Badanie zależności okresu drgań wachadła matematycznego od jego długości.

Grzegorz Koperwas

22 grudnia 2019

1. Wstęp teoretyczny

Celem doświadczenia było wyznaczenie przyspieszenia grawitacyjnego g poprzez pomiar czasu w jakim wachadło wykona 10 cykli w zależności od długości wachadła. (tu ma być obrazek z tikz-a)

Z praw Newton'a:

$$F = ma$$

Gdzie F jest siłą wypadkową działającą na wachadło. Na wachadło działa siła ciężkości i naciągu sznurka. Siła naciągu jest równa składowej siły ciężkości prostopadłej do toru ruchu wachadła, zatem siła wypadkowa jest równa równoległej składowej siły ciężkości. Zatem:

$$\begin{aligned} ma &= -mg\sin\alpha \\ a &= -g\sin\alpha \end{aligned}$$

Przyspieszenie a może zostać powiązane z zmianą kąta α. Niech s to długość łuku zakreślanego przez wachadło.

$$\begin{aligned} s &= l\alpha \\ v &= \frac{ds}{dt} = l\frac{d\alpha}{dt} \\ a &= \frac{d^2s}{dt^2} = l\frac{d^2\alpha}{dt^2} \end{aligned}$$

zatem:

$$l\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -g\sin\alpha$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\alpha = 0 \tag{1}$$

Dla małych kątów możemy założyć że $\sin\alpha \approx \alpha$, zatem po podstawieniu do równiania 1 otrzymujemy równanie oscylatora harmonicznego:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\alpha = 0$$

Dla warunków początkowych $\alpha\left(0\right) = \alpha_0$ i $\frac{d\alpha}{dt}\left(0\right) = 0$:

$$\alpha\left(t\right) = \alpha_0\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$$

Zatem okres jest równy:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \text{dla małych kątów} \tag{2}$$

Ostatecznie w celu uzyskania wykresu $T^2\left(l\right)$:

$$T^2\left(l\right) = \frac{4\pi^2}{g}\cdot l \tag{3}$$

długość l (cm) ±0,1cm	czas t (s) ±0,01s									
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}
80,0	18,32	17,72	18,28	18,01	18,29	18,18	17,87	17,72	18,03	18,18
70,0	16,66	16,73	16,84	16,93	16,67	16,67	16,83	16,91	16,68	16,67
60,0	15,37	15,43	15,71	15,52	15,55	15,28	15,48	15,54	15,50	15,59
50,0	14,16	14,14	14,17	14,25	14,13	14,29	14,32	14,16	14,23	14,23
40,0	12,77	12,55	12,61	12,54	12,86	12,68	12,64	12,72	12,61	12,63
30,0	11,03	10,98	10,95	10,94	10,95	10,73	10,93	11,06	10,87	10,87
20,0	8,87	8,97	9,02	9,01	8,97	8,99	8,91	8,88	8,93	8,84
10,0	6,09	6,27	6,18	6,20	6,25	6,49	6,18	6,33	6,25	6,27

Tabela 1: Tabela wyników pomiarów

2. Analiza wyników pomiarów

Dla wyników doświadczenia w tabeli 1 obliczamy:

- Średni czas $\bar{t}$.
- Odchylenie standardowe średniego czasu $\Delta\bar{t}$.
- Okres wychyleń wachadła T.
- Niepewność okresu ΔT.
- Kwadrat okresu T^2.
- Niepewność kwadratu okresu $\Delta\left(T^2\right)$.

Odcylenie standardowe

Odchylenie standardowe średniej jest równe:

$$\Delta\bar{t} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n\left(n-1\right)}}$$

Przykładowo:

$$\sqrt{\frac{\left(6{,}09-6{,}25\right)^2+\left(6{,}27-6{,}25\right)^2+\left(6{,}33-6{,}25\right)^2+_{\dots}+\left(6{,}25-6{,}25\right)^2+\left(6{,}27-6{,}25\right)^2}{10\cdot 9}} =$$
$$= \sqrt{\frac{0{,}03+0{,}00+0{,}01+0{,}00+0{,}00+0{,}06+0{,}01+0{,}01+0{,}00+0{,}00}{90}} =$$
$$\approx 0{,}03$$

Okres

Okres wychyleń wachadła obliczamy za pomocą wzoru:

$$T = \frac{\bar{x}}{n}$$

gdzie n to liczba wychyleń wykonanych przez wachadło w czasie mierzonym t.

Przykładowo:

$$\frac{18{,}06}{10} \approx 1{,}80$$

Niepewność okresu wychyleń obliczamy w sposób analogiczny.

Kwadrat okresu

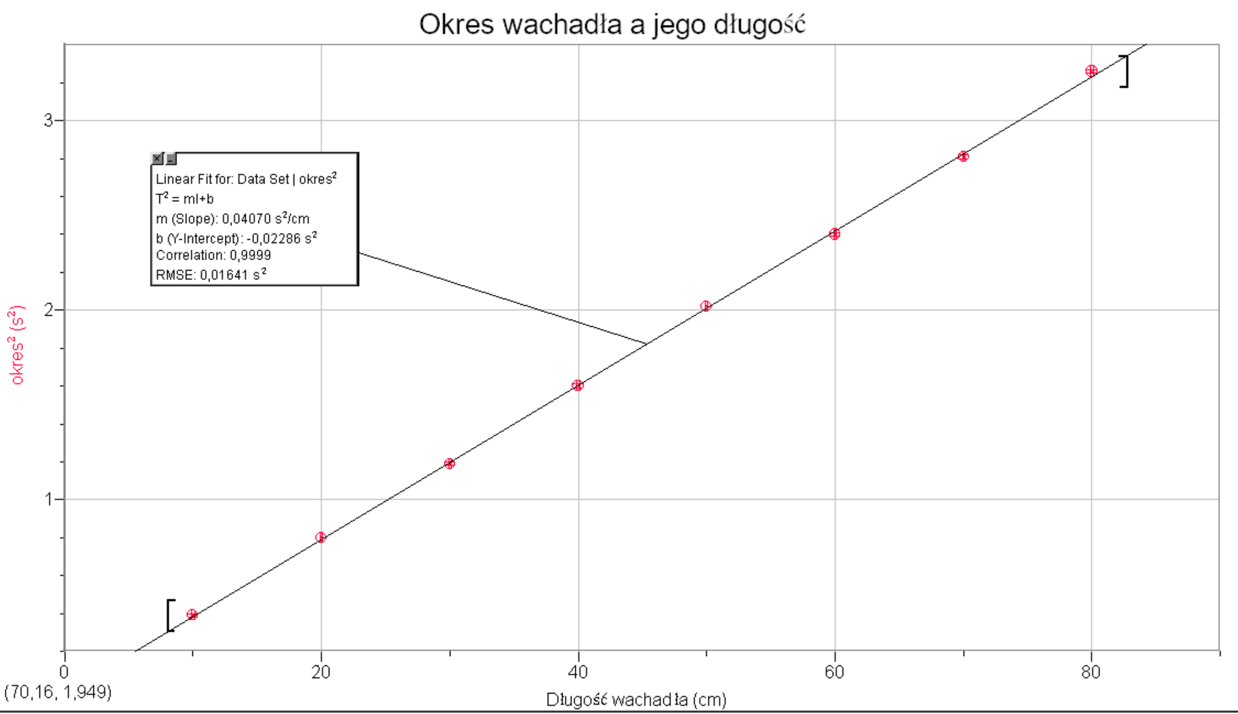
Niepewność T^2 jest obliczana w poniższy sposób:

$$\frac{\Delta\left(T^2\right)}{T^2} = \frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta T}{T} = 2 \cdot \frac{\Delta T}{T}$$

długość l (cm) ±0,1cm	$\bar{t}$	$\Delta\bar{t}$	T	ΔT	T^2	$\Delta\left(T^2\right)$
80,0	18,06	0,07	1,81	0,01	3,26	0,01
70,0	16,76	0,03	1,68	0,00	2,81	0,01
60,0	15,50	0,04	1,55	0,00	2,40	0,01
50,0	14,21	0,02	1,42	0,00	2,02	0,00
40,0	12,66	0,03	1,27	0,00	1,60	0,01
30,0	10,93	0,03	1,09	0,00	1,19	0,01
20,0	8,94	0,02	0,89	0,00	0,80	0,00
10,0	6,25	0,03	0,63	0,00	0,39	0,01

Tabela 2: Tabela obrobionych wyników

Wykres:



Rysunek 1: Wykres $T^2\,(l)$

3. Wnioski

Obliczanie przyspieszenia grawitacyjnego:

Nachylenie wykresu m funkcji z równania 3 jest równe:

$$m = \frac{4\pi^2}{g}$$

zatem:

$$g = \frac{4\pi^2}{m}$$
$$g = \frac{4\pi^2}{0{,}0407 \cdot 10^2} \approx 9{,}70 \frac{m}{s^2}$$

Z programu *Logger Pro* niepewność m wynosi 0,0002532 $\frac{s^2}{\mathrm{cm}}$ więc ostatecznie:

$$g \approx (9{,}70 \pm 0{,}03)\ \frac{m}{s^2}$$

Dla Gliwic przyspieszenie grawitacyjne wynosi:

$$g_{\mathrm{std}} = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$$

Zatem błąd względny otrzymanej wartości wynosi:

$$\Delta g = \frac{|g_{\mathrm{std}} - g|}{g_{\mathrm{std}}} \cdot 100\%$$
$$\Delta g = \frac{|9{,}81 - 9{,}70|}{9{,}81} \cdot 100\% \approx$$
$$\approx 1{,}12\%$$

Możliwe źródła niepewności: