

# Option sur spread

ROMANET Taliesin et AHAMADA Abdoul-Hakim

Avril 2023

## 1 Question 1

Soient  $i \in \{1, 2\}$  et  $t \in [0, T]$ . Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} dS_i(t) = S_i(t)(r dt + \sigma_i dW_i(t)) \\ S_i(0) = S_{i,0} > 0 \end{cases} \quad (D)$$

Nous cherchons à résoudre ce système en montrant l'existence et l'unicité d'une solution  $S_i$ , qui est un processus d'Itô vérifiant :

$$S_i(t) = S_{i,0} + \int_0^t r S_i(s) ds + \int_0^t \sigma_i S_i(s) dW_i(s) \quad (\star)$$

§ **Existence :** Supposons tout d'abord qu'une solution  $S_i$  existe et soit strictement positive. Considérons

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln x \end{cases}, \quad f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$$

Par la **formule d'Itô**, on a :

$$\begin{aligned} f(S_i(t)) &= f(S_i(0)) + \int_0^t f'(S_i(s)) dS_i(s) + \frac{1}{2} \int_0^t f''(S_i(s)) d[S_i]_s \\ &= \ln S_{i,0} + \int_0^t \frac{1}{S_i(s)} dS_i(s) + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{-1}{S_i(s)^2} \sigma_i^2 S_i(s)^2 ds, \quad \text{par } (\star) \\ &= \ln S_{i,0} + \int_0^t (r ds + \sigma_i dW_i(s)) - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_i^2 ds \end{aligned}$$

ce qui est équivalent, par bijectivité de  $\exp$ , à

$$S_i(t) = S_{i,0} \exp \left( \left( r - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) t + \sigma_i W_i(t) \right) > 0$$

Pour vérifier rigoureusement cela, définissons

$$f_i : \begin{cases} [0, T] \times \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (s, x) & \longmapsto S_{i,0} \exp \left( \left( r - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) s + \sigma_i x \right) \end{cases}, \quad \text{alors } f_i \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$$

et ses dérivées partielles sont données, pour tout  $(s, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$ , par :

$$\frac{\partial f_i}{\partial s}(s, x) = \left( r - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) f_i(s, x), \quad \frac{\partial f_i}{\partial x}(s, x) = \sigma_i f_i(s, x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2}(s, x) = \sigma_i^2 f_i(s, x)$$

En utilisant la **formule d'Itô**, on peut écrire :

$$\begin{aligned} S_i(t) &= f_i(t, W_i(t)) \\ &= f_i(0, 0) + \int_0^t \partial_s f_i(s, W_i(s)) ds + \int_0^t \partial_x f_i(s, W_i(s)) dW_i(s) + \frac{1}{2} \int_0^t \partial_{xx}^2 f_i(s, W_i(s)) d[W_i]_s \\ &= S_{i,0} + \int_0^t \left( r - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) f_i(s, W_i(s)) ds + \int_0^t \sigma_i f_i(s, W_i(s)) dW_i(s) + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_i^2 f_i(s, W_i(s)) ds \\ &= S_{i,0} + \int_0^t r S_i(s) ds + \int_0^t \sigma_i S_i(s) dW_i(s) \end{aligned}$$

On peut donc en conclure que  $S_i$  ainsi définie est une solution (strictement positive) de l'équation (D).

**§ Unicité :** En ce qui concerne l'unicité de la solution de l'équation différentielle stochastique (D), supposons que  $X_i$  soit une autre solution. Nous notons :

$$Z_i(t) = S_{i,0} S_i(t)^{-1} = \exp \left( \left( -r + \frac{\sigma_i^2}{2} \right) t - \sigma_i W_i(t) \right) = \exp \left( \left( r' - \frac{\sigma_i'^2}{2} \right) t + \sigma_i' W_i(t) \right)$$

avec

$$r' = -r + \sigma_i^2 \quad \text{et} \quad \sigma_i' = -\sigma_i$$

En utilisant les calculs précédents, nous pouvons déduire que :

$$\begin{aligned} Z_i(t) &= Z_i(0) + \int_0^t r' Z_i(s) ds + \int_0^t \sigma_i' Z_i(s) dW_i(s) \\ &= 1 + \int_0^t (\sigma_i^2 - r) Z_i(s) ds - \int_0^t \sigma_i Z_i(s) dW_i(s) \end{aligned}$$

En appliquant l'intégration par parties des processus d'Itô, nous avons :

$$\begin{aligned}
 X_i(t)Z_i(t) &= X_i(0)Z_i(0) + \int_0^t X_i(s)dZ_i(s) + \int_0^t Z_i(s)dX_i(s) + [X_i, Z_i]_t \\
 &= S_{i,0} + \int_0^t X_i(s)Z_i(s) \left[ (\sigma_i^2 - r) ds - \sigma_i dW_i(s) \right] \\
 &\quad + \int_0^t Z_i(s)X_i(s) [r ds + \sigma_i dW_i(s)] - \int_0^t X_i(s)Z_i(s)\sigma_i^2 ds \\
 &= S_{i,0}
 \end{aligned}$$

Ce qui se réduit à :

$$\forall t \in [0, T], \quad X_i(t) = S_{i,0}Z_i(t)^{-1} = S_i(t) \quad \mathbb{P} - \text{ps}$$

Ainsi, nous pouvons en conclure que :

$$\forall i \in \{1, 2\}, \forall t \in [0, T], \quad S_i(t) = S_{i,0} \exp \left( \left( r - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) t + \sigma_i W_i(t) \right)$$

## 2 Question 2

### 2.1 Prix de l'option de vente européenne

Dans un premier temps, nous allons étudier le prix de l'option de vente européenne afin de faciliter les calculs et les implémentations ultérieures. Pour cette partie, nous supprimerons les notations de l'exercice et utiliserons les notations suivantes :  $r$  et  $\sigma$  seront des réels,  $K$  un réel strictement positif,  $W$  un mouvement brownien standard, et  $S$  la solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} dS(t) = S(t)(r dt + \sigma dW(t)) \\ S(0) = S_0 > 0 \end{cases} \quad \text{ie. } \forall t \in [0, T], \quad S(t) = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right)$$

Nous pourrions ainsi exprimer la valeur  $P = e^{-rT} \mathbb{E}[(K - S(T))_+]$  du put à maturité comme suivant, et le calculer analytiquement, car  $W(T) \sim \mathcal{N}(0, T)$  :

$$\begin{aligned} P &= e^{-rT} \mathbb{E}\left[\left(K - S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W(T)\right)\right)_+\right] \\ &= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} \left(K - S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma \sqrt{T}y\right)\right)_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \end{aligned}$$

Pour  $y \in \mathbb{R}$ , nous avons :

$$\begin{aligned} K - S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma \sqrt{T}y\right) > 0 &\iff \frac{K}{S_0} > \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma \sqrt{T}y\right) \\ &\iff y < \frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \left(\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) \end{aligned}$$

Nous posons alors

$$d_1 = \frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \left(\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

Ensuite, en réécrivant l'intégrale avec, on peut effectuer un changement de variable et obtenir :

$$\begin{aligned} P &= \int_{-\infty}^{d_1} \left( K e^{-rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} - S_0 e^{-rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(rT - \frac{\sigma^2}{2}T + \sigma \sqrt{T}y - \frac{y^2}{2}\right) \right) dy \\ &= K e^{-rT} \int_{-\infty}^{d_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy - S_0 \int_{-\infty}^{d_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y - \sigma \sqrt{T})^2}{2}} dy \\ &= K e^{-rT} \int_{-\infty}^{d_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy - S_0 \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \end{aligned}$$

Ainsi, en notant  $\psi$  la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite, on a :

$$P = K e^{-rT} \psi(d_1) - S_0 \psi(d_2)$$

## 2.2 Cas de l'option d'échange

Supposons que  $\alpha$  et  $\beta$  soient des réels strictement positifs. Nous avons l'équation suivante :

$$P = e^{-rT} \mathbb{E}[(\alpha S_1(T) - \beta S_2(T))_+] \quad (1)$$

Nous introduisons un mouvement brownien standard  $W_3$  indépendant de  $W_1$ . Le vecteur  $(W_1, W_3)$  est alors un vecteur gaussien. Par conséquent, la variable aléatoire  $\rho W_1 + \sqrt{1 - \rho^2} W_3$  est également gaussienne. De plus, comme  $W_1$  et  $W_3$  sont indépendants (utilisé dans le deuxième point), nous avons les égalités suivantes :

$$\mathbb{E}[\rho W_1 + \sqrt{1 - \rho^2} W_3] = \rho \mathbb{E}[W_1] + \sqrt{1 - \rho^2} \mathbb{E}[W_3] = 0 = \mathbb{E}[W_2]$$

$$\text{Var}(\rho W_1 + \sqrt{1 - \rho^2} W_3) = \rho^2 \text{Var}(W_1) + (1 - \rho^2) \text{Var}(W_3) = \rho^2 T + (1 - \rho^2) T = T = \text{Var}(W_2)$$

Donc,

$$W_2 \stackrel{\mathcal{L}}{=} \rho W_1 + \sqrt{1 - \rho^2} W_3$$

**Remarque :** Cette égalité nous permettra de simuler les trajectoires des mouvements browniens pour les deux actifs sous-jacents dans la question suivante, en prenant en compte la corrélation entre les deux mouvements browniens.

De plus, la matrice de corrélation  $\Gamma$  permet de décrire le degré de dépendance entre les deux mouvements browniens :

- \$ Si  $\rho$  est proche de 1, cela signifie que les deux actifs évoluent en parallèle et ont tendance à augmenter ou à diminuer ensemble.
- \$ Si  $\rho$  est proche de -1, cela signifie que les deux actifs évoluent en sens opposé et ont tendance à avoir des mouvements inverses.
- \$ Enfin, si  $\rho$  est proche de 0, cela signifie que les deux actifs sont indépendants et ont des évolutions aléatoires non corrélées.

Nous allons maintenant calculer le prix de l'option d'échange.

$$\begin{aligned} P &= e^{-rT} \mathbb{E}[(\alpha S_1(T) - \beta S_2(T))_+] \\ &= \mathbb{E} \left[ \left( \alpha S_{1,0} \exp \left( -\frac{\sigma_1^2}{2} T + \sigma_1 W_1(T) \right) - \beta S_{2,0} \exp \left( -\frac{\sigma_2^2}{2} T + \sigma_2 W_2(T) \right) \right)_+ \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \left( \alpha S_{1,0} \exp \left( -\frac{\sigma_1^2}{2} T + \sigma_1 W_1(T) \right) - \beta S_{2,0} \exp \left( -\frac{\sigma_2^2}{2} T + \sigma_2 (\rho W_1(T) + \sqrt{1 - \rho^2} W_3(T)) \right) \right)_+ \right] \end{aligned}$$

Nous introduisons ensuite les processus  $\theta$  et  $L$  définis comme suit :

$$\forall t \in [0, T], \quad \theta_t = \sigma_1 \text{ et } L_t = \exp \left( -\int_0^t \theta_s dW_1(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds \right) = \exp \left( \sigma_1 W_1(t) - \frac{\sigma_1^2}{2} t \right)$$

Le processus  $L$  est la martingale exponentielle associée au mouvement brownien standard  $W_1$ . En

appliquant le **théorème de Girsanov**, nous montrons que le processus  $B$  défini par :

$$\forall t \in [0, T], \quad B(t) = W_1(t) - \sigma_1 t$$

est un mouvement brownien standard sous la probabilité  $Q$ , de densité  $L_T$  par rapport à  $\mathbb{P}$ . Nous pouvons alors reprendre le calcul de  $P$  en utilisant  $B$  :

$$\begin{aligned} P &= \mathbb{E} \left[ \left( \alpha S_{1,0} L_T - \beta S_{2,0} L_T \exp \left( \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{2} T + (\rho \sigma_2 - \sigma_1) W_1(T) + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} W_3(T) \right) \right) \right]_+ \\ &= \mathbb{E}_Q \left[ \left( \alpha S_{1,0} - \beta S_{2,0} \exp \left( \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{2} T + (\rho \sigma_2 - \sigma_1) W_1(T) + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} W_3(T) \right) \right) \right]_+ \\ &= \mathbb{E}_Q \left[ \left( \alpha S_{1,0} - \beta S_{2,0} \exp \left( (\rho \sigma_2 - \sigma_1) B(T) - \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 \rho}{2} T + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} W_3(T) \right) \right) \right]_+ \end{aligned}$$

En posant

$$\hat{\sigma}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 \rho$$

et en définissant le processus  $Z$  comme suit :

$$Z(T) = (\rho \sigma_2 - \sigma_1) B(T) + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} W_3(T)$$

nous obtenons un processus gaussien car  $(B, W_3)$  est un vecteur gaussien par définition de  $B$ . De plus, par indépendance de ces processus (utilisé dans le deuxième point), on a :

$$\mathbb{E}_Q[Z(T)] = 0$$

$$\text{Var}_Q(Z(T)) = (\rho \sigma_2 - \sigma_1)^2 T + \sigma_2^2 (1 - \rho^2) T = \hat{\sigma}^2 T$$

En posant  $Z(T) = \hat{\sigma} W_4(T)$ , où  $W_4(T) \sim \mathcal{N}(0, T)$ , nous pouvons réécrire l'expression du prix de l'option comme suit :

$$P = \mathbb{E}_Q \left[ \left( \alpha S_{1,0} - \beta S_{2,0} \exp \left( \hat{\sigma} W_4(T) - \frac{\hat{\sigma}^2 T}{2} \right) \right) \right]_+$$

Nous sommes ainsi revenus à un cas avec un seul actif sous-jacent, un strike non nul et un taux d'intérêt nul.

En posant

$$d_1 = \frac{1}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 T}} \left( \ln \left( \frac{\alpha S_{1,0}}{\beta S_{2,0}} \right) + \frac{\hat{\sigma}^2 T}{2} \right) \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sqrt{\hat{\sigma}^2 T}$$

nous pouvons alors exprimer le prix de l'option comme suivant :

$$P = \alpha S_{1,0} \psi(d_1) - \beta S_{2,0} \psi(d_2)$$

### 3 Question 3

Pour simuler le mouvement brownien sous la probabilité risque neutre  $W$ , nous pouvons commencer par générer deux mouvements browniens indépendants  $W_1$  et  $W_3$  à l'aide de la méthode de Box-Muller :

$$W_1 = \sqrt{-2T \ln(U)} \cos(2\pi V) \quad \text{et} \quad W_3 = \sqrt{-2T \ln(U)} \sin(2\pi V)$$

où  $U$  et  $V$  sont deux variables aléatoires uniformes indépendantes  $\mathcal{U}(0, 1)$ .

Comme les mouvements  $W_1$  et  $W_2$  sont corrélés, nous pouvons obtenir  $W_2$  par une méthode de Cholesky, ce qui donne :

$$W_2 = \rho W_1 + \sqrt{1 - \rho^2} W_3$$

et ainsi  $W = (W_1, W_2)$ .

Afin de vérifier que nos programmes ont été correctement implémentés, nous pouvons réaliser deux types de graphiques. Tout d'abord, un histogramme peut être tracé pour vérifier si l'échantillon créé suit bien une distribution gaussienne. Ensuite, pour vérifier s'il y a une corrélation potentielle entre les échantillons, nous pouvons tracer un nuage de points qui représente un échantillon en fonction de l'autre.

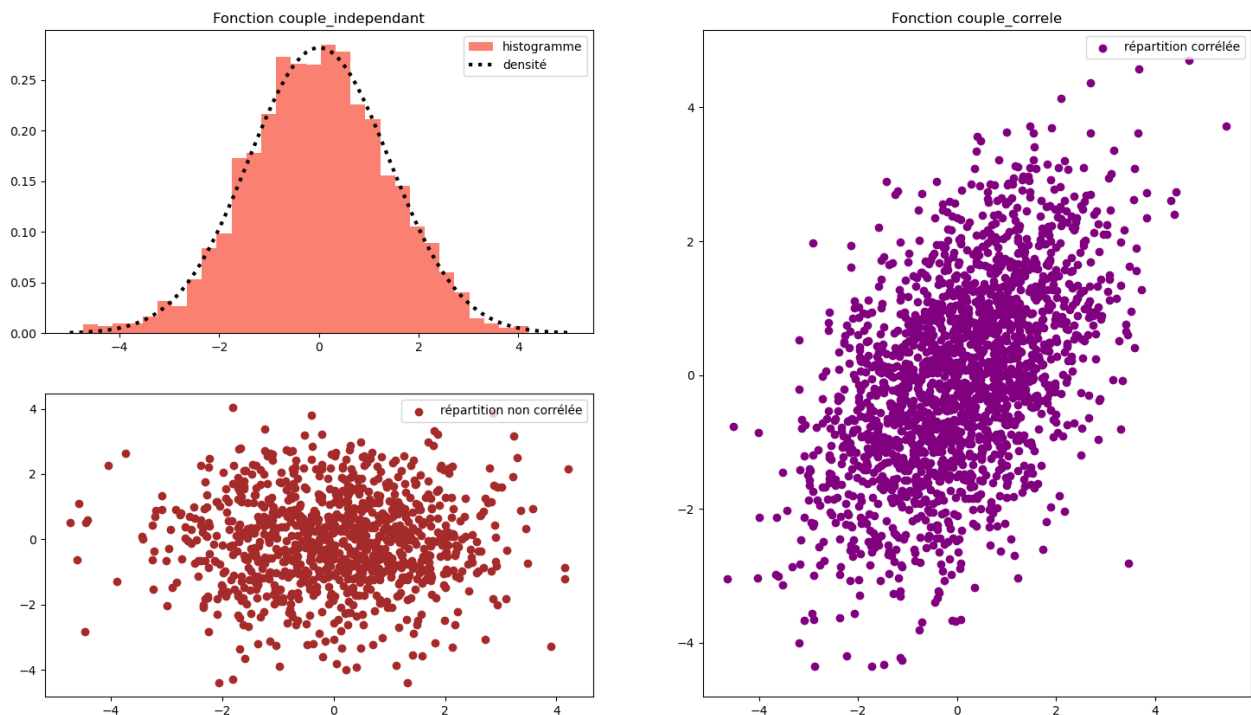


FIGURE 1 – Vérification

- ★ L'histogramme des échantillons présente une forme en cloche, suggérant que leur distribution suit une loi normale. Le nuage de points obtenu à partir du graphe de corrélation ne montre pas de structure évidente et la répartition uniforme des points dans le plan reflète l'absence de corrélation entre les échantillons.

- ★ Lorsque  $\rho = 0.5$  (comme dans notre cas), les deux actifs ont une corrélation positive modérée, indiquant qu'ils ont tendance à évoluer dans la même direction, mais pas de manière systématique. Ils peuvent également avoir des mouvements opposés de temps en temps.

⇒ Nous pouvons conclure que notre programme est correct pour la génération d'échantillons indépendants et corrélés de variables aléatoires gaussiennes.

En utilisant les fonctions préalablement définies, nous sommes en mesure d'implémenter le calcul de  $P$  en utilisant une méthode de Monte Carlo classique. Pour cela, nous avons fixé le nombre de trajectoires à 10 000 pour un premier essai, puis multiplié ce nombre par 9 pour vérifier que le prix évolue bien en  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ , où  $n$  est le nombre de trajectoires (Théorème Central Limite), ce qui correspond à une division par 3. Nous avons constaté que cette propriété était bien respectée. Toutefois, il est important de noter que le prix obtenu à partir de la méthode de Monte Carlo ne sera jamais exactement le même à cause de l'aléa. Il se situera toutefois aux alentours du prix trouvé.

Nous avons également calculé le prix de façon explicite en utilisant l'approximation fournie en annexe. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau ci-dessous :

Prix par Monte Carlo classique	Prix explicite
0.15609907652173033	0.1560551932275573

TABLE 1 – Calcul de  $P$  (classique)

Les deux résultats semblent similaires, ce qui suggère que la méthode de Monte Carlo a été implémentée correctement. Toutefois, pour une vérification plus rigoureuse, nous examinerons cela dans la question 5 en vérifiant si l'intervalle de confiance calculé par la méthode de Monte Carlo classique est cohérent avec le nombre d'itérations utilisé. En effet, plus le nombre d'itérations est élevé, plus l'intervalle de confiance devrait être petit.



## 4 Question 4

La méthode classique utilisée précédemment pour estimer le prix de l'option s'est avérée être assez peu précise, malgré une estimation générale correcte, en raison d'un intervalle de confiance trop large. Pour améliorer la précision de notre estimation et réduire l'intervalle de confiance, nous pouvons utiliser une méthode de Monte Carlo avec une réduction de variance.

### 4.1 Technique basée sur le conditionnement

Nous allons maintenant nous pencher sur la première technique de réduction de variance demandée par le sujet, à savoir celle basée sur le conditionnement. Notre idée est de réécrire le prix de l'option en une forme où les variables aléatoires  $W_1$  et  $W_3$  apparaissent, puis de conditionner par rapport à  $W_1$ , en exploitant l'indépendance entre les deux mouvements browniens. Ainsi, nous pourrions faire disparaître le conditionnement grâce au *freezing lemma*.

Nous avons l'idée de considérer le payoff initial comme une fonction  $f$  de  $W_1$  et  $W_2$ . Grâce à l'égalité en loi établie plus tôt reliant  $W_2$  à  $W_1$  et  $W_3$ , cette fonction devient une fonction des mouvements browniens indépendants  $W_1$  et  $W_3$ . Ainsi, le prix de l'option peut s'exprimer comme

$$P = e^{-rT} \mathbb{E}[(\alpha S_1(T) - \beta S_2(T))_+] = \mathbb{E}[f(W_1, W_2)] = \mathbb{E}[f(W_1, W_3)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(W_1, W_3) | W_1]] = \mathbb{E}[\phi(W_1)]$$

la dernière égalité provenant du *freezing lemma*, où

$$\begin{aligned} \phi(\omega) &= \mathbb{E}[f(\omega, W_3)] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\alpha S_{1,0} \exp\left(-\frac{\sigma_1^2}{2}T + \sigma_1\omega\right) - \beta S_{2,0} \exp\left(-\frac{\sigma_2^2}{2}T + \sigma_2\left(\rho\omega + \sqrt{1-\rho^2}W_3(T)\right)\right)\right)_+\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\alpha S_{1,0} \exp\left(-\frac{\sigma_1^2}{2}T + \sigma_1\omega\right) - \beta S_{2,0} \exp\left(-\frac{\sigma_2^2\rho^2}{2}T + \sigma_2\rho\omega\right) \exp\left(-\frac{(\sigma_2\sqrt{1-\rho^2})^2}{2}T + \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}W_3(T)\right)\right)_+\right] \\ &= e^{-\tilde{r}T} \mathbb{E}\left[\left(\tilde{K} - \tilde{S}_0 \exp\left(\left(\tilde{r} - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2}\right)T + \tilde{\sigma}W_3(T)\right)\right)_+\right] \end{aligned}$$

avec

$$\tilde{r} = r, \quad \tilde{K} = \alpha S_{1,0} \exp\left(\left(r - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)T + \sigma_1\omega\right), \quad \tilde{S}_0 = \beta S_{2,0} \exp\left(-\frac{\sigma_2^2\rho^2}{2}T + \sigma_2\rho\omega\right), \quad \tilde{\sigma} = \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}$$

Nous pouvons utiliser la formule analytique d'une option de vente européenne pour écrire l'expression suivante :

$$\phi(\omega) = \tilde{K} e^{-\tilde{r}T} \psi(d_1) - \tilde{S}_0 \psi(d_2)$$

avec

$$d_1 = \frac{1}{\tilde{\sigma}\sqrt{T}} \left( \ln\left(\frac{\tilde{K}}{\tilde{S}_0}\right) - \left(\tilde{r} - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2}\right)T \right) \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \tilde{\sigma}\sqrt{T}$$

Par conséquent, le prix de l'option d'échange peut s'exprimer comme suit :

$$P = \mathbb{E} \left[ \alpha S_{1,0} \exp \left( -\frac{\sigma_1^2}{2} T + \sigma_1 W_1(T) \right) \psi(d_1) - \beta S_{2,0} \exp \left( -\frac{\sigma_2^2 \rho^2}{2} T + \sigma_2 \rho W_1(T) \right) \psi(d_2) \right]$$

## 4.2 Technique de variables antithétiques

Passons maintenant à une seconde méthode de réduction de variance, à savoir l'utilisation de variables antithétiques, dans le but d'approfondir notre étude et de la comparer à la méthode précédente.

Si  $X = Y$  p.s. et  $\text{Cov}(X, Y) < 0$ , alors pour une fonction  $f$  donnée, on a :

$$\mathbb{E} \left[ \frac{f(X) + f(Y)}{2} \right] = \mathbb{E}[f(X)]$$

Dans notre cas, les variables aléatoires  $W_1(T)$  et  $W_2(T)$  suivent une loi normale centrée de variance  $T$ . Ainsi,

$$\forall i \in \{1, 2\}, \quad W_i(T) = -W_i(T) \quad \text{et} \quad \text{Cov}(W_i(T), -W_i(T)) = -T < 0$$

En choisissant

$$f(x, y) = \left( \alpha S_{1,0} \exp \left( \left( r - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) T + \sigma_1 x \right) - \beta S_{2,0} \exp \left( \left( r - \frac{\sigma_2^2}{2} \right) T + \sigma_2 y \right) \right)_+$$

on obtient

$$P = e^{-rT} \mathbb{E} \left[ \frac{f(W_1(T), W_2(T)) + f(-W_1(T), -W_2(T))}{2} \right]$$

le prix de l'option, mais avec une variance plus faible.

## 4.3 Comparaison

En utilisant les méthodes présentées ci-dessus et en comparant les valeurs obtenues avec la valeur explicite, on peut résumer les résultats dans le tableau suivant :

Prix explicite	
0.1560551932275573	
MC Conditionnement	MC antithétique
0.15597883141267488	0.15599061576838755

TABLE 2 – Calcul de  $P$  (réduction de variance)

Les résultats semblent similaires, ce qui suggère que les nouvelles méthodes ont été correctement implémentées. Pour confirmer cette hypothèse, on peut faire de même que pour la méthode classique. Par ailleurs, il est conseillé de tester le programme avec différentes valeurs de paramètres afin de s'assurer de sa robustesse et de sa capacité à fonctionner correctement pour une variété de scénarios. Dans notre cas, nous ferons varier uniquement le paramètre  $\rho$  dans la question suivante.

## 5 Question 5

Nous allons maintenant procéder à une comparaison rigoureuse en traçant les prix obtenus ainsi que les erreurs associées en fonction du nombre de trajectoires utilisées.

### 5.1 Technique basée sur le conditionnement

En opposant les courbes de prix obtenues par la méthode de Monte Carlo classique et celle de réduction de variance basées sur le conditionnement, nous obtenons le graphique suivant :

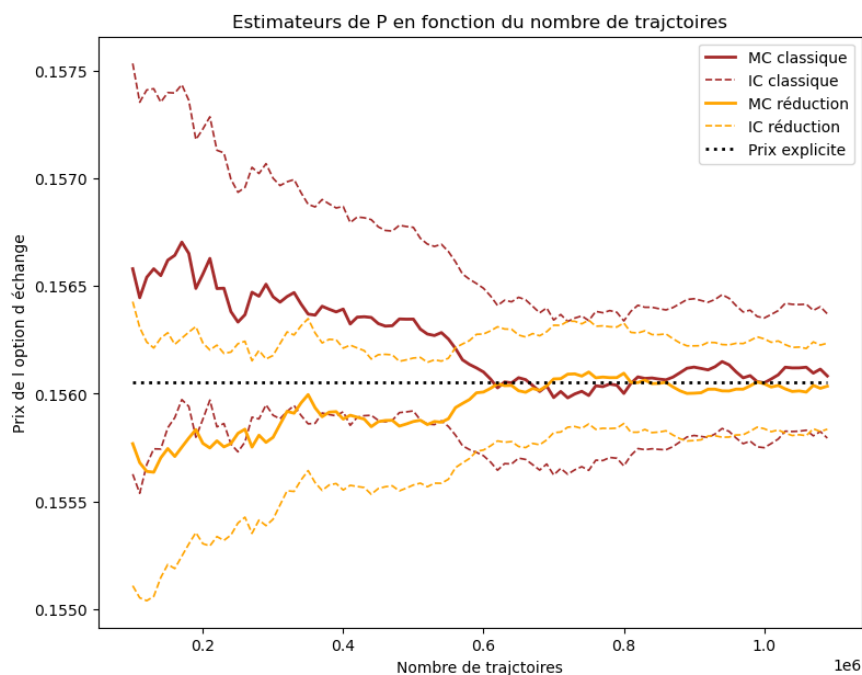


FIGURE 2 – Prix avec et sans réduction de variance en fonction du nombre d'itérations

Le prix calculé avec la méthode de réduction de variance basée sur le conditionnement est similaire à celui obtenu avec la méthode classique de Monte Carlo, mais la variance est réduite. En effet, la méthode de réduction de variance ne dépend que d'une seule variable aléatoire, ce qui explique cette diminution de la variance. Cela est illustré par le graphique suivant, qui montre les erreurs (ou demi-largeurs des intervalles de confiance) des deux méthodes ainsi que le facteur de réduction entre les deux variances :

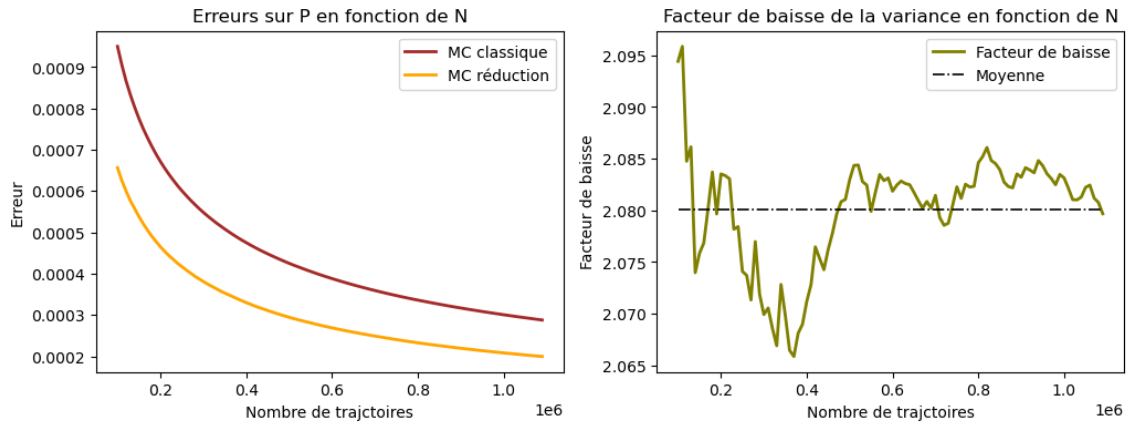


FIGURE 3 – Rapport des variances pour les deux méthodes

Il est à noter que le rapport des variances ne subit pas de grandes variations, avec une moyenne du facteur de baisse d'environ 2.1.

## 5.2 Technique de variables antithétiques

Nous avons également effectué la même comparaison pour la méthode de réduction de variance par variables antithétiques, dont le résultat est présenté sur le graphique suivant :

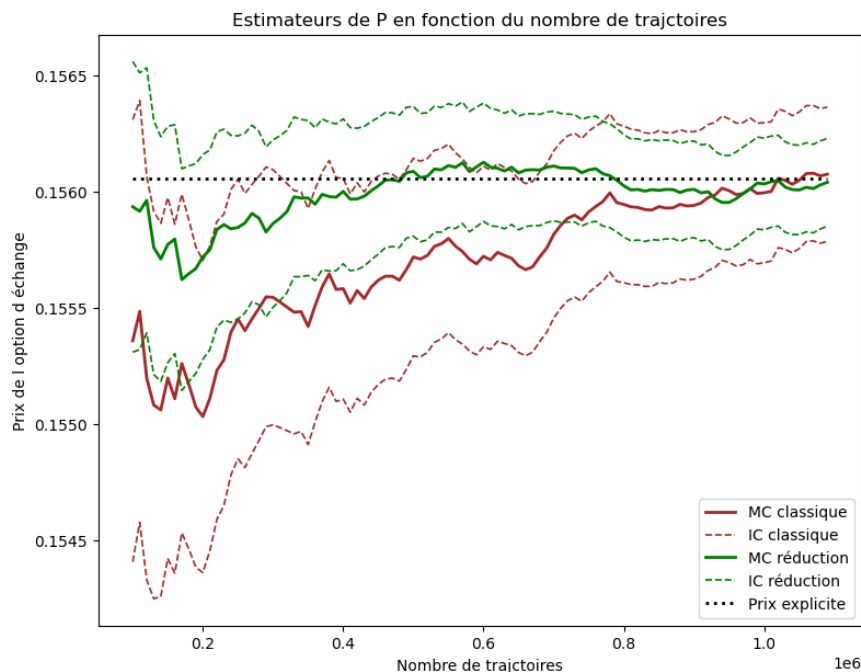


FIGURE 4 – Prix avec et sans réduction de variance en fonction du nombre d'itérations

Nous avons également comparé les variances des deux estimateurs dans ce cas :

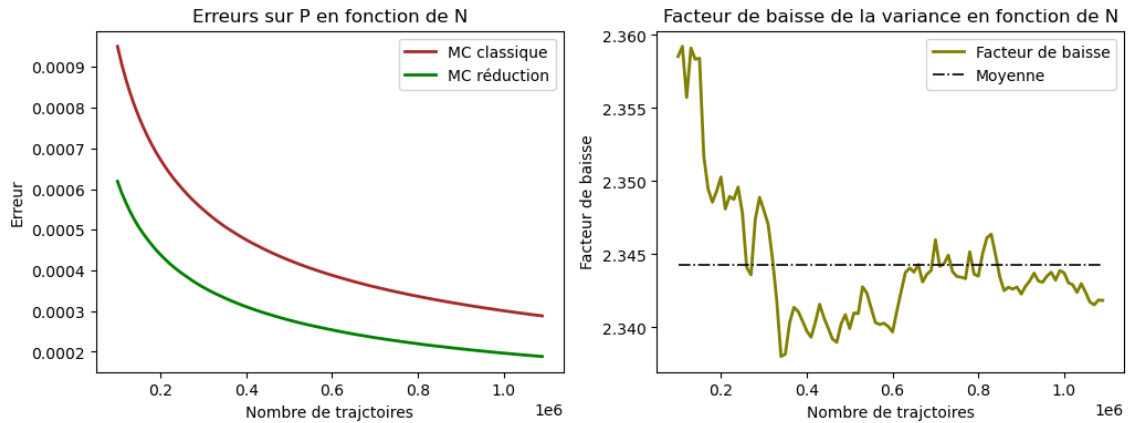


FIGURE 5 – Rapport des variances pour les deux méthodes

On peut noter que le rapport des variances entre les deux estimateurs reste relativement constant, avec une moyenne d'environ 2.3 pour la méthode de réduction de variance par variables antithétiques, comme on peut le voir sur le graphique ci-dessus.

### 5.3 Commentaires

Les résultats obtenus par les méthodes de Monte-Carlo classique et de réduction de variance ont été comparés et ont montré que les deux méthodes permettent d'obtenir une estimation du prix de l'option d'échange qui se rapproche du prix explicite, tout en réduisant l'intervalle de confiance associé à chaque estimation à mesure que le nombre de trajectoires augmente.

Cependant, la méthode de réduction de variance semble être plus efficace que la méthode classique, car elle réduit davantage la variance associée à l'estimation du prix. Ainsi, la méthode de réduction de variance peut être préférée pour des problèmes financiers plus complexes ou pour des instruments financiers dont le prix est plus difficile à estimer.

Dans notre cas, avec les constantes initiales, la méthode de réduction de variance par variables antithétiques est probablement plus efficace que celle par conditionnement.

## 6 Question 6

Nous allons maintenant étudier l'évolution du prix en fonction du coefficient de corrélation. Pour cela, nous devons fixer le nombre de trajectoires en utilisant un critère de précision. Nous avons choisi d'utiliser un seuil  $\varepsilon$  pour la largeur de l'intervalle de confiance afin d'assurer une précision suffisante. Par exemple, nous avons fixé  $\varepsilon$  à  $2 \times 10^{-3}$  pour garantir une précision de trois décimales.

### 6.1 Technique basée sur le conditionnement

Le graphique suivant représente la variation de la largeur des intervalles de confiance en fonction du nombre de trajectoires :

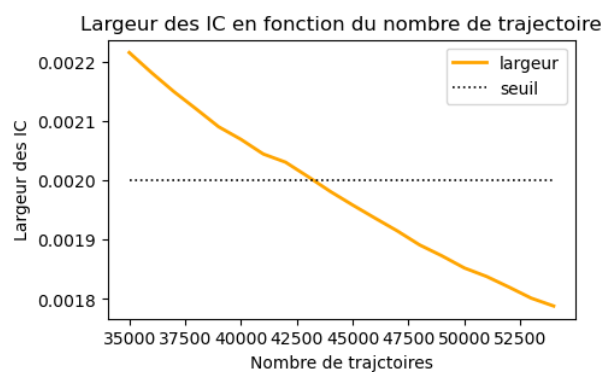


FIGURE 6 – Choix du nombre de trajectoires

En utilisant une réduction de variance et en effectuant 55000 trajectoires, nous avons obtenu des intervalles de confiance suffisamment précis à partir de  $N = 45000$  trajectoires. Nous pouvons donc étudier l'évolution du prix en fonction de  $\rho$  pour  $-1 < \rho < 1$  :

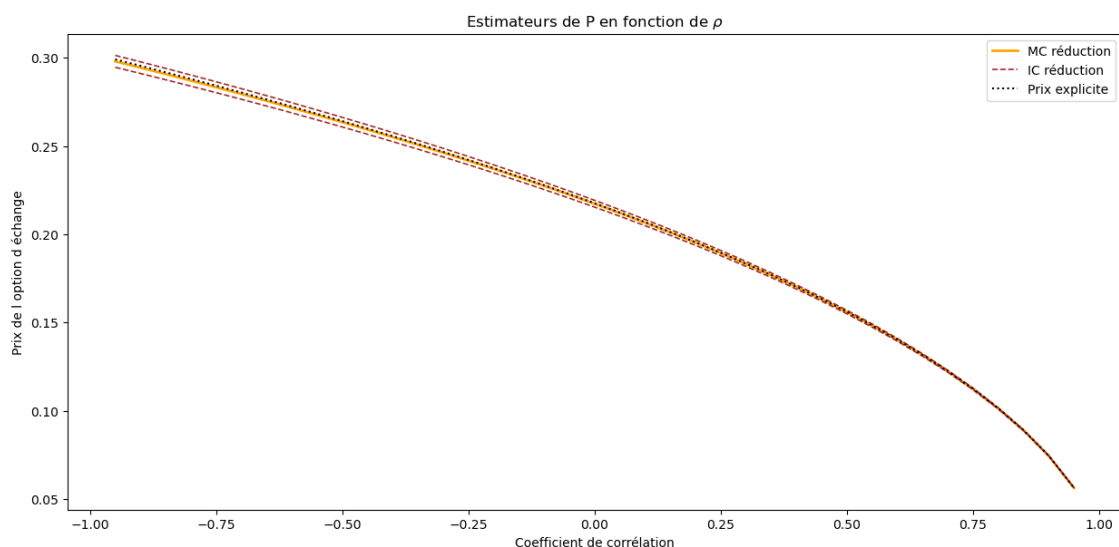


FIGURE 7 – Prix de l'option d'échange en fonction du coefficient de corrélation

## 6.2 Technique de variables antithétiques

De même, on cherche un nombre de trajectoires suffisant pour obtenir une estimation assez précise :

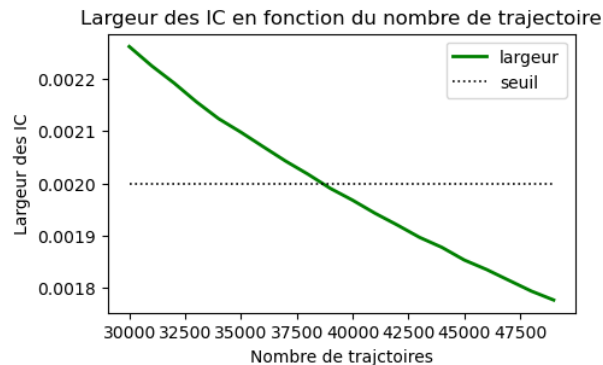


FIGURE 8 – Choix du nombre de trajectoires

Nous fixons le nombre de trajectoires à  $N = 40000$  et étudions l'évolution du prix en fonction du coefficient de corrélation  $\rho$  :

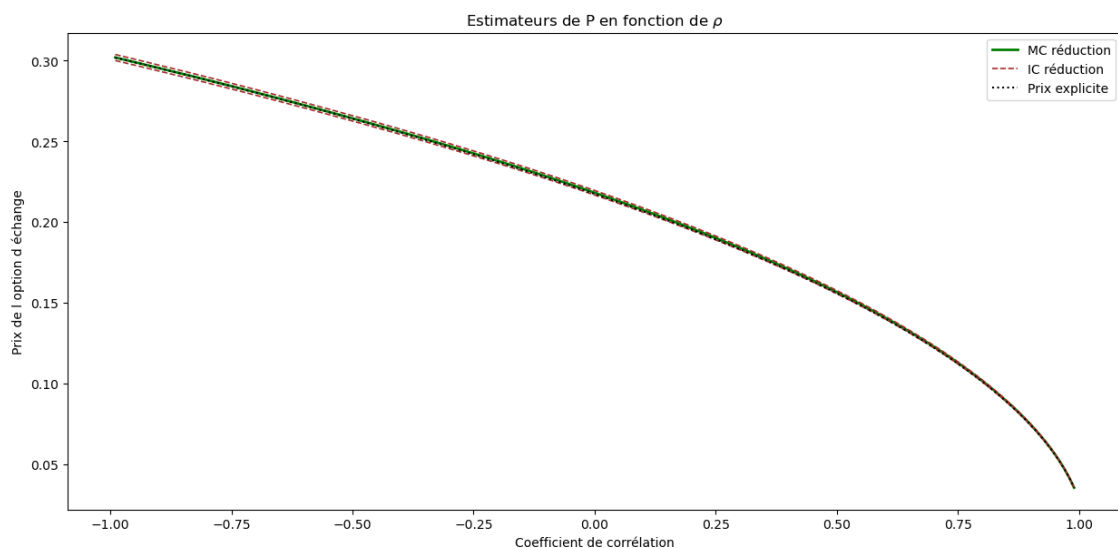


FIGURE 9 – Prix de l'option d'échange en fonction du coefficient de corrélation

## 6.3 Commentaires

En étudiant la courbe de prix de l'option d'échange en fonction du coefficient de corrélation  $\rho$ , nous constatons que le prix de l'option décroît à mesure que la corrélation entre les deux actifs augmente. En effet, lorsque  $\rho$  tend vers 1, cela signifie que les deux actifs sont égaux presque sûrement, ce qui entraîne une réduction de l'écart entre eux (par soustraction des actifs) et donc une diminution de la valeur de l'option. À l'inverse, lorsque  $\rho$  tend vers  $-1$ , les deux actifs évoluent



en sens opposé, ce qui augmente l'écart entre eux et donc le prix de l'option.

La réduction de la variance observée lorsque la corrélation entre les deux actifs augmente est due au fait que les mouvements browniens sous-jacents ont tendance à se compenser davantage lorsque la corrélation augmente. Cela signifie qu'il y a une diminution de l'incertitude sur la différence entre les deux actifs, ce qui conduit à une réduction de la variance du prix de l'option d'échange. En effet, lorsque les mouvements browniens sont très corrélés, le prix de l'option dépend principalement de la différence entre les deux actifs, qui est plus stable et prévisible lorsque la corrélation est forte. Cela permet d'obtenir des estimations plus précises et donc une réduction de la variance associée à ces estimations. En revanche, lorsque les mouvements browniens sont peu corrélés, le prix de l'option dépend davantage de la somme des deux actifs, ce qui est plus volatile et difficile à estimer, conduisant ainsi à une augmentation de la variance.

## 7 Question 7

Dans le cas de l'option sur spread, il est généralement difficile de trouver une formule explicite pour déterminer son prix. Cela est dû à la complexité de la relation entre les deux actifs sous-jacents et à leur volatilité respective.

Toutefois, il existe des méthodes numériques pour évaluer le prix de ces options, telles que les méthodes de Monte-Carlo ou les méthodes de différences finies. Ces méthodes consistent à simuler l'évolution des deux actifs sous-jacents et à calculer le prix de l'option à partir de ces simulations.

Dans ce contexte, nous allons utiliser une méthode de Monte-Carlo avec une technique de réduction de variance basée sur le conditionnement ainsi que par variable antithétique, comme décrites précédemment, pour calculer le prix de cette option.

Prix par MC classique	
0.1706195496304505	
MC Conditionnement	MC antithétique
0.170147993256021	0.170147993256021

TABLE 3 – Calcul de  $P$  par les trois méthodes

Les résultats semblent similaires, ce qui suggère que les nouvelles méthodes ont été correctement implémentées. Pour confirmer cette hypothèse, on peut faire de même que pour l'option d'échange. Par ailleurs, il est conseillé de tester le programme avec différentes valeurs de paramètres afin de s'assurer de sa robustesse et de sa capacité à fonctionner correctement pour une variété de scénarios. Dans notre cas, nous ferons varier les paramètres  $\rho$ ,  $K$ , et  $\sigma$  dans les questions suivantes.

## 8 Question 8

Nous allons étudier différentes méthodes pour estimer le prix, en raison de l'absence de connaissance du prix explicite. Pour commencer, nous allons faire varier plusieurs paramètres et comparer les résultats obtenus en utilisant différentes méthodes, notamment la méthode de réduction de variance basée sur le conditionnement et la méthode de réduction de variance par variables antithétiques. Pour la première méthode, nous pouvons procéder de la même manière que dans la question 4 en ajoutant le strike à la constante  $\tilde{K}$ , et pour la deuxième méthode, nous utiliserons la même technique que pour l'option d'échange.

Nous allons d'abord nous concentrer sur la variation du nombre de trajectoires et superposer les prix obtenus avec ces deux méthodes afin de ne pas favoriser l'une ou l'autre.



FIGURE 10 – Modélisation des deux méthodes de réduction de variance

En comparant les résultats obtenus par les méthodes de Monte-Carlo de réduction de variance, il a été observé que les deux méthodes permettaient d'obtenir une estimation du prix de l'option sur spread proche du prix explicite. En outre, l'intervalle de confiance associé à chaque estimation a diminué à mesure que le nombre de trajectoires augmentait, tout en maintenant le prix explicite à l'intérieur de l'intervalle.

Nous comparons la fiabilité des deux méthodes en traçant les erreurs et le rapport des variances.

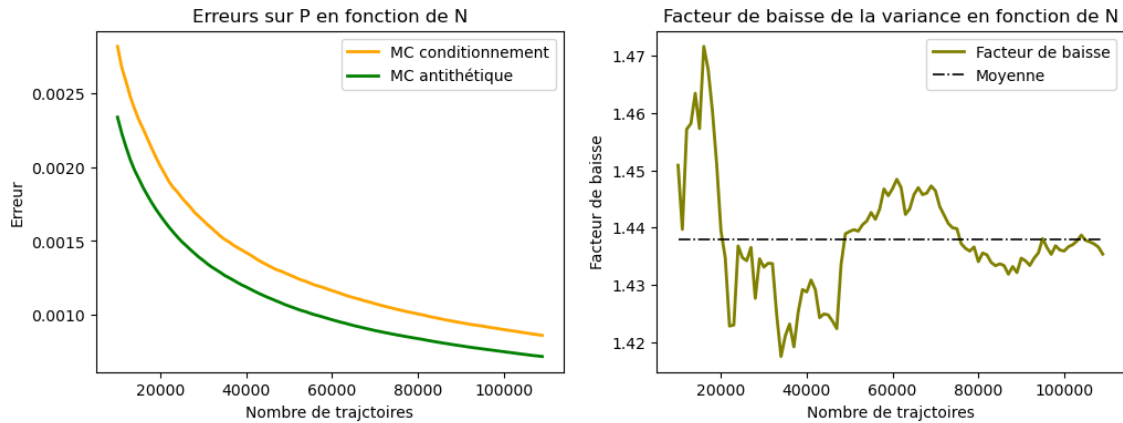


FIGURE 11 – Variances des deux méthodes de réduction de variance

Avec les constantes initiales utilisées, on a observé que la méthode de réduction de variance avec variables antithétiques était plus performante que la méthode basée sur le conditionnement pour estimer le prix de l'option sur spread, comme en témoigne la réduction de variance obtenue avec cette méthode. Il est intéressant de noter que le rapport des variances entre les deux estimateurs demeure relativement stable, avec une moyenne d'environ 1.4.

## 9 Question 9

Nous allons maintenant examiner comment le prix de l'option sur spread évolue en fonction du coefficient de corrélation. Pour ce faire, nous allons procéder de la même manière que pour l'option d'échange, mais cette fois-ci nous avons fixé  $\varepsilon$  à  $2 \times 10^{-2}$  afin d'obtenir une précision de deux décimales. Si une précision de trois décimales était requise, il faudrait utiliser un nombre beaucoup plus élevé de trajectoires, ce qui pourrait entraîner des temps de calcul plus longs.

### 9.1 Technique basée sur le conditionnement

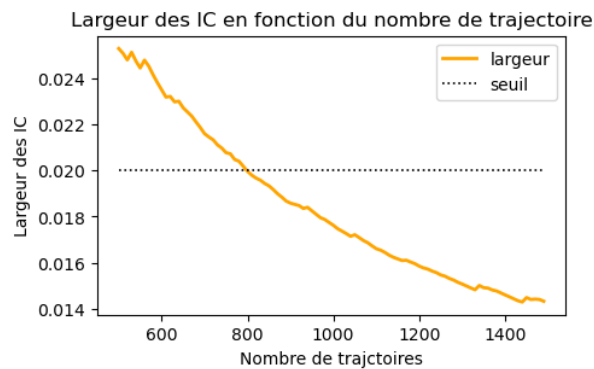


FIGURE 12 – Choix du nombre de trajectoires

Le graphique ci-dessous illustre l'évolution du prix de l'option en fonction de la corrélation  $\rho$  pour des valeurs variant de  $-1$  à  $1$ . Cette étude a été menée en fixant  $N = 1000$  trajectoires pour l'estimation du prix.

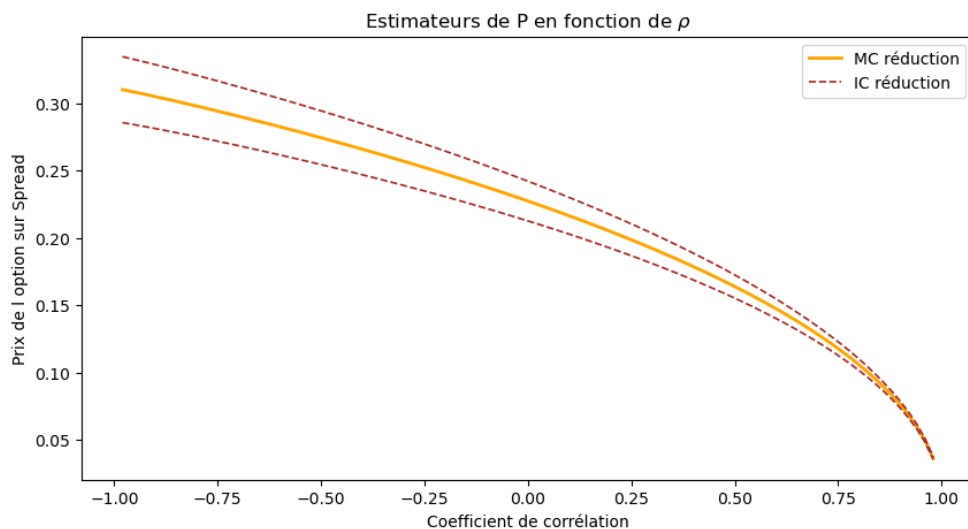


FIGURE 13 – Prix de l'option sur spread en fonction du coefficient de corrélation

## 9.2 Technique de variables antithétiques

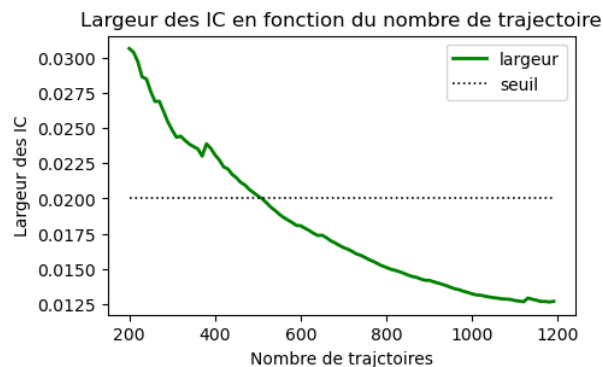


FIGURE 14 – Choix du nombre de trajectoires

Le graphique ci-dessous illustre la variation du prix de l'option en fonction de  $\rho$ , pour des valeurs de  $\rho$  allant de  $-1$  à  $1$ . L'estimation du prix a été effectuée en utilisant  $N = 600$  trajectoires.

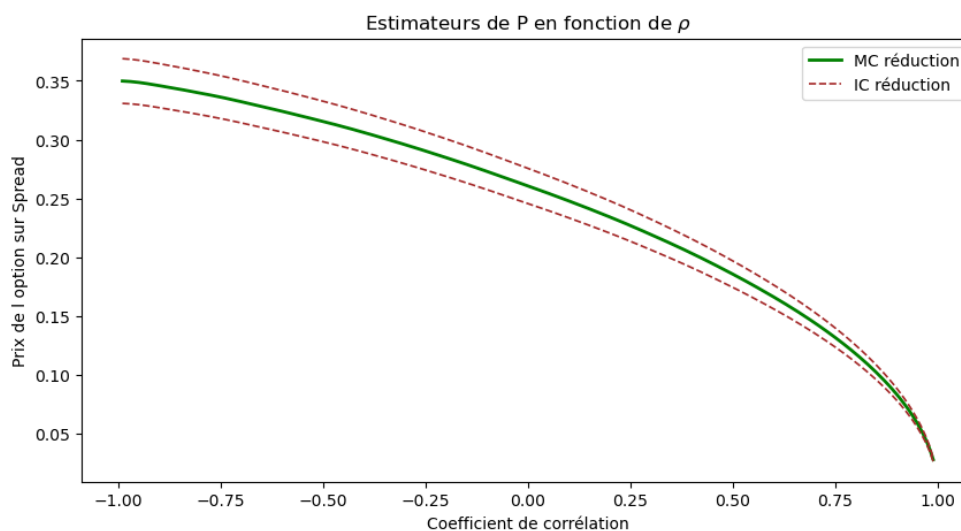


FIGURE 15 – Prix de l'option sur spread en fonction du coefficient de corrélation

## 9.3 Commentaires

En maintenant le strike constant, nous pouvons appliquer les mêmes observations que pour l'évolution des estimateurs du prix de l'option d'échange en fonction du coefficient de corrélation. Cela nous permet de constater comment la corrélation affecte le prix de l'option sur spread et les performances des méthodes de Monte Carlo étudiées.

Cependant, il est important de noter que l'évolution du prix de l'option sur spread peut différer de celle de l'option d'échange, en raison de la présence d'un strike. De plus, les résultats obtenus pour le prix de l'option sur spread peuvent être influencés par les constantes initiales choisies et la méthode de Monte Carlo utilisée.

## 10 Question 10

Nous allons désormais procéder à une nouvelle étude par rapport à l'option d'échange en traçant les estimations du prix en fonction du strike, qui n'était pas présent dans le premier cas. Nous utiliserons les mêmes critères de précision que précédemment pour permettre une comparaison équitable entre les deux méthodes de réduction de variance.

### 10.1 Technique basée sur le conditionnement

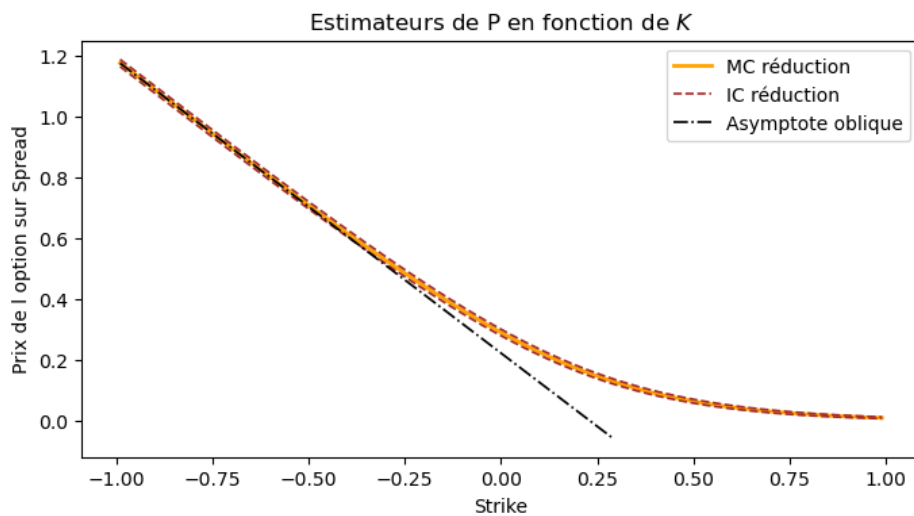


FIGURE 16 – Prix de l'option sur spread en fonction du strike

### 10.2 Technique de variables antithétiques

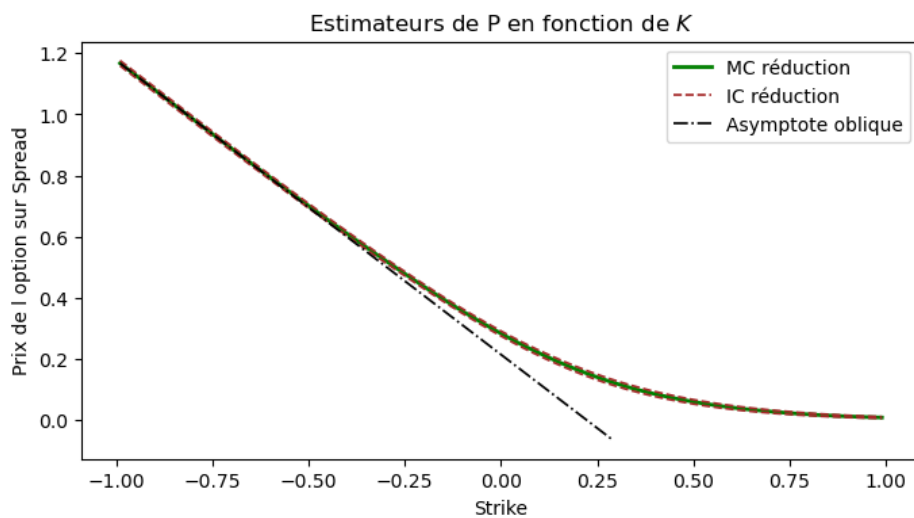


FIGURE 17 – Prix de l'option sur spread en fonction du strike

### 10.3 Commentaires

En analysant la variation du prix de l'option sur spread en fonction du strike, nous pouvons observer une décroissance générale. Cependant, la tendance est différente de celle constatée précédemment. En effet, lorsque le strike  $K$  diminue, le prix augmente de manière linéaire, avec une asymptote oblique dont la pente est d'environ  $-1$ . Cela implique que le prix tend vers l'infini lorsque  $-K$  tend vers l'infini. En revanche, lorsque le strike augmente, le prix est borné par zéro, en raison de la partie positive prise sur le payoff. Par conséquent, dans ce cas, nous avons une asymptote horizontale, car lorsque  $-K$  tend vers  $-\infty$ , la partie positive sera nulle.

Ces observations peuvent être expliquées par le fait que pour toute constante  $a \in \mathbb{R}$ , la fonction  $x \mapsto (a - x)_+$  est décroissante, tend vers 0 en  $+\infty$  avec une asymptote horizontale et vers  $+\infty$  en  $-\infty$  avec une asymptote oblique de pente  $-1$ .

Les asymptotes obtenues numériquement sont présentées dans le tableau ci-dessous :

MC conditionnement	MC antithétique
$-0.96153K + 0.22354$	$-0.96204K + 0.21434$

TABLE 4 – Asymptotes numériques



## 11 Question 11

Nous allons maintenant mettre en place une nouvelle méthode de réduction de variance par variables de contrôle. Nous commencerons en utilisant une variable de contrôle classique, basée sur la parité entre les options d'achat et de vente. Dans le cas de deux sous-jacents, cela nous permet de calculer ce qui suit, en utilisant les propriétés des parties positives :

$$\begin{aligned}
 \text{Call} - \text{Put} &= e^{-rT} \mathbb{E}[(\alpha S_1(T) - \beta S_2(T) - K)_+] - e^{-rT} \mathbb{E}[(\beta S_2(T) - \alpha S_1(T) + K)_+] \\
 &= e^{-rT} \mathbb{E}[(\alpha S_1(T) - \beta S_2(T) - K)_+ - (\beta S_2(T) - \alpha S_1(T) + K)_+] \\
 &= e^{-rT} \mathbb{E}[(\alpha S_1(T) - \beta S_2(T) - K)_+ - (\alpha S_1(T) - \beta S_2(T) - K)_-] \\
 &= e^{-rT} \mathbb{E}[\alpha S_1(T) - \beta S_2(T) - K] \\
 &= \alpha S_{1,0} - \beta S_{2,0} - K e^{-rT}
 \end{aligned}$$

Nous pouvons ainsi exprimer le prix de l'option comme suit :

$$P = e^{-rT} \mathbb{E}[(\alpha S_1(T) - \beta S_2(T) - K)_+] = e^{-rT} \mathbb{E}[(\beta S_2(T) - \alpha S_1(T) + K)_+] + \alpha S_{1,0} - \beta S_{2,0} - K e^{-rT}$$

De cette façon, en utilisant le put en tant que sous-jacent borné, nous espérons réduire la variance, mais seulement pour un strike sélectionné qui reste dans la monnaie. Nous pouvons vérifier cela à travers les graphiques ci-dessous.

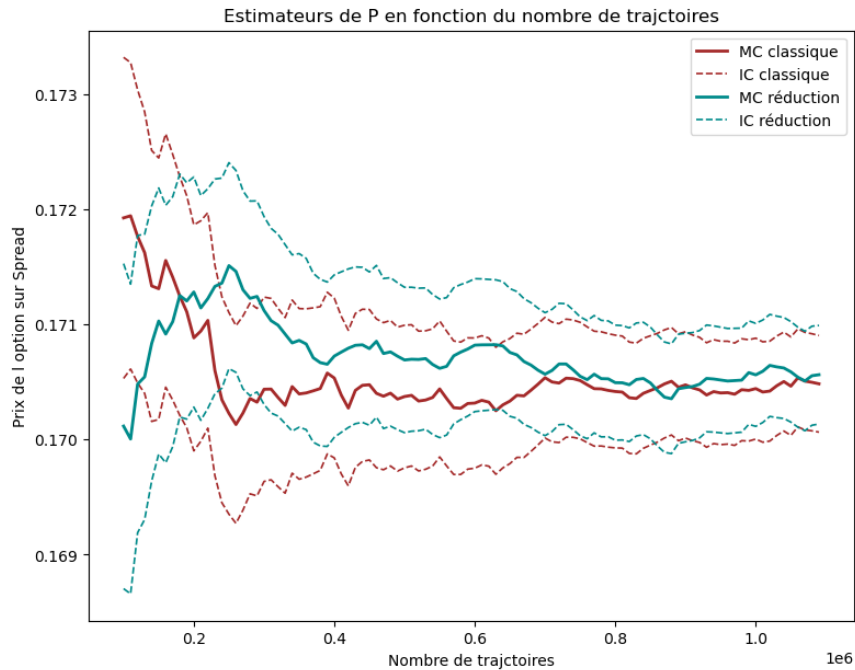


FIGURE 18 – Méthode classique et méthode de parité call put

Les courbes montrent une convergence des valeurs, bien que les intervalles de confiance restent

sensiblement les mêmes. Pour estimer la méthode la plus précise, nous étudions les variances des deux méthodes.

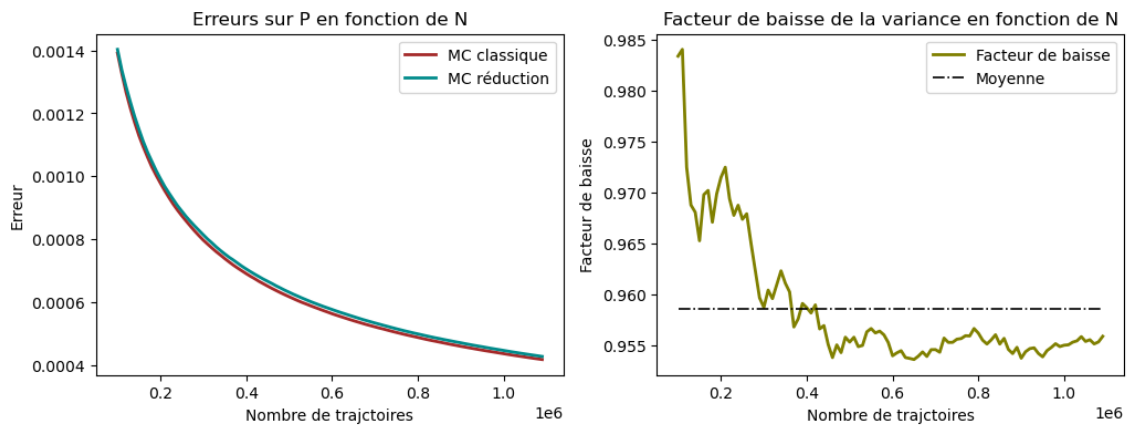


FIGURE 19 – Comparaison des variances des deux méthodes

Nous avons constaté que la méthode de réduction de variance n'est pas efficace. En effet, en utilisant cette méthode pour modéliser le prix du put, dont les valeurs sont bornées, la variance augmente avec un facteur de baisse de seulement 0,96 par rapport à celle obtenue avec le call. Nous pensons que le problème vient du niveau de strike, c'est pourquoi nous allons examiner les estimateurs du prix en fonction du strike afin de déterminer à quel moment la variance commence à augmenter.

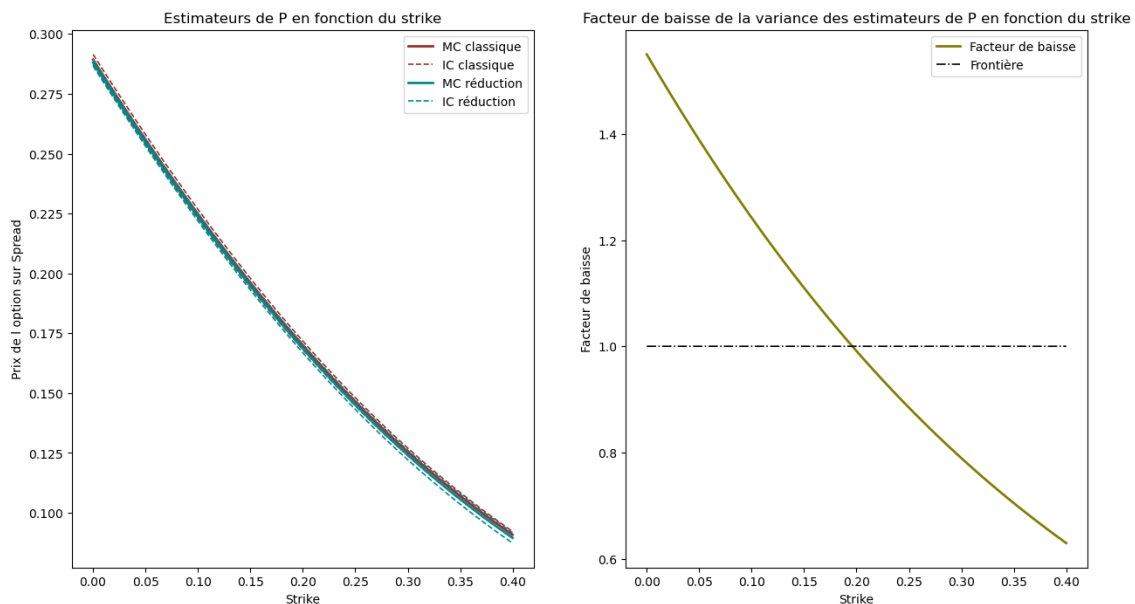


FIGURE 20 – Coefficient de baisse par rapport au strike

Tout d'abord, nous remarquons que les prix restent similaires en raison de la superposition des courbes. Toutefois, la diminution de la variance n'est observée que jusqu'à un strike de 0.19, ce qui explique pourquoi pour notre valeur de  $K = 0.2$ , la méthode de "réduction de variance" n'a pas permis de réduire la variance mais plutôt de l'augmenter.

## 12 Question 12

Nous allons explorer une dernière variation de paramètres qui n'a pas encore été abordée, à savoir la variation des volatilités. Bien que la méthode ne réduise pas la variance dans le contexte de nos constantes sélectionnées, nous allons tout de même l'utiliser pour modéliser (en 3D) le prix de l'option sur spread en fonction des volatilités.

Estimateurs de P en fonction de  $\sigma$

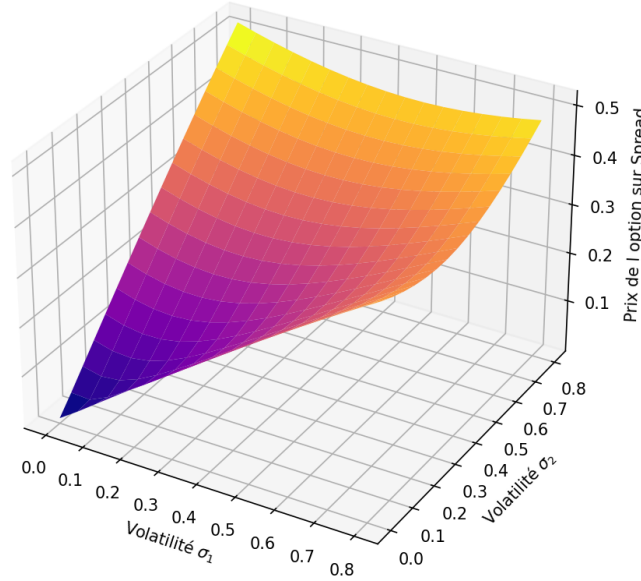


FIGURE 21 – Prix en fonction de la volatilité

De façon similaire à l'analyse de l'impact du coefficient de corrélation sur l'évolution du prix, l'évolution du prix en fonction des volatilités peut également être expliquée en se référant à l'option d'échange. Ainsi, pour étudier l'impact des volatilités sur le prix de l'option sur spread, nous pouvons considérer la nouvelle volatilité  $\hat{\sigma} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho}$  tout en maintenant les valeurs de  $\rho$  et  $K$  fixes.

Lorsque les deux volatilités sont nulles, le payoff est constant et le choix des constantes initiales donne un prix nul :

$$e^{-rT} \mathbb{E}[(\alpha S_{1,0} e^{rT} - \beta S_{2,0} e^{rT} - K)_+] = \alpha S_{1,0} - \beta S_{2,0} - K = 0$$

En augmentant les volatilités, la variance augmente et le prix augmente également, car il est minoré par 0, avec des pics aux maxima des volatilités. De plus, si l'on fixe une volatilité, l'évolution du prix en fonction de la seconde se fait de manière quadratique. Cela peut s'expliquer par la forme de  $\hat{\sigma}^2$ , qui est alors une fonction du second degré de la volatilité en question.

## 13 Question 13

Maintenant, en utilisant toutes les connaissances acquises précédemment, examinons le prix théorique d'un contrat à terme (forward) sur Best Of, qui a un payoff de la forme :

$$\max(S_1(T), S_2(T)) - K$$

Son prix se calcule explicitement à l'aide d'une réécriture du maximum :

$$\begin{aligned} e^{-rT} \mathbb{E}[\max(S_1(T), S_2(T)) - K] &= e^{-rT} \mathbb{E}[\max(S_1(T) - S_2(T), 0) + S_2(T) - K] \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}[(S_1(T) - S_2(T))_+] + e^{-rT} \mathbb{E}[S_2(T)] - K e^{-rT} \\ &= \underbrace{e^{-rT} \mathbb{E}[(S_1(T) - S_2(T))_+]_{\text{prix de l'option d'échange avec } \alpha = \beta = 1}} + S_{2,0} - K e^{-rT} \\ &= S_{1,0} \psi(d_1) - S_{2,0} \psi(d_2) + S_{2,0} - K e^{-rT} \end{aligned}$$

Ainsi, le prix du forward sur Best Of est donné par :

$$e^{-rT} \mathbb{E}[\max(S_1(T), S_2(T)) - K] = S_{1,0} \psi(d_1) - S_{2,0} (\psi(d_2) - 1) - K e^{-rT}$$

où  $d_1$  et  $d_2$  sont identiques à ceux de la question 2, et  $\psi$  est la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.

## 14 Question 14

En fixant le strike à 1, nous avons modélisé le prix du forward sur Best Of par méthode de Monte Carlo classique pour vérifier la validité de notre formule.

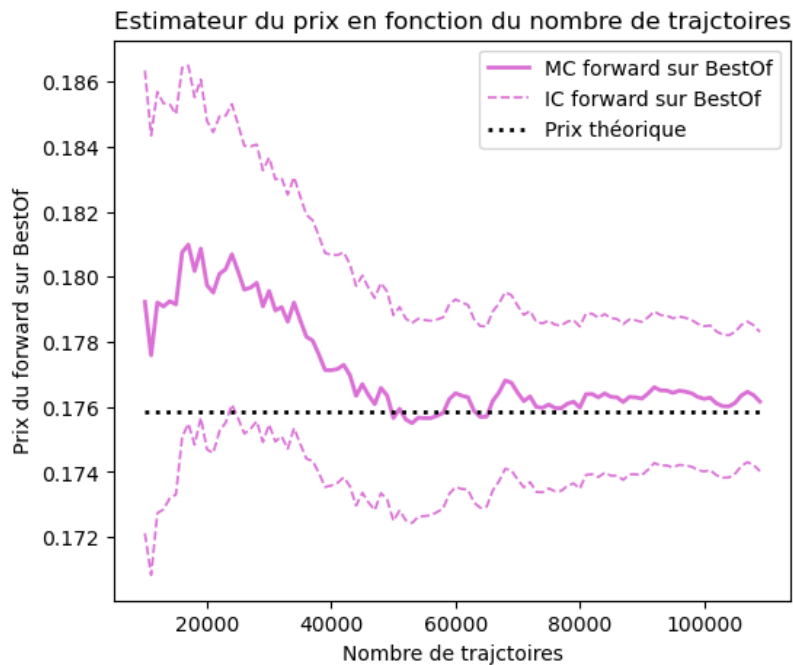


FIGURE 22 – Modélisation du prix du forward sur Best Of par méthode de Monte Carlo classique

Le graphique ci-dessus montre que les résultats de la méthode de Monte Carlo convergent vers le prix théorique et que l'intervalle de confiance de l'estimation contient le prix théorique avec un niveau de confiance de 90%. Par conséquent, nous pouvons conclure que notre formule est précise. Nous pouvons donc conclure que notre formule est validée avec une bonne précision.

## 15 Question 15

Pour conclure notre étude approfondie de l'option sur spread, nous allons utiliser à nouveau la méthode de réduction de variance par variables de contrôle, en utilisant cette fois-ci l'option d'échange étudiée précédemment comme variable de contrôle.

Pour cela, nous notons la différence entre les deux payoff de cette manière :

$$S = (\alpha S_1(T) - \beta S_2(T) - K)_+ - (\alpha S_1(T) - \beta S_2(T))_+$$

Nous pouvons ainsi exprimer le prix de l'option sur spread d'une manière différente, en utilisant le fait que nous connaissons explicitement le prix de l'option d'échange :

$$P = e^{-rT} \mathbb{E}[S] + e^{-rT} \mathbb{E}[(\alpha S_1(T) - \beta S_2(T))_+]$$

Nous en déduisons alors que :

$$P = e^{-rT} \mathbb{E}[S] + \alpha S_{1,0} \psi(d_1) - \beta S_{2,0} \psi(d_2)$$

avec

$$d_1 = \frac{1}{\hat{\sigma}\sqrt{T}} \left( \ln \left( \frac{\alpha S_{1,0}}{\beta S_{2,0}} \right) + \frac{\hat{\sigma}^2 T}{2} \right) \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \hat{\sigma}\sqrt{T}$$

Le graphique présenté ci-dessus montre le résultat obtenu suite à notre implémentation.

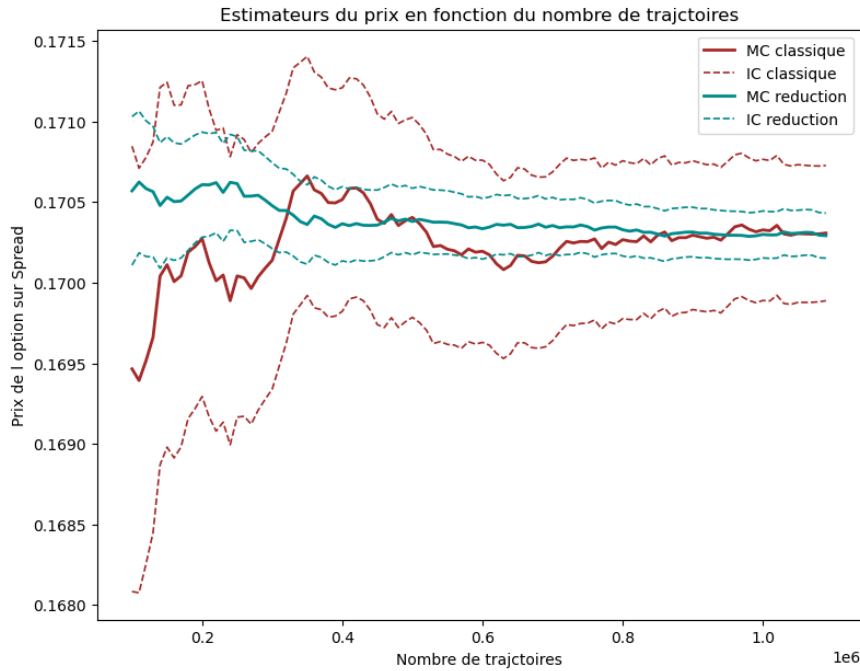


FIGURE 23 – Modélisation du prix utilisant l'option d'échange comme variable de contrôle

Nous pouvons constater en premier lieu que les deux courbes convergent vers la même valeur, mais également que l'intervalle de confiance associé à la méthode de réduction de variance est significativement plus étroit.

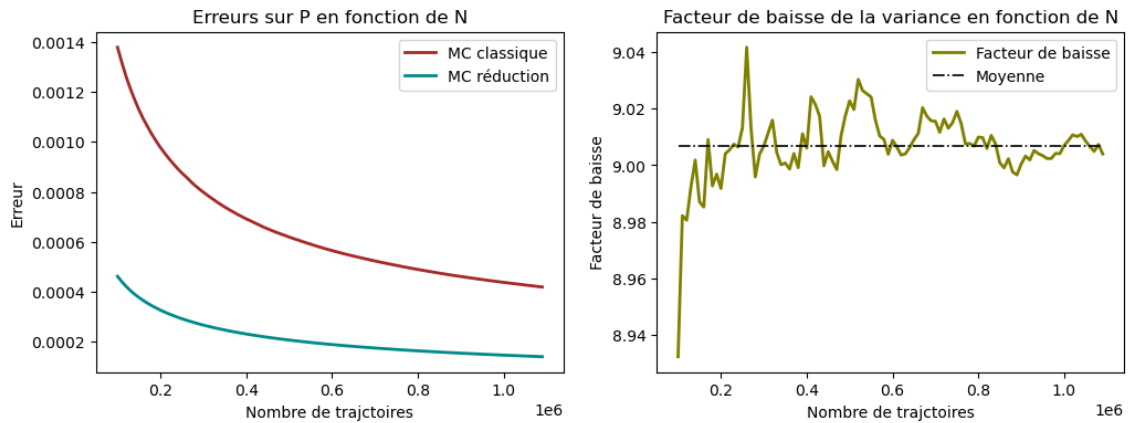


FIGURE 24 – Variances du prix avec et sans variable de contrôle

Avec ces constantes initiales bien choisies, notre étude montre que l'option d'échange est la meilleure variable de contrôle pour réduire la variance de l'estimation du prix de l'option sur spread. En effet, l'utilisation de cette variable permet de réduire la variance d'un facteur de 9, soit une amélioration significative par rapport aux précédentes méthodes de réduction de variance qui n'ont pas permis de dépasser un facteur de 3.

Cette conclusion s'appuie sur des constantes initiales optimales pour notre étude, et peut varier selon les spécifications du marché et les choix des paramètres. Néanmoins, cette méthode de réduction de variance par variables de contrôle est une technique généralement utilisée en finance pour améliorer la précision des estimations de prix.