(-2,\delta) \Rightarrow f'(x) < 0\\
x \in S^+(-2,\delta) \Rightarrow f'(x) > 0
\end{aligned}
\right\} \Rightarrow f(-2) = 0 = f_{\min}
$$

Funkcja posiada minimum w punkcie $(-2;0)$.

$$\left.\begin{array}{l} x \in S^{-}(1,\delta) \Rightarrow f'(x) > 0 \\ x \in S^{+}(1,\delta) \Rightarrow f'(x) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ funkcja nie posiada ekstremum w $(1;27)$.

2.3. Monotoniczność funkcji

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2;1) \cup (1;+\infty) \\ f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-2) \end{cases}$$

więc:

- Funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle -2;+\infty)$.
- Funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty;-2\rangle$.

3. Analiza drugiej pochodnej

$$f''(x) = 12x^2 - 12$$

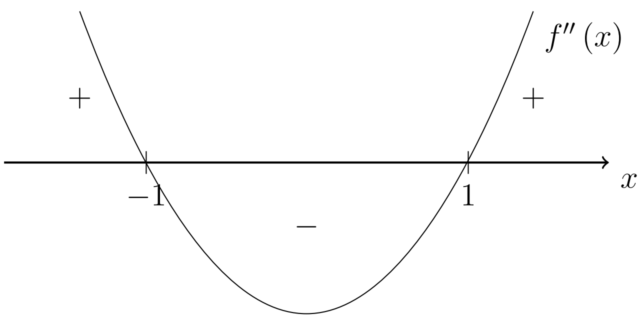
Druga pochodna funkcji jest wielomianem, więc dziedzina drugiej pochodnej to zbiór liczb rzeczywistych.

$$D_{f''(x)} = \mathbb{R}$$

3.1. Punkty przegięcia

Warunek konieczny punktu przegięcia

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 12 &= 0 \\ x^2 - 1 &= 0 \\ (x-1)\cdot(x+1) &= 0 \\ x = 1 \lor x &= -1 \Rightarrow \\ \Rightarrow x &\in \{-1;1\} \end{aligned}$$



$$\begin{cases} f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty) \\ f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1;1) \end{cases}$$

Więc:

- Krzywa jest wypukła w $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$
- Krzywa jest wklęsła w $(-1; 1)$

Warunek wystarczający punktu przegięcia

$$\left.\begin{array}{l} x \in S^{-}(-1;\delta) \Rightarrow f''(x) > 0 \\ x \in S^{+}(-1;\delta) \Rightarrow f''(x) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow P_1 = (-1; f(-1)) = (-1; 11) \text{ p.p.}$$

Funkcja posiada punkt przegięcia w $(-1; 11)$.

$$\left.\begin{array}{l} x \in S^{-}(1;\delta) \Rightarrow f''(x) < 0 \\ x \in S^{+}(1;\delta) \Rightarrow f''(x) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow P_2 = (1; f(1)) = (1; 27) \text{ p.p.}$$

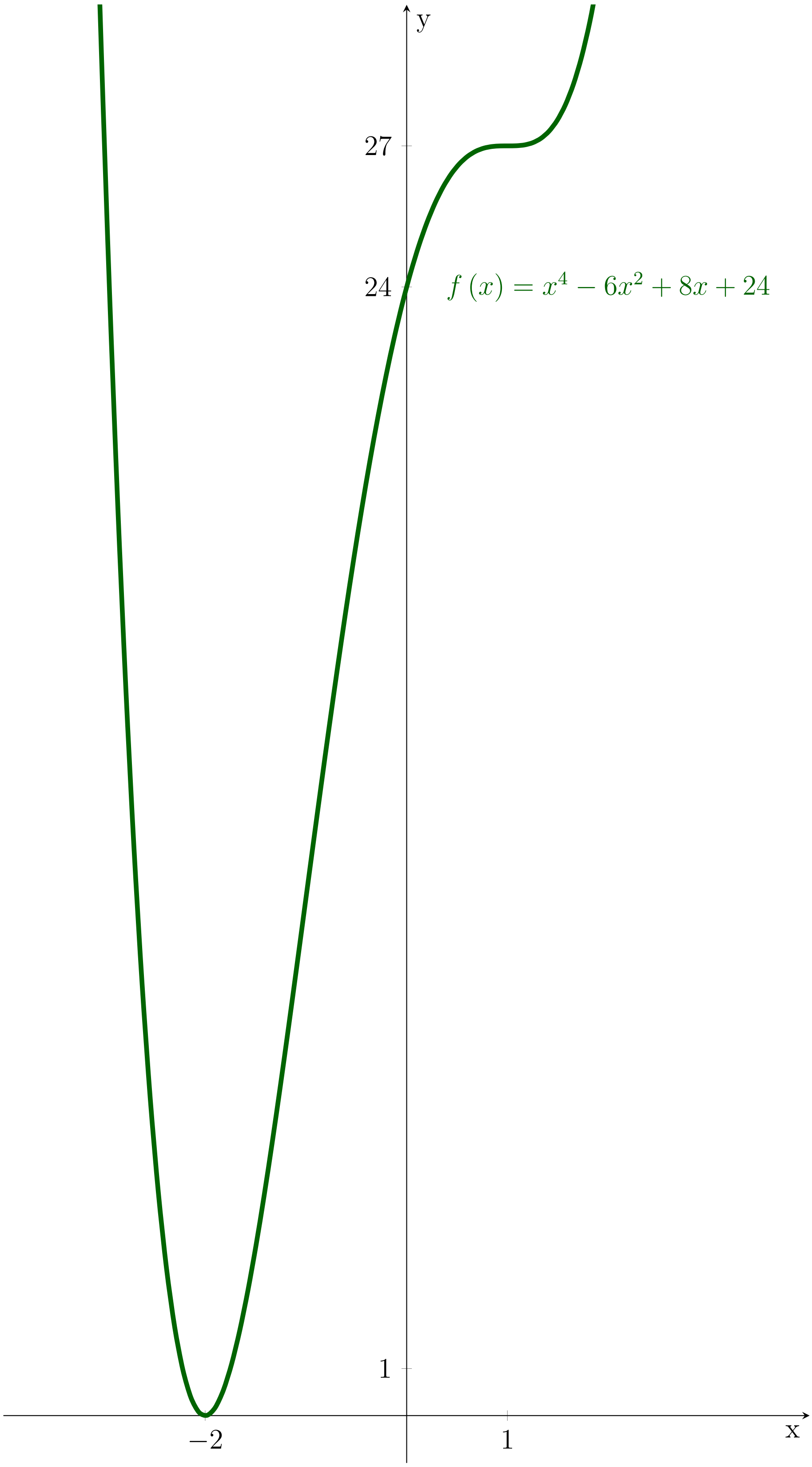
Funkcja posiada punkt przegięcia w $(1; 27)$.

4. Tabela przebiegu zmienności funkcji

x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow 0$	min 0	$0 \nearrow 11$	11	$11 \nearrow 24$	24	$24 \nearrow 27$	27	$27 \nearrow +\infty$
	$\cup$	$\cup$	$\cup$		$\cap$	$\cap$	$\cap$		$\cup$

Tabela 1: Tabela zmienności funkcji $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 24$

5. Wykresy funkcji



Rysunek 1: Wykres funkcji $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 24$ z programu *Geogebra*