Opis funkcji:

Dana jest funkcja Pow[1]:

```
1  def Pow(a, k):
2          z = a
3          y = 1
4          m = k
5          while m != 0:
6                  if m % 2 == 1:
7                          y = y*z
8
9                  m = int(m/2)
10                 z = z*z
11
12         return y
```

Gdzie k jest wartością całkowitą nieujemną zapisaną na n bitach, zatem:

$$k \in \langle 0; 2^n - 1\rangle \wedge k \in Z$$

1. Obliczyć pesymistyczną złożoność czasową przyjmując operację porównania w wierszu 6 funkcji jako operację dominującą.

Operacja porównania w wierszu 6 jest wywyoływana podczas każdej iteracji pętli w wierszu 5. Podczas każdej iteracji tej pętli wartość m jest dzielona przez 2 bez reszty w wierszu 9. Gdy wartość m staje się równa 0 pętla przestaje się wykonywać. Na przykład:

$15 \to 7$	$9 \to 4$	$17 \to 8$
$7 \to 3$	$4 \to 2$	$8 \to 4$
$3 \to 1$	$2 \to 1$	$4 \to 2$
$1 \to 0$	$1 \to 0$	$2 \to 1$
		$1 \to 0$

Liczby 9 i 15 da się zapisać na 4 bitach, ale liczbę 17 da się zapisać na minimalnie 5 bitach. Zatem pętla wykonuje się dla dannego k n_m razy, gdzie n_m to minimalna liczba bitów potrzebna do zapisania liczby k.

Zatem pesymistyczna złożoność dla $n \in N^+$ to:

$$T_{\text{pes}}(n) = n$$

2. Obliczyć średnią złożoność czasową przyjmując operację porównania w wierszu 6 funkcji jako operację dominującą.

Z poprzedniego zadania wiemy że złożoność dla liczby zapisanej na minimalnej liczbie bitów jest równa ilości jej bitów. Zatem złożoność średnia jest równa:

[1] tu przepisana na język *Python* z zachowaniem numeracji wierszy z danego zapisu w pseudokodzie

$$T_{\text{śr}}(n) = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 8 + \cdots + n \cdot 2^{n-1}}{2 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1}} = \\ = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 8 + \cdots + n \cdot 2^{n-1}}{2^n}$$

3. Obliczyć średnią liczbę wykonanych operacji mnożenia w wierszu 7 funkcji

4. Opisać krótko, jaki warunek musi spełnić wykładnik k aby zachodził przypadek pesymistyczny

Z obliczeń z zadania pierwszego wiemy że złożoność dla liczby k_4 zapisanej na minimalnej liczbie bitów jest równa ilości jej bitów. Zatem liczba bitów k_4 jest równa n.

Zatem:

$$k_4 \in \left\langle 2^{n-1} - 1; 2^n - 1 \right\rangle \wedge k_4 \in Z$$

Aby wykładnik k_4 był przypadkiem pesymistycznym funkcji Pow.

5. Obliczyć liczbę przypadków, dla których zachodzi przypadek pesymistyczny

Z poprzedniego zadania wiemy, że przypadek pesymistyczny zachodzi dla liczby przypadków k_5, która jest zależna od n

$$k_5 = 2^n - 1 - \left(2^{n-1} - 1\right) = 2^n - 2^{n-1} = \\ = 2^{n-1}$$