

I LICEUM OGŁNOKSZTAŁCĄCE IM. EDWARDA DEMBOWSKIEGO W GLIWICACH

Grzegorz Koperwas

Badanie przebiegu zmienności funkcji

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 24$$

Gliwice

2019

1. Analiza wzoru funkcji

Dana jest funkcja:

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 24$$

Funkcja jest wielomianem więc jej dziedziną jest zbiorem liczb rzeczywistych:

$$D_f = \mathbb{R}$$

Funkcja jest ciągła w dziedzinie. Funkcja jest różniczkowalna w dziedzinie.

1.1. Miejsca zerowe:

$$p: \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm 24$$

	1	0	-6	8	24
-2		-2	4	4	-24
	1	-2	-2	12	$0 = R$

$$f(x) = (x+2) \cdot (x^3 - 2x^2 - 2x + 12)$$

	1	-2	-2	12
-2		-2	8	-12
	1	-4	6	$0 = R$

$$f(x) = (x+2)^2 \cdot \underbrace{(x^2 - 4x + 6)}_{\Delta < 0} \quad \left| \quad \begin{aligned} \Delta &= 16 - 4 \cdot 6 = \\ &= -8 < 0 \end{aligned} \right.$$

Funkcja posiada miejsce zerowe w punkcie $(-2; 0)$ drugiego stopnia.

1.2. Przecięcie z osią OY

$$f(0) = 0^4 - 6 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0 + 24 = 24$$

Funkcja przecina oś OY w punkcie $(0; 24)$.

1.3. Granice na krańcach dziedziny

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{x^4}_{\rightarrow +\infty} \cdot \left(1 - \underbrace{\frac{6}{x^2} + \frac{8}{x^3} + \frac{24}{x^4}}_{\rightarrow 0} \right) = \\ &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{x^4}_{\rightarrow +\infty} \cdot \left(1 - \underbrace{\frac{6}{x^2} + \frac{8}{x^3} + \frac{24}{x^4}}_{\rightarrow 0} \right) = \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Funkcja nie posiada asymptot.

1.4. Parzystość i nieparzystość

Parzystość

Funkcja jest parzysta gdy:

$$\begin{aligned}f(x) &= f(-x) \\ (-x)^4 - 6 \cdot (-x)^2 - 8x + 24 &= x^4 - 6x^2 + 8x + 24\end{aligned}$$

By wielomiany były równe, muszą być tego samego stopnia oraz posiadać takie same współczynniki. $-8 \neq 8$ więc wielomiany nie są równe, zatem:

$$f(x) \neq f(-x)$$

Więc funkcja nie jest parzysta.

Nieparzystość

Funkcja jest nieparzysta gdy:

$$\begin{aligned}-f(x) &= f(-x) \\ -x^4 + 6x^2 - 8x - 24 &= (-x)^4 - 6 \cdot (-x)^2 - 8x + 24\end{aligned}$$

By wielomiany były równe, muszą być tego samego stopnia oraz posiadać takie same współczynniki. $24 \neq -24$ więc wielomiany nie są równe, zatem:

$$-f(x) \neq f(-x)$$

Więc funkcja nie jest nieparzysta.

2. Analiza pierwszej pochodnej

Obliczamy pierwszą pochodną:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x + 8$$

Pierwsza pochodna danej funkcji jest wielomianem więc jej dziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych.

$$D_{f'} = \mathbb{R}$$

2.1. Miejsca zerowe pochodnej

$$p : \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$$

	4	0	-12	8
1		4	4	-8
	4	4	-8	$0 = R$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (x-1) \cdot (4x^2 + 4x - 8) \\
4x^2 + 4x - 8 &= 0 \\
x^2 + x - 2 &= 0 \\
\Delta &= 1 + 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 > 0 \\
\sqrt{\Delta} &= \sqrt{9} = 3 \\
x_{1,2} &= \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 1 \\
f'(x) &= (x-1)^2 \cdot (x+2)
\end{aligned}$$

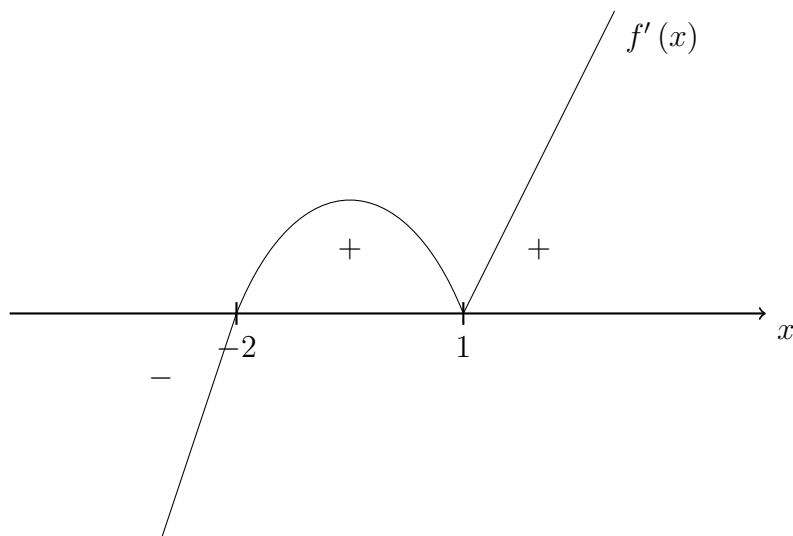
Pochodna funkcji posiada miejsce zerowe w 1 drugiego stopnia. Pochodna funkcji posiada miejsce zerowe w punkcie -2 .

2.2. Wyznaczanie ekstremów funkcji

Warunek konieczny ekstremum

$$\begin{aligned}
f'(x) = 0 &\Leftrightarrow (x-1)^2 \cdot (x+2) = 0 \\
f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x \in \{-2; 1\}
\end{aligned}$$

Podaję że funkcja ma ekstremum w $x_0 = -2$ oraz w $x_1 = 1$.



$$\begin{cases} f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 1) \cup (1; +\infty) \\ f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \end{cases}$$

Warunek wystarczający ekstremum

$$\left. \begin{aligned} x \in S^-(-2, \delta) &\Rightarrow f'(x) < 0 \\ x \in S^+(-2, \delta) &\Rightarrow f'(x) > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(-2) = 0 = f_{\min}$$

Funkcja posiada minimum w punkcie $(-2; 0)$.

$$\left. \begin{array}{l} x \in S^-(1, \delta) \Rightarrow f'(x) > 0 \\ x \in S^+(1, \delta) \Rightarrow f'(x) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

\Rightarrow funkcja nie posiada ekstremum w $(1; 27)$.

2.3. Monotoniczność funkcji

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 1) \cup (1; +\infty) \\ f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \end{cases}$$

więc:

- Funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle -2; +\infty \rangle$.
- Funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty; -2\rangle$.

3. Analiza drugiej pochodnej

$$f''(x) = 12x^2 - 12$$

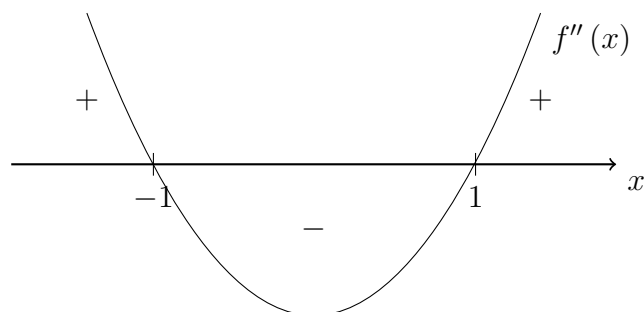
Druga pochodna funkcji jest wielomianem, więc dziedzina drugiej pochodnej to zbiór liczb rzeczywistych.

$$D_{f''(x)} = \mathbb{R}$$

3.1. Punkty przegięcia

Warunek konieczny punktu przegięcia

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow 12x^2 - 12 = 0 \\ x^2 - 1 &= 0 \\ (x - 1) \cdot (x + 1) &= 0 \\ x = 1 \vee x = -1 &\Rightarrow \\ \Rightarrow x \in \{-1; 1\} \end{aligned}$$



$$\begin{cases} f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \\ f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 1) \end{cases}$$

Więc:

- Krzywa jest wypuka w $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$
- Krzywa jest wklłsa w $(-1; 1)$

Warunek wystarczający punktu przegłcia

$$\left. \begin{array}{l} x \in S^-(-1; \delta) \Rightarrow f''(x) > 0 \\ x \in S^+(-1; \delta) \Rightarrow f''(x) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow P_1 = (-1; f(-1)) = (-1; 11) \text{ p.p.}$$

Funkcja posiada punkt przegłcia w $(-1; 11)$.

$$\left. \begin{array}{l} x \in S^-(1; \delta) \Rightarrow f''(x) < 0 \\ x \in S^+(1; \delta) \Rightarrow f''(x) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow P_2 = (1; f(1)) = (1; 27) \text{ p.p.}$$

Funkcja posiada punkt przegłcia w $(1; 27)$.

4. Tabela przebiegu zmienności funkcji

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow_0$	\min 0	$0 \nearrow_{11}$	11	$11 \nearrow_{24}$	24	$24 \nearrow_{27}$	27	$27 \nearrow_{+\infty}$
	$)$	$)$	$)$		$($	$($	$($		$)$

Tabela 1: Tabela zmienności funkcji $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 24$

5. Wykresy funkcji



Rysunek 1: Wykres funkcji $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + 24$ z programu *Geogebra*