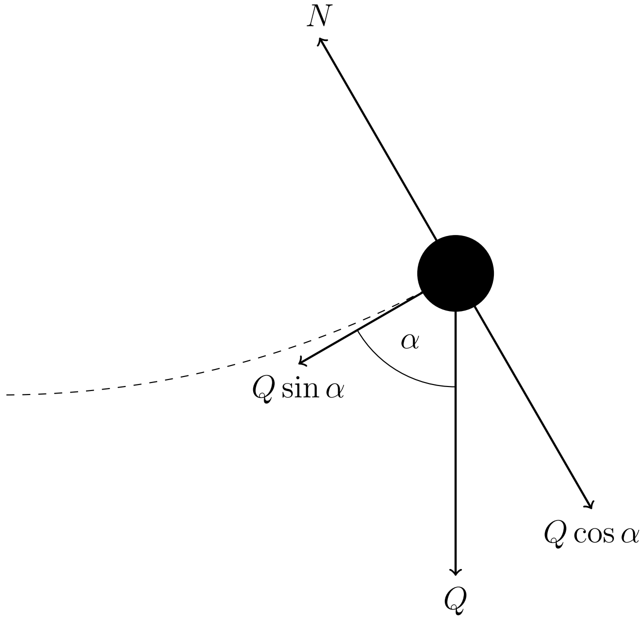
Badanie zależności okresu drgań wahadła od jego długości.

Grzegorz Koperwas

23 grudnia 2019

1. Wstęp teoretyczny

Celem doświadczenia było wyznaczenie przyspieszenia grawitacyjnego g poprzez pomiar czasu w jakim wahadło wykona 10 cykli w zależności od długości wahadła.



Rysunek 1: Wahadło w stanie największego wychylenia

Gdzie:

- Q - ciężar
- N - naciąg

Z praw Newtona:

$$F = ma$$

Gdzie F jest siłą wypadkową działającą na wahadło. Na wahadło działa siła ciężkości i naciągu sznurka. Siła naciągu jest równa składowej siły ciężkości prostopadłej do toru ruchu wahadła, zatem siła wypadkowa jest równa równoległej składowej siły ciężkości. Zatem:

$$ma = -mg\sin\alpha$$
$$a = -g\sin\alpha$$

Przyspieszenie a może zostać powiązane z zmianą kąta α. Niech s to długość łuku zakreślanego przez wahadło.

$$s = l\alpha$$
$$v = \frac{ds}{dt} = l\frac{d\alpha}{dt}$$
$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = l\frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

zatem:

$$l\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -g\sin\alpha$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\alpha = 0 \tag{1}$$

Dla małych kątów możemy założyć że $\sin\alpha \approx \alpha$, zatem po podstawieniu do równania 1 otrzymujemy równanie oscylatora harmonicznego:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\alpha = 0$$

Dla warunków początkowych $\alpha\left(0\right) = \alpha_0$ i $\frac{d\alpha}{dt}\left(0\right) = 0$:

$$\alpha\left(t\right) = \alpha_0\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$$

Zatem okres jest równy:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \text{dla małych kątów} \tag{2}$$

Ostatecznie w celu uzyskania wykresu $T^2\left(l\right)$:

$$T^2\left(l\right) = \frac{4\pi^2}{g}\cdot l \tag{3}$$

długość	czas t (s) ±0,01s									
l (cm) ±0,1cm	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}
80,0	18,32	17,72	18,28	18,01	18,29	18,18	17,87	17,72	18,03	18,18
70,0	16,66	16,73	16,84	16,93	16,67	16,67	16,83	16,91	16,68	16,67
60,0	15,37	15,43	15,71	15,52	15,55	15,28	15,48	15,54	15,50	15,59
50,0	14,16	14,14	14,17	14,25	14,13	14,29	14,32	14,16	14,23	14,23
40,0	12,77	12,55	12,61	12,54	12,86	12,68	12,64	12,72	12,61	12,63
30,0	11,03	10,98	10,95	10,94	10,95	10,73	10,93	11,06	10,87	10,87
20,0	8,87	8,97	9,02	9,01	8,97	8,99	8,91	8,88	8,93	8,84
10,0	6,09	6,27	6,18	6,20	6,25	6,49	6,18	6,33	6,25	6,27

Tabela 1: Tabela wyników pomiarów

2. Analiza wyników pomiarów

Dla wyników doświadczenia w tabeli 1 obliczamy:

- Średni czas $\bar{t}$.
- Odchylenie standardowe średniego czasu $\Delta\bar{t}$.
- Okres wychyleń wahadła T.
- Niepewność okresu ΔT.
- Kwadrat okresu T^2.
- Niepewność kwadratu okresu $\Delta\left(T^2\right)$.

Odchylenie standardowe

Odchylenie standardowe średniej jest równe:

$$\Delta\bar{t} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n\left(n-1\right)}}$$

Przykładowo:

$$\sqrt{\frac{\left(6{,}09 - 6{,}25\right)^2 + \left(6{,}27 - 6{,}25\right)^2 + \left(6{,}33 - 6{,}25\right)^2 +_{\dots} + \left(6{,}25 - 6{,}25\right)^2 + \left(6{,}27 - 6{,}25\right)^2}{10 \cdot 9}} =$$
$$= \sqrt{\frac{0{,}03 + 0{,}00 + 0{,}01 + 0{,}00 + 0{,}00 + 0{,}06 + 0{,}01 + 0{,}01 + 0{,}00 + 0{,}00}{90}} =$$
$$\approx 0{,}03$$

Okres

Okres wychyleń wahadła obliczamy za pomocą wzoru:

$$T = \frac{\bar{x}}{n}$$

gdzie n to liczba wychyleń wykonanych przez wahadło w czasie mierzonym t.

Przykładowo:

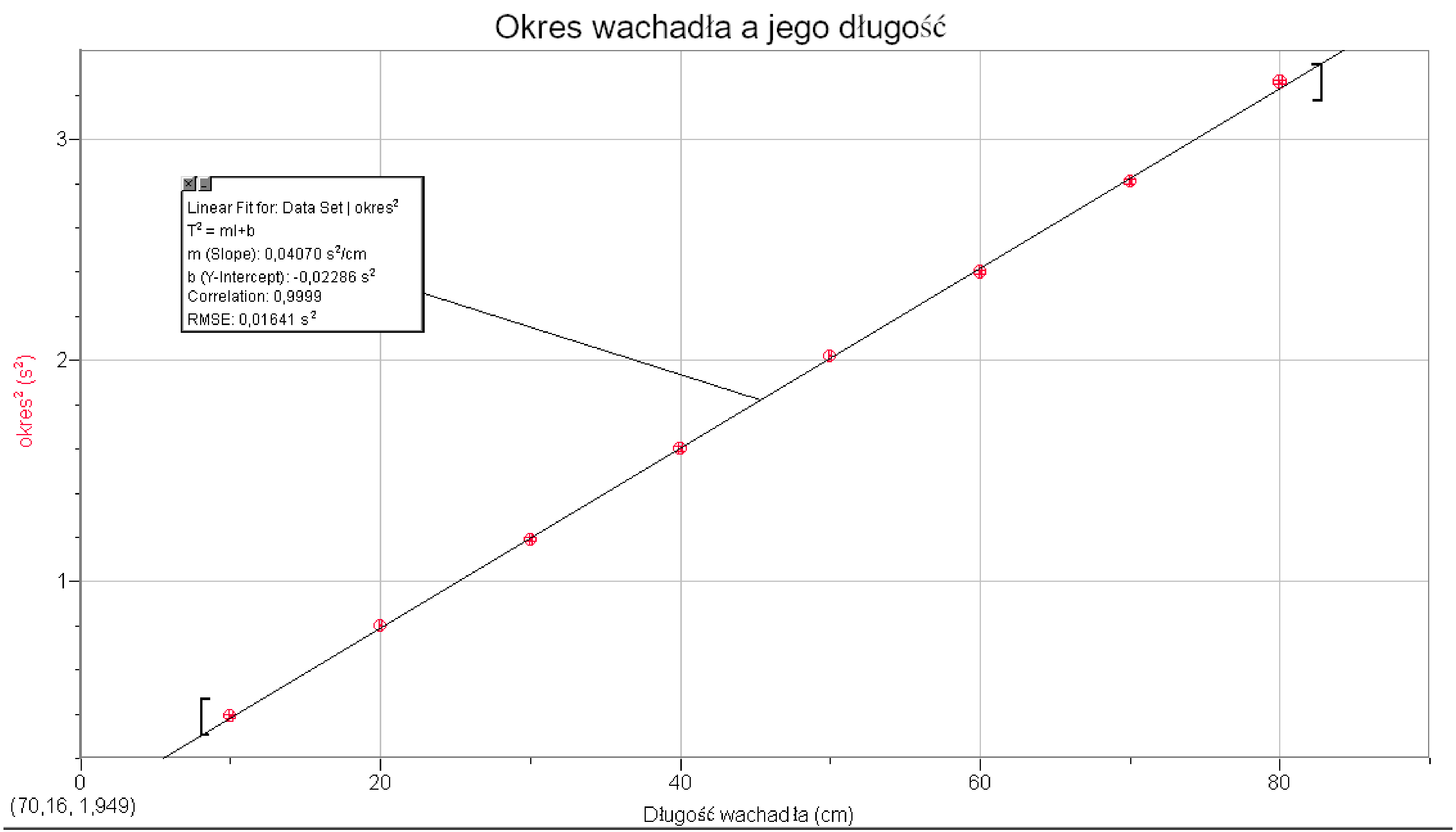
$$\frac{18{,}06}{10} \approx 1{,}80$$

Niepewność okresu wychyleń obliczamy w sposób analogiczny.

Kwadrat okresu

Niepewność T^2 jest obliczana w poniższy sposób:

$$\frac{\Delta\left(T^2\right)}{T^2} = \frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta T}{T} = 2 \cdot \frac{\Delta T}{T}$$



Rysunek 2: Wykres funkcji $T^2(l)$

długość l (cm) ±0,1cm	$\bar{t}$	$\Delta\bar{t}$	T	ΔT	T^2	$\Delta(T^2)$
80,0	18,06	0,07	1,81	0,01	3,26	0,01
70,0	16,76	0,03	1,68	0,00	2,81	0,01
60,0	15,50	0,04	1,55	0,00	2,40	0,01
50,0	14,21	0,02	1,42	0,00	2,02	0,00
40,0	12,66	0,03	1,27	0,00	1,60	0,01
30,0	10,93	0,03	1,09	0,00	1,19	0,01
20,0	8,94	0,02	0,89	0,00	0,80	0,00
10,0	6,25	0,03	0,63	0,00	0,39	0,01

Tabela 2: Tabela obrobionych wyników

3. Wnioski

Obliczanie przyspieszenia grawitacyjnego:

Nachylenie wykresu m funkcji z równania 3 jest równe:

$$m = \frac{4\pi^2}{g}$$

zatem:

$$g = \frac{4\pi^2}{m}$$
$$g = \frac{4\pi^2}{0{,}0407 \cdot 10^2} \approx 9{,}70\frac{m}{s^2}$$

Z programu *Logger Pro* niepewność m wynosi 0,0002532 $\frac{s^2}{\mathrm{cm}}$ więc ostatecznie:

$$g \approx (9{,}70 \pm 0{,}03)\ \frac{m}{s^2}$$

Dla Gliwic przyspieszenie grawitacyjne wynosi:

$$g_{\mathrm{std}} = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$$

Zatem błąd względny otrzymanej wartości wynosi:

$$\Delta g = \frac{|g_{\mathrm{std}} - g|}{g_{\mathrm{std}}} \cdot 100\%$$
$$\Delta g = \frac{|9{,}81 - 9{,}70|}{9{,}81} \cdot 100\% \approx$$
$$\approx 1{,}12\%$$

Możliwe źródła niepewności i błędów:

Na jakość pomiarów głównie wpływał błąd losowy pomiaru czasu oraz błędy losowe i systematyczne pomiaru długości wahadła. Znając wady używanej przez nas metody czasu postanowiliśmy im przeciwdziałać poprzez dokonywanie dziesięciu pomiarów dla każdej długości wahadła, patrząc na obliczone przez nas odchylenia standardowe możemy zauważyć że wpływ losowości tej metody na wynik doświadczenia był pomijalny.

Jednakże nie zostały przez nas podjęte żadne działania mające na celu ograniczenie wpływu błędu systematycznego, który mógł wynikać z złej metody pomiaru długości sznurka na którym został powieszony ciężarek będący wahadłem. Miarka którą dokonywaliśmy pomiaru była przymocowana na stałe do statywu, jednak była przesunięta względem punktu do którego było przymocowane wahadło, miarka również mogła nie być równoległa względem sznurka podczas pomiaru, mógł wystąpić znaczący błąd paralaksy. Być może z tego powodu wykres oparty na naszych danych nie przechodzi przez początek układu współrzędnych.

W celu poprawy jakości wyników powinniśmy byli dokonywać bezpośredniego pomiaru długości sznurka miarką, która nie była przyczepiona na stałe do statywu.

Na wynik eksperymentu mógł mieć wpływ również opór powietrza jak i niedoskonałe właściwości sznurka, jednak ich wpływu nie jestem w stanie określić.

3. Spis tabel

3. Spis rysunków