

INSTITUT DE MATHÉMATIQUE D'ORSAY



Un modèle simple pour l'équilibre entre sélection et mutation

Abdoul-Hakim Ahamada

Projet de recherche encadré par M. Olivier Hénard

Université Paris-Saclay - M1 Mathématiques Appliquées

Année universitaire 2022-2023



Je tiens tout d'abord à exprimer ma chaleureuse gratitude envers M. Olivier Henard, ce professeur assistant à l'Institut de Mathématiques d'Orsay qui a allumé la flamme de cette aventure à la fois passionnante et tortueuse. Grâce à vous, j'ai fait la découverte émerveillée du monde des probabilités lors de ma L3 Magistère de Mathématiques, et votre sujet de TER m'a offert l'opportunité de plonger tête la première dans les méandres de la recherche, illuminant mes yeux d'une nouvelle lueur pour le monde fascinant de la biologie. Ce voyage au cœur du vivant a renforcé ma conviction profonde quant à ma vocation future. Qu'il s'agisse de l'étude des processus biologiques ou de l'exploration des frontières de la médecine, ma passion dévorante est plus ardente que jamais.

Je souhaite également adresser mes plus sincères remerciements à toutes les entreprises, laboratoires et professeurs qui ont aimablement décliné ma demande de stage. Vos refus répétés ont été un véritable catalyseur pour mon ego de chercheur en herbe. Grâce à vous, j'ai découvert un potentiel caché, une détermination inébranlable et un amour inconditionnel pour les heures passées devant mon ordinateur à lire des articles et ma tablette à démontrer des résultats et organiser mes idées.

En somme, mes remerciements atypiques s'adressent à toutes les personnes, institutions et circonstances qui ont contribué à façonner mon parcours et à révéler ma véritable voie. Vos refus ont été ma motivation, votre sujet mon inspiration, et votre enseignement ma boussole. Je vous suis profondément reconnaissant d'avoir participé à cette aventure inoubliable.

Que le monde scientifique, avec toutes ses découvertes et ses défis, soit prêt à m'accueillir, car je suis prêt à y laisser une empreinte indélébile, en proposant des résultats étonnants, des théories révolutionnaires et des découvertes audacieuses.

Merci, du fond de mes cellules les plus profondes, pour avoir contribué à mon épanouissement scientifique et à ma passion grandissante !

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Décryptage des concepts clés	1
1.1.1	La danse de la sélection et de la mutation	1
1.1.2	La fitness : l'ascenseur évolutif	2
1.1.3	La complexité de l'haploïdie	2
1.1.4	Le fragile "château de cartes" évolutif	2
1.2	Dynamique de la sélection et de la mutation	2
1.3	Contexte et contribution	3
2	Mathématisation de la dynamique	5
2.1	Modélisation de la dynamique évolutive	5
2.1.1	L'ère de la sélection	5
2.1.2	Le jeu des mutations	5
2.2	Analyse de la dynamique de la population	6
2.2.1	Distribution de fitness	6
2.2.2	Produit des viabilités	6
2.2.3	Série génératrice associée au produit	7
3	Évolution et régimes de sélection	13
3.1	Régime démocratique : équilibre biologique en perspective	13
3.1.1	Convergence vers un équilibre harmonieux	14
3.1.2	Convergence vers une répartition stable	15
3.2	Régimes non-démocratiques : concentration du pouvoir	18
3.3	L'ascension du mérite	18
3.3.1	Réduction de la diversité	19
3.3.2	Convergence vers l'excellence	19
3.4	Hégémonie des élites	22
3.4.1	Monopole génétique	23
3.4.2	Héritage des dominants	23
3.5	Analyse comparative des résultats	23
3.6	Support initial général	25
4	Émergence de la condensation	27
4.1	Contexte et prémisse de l'étude	27
4.2	Théorie du renouvellement	28
4.3	Distribution de fitness à l'approche de l'atome	29
5	Dynamique évolutive avec fitness non bornée	33
5.1	Résultats généraux	33
5.1.1	Suites de renouvellement généralisées	33
5.1.2	Impact sur la viabilité	35
5.2	Distributions initiales exponentielles	35
5.2.1	En l'absence de mutations	36
5.2.2	En présence de mutations	37
6	Conclusion	41

A	Convergence de mesures	43
A.1	Convergence faible	43
A.2	Convergence en variation totale	43
B	Suites de renouvellement	45
B.1	Généralités	45
B.2	Problème des moments	46
B.3	Monotonie des suites	49
B.4	Théorie du renouvellement	50
C	Suites de renouvellement généralisées	53
C.1	Première approche	53
C.2	Relation avec les suites de renouvellement	55
C.3	Sauvagerie et domesticité	57
C.4	Problème des moments et monotonie	59
D	Approche probabiliste	63
D.1	Exploration du cas particulier de fitness non bornée	63
D.2	Exemple significatif : trajectoire ascendante des viabilités	64
D.2.1	Une relation d'ordre pertinente	64
D.2.2	Évolution ascendante des viabilités	65
D.2.3	Conséquences favorables	66
E	Représentations graphiques	67
E.1	Points essentiels	67
E.2	Profil des mutations	67
E.3	À la quête de l'inverse du pôle	68
E.3.1	Équation à résoudre	68
E.3.2	Résolution numérique	69
E.4	Configurations liminales de fitness	70
E.5	Sélection à chaque génération	70
E.6	Visualisation	71
E.7	Exploration graphique supplémentaire	73
F	Démonstrations manquantes	75
F.1	Mathématisation de la dynamique	75
F.2	Évolution et régimes de sélection	77
F.3	Émergence de la condensation	81
F.4	Dynamique évolutive avec fitness non bornée	84

Table des figures

5.1	Comportement de la fitness p_n	37
5.2	Comportement de l'équivalent de la fitness p_n	39
E.1	Détermination de s à l'aide de la méthode de Newton	70
E.2	Distributions de fitness aux générations 3, 20 et limites	72
E.3	Inverse du pôle s en fonction de β	73

Liste des tableaux

3.1	Comportement asymptotique de $(w_n)_n$ et $(p_n)_n$	24
5.1	Répartition de l'information sous p_n	36
E.1	Estimation précise de la solution obtenue	70
E.2	Pics atomiques dans le cas non-démocratique	73

Chapitre 1

Introduction

L'évolution des populations est un phénomène captivant qui a suscité l'intérêt de diverses disciplines scientifiques telles que la biologie, la génétique, l'écologie et les mathématiques. Dans ce rapport, nous nous inspirons des travaux novateurs de KINGMAN pour présenter un modèle mathématique décrivant la variation temporelle de la distribution de la fitness au sein d'une population haploïde. Notre approche se distingue des modèles précédents en prenant en compte l'effondrement potentiel du "château de cartes" évolutif causé par les mutations, plutôt que de considérer uniquement des perturbations mineures de la fitness. En étudiant les propriétés limites de ce modèle, nous mettons en évidence un phénomène de seuil : si une certaine inégalité est vérifiée, la distribution limite est une version asymétrique de la distribution de fitness des mutants, sinon une masse de probabilité s'accumule à la limite supérieure de la fitness. Nous présentons les résultats de notre étude approfondie de ce modèle et discutons de leurs implications pour la compréhension de l'évolution des populations.

1.1 Décryptage des concepts clés

Avant de plonger dans l'étude du modèle décrivant la variation temporelle de la distribution de la fitness au sein d'une population haploïde, il est essentiel de définir clairement les termes clés du sujet. En effet, la compréhension précise de ces termes permettra d'avoir une idée claire et précise de ce que l'on étudie, et facilitera la compréhension des résultats obtenus. Ainsi, nous commencerons par définir des concepts fondamentaux de la génétique des populations, tels que la fitness, la relation entre sélection et mutation, ainsi que le concept de château de cartes évolutif.

1.1.1 La danse de la sélection et de la mutation

En biologie, la sélection désigne le processus par lequel certains individus présentant des caractéristiques particulières ont une probabilité accrue de survie et de reproduction par rapport à d'autres individus. Ces caractéristiques peuvent être physiques, comportementales ou autres, conférant ainsi un avantage compétitif à ces individus dans leur environnement. La sélection peut être de nature naturelle, où ces traits offrent un avantage dans la lutte pour la survie, ou artificielle, lorsque les êtres humains choisissent des caractéristiques préférentielles chez les plantes ou les animaux domestiques.

La mutation, quant à elle, est un processus aléatoire qui engendre des changements dans l'ADN d'un organisme. Les mutations peuvent être causées par des erreurs lors de la réplication de l'ADN, des agents mutagènes tels que les rayonnements ionisants ou les produits chimiques, ou des événements spontanés. Les mutations peuvent être bénéfiques, nuisibles ou neutres pour l'organisme, selon leur impact sur les traits physiques ou comportementaux.

Dans le cadre de l'évolution, la sélection et la mutation sont deux forces interagissant conjointement pour façonner les populations d'organismes au fil du temps. Les mutations génèrent une diversité génétique essentielle pour que la sélection puisse agir, tandis que la sélection élimine les variantes moins adaptées à leur environnement. Ensemble, ces forces peuvent conduire à l'émergence de nouvelles espèces ou à l'adaptation des populations existantes face aux changements environnementaux.

1.1.2 La fitness : l'ascenseur évolutif

La fitness, également appelée valeur sélective ou adaptative, est une mesure de la capacité d'un organisme à survivre et à se reproduire dans son environnement. Elle est déterminée par les traits physiques, comportementaux et physiologiques d'un individu, ainsi que par leur impact sur sa capacité à survivre et à se reproduire. Les individus ayant une fitness plus élevée ont une meilleure probabilité de survie et de reproduction, ce qui accroît les chances de transmission de leurs traits à la génération suivante.

Prenons l'exemple de la couleur des ailes chez les papillons. Ces derniers peuvent présenter une diversité de couleurs, allant du blanc au noir, en passant par le bleu, le rouge, le vert et toutes les nuances intermédiaires. La couleur des ailes peut avoir un impact significatif sur la survie et la reproduction des papillons. Dans un environnement forestier où la lumière est limitée, un papillon aux ailes claires peut être plus facilement repéré par les prédateurs tels que les oiseaux, par rapport à un papillon aux ailes plus sombres. Les individus aux ailes plus sombres ont donc une meilleure chance de survie et de reproduction, favorisant ainsi la transmission de la couleur de leurs ailes à la génération suivante. Au fil du temps, cela peut conduire à une augmentation de la fréquence de cette couleur d'ailes au sein de la population de papillons.

1.1.3 La complexité de l'haploïdie

Un organisme haploïde possède un seul jeu de chromosomes, contrairement aux organismes diploïdes qui en ont deux. Les bactéries et les levures sont des exemples d'organismes haploïdes, tandis que les humains et la plupart des autres animaux sont diploïdes.

Dans le domaine de la recherche en génétique, les organismes haploïdes sont souvent privilégiés car ils permettent d'analyser de manière plus simple et rapide les effets des mutations sur les caractéristiques phénotypiques. Cependant, il est important de noter que certaines de ces caractéristiques, telles que la résistance à certaines maladies, peuvent être plus difficiles à étudier chez les organismes haploïdes en raison de l'absence de certains gènes protecteurs présents chez les organismes diploïdes.

1.1.4 Le fragile "château de cartes" évolutif

Le concept du "château de cartes" évolutif met en évidence la fragilité de l'évolution biologique et la manière dont de petites modifications dans les conditions environnementales peuvent avoir des effets considérables sur l'adaptation des populations. Cette analogie s'inspire de l'idée que l'évolution peut être perçue comme la construction progressive de caractéristiques adaptatives au sein d'une population. Lorsque les conditions environnementales changent ou que des mutations surviennent, cela peut entraîner une cascade d'effets sur les traits des individus, pouvant potentiellement conduire à l'effondrement de la structure évolutive.

Par exemple, l'introduction d'une espèce invasive dans un écosystème peut perturber l'équilibre écologique et avoir des conséquences sur les adaptations des espèces natives. L'introduction d'un prédateur peut perturber la chaîne alimentaire, entraînant des changements dans les adaptations des espèces proies et des prédateurs natifs.

1.2 Dynamique de la sélection et de la mutation

L'étude de l'évolution des populations biologiques est complexe, car elle nécessite la prise en compte d'un grand nombre de mécanismes interagissant de manière complexe. Pour représenter en détail l'évolution d'une population biologique, il serait nécessaire de prendre en compte des facteurs tels que la sélection, la mutation, l'accouplement non aléatoire, ainsi que la variation dans le temps et l'espace, entre autres. Cependant, modéliser tous ces facteurs de manière exhaustive serait trop complexe pour être utilisé en pratique. Par conséquent, il est courant de supposer qu'un équilibre est atteint grâce à un équilibre entre deux facteurs prédominants, même si d'autres phénomènes peuvent perturber cet équilibre.

Dans le cadre de la génétique des populations, la sélection et la mutation sont deux facteurs importants qui interagissent de manière complexe pour façonner l'évolution d'une population biologique. Pour étudier cette dynamique, on suppose que ces deux facteurs agissent sur les gamètes (cellules reproductrices mâles ou femelles contenant un seul chromosome) au sein d'une population à accouplement aléatoire, ce qui rend le problème haploïde. De plus, la population est suffisamment grande pour que la dérive génétique puisse être négligée.

En général, la mutation est représentée par un modèle de "marche aléatoire" où les allèles possibles à un locus (emplacement précis d'un gène sur un chromosome) sont identifiés comme des points sur une ligne, et la mutation provoque un petit saut vers la droite ou la gauche. Cependant, la plupart des mutations étant délétères, il a été proposé de les représenter dans un modèle où le gène après mutation est indépendant de celui avant, car la mutation peut détruire le "château de cartes" biochimique construit par l'évolution. Ce modèle pourrait être considéré comme une analogie sélective au modèle neutre "allèles infinis" d'Ohta et Kimura.

1.3 Contexte et contribution

L'élaboration de ce projet de recherche s'est inscrite dans un contexte singulier, motivé par mon parcours académique et mes aspirations professionnelles. Face aux multiples refus de stages que j'ai essuyés, M. Olivier Hénard m'a généreusement offert l'opportunité de travailler sur un sujet lié aux sciences du vivant, un domaine dans lequel j'envisageais de me spécialiser à l'avenir.

Cette démarche a été marquée par une première phase intensive, du 11 mai au 16 juin, au cours de laquelle j'ai plongé dans l'étude approfondie de l'article phare de KINGMAN. Mon objectif était de parvenir à une compréhension approfondie de tous les résultats exposés, ainsi que des résultats auxiliaires nécessaires. J'ai également entretenu un dialogue régulier avec le professeur de l'Institut de Mathématique d'Orsay, nous permettant de discuter de mes avancées chaque semaine.

Grâce à un travail méthodique et diligent, j'ai pu rapidement et efficacement parcourir cette première étape. La suite de mes investigations s'est concentrée sur une analyse approfondie de la condensation, telle qu'explorée par DEREICH et MÖRTERS. Ce volet de l'étude a été abordé avec la même rigueur et le même engagement, visant à une compréhension exhaustive des résultats évoqués.

Après une brève période de repos, le projet a repris avec fluidité durant les deux mois estivaux. Cette phase a marqué la conclusion de l'étude précédente, ainsi que l'exploration du résultat en suspens laissé par KINGMAN, portant sur la fitness non bornée. Ces développements ont été accompagnés de l'ajout de remarques originales et généralisantes au sein du rapport, ainsi que la création d'une annexe apportant une perspective différente de celle de KINGMAN.

En apothéose, j'ai souhaité aboutir à une généralisation du résultat resté en suspens, en formulant un théorème global présenté en conclusion. Toutefois, sa démonstration demeure actuellement inachevée et en cours d'étude, constituant un point de continuation pour de futures investigations. Cette démarche a été empreinte d'une volonté constante de rigueur et d'approfondissement, traduisant mon engagement à explorer en profondeur les aspects complexes et passionnants de ce domaine.

Chapitre 2

Mathématisation de la dynamique

Dans ce rapport, nous allons étudier un modèle mathématique de l'évolution d'une grande population, en prenant en compte à la fois la sélection et les mutations génétiques. Plus précisément, nous allons nous intéresser à la distribution de la fitness dans cette population.

2.1 Modélisation de la dynamique évolutive

Nous supposons que cette distribution peut être représentée par une mesure de probabilité p_n sur un intervalle fini, que nous prenons pour être l'intervalle unité $I = [0, 1]$ en raison de l'importance des ratios de fitness.

Définition 2.1 (Viabilité). *La viabilité ou la fitness moyenne de la population est définie comme la moyenne pondérée de la distribution de fitness :*

$$w_n = \int_0^1 x p_n(dx)$$

2.1.1 L'ère de la sélection

Si la sélection était le seul acteur influençant la distribution de fitness, nous pourrions aisément anticiper que cette distribution se pencherait en faveur des individus jouissant d'une fitness plus élevée. Cette prédiction peut être formulée mathématiquement par l'équation suivante :

$$p_{n+1}(dx) = \frac{x p_n(dx)}{w_n} \tag{2.1}$$

où w_n représente la viabilité de la population dans la n -ième génération et p_n est la mesure de probabilité de la distribution de fitness dans cette génération.

2.1.2 Le jeu des mutations

Cependant, en présence de mutations, une proportion $\beta \in]0, 1[$ de la population subit des changements dans sa distribution de fitness. Cette réalité impose une modification de l'équation de sélection afin de prendre en compte cette nouvelle distribution. Supposons que les nouveaux mutants présentent une distribution de fitness décrite par une mesure de probabilité q sur I . Dans ce scénario (si les mutations surviennent après la sélection), l'équation de sélection précédente doit être ajustée comme suit :

$$p_{n+1}(dx) = (1 - \beta) \frac{x p_n(dx)}{w_n} + \beta q(dx) \tag{2.2}$$

Nous démontrerons que, dans de nombreux cas, la distribution de fitness converge vers une distribution indépendante de la distribution de fitness initiale p_0 . Ce résultat revêt une importance cruciale dans le contexte de la théorie de l'évolution. Bien que ce modèle ait été conçu pour la génétique des populations, il peut également être utilisé pour appréhender les équilibres dans d'autres contextes non génétiques. Ainsi, ces équations permettent aux mathématiciens de mieux comprendre comment la fitness d'une population peut évoluer en présence de différents mécanismes de sélection et de mutations.

2.2 Analyse de la dynamique de la population

Après avoir présenté notre modèle et développé la modélisation de la dynamique évolutive, nous poursuivons notre analyse afin de déduire plusieurs résultats généraux sur la fitness et la viabilité associée. Il convient de noter que certaines démonstrations seront fournies en annexe pour faciliter la compréhension du rapport.

2.2.1 Distribution de fitness

Dans un premier temps, en se basant sur l'équation (2.2) et en appliquant une récurrence, il devient possible d'élaborer une formulation explicite pour la distribution de fitness à la génération $n + 1$, en prenant en compte la distribution initiale p_0 ainsi que la distribution des mutants q . Cette formulation précise est exposée de manière claire dans la proposition qui suit :

Proposition 2.1 (Formule explicite de p_n). *Pour tout entier naturel n , la distribution de fitness à la génération n peut être exprimée de la manière suivante :*

$$p_n(dx) = \beta \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-\beta)^k}{\prod_{i=0}^{k-1} w_{n-1-i}} x^k q(dx) + \frac{(1-\beta)^n}{\prod_{i=0}^{n-1} w_{n-1-i}} x^n p_0(dx) \quad (2.3)$$

où w_i représente la viabilité de la population à la génération i .

2.2.2 Produit des viabilités

À présent, nous allons explorer l'étude de la viabilité, ce qui nous permettra d'obtenir des conclusions sur la distribution de fitness. Pour ce faire, nous introduisons une quantité appelée W_n , qui représente le produit des viabilités jusqu'à la génération $n - 1$. Cette quantité est définie par l'expression suivante :

$$W_n = \prod_{i=0}^{n-1} w_i$$

Nous allons également définir les moments d'ordre n des distributions de fitness initiales :

$$m_n = \int_0^1 x^n p_0(dx) \quad \text{et} \quad \mu_n = \int_0^1 x^n q(dx)$$

Ces moments d'ordre n n'ont pas de signification intrinsèque, mais ils nous permettent de calculer différentes quantités importantes lors de l'étude de la dynamique de la population.

En utilisant l'équation (2.3), nous obtenons une expression récurrente pour le produit des viabilités. La proposition suivante expose cette relation de manière précise :

Proposition 2.2 (Formule récurrente de W_n). *Le produit des viabilités sur les n premières générations, W_n , peut être exprimé en fonction des moments de la manière suivante :*

$$W_n = \beta \sum_{k=0}^{n-1} W_{n-k} (1-\beta)^k \mu_k + (1-\beta)^n m_n \quad (2.4)$$

$$= \beta \sum_{k=1}^{n-1} W_{n-k} (1-\beta)^{k-1} \mu_k + (1-\beta)^{n-1} m_n \quad (2.5)$$

2.2.3 Série génératrice associée au produit

Nous utiliserons la dernière équation obtenue pour définir et étudier la série génératrice associée à W_n . Nous pourrions ainsi exprimer cette série comme une fonction méromorphe qui peut présenter des pôles, ce qui nous permettra de la développer analytiquement. Cette méthode nous permettra alors de déduire la limite potentielle de W_n et, par conséquent, celle de p_n .

Cependant, avant de procéder à l'étude de la série génératrice, il est important de vérifier la convergence de certaines séries entières. Pour ce faire, nous introduisons la notation D_r pour tout $r \in [0, 1[$, définie par :

$$D_r = D\left(0, \frac{1}{1-r}\right) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < \frac{1}{1-r} \right\}$$

Nous formulons donc le lemme suivant :

Lemme 2.3 (Convergence des séries entières).

☛ $\forall z \in D_\beta, \sum_{n \geq 1} (1-\beta)^n m_n z^n$ et $\sum_{n \geq 1} (1-\beta)^n \mu_n z^n$ sont absolument convergentes

☛ $\forall z \in D_0, \sum_{n \geq 1} W_n z^n$ est absolument convergente

Après avoir établi la convergence absolue des séries entières, qui sont donc des fonctions holomorphes sur les disques associés, nous sommes maintenant en mesure de formuler le théorème suivant, qui permet de réécrire la série génératrice associée à W_n . Pour tout complexe z du disque $D_0 \subset D_\beta$, on a :

Théorème 2.4 (Série génératrice associée à W_n). *La série génératrice associée à W_n peut s'exprimer de la manière suivante :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} W_n z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (1-\beta)^{n-1} m_n z^n \left[1 - \beta \sum_{n=1}^{+\infty} (1-\beta)^{n-1} \mu_n z^n \right]^{-1} \quad (2.6)$$

$$= \int_0^1 \frac{zx}{1 - (1-\beta)zx} p_0(dx) \left[1 - \int_0^1 \frac{\beta zx}{1 - (1-\beta)zx} q(dx) \right]^{-1} \quad (2.7)$$

où p_0 et q sont les distributions de fitness initiales pour la sélection et la mutation, respectivement.

Démonstration. On peut commencer par remarquer que les séries

$$\sum_{n \geq 1} W_n z^n \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} (1-\beta)^n \mu_n z^n$$

sont absolument convergentes d'après le lemme précédent. Ainsi, la série de terme général

$$\sum_{k=1}^{n-1} (W_{n-k} z^{n-k}) ((1-\beta)^k \mu_k z^k)$$

est également absolument convergente. En utilisant l'équation (2.5) pour exprimer la série génératrice associée à W_n , on peut faire usage du produit de Cauchy pour écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} W_n z^n &= \beta \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} W_{n-k} (1-\beta)^{k-1} \mu_k z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (1-\beta)^{n-1} m_n z^n \\ &= \frac{\beta}{1-\beta} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} (W_{n-k} z^{n-k}) ((1-\beta)^k \mu_k z^k) + \sum_{n=1}^{+\infty} (1-\beta)^{n-1} m_n z^n \\ &= \frac{\beta}{1-\beta} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} W_n z^n \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (1-\beta)^n \mu_n z^n \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} (1-\beta)^{n-1} m_n z^n \end{aligned}$$

En isolant la série génératrice dans cette expression, on obtient :

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} W_n z^n \right) \left(1 - \beta \sum_{n=1}^{+\infty} (1-\beta)^{n-1} \mu_n z^n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} (1-\beta)^{n-1} m_n z^n$$

et donc l'équation (2.6) est satisfaite.

Maintenant, exprimons explicitement les moments en fonction de leur loi de probabilité pour voir les intégrales nécessaires à l'écriture de (2.7) :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} W_n z^n &= \sum_{n=1}^{+\infty} (1-\beta)^{n-1} m_n z^n \left[1 - \beta \sum_{n=1}^{+\infty} (1-\beta)^{n-1} \mu_n z^n \right]^{-1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (1-\beta)^{n-1} z^n \int_0^1 x^n p_0(dx) \left[1 - \beta \sum_{n=1}^{+\infty} (1-\beta)^{n-1} z^n \int_0^1 x^n q(dx) \right]^{-1} \\ &= \frac{1}{1-\beta} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 [(1-\beta)zx]^n p_0(dx) \left[1 - \frac{\beta}{1-\beta} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 [(1-\beta)zx]^n q(dx) \right]^{-1} \end{aligned}$$

Nous cherchons maintenant à intervertir série et intégrale pour obtenir l'équation (2.7). Pour cela, nous notons pour tout entier naturel non nul n ,

$$f_n : x \in I \mapsto [(1-\beta)zx]^n$$

☛ $(f_n)_n$ est alors une suite de fonctions continues sur I

☛ $\forall n \in \mathbb{N}^*, |f_n| \leq |(1-\beta)z|^n$ avec $|(1-\beta)z| < 1$, donc $\sum |(1-\beta)z|^n$ est convergente comme série géométrique, et $\sum f_n$ converge uniformément vers

$$f : x \mapsto \frac{(1-\beta)zx}{1 - (1-\beta)zx}$$

En utilisant le théorème d'inversion série-intégrale, version convergence uniforme sur un segment, on peut affirmer que f est continue sur I et que pour p_0 et pour q , on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 [(1-\beta)zx]^n p_0(dx) = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} [(1-\beta)zx]^n p_0(dx) = \int_0^1 \frac{(1-\beta)zx}{1 - (1-\beta)zx} p_0(dx)$$

Ainsi, en injectant ce résultat dans l'équation précédente, nous obtenons :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} W_n z^n = \frac{1}{1-\beta} \int_0^1 \frac{(1-\beta)zx}{1 - (1-\beta)zx} p_0(dx) \left[1 - \frac{\beta}{1-\beta} \int_0^1 \frac{(1-\beta)zx}{1 - (1-\beta)zx} q(dx) \right]^{-1}$$

Ce qui permet d'obtenir directement l'équation (2.7). □

Le théorème précédent nous permet de considérer le membre de droite comme une fonction méromorphe sur le disque D_0 , notée g , étant donné qu'il s'agit d'un quotient de fonctions holomorphes sur ce même disque avec un dénominateur non identiquement nul :

$$g : x \in D_0 \mapsto \int_0^1 \frac{zx}{1 - (1 - \beta)zx} p_0(dx) \left[1 - \int_0^1 \frac{\beta zx}{1 - (1 - \beta)zx} q(dx) \right]^{-1}$$

Dans cette situation, une première étape pour analyser cette fonction consiste à étudier ses potentiels pôles.

Le corollaire suivant affirme que la fonction méromorphe g peut posséder au plus un pôle, qui sera simple. De plus, il donne des conditions pour déterminer si cette fonction possède ou non un pôle.

Corollaire 2.4.1 (Pôles de la fonction méromorphe). *La fonction méromorphe g possède au plus un pôle, et plus précisément :*

$$g \text{ n'a aucun pôle} \iff \int_0^1 \frac{q(dx)}{1 - x} \leq \beta^{-1} \quad (2.8)$$

$$g \text{ a un pôle simple} \iff \int_0^1 \frac{q(dx)}{1 - x} > \beta^{-1} \quad (2.9)$$

Dans ce cas, le pôle se situe dans l'intervalle $[1, (1 - \beta)^{-1}[$.

Démonstration. Pour commencer la preuve du corollaire, nous allons transformer l'intervalle I en son intérieur $\overset{\circ}{I} =]0, 1[$.

D'après la réécriture sous forme intégrale dans le théorème précédent, si z est un pôle de g , alors il vérifie l'équation suivante :

$$\int_0^1 \frac{\beta zx}{1 - (1 - \beta)zx} q(dx) = 1 \quad (2.10)$$

L'égalité précédente, qui relie un complexe à un réel, implique que la partie imaginaire de l'intégrale est nulle. On peut réécrire la partie imaginaire de l'intégrale comme suit :

$$\begin{aligned} \Im \left(\int_0^1 \frac{\beta zx}{1 - (1 - \beta)zx} q(dx) \right) &= \Im \left(\int_0^1 \frac{\beta zx(1 - (1 - \beta)\bar{z}x)}{|1 - (1 - \beta)zx|^2} q(dx) \right) \\ &= \beta \Im(z) \int_0^1 \frac{x}{|1 - (1 - \beta)zx|^2} q(dx) \end{aligned}$$

Comme l'intégrande est strictement positive sur I et β est également strictement positif, cela implique que tout potentiel pôle de g vérifie :

$$\Im(z) = 0$$

Nous allons maintenant étudier l'intégrande de l'équation (2.10) comme fonction de deux variables, où la première variable appartient à la partie réelle du disque D_β , que nous noterons :

$$D_\beta^{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cap D_\beta$$

Nous posons les notations suivantes sur l'intégrande et son intégrale :

$$\varphi : (z, x) \in D_\beta^{\mathbb{R}} \times I \mapsto \frac{\beta zx}{1 - (1 - \beta)zx} \quad \text{et} \quad \psi : z \mapsto \int_0^1 \varphi(z, x) q(dx)$$

Commençons par étudier la différentiabilité de la dernière fonction, de manière à pouvoir exploiter à la fois sa continuité et sa dérivée ultérieurement.

☞ Pour tout $z \in D_\beta^{\mathbb{R}}$, la fonction $\varphi(z, \cdot)$ est continue et intégrable sur I .

☞ La fonction $\partial_z \varphi$ est bien définie sur $D_\beta^{\mathbb{R}} \times I$, et peut être exprimée comme suit :

$$\partial_z \varphi : (z, x) \mapsto \frac{\beta x}{(1 - (1 - \beta)zx)^2}$$

☞ Pour tout $z \in D_\beta^{\mathbb{R}}$, la fonction $\partial_z \varphi(z, \cdot)$ est continue (par morceaux) sur I .

☞ Pour tout $x \in I$, la fonction $\partial_z \varphi(\cdot, x)$ est continue sur $D_\beta^{\mathbb{R}}$.

☞ Pour tout $(z, x) \in D_\beta^{\mathbb{R}} \times I$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$|\partial_z \varphi(z, x)| \leq \beta \frac{x}{(1 - x)^2}$$

Si l'on note $\zeta(x)$ le terme de droite, alors ζ est une fonction continue et intégrable de x sur I .

Ainsi, en appliquant le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres, on peut conclure que la fonction ψ est de classe \mathcal{C}^1 , avec une dérivée donnée par :

$$\psi' : z \mapsto \int_0^1 \frac{\beta x}{(1 - (1 - \beta)zx)^2} q(dx) \quad (2.11)$$

En raison de la classe \mathcal{C}^1 de la fonction, nous pouvons utiliser sa continuité. Comme $\varphi(\cdot, x)$ est strictement croissante sur $D_\beta^{\mathbb{R}}$ pour tout x de I , ψ l'est également. De plus, comme $\psi(1) \leq 1$ en raison de la même inégalité vérifiée par l'intégrande, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet de conclure que l'équation (2.10) a au plus une solution, c'est-à-dire que g a au plus un pôle.

Désormais, nous allons examiner les conditions dans lesquelles la fonction a un pôle ou non. En utilisant les mêmes arguments que précédemment, on peut affirmer que comme $\psi(1) \leq 1$, alors il est possible qu'un pôle existe dans l'intervalle $[1, (1 - \beta)^{-1}]$ si la limite suivante est vérifiée :

$$\lim_{z \rightarrow (1 - \beta)^{-1}} \psi(z) > 1$$

Pour simplifier cette condition, nous allons vérifier les conditions requises pour échanger la limite et l'intégrale. Les conditions sont les suivantes :

☞ Pour tout $z \in D_\beta^{\mathbb{R}}$, la fonction $\varphi(z, \cdot)$ est continue (par morceaux) sur I .

☞ Pour tout $x \in I$, la limite suivante est vérifiée :

$$\varphi(z, x) \xrightarrow{z \rightarrow (1 - \beta)^{-1}} \frac{\beta x}{(1 - \beta)(1 - x)}$$

Si l'on note $\xi(x)$ le terme de droite, alors ξ est une fonction continue (par morceaux) de x sur I .

☞ Pour tout $(z, x) \in D_\beta^{\mathbb{R}} \times I$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$|\varphi(z, x)| \leq \frac{\beta}{1 - \beta} \frac{x}{1 - x}$$

Si l'on note $\delta(x)$ le terme de droite, alors δ est une fonction intégrable sur I .

En utilisant le théorème de convergence dominée, on peut alors conclure que pour tout $z \in D_\beta^{\mathbb{R}}$, les fonctions $\varphi(z, \cdot)$ et ξ sont intégrables et que :

$$\lim_{z \rightarrow (1 - \beta)^{-1}} \int_0^1 \varphi(z, x) dx = \int_0^1 \xi(x) dx$$

En utilisant les arguments précédents, on peut obtenir l'enchaînement d'inégalités suivant qui conduit à la condition finale :

$$\begin{aligned}
\lim_{z \rightarrow (1-\beta)^{-1}} \psi(z) > 1 &\iff \int_0^1 \frac{\beta x}{(1-\beta)(1-x)} q(dx) > 1 \\
&\iff \int_0^1 \frac{\beta x - (1-\beta)(1-x)}{(1-\beta)(1-x)} q(dx) > 0 \\
&\iff \int_0^1 \frac{\beta - (1-x)}{(1-\beta)(1-x)} q(dx) > 0 \\
&\iff \frac{\beta}{1-\beta} \int_0^1 \frac{q(dx)}{1-x} > \frac{1}{1-\beta} \\
&\iff \int_0^1 \frac{q(dx)}{1-x} > \beta^{-1}
\end{aligned}$$

Il est à noter que, dans le cas où cette condition est satisfaite, le pôle est effectivement simple. En effet, en utilisant (2.11), on remarque que l'intégrande est strictement positive, ce qui implique que $\psi'(z_0) > 0$, où z_0 désigne le pôle.

□

Dans le modèle de sélection et mutation, l'étude du potentiel pôle de la fonction méromorphe permet de mieux comprendre les mécanismes qui régissent l'évolution des populations, et de déterminer les conditions dans lesquelles une population est stable ou instable. Une telle compréhension est essentielle pour la gestion et la conservation des populations d'espèces animales et végétales en milieu naturel. Dans ce contexte, le pôle simple peut être interprété comme un paramètre critique du modèle.

Chapitre 3

Évolution et régimes de sélection

Dans sa quête pour explorer les mécanismes de l'évolution, KINGMAN propose une classification audacieuse des régimes de sélection. Tel un érudit des temps modernes, il emprunte les termes évocateurs de "démocratie", "méritocratie" et "aristocratie" pour décrire ces régimes distincts. Cette classification saisissante nous permet d'appréhender comment différentes formes de sélection influencent l'évolution des populations et engendrent des équilibres délicats entre mutation et sélection. Telles des sphères enchevêtrées, nous délimitons les régimes de sélection, séparant la démocratie d'un côté, et la méritocratie et l'aristocratie de l'autre, selon la présence ou l'absence de pôles dans la fonction méromorphe, fidèles aux inégalités (2.8) et (2.9). Cependant, l'élucidation de la condition spécifique qui distinguera ces deux derniers régimes reste un défi à relever.

Armons-nous de connaissances afin de définir les propriétés inhérentes à chaque régime de sélection, en nous inspirant des concepts politiques :

- 🏰 Dans le régime de sélection "démocratique", chaque individu jouit d'une égalité de probabilité d'être sélectionné pour la reproduction. Ainsi, tous les individus ont une opportunité équitable de façonner la génération suivante.
- 🏰 Dans le régime de sélection "méritocratique", les individus dotés de caractéristiques particulièrement favorables bénéficient d'une probabilité accrue d'être sélectionnés pour la reproduction. Dans ce régime, la sélection est basée sur le mérite de chaque individu, évalué en fonction de sa caractéristique avantageuse.
- 🏰 Enfin, dans le régime de sélection "aristocratique", un groupe restreint d'individus dominants se voit octroyer une probabilité supérieure d'être sélectionné pour la reproduction. Dans ce régime, la sélection repose sur la position sociale ou le statut de chaque individu, plutôt que sur des caractéristiques spécifiques.

Ces propriétés seront vérifiées tout au long de notre étude.

3.1 Régime démocratique : équilibre biologique en perspective

Plongeons dans l'exploration du régime démocratique, où chaque individu joue un rôle crucial. Supposons tout d'abord la vérification de l'inégalité suivante :

$$\int_0^1 \frac{q(dx)}{1-x} > \beta^{-1}$$

Cette inégalité implique l'existence d'un unique pôle z_0 pour la fonction g , situé dans l'intervalle $[1, (1-\beta)^{-1}]$. Notons $s = z_0^{-1}$, qui satisfait les conditions suivantes :

$$\int_0^1 \frac{\beta x}{s - (1-\beta)x} q(dx) = 1 \quad \text{et} \quad 1 - \beta < s \leq 1 \quad (3.1)$$

Dans ce chapitre, nous procéderons de manière inverse par rapport au chapitre précédent, en étudiant d'abord la viabilité pour ensuite aborder la fitness.

3.1.1 Convergence vers un équilibre harmonieux

La valeur de s que nous avons définie revêt une signification importante, comme le montre la proposition suivante :

Proposition 3.1 (Viabilité limite démocratique). *La suite des viabilités $(w_n)_n$ converge, et la viabilité limite est égale à l'inverse du pôle de g :*

$$w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} s$$

Démonstration. Rappelons que

$$g : x \mapsto \int_0^1 \frac{zx}{1 - (1 - \beta)zx} p_0(dx) \left[1 - \int_0^1 \frac{\beta zx}{1 - (1 - \beta)zx} q(dx) \right]^{-1}$$

est une fonction holomorphe sur le disque pointé $D_\beta \setminus \{z_0\}$, avec un pôle simple en z_0 . Selon le théorème de classification des singularités isolées, la fonction holomorphe h , définie comme :

$$h : z \in D_\beta \setminus \{z_0\} \mapsto g(z) - \frac{\text{Res}(g, z_0)}{z - z_0}$$

présente une singularité effaçable en z_0 . Par conséquent, elle admet un unique prolongement holomorphe sur tout le disque D_β .

En notant g_1 et g_2 respectivement le numérateur et le dénominateur de g , on peut exprimer le résidu de g en z_0 comme :

$$\text{Res}(g, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)g(z) = \frac{g_1(z_0)}{g_2'(z_0)}$$

En combinant cette équation avec l'inégalité $s(1 - \beta)^{-1} > 1 \geq x$ pour tout $x \in I$, nous obtenons :

$$\text{Res}(g, s^{-1}) = \int_0^1 \frac{x}{s - (1 - \beta)x} p_0(dx) \left[- \int_0^1 \frac{\beta s^2 x}{(s - (1 - \beta)x)^2} q(dx) \right]^{-1} < 0$$

Notons $a = -s \cdot \text{Res}(g, s^{-1}) > 0$. Ainsi, d'après l'équation (2.7), pour tout $z \in D_0$, comme $|zs| < 1$, nous avons :

$$h(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} W_n z^n - \frac{a}{1 - zs} = \sum_{n=1}^{+\infty} W_n z^n - a \sum_{n=0}^{+\infty} s^n z^n = -a + \sum_{n=1}^{+\infty} (W_n - as^n) z^n$$

De plus, cette équation indique que h est développable en série entière au voisinage de 0. Par analyticité des fonctions holomorphes et par unicité du développement en série entière de h , on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad W_n - as^n = \frac{h^{(n)}(0)}{n!} \quad \text{et} \quad h(0) = -a$$

Considérons $\theta_0 > 0$. Alors h est une fonction holomorphe définie au voisinage de

$$D\left(0, \frac{1}{\theta_0(1 - \beta)}\right) \subsetneq D_\beta$$

Par les estimées de Cauchy, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \frac{h^{(n)}(0)}{n!} \right| \leq \frac{M_{r_0}}{r_0^n}, \quad \text{avec} \quad r_0 = \frac{1}{\theta_0(1 - \beta)} \quad \text{et} \quad M_{r_0} = \sup_{|z|=r_0} |h(z)| < +\infty$$

Cela implique que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |W_n - as^n| \leq \frac{M_{r_0}}{r_0^n}$$

En choisissant un $\theta > \theta_0$ et en posant $r = [\theta(1 - \beta)]^{-1} < r_0$, nous avons :

$$|W_n - as^n|r^n \leq M_{r_0} \underbrace{\left(\frac{r}{r_0}\right)^n}_{<1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi, puisque cette propriété est vraie pour tout $\theta_0 > 1$, en faisant tendre θ_0 vers 1, nous obtenons l'énoncé suivant :

$$\forall \theta > 1, \quad W_n = as^n + o((1 - \beta)^n \theta^n) \quad (3.2)$$

Utilisons ce résultat concernant le produit des viabilités pour en déduire une propriété similaire pour la viabilité. Posons $\delta = (1 - \beta)s^{-1}$. Alors nous avons :

$$w_n = \frac{W_{n+1}}{W_n} = \frac{as^{n+1} + o((1 - \beta)^{n+1} \theta^{n+1})}{as^n + o((1 - \beta)^n \theta^n)} = \frac{s + o(s^{-n}(1 - \beta)^{n+1} \theta^{n+1})}{1 + o(s^{-n}(1 - \beta)^n \theta^n)} = \frac{s + o(\delta^n \theta^n)}{1 + o(\delta^n \theta^n)}$$

Notons maintenant $x_n = s + o(\delta^n \theta^n)$ et $y_n = 1 + o(\delta^n \theta^n)$ respectivement le numérateur et le dénominateur de w_n . Alors, il existe deux suites $(\varepsilon_n^x)_n$ et $(\varepsilon_n^y)_n$ telles qu'à partir d'un certain rang N , nous avons les inégalités suivantes :

$$|x_n - s| \leq \varepsilon_n^x \delta^n \theta^n \quad \text{et} \quad |y_n - 1| \leq \varepsilon_n^y \delta^n \theta^n$$

À partir de cet entier N , et en l'agrandissant si nécessaire, la suite $(y_n)_n$ est non nulle, c'est-à-dire qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $n \geq N$, nous avons $|y_n| \geq c$. Par conséquent, pour tout $n \geq N$, nous obtenons :

$$|w_n - s| = \left| \frac{x_n - s - s(y_n - 1)}{y_n} \right| \leq \frac{|x_n - s| + s|y_n - 1|}{|y_n|} \leq \left(\frac{\varepsilon_n^x + s\varepsilon_n^y}{c} \right) \delta^n \theta^n$$

En posant $\varepsilon_n^w = (\varepsilon_n^x + s\varepsilon_n^y)c^{-1}$, nous constatons que la suite ε^w converge vers 0. Par conséquent, nous obtenons l'énoncé suivant concernant les viabilités :

$$\forall \theta > 1, \quad w_n = s + o(\delta^n \theta^n) \quad (3.3)$$

Étant donné que ce résultat est valable pour tout $\theta > 1$ et que $\delta < 1$, choisissons θ de telle manière que $\delta\theta < 1$ afin que le terme dans le petit o converge vers 0. Cela nous permet de déduire la proposition concernant la viabilité limite.

□

3.1.2 Convergence vers une répartition stable

Nous avons maintenant établi la viabilité limite. Énonçons désormais un théorème qui décrit la distribution de la fitness limite, ainsi que ses propriétés remarquables.

Théorème 3.2 (Fitness limite démocratique). *Dans le régime démocratique :*

$$\int_0^1 \frac{q(dx)}{1 - x} > \beta^{-1}$$

la suite des distributions de fitness $(p_n)_n$ converge en variation totale. La distribution limite est caractérisée par l'expression suivante :

$$p(dx) = \frac{\beta s}{s - (1 - \beta)x} q(dx)$$

Cette limite est absolument continue par rapport à la distribution des mutants q et indépendante de la distribution initiale p_0 .

Démonstration. Pour démontrer ce théorème, revenons aux bases de cette étude. À partir de l'équation (2.3), nous pouvons déduire l'expression suivante :

$$p_n(dx) = \beta \sum_{k=0}^{n-1} \frac{W_{n-k}}{W_n} (1-\beta)^k x^k q(dx) + \frac{1}{W_n} (1-\beta)^n x^n p_0(dx)$$

Étant donné que $1-\beta < s$, nous pouvons exprimer p de manière similaire :

$$p(dx) = \beta \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1-\beta}{s} \right)^k x^k q(dx)$$

Soit $f \in \mathcal{M}_I$, alors nous avons :

$$\begin{aligned} f(x)p_n(dx) - f(x)p(dx) &= \beta \sum_{k=0}^{n-1} \frac{W_{n-k}}{W_n} (1-\beta)^k f(x)x^k q(dx) \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{W_n} (1-\beta)^n f(x)x^n p_0(dx) \dots \\ &\quad \dots - \beta \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1-\beta}{s} \right)^k f(x)x^k q(dx) \\ &= \beta \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{W_{n-k}}{W_n} - s^{-k} \right) (1-\beta)^k f(x)x^k q(dx) \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{W_n} (1-\beta)^n f(x)x^n p_0(dx) - \beta \sum_{k=n}^{+\infty} \delta^k f(x)x^k q(dx) \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\|p_n - p\|_{VT} \leq \beta \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{W_{n-k}}{W_n} - s^{-k} \right| (1-\beta)^k + \frac{(1-\beta)^n}{W_n} + \beta \sum_{k=n}^{+\infty} \delta^k$$

Pour étudier cette inégalité, concentrons-nous sur les trois termes un par un. Pour cela, prenons $\theta > 1$ afin d'utiliser les équations (3.2) et (3.3). Abordons-les de droite à gauche, du plus simple au plus complexe.

🔧 Le dernier terme s'étudie directement sans problème :

$$\beta \sum_{k=n}^{+\infty} \delta^k = \beta \frac{\delta^n}{1-\delta} = o(\delta^n \theta^n)$$

🔧 Le deuxième terme est également simple à étudier en utilisant (3.2). En augmentant éventuellement θ , nous avons :

$$\frac{(1-\beta)^n}{W_n} = \frac{(1-\beta)^n}{as^n + o((1-\beta)^n \theta^n)} = \frac{\delta^n}{a + o(\delta^n \theta^n)} = o(\delta^n \theta^n)$$

🔧 En ce qui concerne le premier terme, notons d'abord qu'en utilisant (3.3), il existe une suite $(\varepsilon_{k,n})_n$ qui converge vers 0 et un entier N tel que pour n à partir de ce rang :

$$\frac{W_{n-k}}{W_n} = (s + \varepsilon_{k,n} \delta^n \theta^n)^{-k} > 0$$

Ainsi, nous pouvons séparer la somme en deux parties à l'aide de cet entier. Par abus de notation, nous écrivons :

$$\beta \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{W_{n-k}}{W_n} - s^{-k} \right| (1-\beta)^k = \beta \left(\sum_{k=0}^{n-N} + \sum_{k=n-N+1}^{n-1} \right) \left| \frac{W_{n-k}}{W_n} - s^{-k} \right| (1-\beta)^k$$

Première partie : Pour les valeurs les plus petites de k , où W_{n-k} reste "proche" de W_n , examinons cette somme en utilisant la propriété asymptotique :

$$\frac{W_{n-k}}{W_n} - s^{-k} = (s + \varepsilon_{k,n} \delta^n \theta^n)^{-k} - s^{-k}$$

La fonction $x \mapsto x^{-k}$ est continue et dérivable sur \mathbb{R}_+ , avec pour dérivée $x \mapsto -kx^{-k-1}$. Par conséquent, selon le théorème des accroissements finis, il existe une suite $(\alpha_{k,n})_n$ appartenant à l'intervalle $[0, 1]$ telle que l'égalité précédente puisse s'écrire :

$$\frac{W_{n-k}}{W_n} - s^{-k} = -k \frac{\varepsilon_{k,n} \delta^n \theta^n}{(s + \alpha_{k,n} \varepsilon_{k,n} \delta^n \theta^n)^{k+1}} = o(\delta^n \theta^n)$$

Ainsi, la somme peut être réécrite comme suit :

$$\beta \sum_{k=0}^{n-N} \left| \frac{W_{n-k}}{W_n} - s^{-k} \right| (1-\beta)^k = \beta o(\delta^n \theta^n) \sum_{k=0}^{n-N} \underbrace{(1-\beta)^k}_{<1} \leq \beta o(\delta^n \theta^n) \frac{1-\beta}{\beta} = o(\delta^n \theta^n)$$

Deuxième partie : Pour les grandes valeurs de k , séparons à nouveau la somme en deux parties à l'aide de l'inégalité triangulaire, afin de montrer qu'avec un changement d'indice, les termes W_{n-k} , en nombre fini et fixé, ne posent aucun problème :

$$\beta \sum_{k=n-N+1}^{n-1} \left| \frac{W_{n-k}}{W_n} - s^{-k} \right| (1-\beta)^k \leq \beta \sum_{j=1}^{N-1} \frac{W_j}{W_n} (1-\beta)^{n-j} + \beta \sum_{k=n-N+1}^{n-1} \delta^k$$

En utilisant le résultat précédent montrant la petitesse du deuxième terme, ainsi que le fait que la première somme est finie, nous obtenons :

$$\beta \sum_{j=1}^{N-1} \frac{W_j}{W_n} (1-\beta)^{n-j} \leq \beta \frac{(1-\beta)^n}{W_n} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{1}{1-\beta} \right)^j = o(\delta^n \theta^n)$$

De plus, la deuxième somme conduit directement à :

$$\beta \sum_{k=n-N+1}^{n-1} \delta^k \leq \beta \frac{\delta^{n-N+1}}{1-\delta} = o(\delta^n \theta^n)$$

En résumé, en décomposant en trois termes, nous avons démontré que :

$$\|p_n - p\|_{VT} = o(\delta^n \theta^n) \quad (3.4)$$

Comme dans la preuve précédente, choisissons θ de telle manière que $\delta\theta < 1$ pour que le terme dans le petit o converge vers 0. Ainsi, nous pouvons conclure sur le théorème de la fitness limite. \square

Il est essentiel de souligner que la distribution de fitness limite ne dépend pas de la distribution initiale p_0 , ce qui implique que la composition initiale de la population n'affecte pas la forme finale de la distribution de fitness. Peu importe l'état initial de la population, grâce à l'absolue continuité de la distribution limite par rapport à celle des mutants, tous les individus auront une chance égale de se reproduire et de transmettre leur héritage aux générations futures. L'effet de la sélection se traduit simplement par un déplacement de la distribution vers la droite.

Cependant, il est important de noter que la distribution des mutants q joue un rôle crucial dans la détermination de la distribution de fitness limite. Elle apporte une diversité génétique qui peut influencer la dynamique à long terme de la population. Bien que la convergence exponentiellement rapide soit encourageante, il convient de noter que, dans la preuve, le paramètre de convergence $\delta = (1-\beta)s^{-1}$ peut être très proche de l'unité lorsque β est faible, ce qui est intuitif car la proportion de mutants sera moindre.

De plus, avant d'étudier le cas où g n'a pas de pôle, il est remarquable que la définition de p par le théorème de la fitness limite nous redonne la valeur de la viabilité limite, en utilisant l'équation vérifiée par s mentionnée au début de la section :

$$p(dx) = \frac{\beta s}{s - (1-\beta)x} q(dx) \implies \int_0^1 xp(dx) = s \int_0^1 \frac{\beta x}{s - (1-\beta)x} q(dx) = s$$

3.2 Régimes non-démocratiques : concentration du pouvoir

Nous abordons maintenant l'étude du cas où la fonction g n'a pas de pôle, c'est-à-dire lorsque l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\int_0^1 \frac{q(dx)}{1-x} \leq \beta^{-1}$$

Par conséquent, nous obtenons que :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} x^n q(dx) \leq \beta^{-1} \implies \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n \leq \beta^{-1} \implies \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n \leq \frac{1-\beta}{\beta}$$

Sous cette nouvelle hypothèse, notre fonction g ne présente plus de pôle. Par conséquent, la viabilité limite différera de celle obtenue dans le cas du régime démocratique. Afin de traiter ce nouveau cas, nous adopterons une approche différente en utilisant les suites de renouvellement définies en annexe B.

Définissons $(f_n)_n$ comme suit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n = \frac{\beta}{1-\beta} \mu_n \quad (3.5)$$

Ainsi, cette suite satisfait les conditions de la définition en annexe, et notons $(u_n)_n$ la suite de renouvellement associée selon (B.1). Cette suite présente plusieurs propriétés intéressantes pour notre étude. Concentrons-nous d'abord sur la limite du quotient des termes successifs. Cette limite nous permettra de diviser l'étude en deux régimes de sélection distincts : le régime "méritocratique" et le régime "aristocratique", selon qu'elle est égale à 1 ou strictement inférieure à cette valeur, respectivement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = 1 \quad \text{ou} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = \sigma < 1$$

Selon la remarque B.1 énoncée en annexe, lorsque la limite de la suite des quotients des termes successifs est égale à 1, cela signifie qu'à mesure que le temps avance, la probabilité de retour à l'état initial au temps n est équivalente à la probabilité de retour au temps $n-1$. En d'autres termes, les chances de sélection ou de retour à l'état initial ne dépendent pas du temps écoulé. Ainsi, ce comportement est souvent associé à un régime "méritocratique".

En revanche, lorsque la limite de la suite des quotients des termes successifs est strictement inférieure à 1, cela indique que la probabilité de retour à l'état initial diminue progressivement au fil du temps. On peut alors interpréter cela comme une concentration progressive du pouvoir ou des opportunités entre quelques individus privilégiés. Par conséquent, ce comportement est souvent associé à un régime "aristocratique".

Il est important de noter que ces paragraphes ont pour but d'expliquer l'intuition derrière la distinction entre les deux cas. L'explication plus détaillée de la concentration des avantages sur un groupe restreint de personnes sera abordée dans les sections suivantes.

3.3 L'ascension du mérite

Nous allons maintenant étudier le premier cas de régime non-démocratique, en supposant les hypothèses suivantes :

$$\int_0^1 \frac{q(dx)}{1-x} \leq \beta^{-1} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = 1$$

Afin d'analyser la viabilité et la fitness limites de ce régime, nous introduisons une nouvelle suite $(v_n)_n$ définie à partir des moments d'ordre n de la distribution initiale p_0 et de la suite de renouvellement de la manière suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \sum_{k=1}^n m_k u_{n-k} \quad (3.6)$$

3.3.1 Réduction de la diversité

Pour étudier la limite de la viabilité dans le régime méritocratique, nous devons utiliser certains lemmes basés sur la suite $(v_n)_n$ que nous avons introduite. Le premier lemme consiste à examiner la limite des quotients des termes successifs de cette suite, qui se révèle être la même que celle de des quotients des termes successifs de la suite $(u_n)_n$ mentionnée dans les hypothèses.

Lemme 3.3 (Quotient des termes successifs). *La suite des quotients des termes successifs de $(v_n)_n$ converge, et nous avons :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{v_{n-1}} = 1$$

Reprenons le produit des viabilités défini dans le chapitre précédent et rappelons l'équation (2.5) que nous utiliserons :

$$W_n = \beta \sum_{k=1}^{n-1} W_{n-k} (1 - \beta)^{k-1} \mu_k + (1 - \beta)^{n-1} m_n$$

En utilisant cette équation, nous pouvons formuler notre deuxième lemme comme suit :

Lemme 3.4 (Produit des viabilités). *Le produit des viabilités peut être exprimé en fonction de la suite $(v_n)_n$ de la manière suivante :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad W_n = (1 - \beta)^{n-1} v_n \quad (3.7)$$

En utilisant ces deux lemmes, nous pouvons facilement déduire la viabilité limite dans le cas d'un régime méritocratique. La proposition suivante énonce notre résultat souhaité.

Proposition 3.5 (Viabilité limite méritocratique). *La suite des viabilités $(w_n)_n$ converge, et la viabilité limite correspond à la proportion de population non mutante :*

$$w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \beta$$

Démonstration. La démonstration de ce résultat est immédiate :

$$w_n = \frac{W_{n+1}}{W_n} = (1 - \beta) \frac{v_{n+1}}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \beta$$

□

3.3.2 Convergence vers l'excellence

Nous abordons maintenant l'étude de la distribution de fitness limite. Dans le cas d'un régime non-démocratique, nous adoptons une approche différente en procédant en deux étapes. Nous commençons par prouver un résultat sur les intervalles de mesure de Lebesgue strictement inférieure à 1 dans I , avant de déduire le résultat global sur l'intervalle complet. Le lemme suivant représente la première étape de cette démarche.

Lemme 3.6 (Fitness limite partielle). *Soit $\xi \in]0, 1[$. La suite des distributions de fitness converge en variation totale sur l'intervalle restreint $[0, \xi]$. La distribution limite partielle est caractérisée par l'expression suivante :*

$$\tilde{p}(dx) = \frac{\beta}{1 - x} q(dx)$$

Démonstration. Pour démontrer ce résultat, nous nous inspirons de la même preuve que dans le cas démocratique. Nous commençons donc par la même expression :

$$p_n(dx) = \beta \sum_{k=0}^{n-1} \frac{W_{n-k}}{W_n} (1-\beta)^k x^k q(dx) + \frac{1}{W_n} (1-\beta)^n x^n p_0(dx)$$

La différence ici est l'introduction d'une nouvelle suite $(v_n)_n$ qui s'avère utile pour simplifier notre étude. Cette expression peut alors être réécrite comme suit :

$$p_n(dx) = \beta \sum_{k=0}^{n-1} \frac{v_{n-k}}{v_n} x^k q(dx) + \frac{1}{v_n} (1-\beta) x^n p_0(dx)$$

Étant donné que $\xi < 1$, nous pouvons exprimer \tilde{p} de manière similaire :

$$\tilde{p}(dx) = \beta \sum_{k=0}^{+\infty} x^k q(dx)$$

Pour tout $f \in \mathcal{M}_I$, nous avons alors :

$$\begin{aligned} f(x)p_n(dx) - f(x)\tilde{p}(dx) &= \beta \sum_{k=0}^{n-1} \frac{v_{n-k}}{v_n} f(x)x^k q(dx) + \frac{1}{v_n} (1-\beta) f(x)x^n p_0(dx) \dots \\ &\dots - \beta \sum_{k=0}^{+\infty} f(x)x^k q(dx) \\ &= \beta \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{v_{n-k}}{v_n} - 1 \right) f(x)x^k q(dx) \dots \\ &\dots + \frac{1}{v_n} (1-\beta) f(x)x^n p_0(dx) - \beta \sum_{k=n}^{+\infty} f(x)x^k q(dx) \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi l'inégalité suivante :

$$\|p_n - \tilde{p}\|_{VT,\xi} \leq \beta \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{v_{n-k}}{v_n} - 1 \right| \xi^k + \frac{(1-\beta)\xi^n}{v_n} - \beta \sum_{k=n}^{+\infty} \xi^k$$

Pour étudier cette inégalité, concentrons-nous sur les trois termes un par un, en commençant par le terme le plus simple et en allant vers le plus complexe.

🔧 Le dernier terme s'étudie directement sans problème :

$$\beta \sum_{k=n}^{+\infty} \xi^k = \beta \frac{\xi^n}{1-\xi} = o(1)$$

🔧 Le deuxième terme est également simple à étudier. Notons-le Ξ_n . Nous avons le résultat suivant :

$$\frac{\Xi_{n+1}}{\Xi_n} = \xi \frac{v_n}{v_{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \xi < 1 \implies \Xi_n = o(1)$$

🔧 En ce qui concerne le premier terme, notons tout d'abord qu'il existe une suite $(\varepsilon_{k,n})_n$ qui converge vers 0 et un entier N tel que pour n à partir de ce rang :

$$\frac{v_{n-k}}{v_n} = (1 + \varepsilon_{k,n})^{-k} > 0$$

Nous pouvons alors séparer la somme en deux parties à l'aide de cet entier. Par abus de notation, écrivons :

$$\beta \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{v_{n-k}}{v_n} - 1 \right| \xi^k = \beta \left(\sum_{k=0}^{n-N} + \sum_{k=n-N+1}^{n-1} \right) \left| \frac{v_{n-k}}{v_n} - 1 \right| \xi^k$$

Première partie : Pour les plus petites valeurs de k , où v_{n-k} reste "proche" de v_n , examinons cette somme en utilisant la propriété asymptotique :

$$\frac{v_{n-k}}{v_n} - 1 = (1 + \varepsilon_{k,n})^{-k} - 1^{-k}$$

Par le théorème des accroissements finis, en utilisant des arguments similaires à ceux du cas démocratique, il existe une suite $(\alpha_{k,n})_n$ appartenant à l'intervalle $[0, 1]$ telle que l'égalité précédente puisse s'écrire :

$$\frac{v_{n-k}}{v_n} - 1 = -k \frac{\varepsilon_{k,n}}{(1 + \alpha_{k,n} \varepsilon_{k,n})^{k+1}} = o(1)$$

Ainsi, la somme peut être réécrite comme suit :

$$\beta \sum_{k=0}^{n-N} \left| \frac{v_{n-k}}{v_n} - 1 \right| \xi^k = \beta o(1) \sum_{k=0}^{n-N} \xi^k \leq \beta o(1) \frac{\xi}{1-\xi} = o(1)$$

Deuxième partie : Pour les grandes valeurs de k , séparons à nouveau la somme en deux parties à l'aide de l'inégalité triangulaire, afin de montrer qu'avec un changement d'indice, les termes v_{n-k} , en nombre fini et fixé, ne posent aucun problème :

$$\beta \sum_{k=n-N+1}^{n-1} \left| \frac{v_{n-k}}{v_n} - 1 \right| \xi^k \leq \beta \sum_{j=1}^{N-1} \frac{v_j}{v_n} \xi^{n-j} + \beta \sum_{k=n-N+1}^{n-1} \xi^k$$

En utilisant le résultat précédent montrant la petitesse du deuxième terme, ainsi que le fait que la première somme est finie, nous obtenons :

$$\beta \sum_{j=1}^{N-1} \frac{v_j}{v_n} \xi^{n-j} \leq \beta \frac{\xi^n}{v_n} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{1}{\xi} \right)^j = o(1)$$

De plus, la deuxième somme conduit directement à :

$$\beta \sum_{k=n-N+1}^{n-1} \xi^k \leq \beta \frac{\xi^{n-N+1}}{1-\xi} = o(1)$$

En résumé, en décomposant en trois termes, nous avons démontré que :

$$\|p_n - \tilde{p}\|_{VT,\xi} = o(1) \quad (3.8)$$

Par conséquent, nous pouvons conclure ce lemme sur la fitness limite partielle. □

En utilisant l'annexe sur la convergence des mesures, nous pouvons formuler le résultat tant attendu.

Théorème 3.7 (Fitness limite méritocratique). *Dans le régime méritocratique :*

$$\int_0^1 \frac{q(dx)}{1-x} \leq \beta^{-1} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = 1$$

la suite des distributions de fitness $(p_n)_n$ converge faiblement. La distribution limite est caractérisée par l'expression suivante :

$$p(dx) = \frac{\beta}{1-x} q(dx) + \left(1 - \int_0^1 \frac{\beta}{1-y} q(dy) \right) \delta_1(dx)$$

Cette limite n'est plus absolument continue par rapport à la distribution des mutants q , mais reste indépendante de la distribution initiale p_0 .

Démonstration. Nous avons établi en annexe que l'espace des mesures de probabilités sur I , noté \mathcal{P}_I , équipé de la topologie faible, est un espace métrique compact. Par conséquent, en extrayant éventuellement une sous-suite, la suite des distributions de fitness $(p_n)_n$ converge faiblement vers une mesure de probabilité que nous notons \hat{p} .

De plus, nous avons démontré que la convergence en variation totale implique la convergence faible. Ainsi, selon le lemme précédent, pour tout réel $\xi \in]0, 1[$, la suite $(p_n)_n$ converge faiblement vers \tilde{p} sur l'intervalle $[0, \xi]$. Par unicité de la limite, les mesures \hat{p} et \tilde{p} coïncident sur ces intervalles restreints.

Étant donné que \hat{p} est une mesure de probabilité, nous obtenons les égalités suivantes :

$$\int_0^\xi \hat{p}(dy) = \int_0^\xi \frac{\beta}{1-y} q(dy) \quad \text{et} \quad \int_0^1 \hat{p}(dy) = \int_0^1 \frac{\beta}{1-y} q(dy) + \left(1 - \int_0^1 \frac{\beta}{1-y} q(dy)\right)$$

Par conséquent, la mesure de probabilité \hat{p} ne peut être donnée que par l'expression suivante :

$$\hat{p}(dx) = \frac{\beta}{1-x} q(dx) + \left(1 - \int_0^1 \frac{\beta}{1-y} q(dy)\right) \delta_1(dx)$$

Cela nous permet de conclure le théorème sur la fitness limite totale. □

Notons qu'en comparant les résultats (3.4) et (3.8), nous constatons que la convergence se produit désormais en $o(1)$ au lieu d'être exponentielle comme dans le cas démocratique. Dans cette situation, la distribution limite ne dépend toujours pas de la distribution initiale p_0 , mais elle n'est plus absolument continue par rapport à la distribution de mutants q . Cela implique que quelle que soit la composition initiale de la population, tous les individus auront l'opportunité de prouver leur mérite et d'avoir la meilleure chance de perpétuer leur héritage. L'apparition de l'atome dans la fitness limite, par rapport à l'ancien cas, représente la concentration de la probabilité de survie du côté des individus les plus méritants.

De plus, avant d'aborder le deuxième cas non démocratique, notons que la définition de p par le théorème de la fitness limite nous donne à nouveau la valeur de la viabilité limite :

$$\int_0^1 xp(dx) = \beta \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n + \left(1 - \beta \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n\right) = 1 - \beta$$

3.4 Hégémonie des élites

Nous abordons enfin le second cas de régime non-démocratique, en supposant les hypothèses suivantes :

$$\int_0^1 \frac{q(dx)}{1-x} \leq \beta^{-1} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = \sigma < 1$$

Dans ce régime non-démocratique, les résultats présentés seront très similaires à ceux du cas précédent, avec quelques différences subtiles.

Sous les hypothèses énoncées précédemment, il est nécessaire que le support de la distribution de fitness des mutants soit contenu dans un compact plus restreint. Le lemme suivant explicite cette observation.

Lemme 3.8 (Support de la distribution de fitness des mutants). *Le support de la distribution de fitness des mutants est restreint par la limite des quotients des termes successifs de la suite de renouvellement :*

$$\text{supp}(q) \subset [0, \sigma]$$

Puisque seuls les rapports de fitness sont pertinents, il est possible de modifier l'échelle de la fitness en utilisant un facteur de sorte que 1 redevienne la limite supérieure du support de q (ce qui correspondrait soit au cas démocratique, soit au cas méritocratique), à moins que la limite supérieure du support de p_0 ne dépasse celle de q .

Ainsi, la seule nouvelle possibilité est celle où la distribution de fitness des mutants est concentrée sur un intervalle $[0, \sigma]$, où σ est strictement inférieur à la limite supérieure de la fitness de la population d'origine, que l'on peut prendre, sans perte de généralité, égale à 1 :

$$\max \text{supp}(p_0) = 1$$

Cette situation est décrite comme une "aristocratie" ; certains descendants non mutants de la génération d'origine sont intrinsèquement en meilleure forme que tous les mutants possibles.

3.4.1 Monopole génétique

Dans ce nouveau cas, il s'avère que la viabilité limite ne subit pas de modification par rapport au cas précédent. Étant donné que les chances de survie sont principalement concentrées sur un petit groupe de personnes dominantes, la limite de viabilité reste la même, comme le démontre la proposition suivante.

Proposition 3.9 (Viabilité limite aristocratique). *La suite des viabilités $(w_n)_n$ converge, et la viabilité limite correspond à la proportion de population non mutante :*

$$w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \beta$$

3.4.2 Héritage des dominants

De manière similaire, puisque les preuves demeurent inchangées, la distribution de fitness limite donnée sera identique à celle du cas méritocratique. Cependant, dans cette situation, ce sont ses propriétés qui seront modifiées. Le théorème suivant explicite ces modifications.

Théorème 3.10 (Fitness limite aristocratique). *Dans le régime aristocratique :*

$$\int_0^1 \frac{q(dx)}{1-x} \leq \beta^{-1} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = \sigma < 1$$

la suite des distributions de fitness $(p_n)_n$ converge faiblement. Une des distributions limites est caractérisée par l'expression suivante :

$$p(dx) = \frac{\beta}{1-x} q(dx) + \left(1 - \int_0^1 \frac{\beta}{1-y} q(dy)\right) \delta_1(dx)$$

Cette limite demeure non absolument continue par rapport à la distribution des mutants q , mais elle devient désormais dépendante de la distribution initiale p_0 .

La plupart des remarques énoncées dans le cas précédent demeurent applicables ici. Toutefois, il convient de souligner que tous les individus n'auront plus la même opportunité de perpétuer leur héritage dans le temps. Ce sont plutôt ceux qui étaient initialement en position de force qui continueront à l'être. Néanmoins, il est important de noter que la distribution p dépend désormais de la distribution initiale p_0 , mais uniquement à travers la limite supérieure de son support.

3.5 Analyse comparative des résultats

Après cette étude approfondie des différents régimes de sélection, il est temps de récapituler les résultats obtenus.

Dans le cas démocratique, tous les individus ont des chances égales de perpétuer leur héritage dans le temps, ce qui favorise une distribution de fitness équitable. A contrario, dans les cas non-démocratiques, la répartition des chances de survie diffère.

Dans le régime méritocratique, la survie est basée sur les aptitudes individuelles, favorisant ainsi les individus les plus adaptés. Cette approche peut être considérée comme bénéfique, car elle encourage la sélection des traits les plus favorables à la survie.

En revanche, dans le régime aristocratique, la survie est principalement réservée à un petit groupe d'individus dominants. Cela a pour conséquence de réduire la diversité génétique au sein de la population, car seuls les descendants de l'état initial favorable continuent à prospérer. Cette concentration de la survie peut entraîner des avantages à court terme pour le groupe dominant, mais peut également limiter l'adaptabilité et la résilience de la population dans des environnements changeants.

Le tableau suivant résume le comportement asymptotique de nos suites dans les trois régimes de sélection :

Régime de sélection	Viabilité limite	Fitness limite - Propriétés	Fitness limite - Indept de p_0
Démocratie	s	absolument continue par rapport à q	oui
Méritocratie	$1 - \beta$	atome au maximum de la distribution de fitness des mutants	oui
Aristocratie	$1 - \beta$	atome au maximum de la distribution de fitness des non-mutants	non

TABLE 3.1 – Comportement asymptotique de $(w_n)_n$ et $(p_n)_n$

Il peut sembler paradoxal que dans le cas de convergence de l'intégrale, cela conduise à l'émergence d'un atome en 1, créant ainsi une "méritocratie" lorsque la distribution de fitness des mutants décroît rapidement. L'idée est que l'existence d'une queue décroissante plus lente, qui fait diverger l'intégrale, peut contenir suffisamment de fitness pour maintenir la moyenne au-dessus de $1 - \beta$, sans sacrifier la continuité absolue. La désignation de la situation critique où il y a égalité entre l'intégrale et β^{-1} dans les cas non-démocratiques plutôt que dans le cas démocratique est quelque peu arbitraire, mais elle est justifiée par la différence de méthode d'analyse et l'échec (en général) de la convergence exponentiellement rapide.

Cependant, il est important de noter que, malgré ces différences, la viabilité limite reste toujours supérieure à la proportion de population mutante $1 - \beta$, l'égalité survient dans les cas non-démocratiques. Ainsi, en considérant le bien-être du peuple, il est préférable d'opter pour un régime démocratique, ce qui semble intuitif au vu de son nom. Favoriser l'équité dans la sélection permet de préserver au mieux l'héritage global et d'assurer la durabilité de la population dans son ensemble. Accorder de l'importance aux individus les plus méritants n'est pas préjudiciable, d'autant plus que cela se produit indépendamment de l'organisation initiale. En revanche, le dernier cas, celui de l'aristocratie, est objectivement indéfendable selon les arguments proposés.

Ces résultats mettent en évidence les différences fondamentales entre les régimes de sélection et leurs implications sur la distribution de fitness, la diversité génétique et la survie des individus. Ils

illustrent comment différentes stratégies de survie peuvent conduire à des distributions de fitness et à des proportions de population distinctes. Il est donc important de tenir compte de ces aspects lors de l'étude des systèmes de sélection et de leur impact sur les populations biologiques.

3.6 Support initial général

Examinons à présent le cas général où le maximum du support de la distribution initiale n'est plus fixé à 1. Dans cette situation, le théorème qui suit permet de caractériser la distribution limite et de clarifier la dépendance en la distribution initiale p_0 .

Théorème 3.11 (Mesures invariantes). *Pour un maximum de support $\max \text{supp}(p_0)$ appartenant à l'ensemble suivant :*

$$\left\{ x_0 \in \mathbb{R} \mid \beta \sigma \leq x_0 \leq 1 \text{ et } \int_0^1 \frac{\beta}{1 - \frac{x}{x_0}} q(dx) < 1 \right\}$$

une mesure invariante avec un atome en ce réel est associée. Cette mesure est caractérisée par l'expression :

$$p_{x_0}(dx) = \frac{\beta}{1 - \frac{x}{x_0}} q(dx) + \left(1 - \int_0^1 \frac{\beta}{1 - \frac{y}{x_0}} q(dy) \right) \delta_{x_0}(dx)$$

Démonstration. Si la suite des viabilités $(w_n)_n$ converge vers un réel w , alors la limite des distributions de fitness p doit satisfaire l'équation suivante :

$$p(dx) = (1 - \beta) \frac{x p(dx)}{w} + \beta q(dx)$$

En imposant un atome en x_0 , nous obtenons nécessairement :

$$p(x_0) = (1 - \beta) \frac{x_0 p(x_0)}{w}, \quad \text{ie.} \quad \frac{1 - \beta}{w} = \frac{1}{x_0}$$

De plus, pour tout $x < \delta$, nous avons :

$$p(dx) = \frac{\beta}{1 - \frac{1-\beta}{w}x} q(dx) = \frac{\beta}{1 - \frac{x}{x_0}} q(dx)$$

Ce qui conclut la preuve du théorème. □

Ajoutons un résultat notable concernant la viabilité limite, ce qui confirme la remarque abordée dans la section précédente. En considérant que la suite des viabilités $(w_n)_n$ converge vers une valeur réelle w , la distribution de fitness limite p doit satisfaire l'équation suivante :

$$p(dx) = (1 - \beta) \frac{x p(dx)}{w} + \beta q(dx), \quad \text{ie.} \quad p(dx) = \frac{\beta}{1 - \frac{1-\beta}{w}x} q(dx)$$

Il serait souhaitable que la série suivante soit convergente :

$$\beta \sum_{k \geq 0} \left(\frac{1 - \beta}{w} x \right)^k q(dx)$$

Cela est réalisable uniquement si

$$(1 - \beta) \max \text{supp}(q) \leq w$$

Par conséquent, en adoptant l'hypothèse préliminaire que les mesures étaient définies sur l'intervalle $I = [0, 1]$, notre résultat découle naturellement.

Parallèlement, un résultat analogue peut être démontré en ce qui concerne le support de la distribution initiale p_0 . En effet, notons $\theta = \max \text{supp}(p_0)$ et supposons que $(1 - \beta)\theta > w$. Dans ce cas,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \theta' < \theta, \exists N \in \mathbb{N} / \forall i \geq N, \frac{1 - \beta}{w} \theta' > (1 + \varepsilon)$$

Or, en utilisant la formule explicite de $p_n(dx)$ donnée par (2.3), nous pouvons écrire pour tout entier n , on dispose d'une mesure positive r_n telle que

$$p_n(dx) = r_n(dx) + \frac{(1 - \beta)^n}{w_{n-1} \dots w_0} x^n p_0(dx)$$

En appliquant cela, nous obtenons :

$$\forall n \geq N, \quad p_n([\theta', \theta]) = r_n([\theta', \theta]) + \frac{(1 - \beta)^{n-N} x^{n-N}}{w_{n-1} \dots w_N} \frac{(1 - \beta)^N x^N}{w_{N-1} \dots w_0} p_0([\theta', \theta])$$

Ce qui nous permet de conclure que :

$$\exists C_{N, \theta'} > 0 / \quad 1 \geq p_n([\theta', \theta]) \geq C_{N, \theta'} (1 + \varepsilon)^{n-N} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Cette conclusion est absurde, et donc, nous en déduisons que l'inégalité inverse à notre hypothèse est vérifiée. Par conséquent, nous avons démontré deux résultats qui généralisent celui énoncé par KINGMAN :

$$(1 - \beta) \max \text{supp}(q) \leq w \quad \text{et} \quad (1 - \beta) \max \text{supp}(p_0) \leq w$$

Chapitre 4

Émergence de la condensation

Dans le précédent chapitre, nous avons étudié la distribution de fitness à un moment donné et à terme dans différents régimes. Deux phases ont été observées : lorsque la "mutation" est favorisée par rapport à la sélection, la distribution limite est une version asymétrique de la distribution de fitness des mutants. En revanche, si la "sélection" est favorisée par rapport à la mutation, un phénomène de condensation se produit. Nous constatons alors qu'une proportion positive de la population des générations tardives présente une fitness très proche de la valeur optimale, ce qui conduit à l'apparition d'un atome à la valeur de fitness maximale dans la distribution limite. Ainsi, DEREICH et MÖRTERS se sont concentrés sur le modèle proposé par KINGMAN et ont examiné la forme de la distribution de fitness pour la partie de la population qui finit par constituer l'atome dans la distribution limite.

Dans le contexte de leur article intitulé « Emergence of condensation in Kingman's model of selection and mutation », le terme "condensation" fait référence à un phénomène de concentration ou d'accumulation de certains éléments ou caractéristiques du modèle de sélection et de mutation proposé par KINGMAN. Cela signifie que certains éléments ou individus spécifiques ont tendance à se regrouper ou à se concentrer de manière significative, ce qui peut avoir un impact important sur la dynamique globale du modèle.

4.1 Contexte et prémisse de l'étude

Tout au long de notre étude, nous supposons que la distribution des mutants près de son extrémité est stochastiquement supérieure à la distribution de fitness dans la population initiale. Cela se traduit par la condition suivante sur les moments :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{m_n}{\mu_n} = 0 \quad (4.1)$$

Sous cette hypothèse (ou une hypothèse légèrement plus faible), KINGMAN a démontré que $(p_n)_n$ converge vers une distribution limite p , indépendante de p_0 . De plus, la distribution limite p est absolument continue par rapport à q si et seulement si

$$\beta \int_0^1 \frac{q(dx)}{1-x} \geq 1$$

Dans le cas contraire,

$$\gamma(\beta) = 1 - \beta \int_0^1 \frac{q(dx)}{1-x} > 0 \quad (4.2)$$

et c'est le régime méritocratique qui nous intéresse. Dans ce régime, la distribution limite p présente toujours un atome à la fitness optimale 1, ce qui est appelé "condensation". La distribution limite p s'exprime alors de la manière suivante :

$$p(dx) = \beta \frac{q(dx)}{1-x} + \gamma(\beta) \delta_1(dx)$$

Le résultat principal de DEREICH et MÖRTERS décrit la dynamique de la condensation en termes d'un théorème de limite d'échelle qui se concentre sur le voisinage de la valeur de fitness maximale et révèle la forme de l'"onde" qui finit par former le condensât.

Les auteurs précisent que la masse totale dans l'"onde" qui se déplace vers la valeur de fitness maximale correspond à la masse de l'atome dans la distribution limite $p(dx)$. La forme redimensionnée de cette masse suit une "distribution gamma" avec un paramètre de forme α .

4.2 Théorie du renouvellement

Avant d'aborder l'étude de notre onde asymptotique, nous démontrons que les suites que nous avons définies précédemment satisfont des propriétés de la théorie du renouvellement exposée en annexe.

Tout d'abord, considérons la suite $(v_n)_n$ que nous avons introduite en utilisant les suites $(m_n)_n$ et $(u_n)_n$ dans une première équation de renouvellement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \sum_{k=1}^n m_k u_{n-k}$$

Il est démontré que cette suite satisfait une autre équation de renouvellement (B.4), qui des moments $(m_n)_n$ et $(\mu_n)_n$ à travers la suite $(f_n)_n$ définie en (3.5). Cela est énoncé dans le lemme suivant :

Lemme 4.1 (Équation de renouvellement). *La suite $(v_n)_n$ satisfait l'équation de renouvellement suivante :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = m_n + \sum_{k=1}^{n-1} f_k v_{n-k}$$

Par la suite, nous avons l'intention d'appliquer le célèbre théorème de renouvellement B.3 à nos suites. Son utilisation aboutira à un résultat plus intéressant, qui reste néanmoins anecdotique. Le théorème correspondant est formulé comme suit.

Théorème 4.2 (Théorème de renouvellement). *La série dont les termes généraux sont donnés par v_n converge. De plus, la somme de cette série vérifie l'équation suivante :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \frac{1-\beta}{\gamma(\beta)} \sum_{n=1}^{+\infty} m_n < +\infty$$

Démonstration. Vérifions les hypothèses requises par le théorème de renouvellement de FELLER. Rappelons que, selon (4.1) et (4.2), nous avons les relations suivantes :

$$m_n = o(\mu_n) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n \leq \frac{\beta}{1-\beta} < +\infty$$

Selon le théorème de sommation des relations de comparaison, cela implique que la série dont les termes généraux sont donnés par m_n converge, et que les restes des séries sont comparables :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} m_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \mu_k\right)$$

Notre définition de $\gamma(\beta)$ nous donne une valeur pour la somme dans l'inégalité précédente :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n = \frac{1}{\beta} (1 - \gamma(\beta))$$

Cela nous permet d'en déduire une valeur pour la somme de la série des termes généraux f_n définis en (3.5), montrant ainsi sa convergence et sa stricte infériorité à 1 :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n = 1 - \frac{\gamma(\beta)}{1 - \beta} \quad (4.3)$$

Nous pouvons maintenant appliquer le théorème présenté en annexe pour obtenir :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} m_n \left[1 - \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \right]^{-1}$$

Et l'équation précédente (4.3) nous permet de conclure. □

4.3 Distribution de fitness à l'approche de l'atome

Passons maintenant à l'étude de la distribution de fitness avant l'apparition de l'atome, en énonçant des hypothèses sur le comportement des mutants. Ces hypothèses auront un impact sur le comportement de la population générale. Dans le cadre de l'étude menée par DEREICH et MÖRTERS, nous posons l'hypothèse suivante :

$$q(dy) = \alpha(1 - y)^{\alpha-1} dy$$

où $\alpha > 1$ est un réel. En particulier, nous avons l'équivalence suivante :

$$q([1 - h, 1]) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} h^\alpha$$

Le fait que α soit supérieur à 1 est une condition essentielle dans le contexte de cette étude en raison de son rôle crucial dans la modélisation et la compréhension du comportement asymptotique de la population. Cette condition est intimement liée aux propriétés des mutants et à la manière dont ils contribuent à l'évolution de la population.

En effet, le choix de $\alpha > 1$ a des implications significatives pour la distribution de fitness des mutants. Cette condition implique que la probabilité pour qu'un mutant ait une fitness légèrement supérieure à la fitness de référence ($1 - h$) décroît plus lentement que de manière exponentielle lorsque l'écart h tend vers 0. Autrement dit, la probabilité d'observer des mutants qui sont modérément meilleurs que l'individu de référence ne diminue pas trop rapidement.

Cette caractéristique est cruciale pour assurer une diversité suffisante dans la population et permettre la coexistence de différentes stratégies évolutives. Si α était inférieur à 1, la décroissance rapide des probabilités des mutants plus performants pourrait conduire à une convergence rapide vers un seul type d'individu dominant, limitant ainsi la diversité génétique et la capacité d'exploration de nouvelles solutions évolutives.

En choisissant $\alpha > 1$, les auteurs permettent donc à la population de maintenir une variété de traits évolutifs et favorisent ainsi un équilibre dynamique entre les différentes stratégies. Cela offre un cadre réaliste pour l'étude de l'évolution en régime méritocratique et contribue à mieux appréhender les mécanismes sous-jacents qui influencent la stabilité et la diversité au sein des populations évolutives.

Avant de présenter le théorème tant attendu sur la limite d'échelle, introduisons deux lemmes. Le premier porte sur le comportement, près de la borne du support de q , de la suite des moments de cette distribution.

Lemme 4.3 (Moments des mutants). *Pour tout $x > 0$, on a l'équivalence suivante :*

$$\int_{1-x/n}^1 y^n q(dy) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha}{n^\alpha} \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t} dt \quad (4.4)$$

En particulier, on a :

$$\mu_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{n^\alpha} \quad (4.5)$$

Le deuxième lemme concerne le comportement asymptotique de la suite $(v_n)_n$ que nous avons étudiée précédemment :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \sum_{k=1}^n m_k u_{n-k} = m_n + \sum_{k=1}^{n-1} f_k v_{n-k}$$

Cette suite évolue également en $n^{-\alpha}$, tout comme les moments des mutants, mais avec une constante associée différente.

Lemme 4.4. *La suite $(v_n)_n$ satisfait l'équivalence suivante :*

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{c}{n^\alpha}$$

avec

$$c = \frac{\beta}{\gamma(\beta)} \Gamma(\alpha + 1) \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$$

Enfin, à l'aide de ces deux lemmes, nous sommes en mesure de présenter le théorème formulé par les auteurs, qui traite du comportement asymptotique de la population en régime méritocratique, sous une condition particulière sur les mutants.

Théorème 4.5 (Condensation gamma). *Considérons les hypothèses suivantes :*

$$\gamma(\beta) = 1 - \beta \int_0^1 \frac{q(dx)}{1-x} > 0 \quad \text{et} \quad q([1-h, 1]) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} h^\alpha$$

Pour tout $x > 0$, l'équivalence suivante est vérifiée :

$$p_n \left(\left[1 - \frac{x}{n}, 1 \right] \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x y^{\alpha-1} e^{-y} dy \quad (4.6)$$

Démonstration. Soit $x > 0$. Pour démontrer ce résultat, commençons par l'énoncé de la formule explicite de la fitness :

$$p_n(dx) = \beta \sum_{k=0}^{n-1} \frac{v_{n-k}}{v_n} x^k q(dx) + \frac{1}{v_n} (1 - \beta) x^n p_0(dx)$$

Intégrons maintenant cette formule :

$$p_n \left(\left[1 - \frac{x}{n}, 1 \right] \right) = \beta \sum_{k=0}^{n-1} \frac{v_{n-k}}{v_n} \int_{1-x/n}^1 y^k q(dy) + \frac{1}{v_n} (1 - \beta) \int_{1-x/n}^1 y^n p_0(dy)$$

Étudions ces deux termes obtenus dans la partie droite de l'égalité, en commençant par le deuxième.

♥ Le deuxième terme peut être étudié rapidement en utilisant le lemme précédent :

$$\frac{1}{v_n} (1 - \beta) \int_{1-x/n}^1 y^n p_0(dy) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} m_n n^\alpha \left[\frac{1 - \beta \int_{1-x/n}^1 y^n p_0(dy)}{c \int_0^1 y^n p_0(dy)} \right]$$

Le terme entre crochets est fini, et nous avons remarqué au cours de la preuve que le terme restant convergerait vers 0. Ainsi, notre terme sera négligeable dans l'étude de la fitness asymptotique.

♥ Pour le premier terme, nous utilisons à nouveau l'équivalent du lemme précédent :

$$\beta \sum_{k=0}^{n-1} \frac{v_{n-k}}{v_n} \int_{1-x/n}^1 y^k q(dy) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\beta n^\alpha}{c} \sum_{k=0}^{n-1} v_{n-k} \int_{1-x/n}^1 y^k q(dy)$$

Étant donné que nous avons des intégrales par rapport à la distribution des mutants, nous sommes tentés d'utiliser le premier lemme sur les moments des mutants. Cependant, ce lemme s'applique aux intégrales de la forme y^n et non y^k . Nous avons alors l'idée de diviser la somme en termes de petite et grande valeur de k . Pour ce faire, nous choisissons un grand réel $M > 0$ qui satisfait les propriétés suivantes :

⚡ Pour tout $k \geq n - Mn^{1/\alpha}$, on a :

$$\int_{1-x/n}^1 y^k q(dy) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_{1-x/n}^1 y^n q(dy)$$

⚡ On a :

$$\frac{1}{M^\alpha} \ll \frac{\gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x y^{\alpha-1} e^{-y} dy$$

dans le sens où la somme des deux termes peut être considérée comme étant égale au deuxième terme seulement.

Nous pouvons alors étudier ces deux parties séparément. Notons par abus de notation :

$$\frac{\beta n^\alpha}{c} \sum_{k=0}^{n-1} v_{n-k} \int_{1-x/n}^1 y^k q(dy) = \frac{\beta n^\alpha}{c} \left(\sum_{k=0}^{n-Mn^{1/\alpha}} + \sum_{k=n-Mn^{1/\alpha}+1}^{n-1} \right) v_{n-k} \int_{1-x/n}^1 y^k q(dy)$$

Première partie : La première partie de cette séparation est négligeable. En effet, en utilisant le lemme précédent, il existe un réel $K > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} \frac{\beta n^\alpha}{c} \sum_{k=0}^{n-Mn^{1/\alpha}} v_{n-k} \int_{1-x/n}^1 y^k q(dy) &\leq \frac{\beta n^\alpha}{c} q\left(\left[1 - \frac{x}{n}, 1\right]\right) \sum_{k=Mn^{1/\alpha}}^n v_k \\ &\leq K \left(n - Mn^{1/\alpha}\right) \left(\frac{n}{Mn^{1/\alpha}}\right)^\alpha q\left(\left[1 - \frac{x}{n}, 1\right]\right) \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse formulée en début de section, nous obtenons :

$$\frac{\beta n^\alpha}{c} \sum_{k=0}^{n-Mn^{1/\alpha}} v_{n-k} \int_{1-x/n}^1 y^k q(dy) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n - Mn^{1/\alpha}}{M^\alpha n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{M^\alpha}$$

Deuxième partie : Toute la contribution à la fitness asymptotique se trouve dans cette deuxième partie. En utilisant l'hypothèse faite lors du choix de M et l'équivalence (4.4), nous obtenons :

$$\frac{\beta n^\alpha}{c} \sum_{k=n-Mn^{1/\alpha}+1}^{n-1} v_{n-k} \int_{1-x/n}^1 y^k q(dy) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha\beta}{c} \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \int_0^x y^{\alpha-1} e^{-y} dy$$

En résumé, en combinant tous nos résultats précédents et en utilisant la formule de la constante c obtenue dans le lemme précédent, nous pouvons conclure ce théorème comme suit :

$$p_n \left(\left[1 - \frac{x}{n}, 1\right]\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x y^{\alpha-1} e^{-y} dy$$

□

Le modèle de Kingman présente deux aspects significatifs. D'une part, il s'agit d'un modèle simple dans lequel on peut observer l'effet de condensation. D'autre part, il est assez complexe pour permettre l'étude de l'émergence de la condensation en tant que phénomène dynamique. Sa simplicité permet une analyse rigoureuse à l'aide de méthodes élémentaires. Cependant, les calculs effectués ont une portée importante, car de nombreux modèles beaucoup plus complexes provenant de domaines scientifiques variés présentent des caractéristiques similaires.

Les auteurs de l'article sur l'émergence de la condensation estiment que le modèle de Kingman partage de nombreuses caractéristiques avec d'autres modèles, tels que la condensation de Bose-Einstein en physique, la condensation de la richesse en macroéconomie ou encore l'émergence des embouteillages. Leur principale conjecture est donc que, dans une large classe de modèles universels où des effets similaires à la mutation et à la sélection interagissent dans un espace d'état limité et continu, la propagation de la "vague" atteignant l'état maximal de condensation suit une forme de distribution Gamma.

Cette étude repose sur une hypothèse spécifique concernant la distribution des mutants. Une question se pose alors : si une autre hypothèse est formulée, pourrait-on obtenir une autre forme célèbre de "vague", comme une forme gaussienne ? Pour explorer cette question, nous nous intéressons à une hypothèse proche de la question laissée en suspens par Kingman dans son article

$$q([1-h, 1]) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} e^{-1/(1-h)}$$

avec la différence que sa "vague" apparaît à l'infini. Nous aborderons cette question dans le chapitre suivant.

Chapitre 5

Dynamique évolutive avec fitness non bornée

Jusqu'à présent, notre analyse repose fortement sur l'hypothèse selon laquelle toutes les fitness sont bornées, ce qui permettait d'observer un comportement typique d'accumulation partielle au niveau supérieur de la fitness ou à proximité de celui-ci. Cette hypothèse de bornitude des fitness a rendu le modèle de Kingman simple et étudiable par des méthodes élémentaires. Cependant, nous souhaitons maintenant explorer ce qui se produit dans l'équation (2.2) rappelée ci-contre :

$$p_{n+1}(dx) = (1 - \beta) \frac{xp_n(dx)}{w_n} + \beta q(dx), \quad \text{avec} \quad w_n = \int_0^1 xp_n(dx)$$

lorsque q et p_0 ne sont pas restreints à un intervalle fini. Cette question sera au cœur de ce chapitre et nous permettra de généraliser notre analyse précédente.

5.1 Résultats généraux

Supposons maintenant que les distributions de fitness ne sont pas restreintes à un intervalle fini. Dans ce cas, la définition de la suite $(w_n)_n$ sera modifiée pour remplacer le terme 1 par $+\infty$, mais l'équation (2.2) restera inchangée :

$$p_{n+1}(dx) = (1 - \beta) \frac{xp_n(dx)}{w_n} + \beta q(dx)$$

Pour que cette équation soit bien définie, compte tenu de sa définition récurrente, il est nécessaire que les moments d'ordre n soient finis :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mu_n < +\infty \quad \text{et} \quad m_n < +\infty$$

La plupart de nos arguments précédents restent valables dans ce cas, à l'exception de la finitude de la série des f_n . Cela nous conduit à étudier une nouvelle théorie généralisée, présentée en annexe, qui concerne les suites de renouvellement généralisées.

5.1.1 Suites de renouvellement généralisées

Rappelons que la suite $(f_n)_n$ a été définie comme suit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n = \alpha \mu_n, \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\beta}{1 - \beta}$$

De plus, la suite $(u_n)_n$ est définie récursivement de la manière suivante :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = f_n + \sum_{k=1}^{n-1} f_k u_{n-k}$$

En utilisant l'annexe sur les suites de renouvellement généralisées, nous pouvons en déduire la proposition suivante dans le contexte de notre étude.

Proposition 5.1 (Nature de la suite). *La suite $(u_n)_n$ ainsi définie est une suite de renouvellement généralisée de nature sauvage.*

Démonstration. Prouvons cette assertion en deux étapes, en commençant par démontrer que la suite $(u_n)_n$ est une suite de renouvellement généralisée en étudiant la série des f_n , puis en utilisant la définition, prouvons sa nature sauvage.

Considérons un réel $z > 0$ et un entier naturel $n \geq 1$. Alors, nous avons :

$$f_n z^n = \alpha \mu_n z^n = \frac{\beta}{1-\beta} \left[\int_0^{1/z} (xz)^n q(dx) + \int_{1/z}^{+\infty} (xz)^n q(dx) \right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

La conclusion limite découle du fait que la deuxième intégrale est strictement positive. Ainsi, $\sum f_n z^n = +\infty$, et en particulier $\sum f_n = +\infty$. Cela démontre que $(u_n)_n$ est une suite de renouvellement généralisée.

Supposons maintenant que $(u_n)_n$ soit de nature apprivoisée, c'est-à-dire que :

$$\exists c > 0 / \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leq c^n$$

Alors, selon le lemme d'Abel, on a :

$$\forall z \in]0, c^{-1}[, \quad \sum u_n z^n < +\infty$$

Cependant, nous avons vu que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n = \left[1 - \sum_{n=1}^{+\infty} f_n z^n \right]^{-1}$$

Donc, la série génératrice associée à $(u_n)_n$ doit nécessairement être nulle, ce qui implique la nullité de ses termes généraux. En d'autres termes, pour tout réel $z \in]0, c^{-1}[$, nous avons :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n = 0 \implies \forall n \in \mathbb{N}, u_n z^n = 0 \implies \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$$

Cependant, cette dernière propriété est absurde. Par conséquent, nous en déduisons que $(u_n)_n$ est en réalité de nature sauvage. □

Tel que mentionné dans l'annexe, nous souhaitons utiliser la seconde partie du théorème puissant C.6 caractérisant une vaste classe de suites de renouvellement généralisées. Cette partie nous permet de formuler la proposition suivante.

Proposition 5.2 (Croissance et divergence). *La suite des quotients des termes successifs de la suite de renouvellement généralisée est croissante et divergente :*

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Démonstration. La preuve de la croissance et de la divergence de la suite des quotients des termes successifs de la suite de renouvellement généralisée est établie de manière rigoureuse. Tout d'abord, en vertu de la définition des suites, il est évident que la suite de renouvellement généralisée $(u_n)_n$ est strictement positive. Ensuite, étant donné que la suite $(f_n)_n$ est une suite de moments associée à une mesure borélienne finie par hypothèse, la suite de renouvellement généralisée $(u_n)_n$ représente

une suite de moments d'une mesure de probabilité. Ainsi, la croissance de la suite des quotients de ses termes successifs est un résultat direct.

En outre, en appliquant le théorème puissant mentionné précédemment, qui est vérifié dans notre cas en raison de la nature sauvage de la suite, nous pouvons conclure que la suite des quotients diverge. \square

5.1.2 Impact sur la viabilité

À la lumière de l'étude des régimes non-démocratiques dans le contexte de la fitness bornée, nous souhaitons maintenant explorer le cas de la fitness non bornée. Pour cela, nous faisons de nouveau usage de la suite de renouvellement précédemment définie par (3.6) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = m_n + \sum_{k=1}^{n-1} m_k u_{n-k}$$

Il est intéressant de noter que la suite des quotients de termes successifs de $(v_n)_n$ évoluera de la même manière que celle associée à $(u_n)_n$. Cela est démontré par le lemme suivant.

Lemme 5.3 (Divergence). *La suite des quotients des termes successifs de la suite $(v_n)_n$ est divergente :*

$$\frac{v_n}{v_{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Grâce à ce lemme, de manière similaire à l'étude des régimes non-démocratiques dans le cas de fitness bornée, nous pouvons en déduire la viabilité limite dans le cas de fitness non bornée.

Proposition 5.4 (Viabilité limite). *La suite des viabilités $(w_n)_n$ diverge :*

$$w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Démonstration. Il est rappelé que le produit des viabilités peut être exprimé en termes de $(v_n)_n$ de la manière suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad W_n = (1 - \beta)^{n-1} v_n$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$w_n = \frac{W_{n+1}}{W_n} = (1 - \beta) \frac{v_{n+1}}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

\square

Malheureusement, il n'est plus possible d'analyser la fitness limite de la même manière qu'auparavant. Nous avons déjà épuisé toutes les informations générales disponibles à ce sujet. Cependant, cela ne signifie pas que nous devons nous arrêter là. En effet, il existe une célèbre loi de probabilité appelée loi exponentielle, qui a pour support l'ensemble des réels positifs et est connue pour sa propriété d'absence de mémoire. Cette loi offre des propriétés intéressantes qui simplifient son utilisation et son étude. Dans la prochaine section, nous allons donc explorer l'application de cette loi dans notre contexte.

5.2 Distributions initiales exponentielles

L'équation (2.2), rappelée au début du chapitre, suggère une forme d'évolution géométrique de la population. Dans cette perspective, nous pouvons utiliser la loi exponentielle, qui est une version continue de la loi géométrique, afin de donner une dimension plus lisse et régulière à notre étude.

Dans cette situation, nous faisons l'hypothèse que les distributions initiales sont des probabilités de densité, plus précisément des lois exponentielles de paramètre 1. Nous notons également par la même lettre leur densité, de la forme suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad p_0(x) = q(x) = e^{-x}$$

Pour mener cette étude spécifique, nous allons diviser le travail en deux étapes distinctes afin d'obtenir une meilleure compréhension du comportement de notre population dans différentes situations. Dans un premier temps, nous supposons l'absence de mutations, puis nous les réintroduisons par la suite pour approfondir notre analyse.

5.2.1 En l'absence de mutations

Dans un premier temps, nous considérons l'absence de mutants, c'est-à-dire $\beta = 0$, afin d'obtenir une approche élémentaire de l'évolution des populations selon le modèle de KINGMAN. Dans ce cas, nous revenons à la première équation (2.1) du modèle, qui s'exprime comme suit :

$$p_{n+1}(dx) = \frac{x p_n(dx)}{w_n}, \quad \text{avec} \quad w_n = \int_0^{+\infty} x p_n(dx)$$

En effectuant une récurrence sur cette équation, nous pouvons formuler la proposition suivante :

Proposition 5.5 (Fitness et viabilité). *Les notions de fitness et de viabilité à la n -ième génération s'expriment explicitement comme suit :*

$$p_n(dx) = \frac{x^n e^{-x}}{n!} dx \quad \text{et} \quad w_n = n + 1$$

Par conséquent, la densité de la n -ième génération est dérivable et sa dérivée vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad p'_n(x) = \frac{(n-x)x^{n-1}e^{-x}}{n!} = \frac{n-x}{n} p_{n-1}(x)$$

Ainsi, la dérivée s'annule en n et en 0, cette dernière condition étant vérifiée uniquement si $n \geq 2$. Cependant, indépendamment de cela, nous pouvons formuler de manière générale que la densité présente toujours un pic de maximum en n et qu'elle est principalement concentrée autour de ce pic, sur un intervalle dont l'étendue peut être estimée.

En effet, la densité obtenue précédemment correspond à celle d'une loi gamma $\Gamma(n+1, 1)$. Par conséquent, nous connaissons son espérance (la viabilité) ainsi que son écart-type σ_n , donnés par :

$$w_n = n + 1 \quad \text{et} \quad \sigma_n = \sqrt{n + 1}$$

Cependant, une variable aléatoire S_n suivant la loi $\Gamma(n+1, 1)$ peut être considérée comme la somme de $n+1$ variables aléatoires (X_0, \dots, X_n) indépendantes et identiquement distribuées selon une loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$. Par conséquent, selon le théorème central limite, on a :

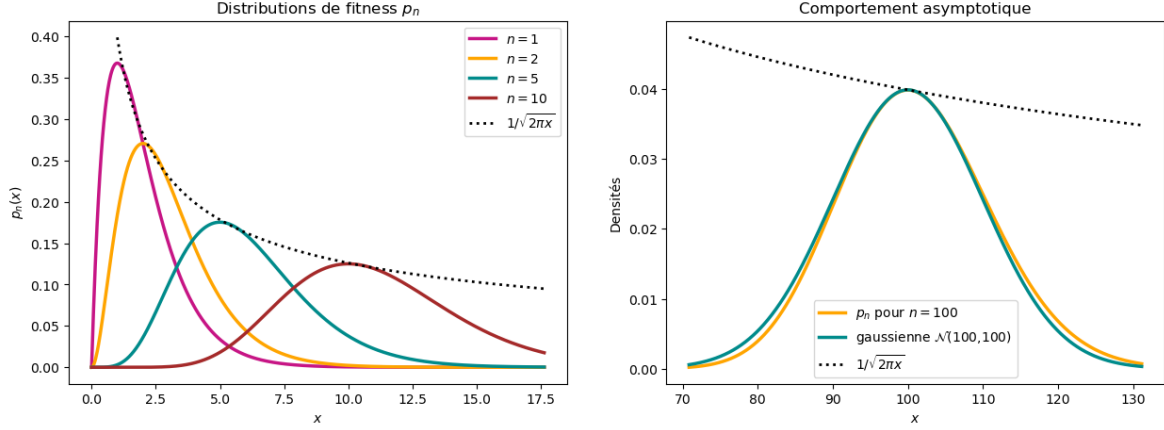
$$\sqrt{\frac{n}{n+1}} \left[\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left[\sum_{k=0}^n X_k - (n+1) \right] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

Ainsi, asymptotiquement, S_n est similaire à une variable aléatoire gaussienne $\mathcal{N}(n, n)$. Dans ce contexte, nous pouvons répertorier dans un tableau comment l'information est asymptotiquement contenue sous la courbe de p_n .

Largeur de l'intervalle	Pourcentage de l'information
$2\sqrt{n}$	68.3
$4\sqrt{n}$	95.5
$6\sqrt{n}$	99.7

TABLE 5.1 – Répartition de l'information sous p_n

Les résultats présentés peuvent être vérifiés numériquement à l'aide des graphiques suivants. Le premier graphique représente le comportement de la densité p_n , tandis que le deuxième graphique compare les courbes des densités gaussienne et gamma sur l'intervalle $[-3\sqrt{n}, 3\sqrt{n}]$, qui correspond à la dernière ligne du tableau. Cela nous permet de constater que les similitudes entre les deux densités sont présentes sur presque toutes les informations.

FIGURE 5.1 – Comportement de la fitness p_n

Ainsi, en l'absence de mutants dans la population, on observe l'émergence d'une unique vague d'information, qui suit asymptotiquement une distribution gaussienne se déplaçant vers l'infini à mesure que le temps avance. Cette vague d'information est caractérisée par un pic de densité

$$\frac{n^n e^{-n}}{n!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

décroissant en \sqrt{n} (formule de Stirling) et une étendue qui augmente en n , comme précédemment exprimé. Cependant, il est important de souligner que ces résultats sont limités à l'absence de mutants. Dans la prochaine sous-section, nous exposerons tout ce que nous pouvons dire dans le cas où les mutations sont présentes.

5.2.2 En présence de mutations

Considérons maintenant le cas où nous réintroduisons les mutants dans notre étude, ce qui signifie que $\beta > 0$. Cette situation rend l'analyse plus complexe, mais nous allons étudier chaque quantité pour obtenir autant d'informations que possible.

Grâce à la simplicité de notre modèle spécifique, nous pouvons exprimer facilement les moments d'ordre n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mu_n = m_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = \Gamma(n+1) = n!$$

Ainsi, on peut en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n = \alpha n!, \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\beta}{1-\beta}$$

Pour obtenir des résultats sur la viabilité asymptotique, étudions désormais nos suites de renouvellement $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = f_n + \sum_{k=1}^{n-1} f_k u_{n-k} \quad \text{et} \quad v_n = m_n + \sum_{k=1}^{n-1} m_k v_{n-k} = m_n + \sum_{k=1}^{n-1} f_k v_{n-k} \quad (5.1)$$

Avant cela, énonçons trois lemmes qui faciliteront notre étude fastidieuse des suites. Le premier lemme traite des coefficients binomiaux, qui apparaissent suite à la définition de $(f_n)_n$.

Lemme 5.6 (Coefficients binomiaux).

$$\forall n \geq 5, \forall k \in \llbracket 2, n-2 \rrbracket, \binom{n}{k} \geq 2n$$

Le deuxième lemme permet de borner certaines suites définies spécifiquement à l'aide de coefficients binomiaux.

Lemme 5.7 (Borne). *Pour un réel $\alpha > 0$, considérons la suite $(a_n)_n$ définie récursivement comme suit :*

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = a_0 + \alpha \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{\binom{n}{k}}$$

Alors la suite $(a_n)_n$ est bornée :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq C$$

où la borne C est donnée par :

$$C = \max \left\{ \frac{5}{5-3\alpha}, 1 + \frac{2\alpha}{3} + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^3}{24}, 1 + \frac{3\alpha}{5} + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^3}{15} + \frac{\alpha^4}{120} \right\}$$

Le troisième lemme nous indique que les suites définies comme précédemment sont équivalentes à leur premier terme.

Lemme 5.8 (Développement asymptotique). *Pour un réel $\alpha > 0$, considérons la suite $(a_n)_n$ définie récursivement comme suit :*

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = a_0 + \alpha \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{\binom{n}{k}}$$

Alors la suite $(a_n)_n$ peut être développée de la forme suivante :

$$a_n = a_0 + O(n^{-1})$$

Les trois lemmes jouent un rôle essentiel dans notre analyse. En effet, les suites $(u_n/f_n)_n$ et $(v_n/m_n)_n$ répondent aux conditions des deux derniers lemmes. Ainsi, nous pouvons formuler la proposition suivante de manière précise :

Proposition 5.9 (Suites de renouvellement). *Les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$, définies comme indiqué dans l'équation (5.1), peuvent être développées asymptotiquement de la manière suivante :*

$$u_n = \alpha n! (1 + O(n^{-1})) \quad \text{et} \quad v_n = n! (1 + O(n^{-1}))$$

Reprenons la notation de la sous-partie précédente pour l'écart-type :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sigma_n = \sqrt{\int_0^{+\infty} x^2 p_n(dx) - w_n^2}$$

Bien que nous ne puissions pas établir une égalité exacte pour la viabilité et l'écart-type comme dans le cas sans mutants, nous pouvons fournir des équivalents précis pour ces valeurs grâce à la proposition suivante :

Proposition 5.10 (Viabilité et écart-type).

$$w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (1 - \beta)n \quad \text{et} \quad \sigma_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\beta(1 - \beta)}n$$

Il est à noter que le résultat sur l'écart-type est, à une constante près, différent de celui énoncé par KINGMAN dans son article.

Pour conclure cette section, examinons le comportement asymptotique de la suite des distributions de fitness. Tout d'abord, remarquons que grâce à la définition fournie en annexe, la distance en variation totale entre deux mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue correspond à la distance L^1 entre leurs deux densités respectives par rapport à la mesure de Lebesgue. Cette observation nous permet de constater que, contrairement au cas sans mutants où l'information asymptotique était contenue sous une seule "bosse", en présence de mutations, l'information asymptotique est contenue sous deux "bosses". En effet, notons Γ_n la mesure et la densité associée à une variable aléatoire suivant la loi $\Gamma(n, 1)$. Avec cela, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème 5.11 (Fitness asymptotique). *La suite des distributions de fitness $(p_n)_n$ est équivalente à la somme pondérée d'une exponentielle et d'une gamma :*

$$\|p_n - \beta q - (1 - \beta)\Gamma_{n+1}\|_{VT} = \|p_n - \beta q - (1 - \beta)\Gamma_{n+1}\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Nous souhaitons également obtenir une représentation graphique du résultat énoncé. Étant donné que nous n'avons pas de formule explicite pour la distribution de fitness dans ce cas, nous allons tracer la courbe de la distribution équivalente selon le théorème précédent pour deux valeurs de β .

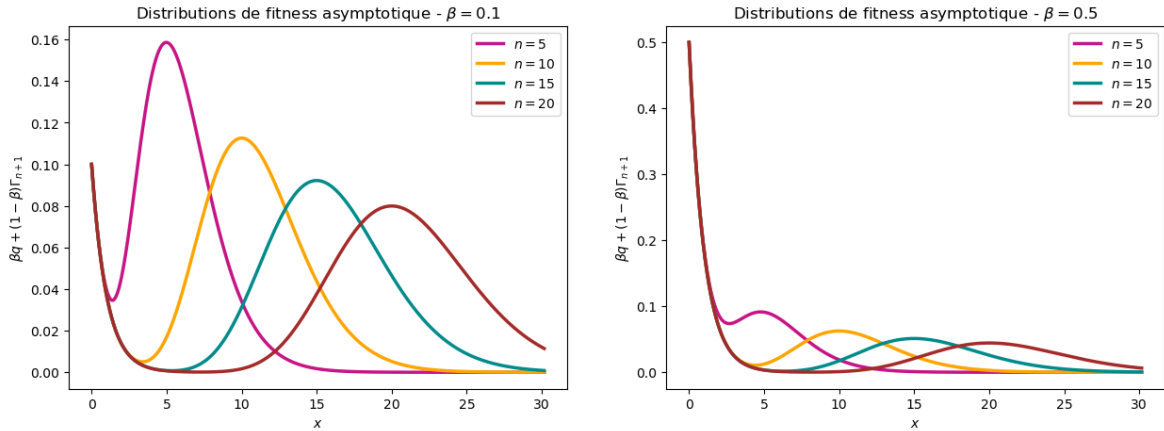


FIGURE 5.2 – Comportement de l'équivalent de la fitness p_n

Ainsi, en présence de mutants dans la population, nous observons l'émergence de deux vagues d'informations. La première vague devient de plus en plus distincte à mesure que n augmente, tandis que la deuxième vague ressemble à celle trouvée dans le cas sans mutants. Cependant, cette deuxième vague perd rapidement de l'importance à mesure que β augmente.

Chapitre 6

Conclusion

En résumé, cette étude approfondie de la dynamique évolutive basée sur le modèle de KINGMAN a éclairé les mécanismes essentiels qui sous-tendent l'évolution des populations biologiques. Grâce à l'analyse minutieuse des moments et des suites de renouvellement, nous avons exploré en détail différents régimes de sélection, du démocratique à l'hégémonique, en examinant comment la distribution de fitness et les viabilités évoluent dans chaque scénario. Cela a permis de mettre en évidence des tendances de convergence vers des équilibres biologiques harmonieux ainsi que des concentrations du pouvoir génétique au sein d'élites.

De plus, en nous penchant sur un cas méritocratique spécifique, nous avons examiné la convergence vers une fitness limite bien connue, suivant une distribution gamma. L'étude approfondie du cas de fitness non bornée a soulevé de nouvelles questions et révélé de nouveaux concepts fascinants.

En somme, cette recherche a enrichi notre compréhension des mécanismes évolutifs en mettant en lumière divers régimes de sélection et en éclairant les relations subtiles entre viabilités, distributions de fitness et moments. Elle souligne l'importance cruciale des outils mathématiques pour explorer et décrypter les phénomènes biologiques complexes, tout en ouvrant la voie à de nouvelles questions captivantes dans le domaine de la biologie évolutive.

En guise d'ouverture vers de nouvelles avenues de recherche, nous avons envisagé de généraliser le résultat obtenu pour la suite de renouvellement $(u_n)_n$ dans le contexte du cas particulier de fitness non bornée en présence de mutations. Le résultat initial que nous avons obtenu se présente comme suit :

Proposition 6.1. *Pour un réel $\alpha > 0$, considérons la suite $(f_n)_n$ définie explicitement comme suit :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n = \alpha n!$$

ainsi que la suite $(u_n)_n$ définie récursivement de la façon suivante :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = f_n + \sum_{k=1}^{n-1} f_k u_{n-k}$$

Alors la suite $(u_n)_n$ peut être développée asymptotiquement de la manière suivante :

$$u_n = \alpha n! (1 + O(n^{-1}))$$

Nous envisageons de généraliser ce résultat sous la forme du théorème suivant :

Théorème 6.2. *Considérons une suite croissante de réels positifs $(f_n)_n$ ainsi que la suite $(u_n)_n$ définie récursivement comme suit :*

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = f_n + \sum_{k=1}^{n-1} f_k u_{n-k}$$

Alors

$$\frac{f_{n-1}}{f_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} f_n$$

Démonstration. Examinons chaque direction de l'équivalence séparément :

- (\Rightarrow) Cette partie est actuellement en cours d'étude et nécessite une investigation approfondie pour établir sa validité.
- (\Leftarrow) Pour la réciproque, partons de l'hypothèse que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} f_n$$

Cela implique que le quotient u_n/f_n tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini. En l'exprimant sous forme d'une somme, nous obtenons :

$$\frac{u_n}{f_n} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f_k u_{n-k}}{f_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Il en résulte que la somme de droite doit converger vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Étant une somme de termes positifs, cela implique en particulier que le dernier terme de cette somme doit tendre vers 0 :

$$\frac{f_{n-1} u_1}{f_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Par conséquent, nous pouvons conclure que le rapport f_{n-1}/f_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

□

Cependant, la démonstration de ce théorème demeure actuellement inachevée et est en cours d'étude, ouvrant la voie à de nouvelles avenues pour des recherches futures.

Annexe A

Convergence de mesures

L'intervalle $I = [0, 1]$, muni de la distance usuelle sur \mathbb{R} , est un espace métrique compact. On le dote de sa tribu borélienne, notée \mathcal{B}_I . De plus, on note \mathcal{P}_I l'ensemble des mesures de probabilité sur (I, \mathcal{B}_I) .

A.1 Convergence faible

Commençons par définir une première notion de convergence, appelée convergence faible, pour les mesures de \mathcal{P}_I , en nous appuyant sur le DICTIONNAIRE DE MATHÉMATIQUES - BIBMATH. Il existe de nombreuses définitions équivalentes de cette convergence, grâce au théorème du porte-manteau pour les mesures. Nous énonçons ici la plus courante d'entre elles.

Définition A.1 (Convergence faible). Soit $(\mu_n)_n$ une suite de mesures de \mathcal{P}_I et μ une autre mesure de cet espace. On dit que $(\mu_n)_n$ converge faiblement vers μ si, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, on a :

$$\int_I f d\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f d\mu$$

En réalité, cette définition est donnée pour les fonctions continues et bornées sur l'espace métrique I . Cependant, étant donné que nous considérons un espace compact dans le cadre de cette étude, la condition de continuité est suffisante.

De plus, à partir de cette convergence, on peut définir sur \mathcal{P}_I une topologie, appelée topologie faible, qui en fait un espace métrique compact (ce qui n'est pas étudié ici).

A.2 Convergence en variation totale

L'espace \mathcal{P}_I est un espace topologique qui peut être équipé de différentes distances. Cependant, en nous appuyant sur WIKIPEDIA - L'ENCYCLOPÉDIE LIBRE, nous définissons une distance spécifique, appelée distance en variation totale, sur cet espace, qui se révèle plus forte que la convergence faible précédemment définie. Pour cela, posons \mathcal{M}_I comme l'ensemble des fonctions mesurables de I dans l'intervalle $[-1, 1]$.

Définition A.2 (Distance en variation totale). Soient μ et ν deux mesures de \mathcal{P}_I . La distance en variation totale entre ces deux mesures est définie comme suit :

$$\|\mu - \nu\|_{VT} = \sup_{f \in \mathcal{M}_I} \left\{ \int_I f d\mu - \int_I f d\nu \right\}$$

Nous pouvons maintenant définir la convergence en variation totale, qui correspond à la convergence sous la distance précédente.

Définition A.3 (Convergence en variation totale). Soit $(\mu_n)_n$ une suite de mesures de \mathcal{P}_I et μ une autre mesure de cet espace. On dit que $(\mu_n)_n$ converge en variation totale vers μ si :

$$\|\mu_n - \mu\|_{VT} = \sup_{f \in \mathcal{M}_I} \left\{ \int_I f d\mu_n - \int_I f d\mu \right\} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

D'après les définitions ci-dessus, nous pouvons en déduire le résultat suivant :

Proposition A.1 (Hiérarchie des convergences). La convergence en variation totale implique la convergence faible.

Démonstration. Soit $(\mu_n)_n$ une suite de mesures de \mathcal{P}_I qui converge en variation totale vers une autre mesure μ de cet espace, et soit f une fonction continue sur I . Supposons, sans perte de généralité, que f est à valeurs dans $[-1, 1]$. Comme toute fonction continue est mesurable, on a $f \in \mathcal{M}_I$. Ainsi, on a directement :

$$\left| \int_I f d\mu_n - \int_I f d\mu \right| \leq \|\mu_n - \mu\|_{VT} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Cela signifie que $(\mu_n)_n$ converge faiblement vers μ .

□

Annexe B

Suites de renouvellement

Nous souhaitons consacrer une annexe aux suites de renouvellement en nous basant sur l'article de KINGMAN intitulé « Powers of Renewal Sequences » pour les concepts généraux, l'article principal pour les propriétés qui seront abordées ultérieurement, et le livre de FELLER pour la théorie exposée. Ces suites faciliteront l'analyse du cas où la fonction méromorphe ne présente pas de pôle.

B.1 Généralités

Commençons par définir ces suites.

Définition B.1 (Suite de renouvellement). Une suite de renouvellement est une suite $(u_n)_n$ définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^n f_k u_{n-k} \quad (\text{B.1})$$

où $(f_n)_n$ est une suite de réels positifs telle que la série de terme général f_n soit convergente et bornée par 1 :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \leq 1$$

Ajoutons une remarque pour mieux comprendre le contexte et les raisons qui ont conduit à l'introduction des suites de renouvellement.

Remarque B.1 (Introduction des suites de renouvellement). Les suites de renouvellement ont été introduites par Feller au XX^e siècle pour étudier les processus de Markov en temps discret. Elles permettent de quantifier les probabilités de retour à un état initial à différents moments. Plus précisément, la valeur u_n représente la probabilité de retour à l'état initial exactement au temps n , tandis que la valeur f_n représente la probabilité de retour pour la première fois au temps n .

Énonçons également une propriété vérifiée par l'ensemble de ces suites.

Remarque B.2 (Ensemble des suites de renouvellement). L'ensemble de toutes ces suites de renouvellement forme un demi-groupe commutatif pour la loi de multiplication, où chaque élément de la suite produit est obtenu en multipliant les éléments correspondants des deux suites.

Dans son article, KINGMAN cherche à étendre cette propriété en montrant que pour toute suite de renouvellement u , la suite u^α est également une suite de renouvellement, où $\alpha > 1$ est un réel.

L'utilisation des suites de renouvellement peut évoquer le concept de régularisation par convolution, qui repose sur l'utilisation d'approximations de l'unité. En effet, la relation de récurrence des suites de renouvellement présente des similitudes avec la convolution discrète. Dans le processus de régularisation par convolution, on combine une fonction d'entrée avec une suite régularisante, qui agit comme une approximation de l'unité. Cette opération permet de lisser et de régulariser la fonction d'entrée en prenant en compte les informations locales de son voisinage.

De manière similaire, les suites de renouvellement combinent les termes précédents en utilisant les coefficients f_k pour générer les termes suivants. Cette procédure peut être interprétée comme une forme de régularisation discrète, où chaque terme de la suite est influencé par les termes précédents selon un schéma spécifique.

B.2 Problème des moments

Le problème des moments en analyse mathématique est un problème inverse qui vise à reconstruire une mesure réelle sur un intervalle donné à partir de ses moments. Plus précisément, étant donnés un intervalle réel I et une suite $(u_n)_n$ de réels, on se demande si une mesure de Borel positive ν existe sur I telle que pour tout entier naturel n :

$$u_n = \int_I x^n \nu(dx)$$

Si une telle mesure existe, elle représente la loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle dont les moments sont donnés par les nombres u_n . Le problème des moments se décline en plusieurs variantes selon la forme de l'intervalle :

- Problème de Hamburger : l'intervalle I est l'ensemble des réels, \mathbb{R}
- Problème de Stieltjes : l'intervalle I est semi-ouvert à droite, $[0, +\infty[$
- Problème de Hausdorff : l'intervalle I est un segment $[a, b]$.

Dans notre étude, nous nous situons dans le cas particulier de la troisième variante, où l'intervalle I est défini comme $I = [0, 1]$. Bien que la démonstration de ce cas puisse être abordée de différentes manières, notre objectif principal ici est différent. Nous souhaitons présenter un théorème qui revêt une importance particulière dans notre étude :

Théorème B.1 (Suites de renouvellement comme moments). *Considérons une mesure borélienne finie μ sur l'intervalle I et sa suite de moments $(f_n)_n$:*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n = \int_0^1 x^n \mu(dx)$$

Supposons que cette dernière satisfasse la condition suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \leq 1, \quad \text{i.e.} \quad \int_0^1 \frac{x}{1-x} \mu(dx) \leq 1$$

Nous introduisons ensuite la suite de renouvellement associée $(u_n)_n$, définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^n f_k u_{n-k}$$

Alors, sous ces conditions, il existe une mesure de probabilité ν sur I telle que $(u_n)_n$ soit sa suite des moments, c'est à dire que :

$$\exists \nu \in \mathcal{P}_I / \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_0^1 x^n \nu(dx)$$

Démonstration. Pour démontrer ce théorème, nous procéderons en deux étapes. La première étape consiste à examiner le cas particulier où la mesure μ est une mesure discrète, tandis que la deuxième étape consiste à généraliser ce résultat au cas continu en prenant la limite du cas discret.

Cas particulier : Supposons que μ soit une mesure discrète dont le support est contenu dans l'intérieur de l'intervalle I . Dans ce cas, on peut exprimer μ comme une somme pondérée de delta de Dirac, c'est-à-dire :

$$\exists N \in \mathbb{N}^*, \exists (a_k)_{1 \leq k \leq N} \in \mathbb{R}_+^N \text{ non tous nuls, } \exists (x_k)_{1 \leq k \leq N} \in \overset{\circ}{I}^N / \quad \mu = \sum_{k=1}^N a_k \delta_{x_k}$$

Les hypothèses du théorème peuvent alors être formulées de la manière suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n = \sum_{k=1}^N a_k x_k^n \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^N \frac{a_k x_k}{1 - x_k} \leq 1 \quad (\text{B.2})$$

En utilisant le lemme d'Abel et le fait que les suites $(f_n)_n$ et $(u_n)_n$ sont bornées par 1, nous pouvons constater que les séries $\sum f_n z^n$ et $\sum u_n z^n$ convergent absolument dans le disque D_0 . Nous définissons donc la fonction U comme suit :

$$U : z \in D_0 \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$$

Pour tout complexe z appartenant au disque D_0 , nous pouvons écrire les égalités suivantes en utilisant le produit de Cauchy :

$$U(z) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n z^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^N f_k u_{n-k} \right) z^n = 1 + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n \right)$$

Cependant, la série génératrice associée à $(f_n)_n$ peut être exprimée comme suit :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^N a_k x_k^n \right) z^n = \sum_{k=1}^N \frac{a_k x_k z}{1 - x_k z}$$

Nous pouvons donc simplifier l'expression précédente en utilisant l'égalité suivante :

$$U(z) = \left[1 - \sum_{k=1}^N \frac{a_k x_k z}{1 - x_k z} \right]^{-1}$$

Ainsi, nous avons réduit le problème à l'étude d'une fonction méromorphe, le dénominateur précédent étant non identiquement nul. Notons cette fonction V et étudions ses pôles. Ces pôles vérifient l'équation suivante :

$$\sum_{k=1}^N \frac{a_k x_k z}{1 - x_k z} = 1 \quad (\text{B.3})$$

En prenant la partie imaginaire de cette équation, nous obtenons :

$$\Im \left(\sum_{k=1}^N \frac{a_k x_k z}{1 - x_k z} \right) = \Im(z) \sum_{k=1}^N \frac{a_k x_k}{|1 - x_k z|^2} = 0$$

Puisque les termes de la somme précédente ne sont pas tous nuls, nous pouvons conclure que les pôles de la fonction V sont réels. Nous pouvons remarquer que la fonction inverse de V est bien définie et strictement décroissante sur l'intervalle $] -\infty, 1]$, et qu'elle est positive en 1 d'après l'équation (B.2). Par conséquent, les potentiels pôles de V se situent de l'autre côté de la droite réelle. De plus, les pôles ne peuvent pas être égaux à l'un des points x_k^{-1} , car la fonction définie par l'équation (B.3) diverge au voisinage de ces points. En dehors de ces points, l'inverse de V est dérivable et sa dérivée vérifie :

$$\left(\frac{1}{V} \right)'(z) = - \sum_{k=1}^N \frac{a_k x_k}{(1 - x_k z)^2} < 0$$

Ainsi, les potentiels pôles de V sont tous simples, et nous les noterons $(\zeta_1, \dots, \zeta_N)$. La fonction V est donc holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{\zeta_1, \dots, \zeta_N\}$. En vertu du théorème de classification des singularités isolées, nous pouvons définir une fonction holomorphe W comme suit :

$$W : z \in \mathbb{C} \setminus \{\zeta_1, \dots, \zeta_N\} \mapsto V(z) - \sum_{k=1}^N \frac{\text{Res}(V, \zeta_k)}{z - \zeta_k}$$

où les résidus sont donnés par :

$$\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad \text{Res}(V, \zeta_k) = \lim_{z \rightarrow \zeta_k} (z - \zeta_k) V(z) = \frac{1}{\left(\frac{1}{V}\right)'(\zeta_k)} = - \left[\sum_{k=1}^N \frac{a_k x_k}{(1 - x_k z)^2} \right]^{-1} < 0$$

La fonction W possède des singularités effaçables en les pôles de V , ce qui implique qu'elle peut être prolongée en une fonction entière unique. De plus, nous avons le résultat suivant :

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |W(z)| = \lim_{|z| \rightarrow +\infty} |V(z)| = \lim_{|z| \rightarrow +\infty} \left| 1 - \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{(x_k z)^{-1} - 1} \right|^{-1} = \left[1 + \sum_{k=1}^N a_k \right]^{-1}$$

Par conséquent, W est une fonction entière bornée, ce qui, d'après le théorème de Liouville, implique qu'elle est constante et égale à sa limite. En posant $b_k = -\text{Res}(V, \zeta_k) > 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, nous pouvons réexprimer la fonction V comme suit :

$$V(z) = \left[1 + \sum_{k=1}^N a_k \right]^{-1} + \sum_{k=1}^N \frac{b_k}{\zeta_k} \frac{1}{1 - z \zeta_k^{-1}}$$

Ainsi, en revenant à l'étude sur le disque D_0 , où les pôles se trouvent à l'extérieur de ce dernier, nous obtenons l'égalité suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n = \left[1 + \sum_{k=1}^N a_k \right]^{-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^N \frac{b_k}{\zeta_k} \left(\frac{1}{\zeta_k} \right)^n \right) z^n$$

En appliquant le principe d'unicité de la décomposition en série entière, nous obtenons les égalités suivantes :

$$\left[1 + \sum_{k=1}^N a_k \right]^{-1} + \sum_{k=1}^N \frac{b_k}{\zeta_k} = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad u_n = \sum_{k=1}^N \frac{b_k}{\zeta_k} \left(\frac{1}{\zeta_k} \right)^n$$

Nous pouvons alors définir la mesure ν comme suit :

$$\nu = \left[1 + \sum_{k=1}^N a_k \right]^{-1} \delta_0 + \sum_{k=1}^N \frac{b_k}{\zeta_k} \delta_{\zeta_k^{-1}}$$

Il est facile de vérifier que ν est une mesure de probabilité, car :

$$\int_0^1 \nu(dx) = \left[1 + \sum_{k=1}^N a_k \right]^{-1} + \sum_{k=1}^N \frac{b_k}{\zeta_k} = 1$$

De plus, la suite $(u_n)_n$ est bien la suite de moments de la mesure ν , car :

$$\forall n \geq 1, \quad \int_0^1 x^n \nu(dx) = \sum_{k=1}^N \frac{b_k}{\zeta_k} \left(\frac{1}{\zeta_k} \right)^n = u_n$$

Cas général : Passons maintenant à l'étude du cas général. Notre objectif est de construire une suite $(f^{(l)})_l$ qui satisfait le cas particulier avec ses suites de renouvellement associées $(u^{(l)})_l$,

convergeant respectivement vers les suites $(f_n)_n$ et $(u_n)_n$ mentionnées dans l'énoncé. Considérons un entier fixé $l \in \mathbb{N}^*$ et définissons les quantités suivantes pour $k \in \llbracket 1, l-1 \rrbracket$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_k^{(l)} = \mu \left(\left[\frac{k}{l}, \frac{k+1}{l} \right] \right), \quad x_k^{(l)} = \frac{k}{l} \quad \text{et} \quad f_n^{(l)} = \sum_{k=1}^{l-1} a_k^{(l)} \left(x_k^{(l)} \right)^n$$

Commençons par montrer que cette suite, ainsi que les suites de renouvellement associées, convergent avant de démontrer qu'elles satisfont le cas particulier. Soient $l, n \in \mathbb{N}^*$. Comme la fonction $x \mapsto x^n$ est croissante sur I , nous pouvons utiliser la comparaison somme-intégrale pour obtenir les inégalités suivantes :

$$\sum_{k=1}^{l-1} \mu \left(\left[\frac{k}{l}, \frac{k+1}{l} \right] \right) \left(\frac{k}{l} \right)^n \leq \int_0^1 x^n \mu(dx) \leq \sum_{k=1}^{l-1} \mu \left(\left[\frac{k}{l}, \frac{k+1}{l} \right] \right) \left(\frac{k+1}{l} \right)^n$$

Cela nous permet d'obtenir les inégalités suivantes :

$$0 \leq f_n - f_n^{(l)} \leq \sum_{k=1}^{l-1} a_k^{(l)} \left(\left(\frac{k+1}{l} \right)^n - \left(\frac{k}{l} \right)^n \right)$$

De plus, la fonction puissance est non seulement croissante, mais aussi continue et dérivable sur I , avec une dérivée bornée par n sur cet intervalle. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, on peut donc écrire :

$$0 \leq f_n - f_n^{(l)} \leq \sum_{k=1}^{l-1} a_k^{(l)} \frac{n}{l} \leq \frac{n}{l} \mu([0, 1]) \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi, par récurrence sur n , nous pouvons conclure que :

$$u_n^{(l)} = \sum_{k=1}^n f_k^{(l)} u_{n-k}^{(l)} \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f_k u_{n-k} = u_n$$

Nous sommes maintenant en mesure de montrer que les suites utilisées satisfont le cas précédent et que la suite limite de renouvellement représente bien une suite de moments d'une mesure de probabilité sur I . Pour un entier fixé $l \in \mathbb{N}^*$, les réels $a_k^{(l)}$ ne sont pas tous nuls, et grâce à la croissance de la fonction $x \mapsto x(1-x)^{-1}$ sur I , nous pouvons à nouveau utiliser une comparaison somme-intégrale pour obtenir l'inégalité (B.2) avec :

$$\sum_{k=1}^{l-1} \frac{a_k^{(l)} x_k^{(l)}}{1 - x_k^{(l)}} \leq \int_0^1 \frac{x}{1-x} \mu(dx) \leq 1$$

Ainsi, il existe une mesure de probabilité $\nu^{(l)}$ sur I telle que $u^{(l)}$ soit la suite de ses moments. Par la première section de l'annexe précédente, nous savons que \mathcal{P}_I est un espace métrique compact pour la topologie faible. Par conséquent, en extrayant éventuellement une sous-suite, la suite $(\nu^{(l)})_l$ converge faiblement vers une mesure $\nu \in \mathcal{P}_I$. En utilisant la continuité de la fonction puissance sur I , nous pouvons conclure, par convergence faible, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \lim_{l \rightarrow +\infty} u_n^{(l)} = \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^n \nu^{(l)}(dx) = \int_0^1 x^n \nu(dx)$$

Cela termine la preuve de ce théorème. □

B.3 Monotonie des suites

Dans cette section de l'annexe, nous étudierons la monotonie des suites de renouvellement et des quotients des termes successifs de ces suites. Ces résultats seront essentiels pour faciliter l'analyse du cas où la fonction méromorphe n'a pas de pôle. Nous utiliserons le théorème précédent pour énoncer le corollaire suivant :

Corollaire B.1.1 (Monotonie des suites de renouvellement). *Sous les hypothèses du théorème précédent, la suite de renouvellement $(u_n)_n$ vérifie les propriétés suivantes :*

- La suite $(u_n)_n$ est décroissante
- La suite des quotients des termes successifs $\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right)_n$ est croissante

Démonstration. Sous les hypothèses du théorème précédent, nous pouvons réécrire la suite de renouvellement comme suit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_0^1 x^n \nu(dx)$$

où ν est une mesure de probabilité sur I .

- La décroissance de la suite $(u_n)_n$ est immédiate. En effet, étant donné que $(x^n)_n$ est une suite décroissante pour tout $x \in I$, il en résulte que $(u_n)_n$ est également décroissante.
- Soit $n \geq 1$ un entier naturel. Pour démontrer que la suite des quotients des termes successifs est croissante, nous commençons par réécrire u_n^2 de manière à faire apparaître le produit des termes précédent et suivant dans la suite :

$$u_n^2 = \left(\int_0^1 x^n \nu(dx) \right)^2 = \left(\int_0^1 \sqrt{x^{n-1}} \sqrt{x^{n+1}} \nu(dx) \right)^2$$

Nous pouvons maintenant appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour isoler les deux termes souhaités :

$$\left(\int_0^1 \sqrt{x^{n-1}} \sqrt{x^{n+1}} \nu(dx) \right)^2 \leq \left(\int_0^1 x^{n-1} \nu(dx) \right) \left(\int_0^1 x^{n+1} \nu(dx) \right)$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

Ce qui démontre la croissance de la suite des quotients des termes successifs. □

Grâce à la démonstration de ces résultats, nous pouvons conclure que la suite des quotients des termes successifs est convergente. En effet, cette suite est croissante et majorée par 1, étant donné que la suite $(u_n)_n$ est décroissante. Par conséquent, sa limite peut être égale à 1 ou à un réel $\sigma < 1$. Cette distinction de cas sera essentielle dans notre étude des régimes non-démocratiques.

B.4 Théorie du renouvellement

En complément, nous introduisons une dernière partie basée sur la théorie du renouvellement présentée dans le livre de FELLER sur les probabilités. L'équation précédemment présentée peut être reformulée de manière plus générale. À partir de deux suites données, nous pouvons définir de manière unique une troisième suite par récurrence, quelle que soit la situation, à travers une équation connue sous le nom d'équation de renouvellement.

Définition B.2 (Équation de renouvellement). *Considérons deux suites de nombres réels $(f_n)_n$ et $(m_n)_n$. Nous définissons de manière unique la suite $(v_n)_n$ en utilisant la relation de récurrence suivante :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = m_n + \sum_{k=1}^{n-1} f_k v_{n-k} \tag{B.4}$$

Cette relation est connue sous le nom d'équation de renouvellement.

Pour faciliter l'utilisation de cette définition dans différentes situations, nous souhaitons maintenant l'adapter en utilisant des séries génératrices. La proposition suivante énonce une relation entre des séries qui est équivalente à notre définition.

Proposition B.2 (Séries génératrices associées). *Supposons que nous avons deux suites de nombres réels positifs $(f_n)_n$ et $(m_n)_n$ qui satisfont les conditions suivantes :*

$$\sum_{n \geq 1} f_n < +\infty \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} m_n < +\infty$$

Dans ce cas, les séries génératrices F et M , associées à ces suites, convergent dans le disque D_0 et définissent une nouvelle fonction développable en série entière, notée V , qui converge également dans ce disque, à condition que D_0 soit stable par F . De plus, ces séries sont liées par l'équation suivante :

$$\forall z \in D_0, \quad V(z) = \frac{M(z)}{1 - F(z)}$$

Démonstration. Sous les hypothèses de convergence, nous pouvons déduire que les suites $(f_n)_n$ et $(m_n)_n$ convergent vers 0, ce qui implique qu'elles sont bornées. Par conséquent, selon le lemme d'Abel, leurs séries génératrices sont bien définies. De même, on peut conclure que la suite $(v_n)_n$ satisfait également cette propriété.

Prenons maintenant $z \in D_0$. En utilisant le produit de Cauchy de manière similaire à celle utilisée lors du traitement de la série génératrice associée au produit des viabilités, nous pouvons établir les égalités suivantes en utilisant l'équation (B.4) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} m_n z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} f_k v_{n-k} z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} m_n z^n + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n z^n \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n z^n \right)$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\left(1 - \sum_{n=1}^{+\infty} f_n z^n \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n z^n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} m_n z^n$$

Et grâce à la stabilité du disque ouvert D_0 par F , nous pouvons conclure. □

Cette proposition, initialement présentée comme une remarque valable sur le disque unité ouvert, peut être étendue à la valeur 1 pour obtenir un résultat direct découlant de la définition. C'est ce que nous énonçons dans le théorème suivant.

Théorème B.3 (Théorème de renouvellement). *Supposons que nous ayons deux suites de nombres réels positifs $(f_n)_n$ et $(m_n)_n$ qui satisfont les conditions suivantes :*

$$\sum_{n \geq 1} f_n < +\infty \text{ de somme } f \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} m_n < +\infty \text{ de somme } m$$

Supposons que $f < 1$. Alors la suite $(v_n)_n$ définie par l'équation de renouvellement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = m_n + \sum_{k=1}^{n-1} f_k v_{n-k}$$

converge vers 0. De plus, elle est le terme général d'une série convergente dont la somme est v , et cette série satisfait l'équation suivante :

$$v = \frac{m}{1 - f}$$

Ce théorème, formulé à l'origine par FELLER, est en réalité plus étendu, car il traite de tous les cas de valeurs de f . Cependant, dans notre étude, nous nous sommes limités à ce cas spécifique, car c'est le seul que nous utiliserons. La démonstration de cette version simplifiée est identique à celle de la proposition précédente. Nous partons de l'équation de renouvellement et appliquons le produit de Cauchy pour parvenir au résultat.

Annexe C

Suites de renouvellement généralisées

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié les suites de renouvellement, mais elles présentent certaines limitations, notamment la contrainte selon laquelle la série de terme général f_n doit être bornée par 1. Afin de dépasser cette restriction, nous allons explorer une généralisation de ces suites en nous appuyant principalement sur l'article intitulé « Semi-p-Functions » de KINGMAN, ainsi que sur l'article de KALUZA pour l'énoncé d'un théorème et un chapitre du livre de ZUCKER pour des remarques philosophiques dans la troisième section. Nous utiliserons ensuite ces suites généralisées dans notre étude des fitness non bornées.

Dans l'anneau commutatif $(\mathbb{R}, +, \times)$, nous pouvons définir les séries formelles à coefficients réels. Ainsi, une suite $(u_n)_n$ peut également être écrite sous la forme suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n X^n \in \mathbb{R}[[X]] \quad \text{ou} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$$

Nous utiliserons cette dernière notation pour simplifier et se rapprocher de l'écriture des séries entières (lorsqu'elles sont définies).

C.1 Première approche

Considérons une suite de réels $(u_n)_n$ avec $u_0 = 1$. Notons

$$U = \sum_{n \geq 0} u_n X^n$$

Alors $-U$ est inversible, avec inverse

$$V = - \sum_{n \geq 0} (1 - U)^n = -U^{-1}$$

Définissons également $F = 1 + V$, en retirant le terme constant de V .

Maintenant, définissons la suite $(f_n)_n$ comme les coefficients de la série formelle V . Ainsi, chaque f_n est un polynôme $\phi_n(u)$ en u_1, \dots, u_n , et réciproquement, chaque u_n est un polynôme en f_1, \dots, f_n . Le lien entre ces deux suites est décrit par la proposition suivante :

Proposition C.1 (Équations de renouvellement). *Les équations de renouvellement ci-dessous décrivent la relation récursive entre les termes des deux suites :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = f_n + \sum_{k=1}^{n-1} f_k u_{n-k} \quad \text{et} \quad f_n = u_n - \sum_{k=1}^{n-1} u_k f_{n-k} = \phi_n(u) \quad (\text{C.1})$$

Démonstration. En utilisant l'introduction des séries formelles, la preuve de cette proposition s'effectue immédiatement par le produit de Cauchy. En observant les relations

$$UV = -1 \quad \text{et} \quad F = 1 + V \quad \implies \quad U - 1 = FU$$

nous pouvons déduire que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n X^n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n X^n \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n X^n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n f_k u_{n-k} \right) X^n$$

Ainsi, nous obtenons les équations (C.1), qui sont clairement équivalentes. □

La proposition précédente nous permet de calculer les valeurs de u_n et f_n pour tout entier naturel $n \geq 1$. Cependant, nous faisons la remarque suivante :

Remarque C.1 (Premiers termes). *En utilisant la donnée initiale pour u_0 et la définition de V pour f_0 , nous avons :*

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad f_0 = -1$$

Cependant, dans la pratique, le premier terme de la suite $(f_n)_n$ est rarement utilisé.

Reprenons la définition des suites de renouvellement en utilisant les polynômes ϕ_n mentionnés précédemment.

Définition C.1 (Suite de renouvellement). *Une suite de réels $(u_n)_n$ avec $u_0 = 1$ est une suite de renouvellement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \phi_n(u) \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n(u) \leq 1$$

Nous noterons \mathcal{SDR} l'ensemble de ces suites, ainsi que pour abrégé le terme.

La deuxième hypothèse de la définition précédente est spécifique et peut ne pas toujours être réalisable. Nous pouvons donc définir un nouveau type de suite comme suit :

Définition C.2 (Suite de renouvellement généralisée). *Une suite de réels $(u_n)_n$ avec $u_0 = 1$ est une suite de renouvellement généralisée si la condition suivante est satisfaite :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \phi_n(u) \geq 0$$

Nous noterons \mathcal{SDRG} l'ensemble de ces suites, ainsi que pour abrégé le terme.

Par conséquent, la remarque B.1, qui illustre l'interprétation des suites de renouvellement selon Feller, n'est plus valable dans ce contexte. Cependant, il est encore pertinent de se demander dans quels cas une suite peut être considérée comme une suite de renouvellement généralisée. KALUZA a énoncé une première condition suffisante dans le théorème suivant, tandis que d'autres cas seront présentés ultérieurement.

Théorème C.2 (de Kaluza). Soit $(u_n)_n$ une suite de réels de premier terme $u_0 = 1$, où le second terme est strictement positif, et la suite des quotients de ses termes successifs est croissante :

$$u_1 > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \begin{array}{cc} u_{n-1} & u_n \\ u_n & u_{n+1} \end{array} \right| \geq 0$$

Dans ce cas, les coefficients de la série formelle F sont tous positifs :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n \geq 0$$

Démonstration. La preuve de ce théorème repose sur des récurrences de types différents, qui sont toutes assez directes. Voici les étapes détaillées de la preuve :

1° Premièrement, on montre par récurrence double que $u_n > 0$ pour tout entier naturel n . On utilise la donnée initiale $u_0 = 1$ et la condition $u_1 > 0$. On peut écrire l'hérédité comme suit :

$$u_{n+2} \geq \frac{u_{n+1}^2}{u_n} > 0$$

2° Deuxièmement, on reformule la condition de croissance des quotients des termes successifs :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \frac{u_{n-k+1}}{u_{n-k}} \geq \dots \geq \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

3° En utilisant les deux résultats précédents, on effectue une autre récurrence pour établir le résultat du théorème. On commence par remarquer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a les équations suivantes :

$$\begin{cases} 0 &= u_n - \sum_{k=1}^n f_k u_{n-k} & (1) \\ f_{n+1} &= u_{n+1} - \sum_{k=1}^n f_k u_{n+1-k} & (2) \end{cases}$$

En combinant linéairement les deux équations, on obtient :

$$-u_{n+1} \times (1) + u_n \times (2) \implies u_n f_{n+1} = \sum_{k=1}^n f_k (u_{n-k} u_{n+1} - u_{n-k+1} u_n)$$

Cela nous permet d'écrire la relation récurrente suivante :

$$f_{n+1} = \frac{1}{u_n} \sum_{k=1}^n f_k \left| \begin{array}{cc} u_{n-k} & u_{n-k+1} \\ u_n & u_{n+1} \end{array} \right|$$

En utilisant une récurrence forte combinée avec les deux résultats précédents, nous pouvons conclure cette preuve. □

Ensuite, nous envisageons l'étude des relations entre les deux types de suites, dans le but d'utiliser éventuellement des résultats préexistants. Cette idée est développée dans la section suivante.

C.2 Relation avec les suites de renouvellement

Malgré la relation évidente entre les définitions, examinons quelques propriétés qui relient les suites de renouvellement généralisées et ordinaires. La proposition suivante expose un lien initial relativement simple.

Proposition C.3 (Particularisation des suites). Considérons $(u_n)_n \in \mathcal{SDRG}$, alors nous avons l'équivalence suivante :

$$(u_n)_n \in \mathcal{SDR} \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq 1$$

Démonstration. Montrons les deux sens de l'équivalence, le premier étant relativement direct.

(\Rightarrow) Grâce à l'équation (C.1), ce premier sens peut être démontré rapidement par récurrence forte. L'initialisation est donnée par définition, et l'hérédité est établie comme suit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^n f_k u_{n-k} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} f_k \leq 1$$

(\Leftarrow) Pour le sens réciproque, remarquons que la suite de termes généraux $f_n = \phi_n(u)$ est positive par définition, et par une récurrence précédemment évoquée dans notre étude générale, la suite $(u_n)_n$ est également positive. Ainsi, grâce à l'équation (C.1), nous obtenons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq f_n \leq u_n \leq 1$$

Par conséquent, les séries formelles définies dans la section précédente peuvent être considérées comme des séries entières convergeant sur le disque D_0 . Ainsi, pour tout $z \in [0, 1[$, nous avons :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n z^n = 1 - \left[\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n \right]^{-1} \implies \sum_{n=1}^{+\infty} f_n z^n \leq 1$$

Et par continuité, nous obtenons finalement :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \leq 1$$

□

Remarquons ensuite, à travers le lemme suivant, que l'application d'un décalage particulier sur une suite de renouvellement généralisée conserve la propriété de suite de renouvellement généralisée.

Lemme C.4 (Stabilité). *Soit $(u_n)_n$ une suite de réels avec $u_0 = 1$ et $b \geq 0$ un réel. Définissons $(v_n)_n$ comme une suite de réels en utilisant la relation suivante :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_n b^n$$

Nous pouvons énoncer le résultat suivant :

$$(u_n)_n \in \mathcal{SDRG} \iff (v_n)_n \in \mathcal{SDRG}$$

Démonstration. La preuve de ce lemme repose sur une observation simple. En utilisant l'écriture des séries formelles associées, nous avons :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n(v) X^n = 1 - \left[\sum_{n=0}^{+\infty} u_n b^n X^n \right]^{-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n(u) (bX)^n$$

Ainsi, les polynômes ϕ_n appliqués aux suites vérifient la même relation que ces dernières :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \phi_n(v) = \phi_n(u) b^n$$

Cela confirme le résultat du lemme.

□

Ainsi, si nous supposons avoir un réel $c \geq 0$ et une suite $(u_n)_n \in \mathcal{SDRG}$ vérifiant la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq c^n \tag{C.2}$$

alors le lemme précédent combiné à la proposition précédente nous indique que si nous posons $b = c^{-1}$, la suite $(v_n)_n$ définie par la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_n b^n \leq 1$$

définit une suite de renouvellement. Ainsi, ces suites de renouvellement généralisées particulières ne sont pas si différentes des suites de renouvellement ordinaires. Une petite particularisation permet de passer d'un type à l'autre.

Dans le cas contraire, si notre suite de renouvellement généralisée croît tellement rapidement que l'inégalité (C.2) devient impossible pour tout réel positif c , alors nous sommes confrontés à un problème. Cependant, il s'agit en réalité d'un "faux problème". Les parties finies de telles suites ne présentent aucun nouveau phénomène, comme le montre le résultat suivant :

Théorème C.5 (Particularisation partielle). *Soit $(u_n)_n$ une suite de réels de premier terme $u_0 = 1$. L'équivalence suivante est vérifiée :*

$$(u_n)_n \in \mathcal{SDRG} \iff \forall N \geq 1, \exists (v_n)_n \in \mathcal{SDR}, \exists c \geq 0 / \forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket, u_n = v_n c^n$$

Démonstration. Montrons chacun des sens de l'équivalence un par un.

(\Rightarrow) Pour démontrer l'existence des deux éléments, construisons-les. Soit un entier naturel $N \geq 1$. Choisissons un réel $c \geq 0$ suffisamment grand pour satisfaire l'inégalité suivante :

$$\sum_{n=1}^N \phi_n(u) c^{-n} \leq 1$$

De plus, définissons $(v_n)_n$ comme une suite de renouvellement vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \phi_n(v) = \begin{cases} \phi_n(u) c^{-n} & \text{si } n \leq N \\ 0 & \text{si } n > N \end{cases}$$

Ensuite, la relation $\bar{u}_n = v^n c^n$ pour tout entier naturel n définit une suite vérifiant

$$\forall n \leq N, \quad \phi_n(\bar{u}) = \phi_n(v) c^n = \phi_n(u)$$

Ainsi, pour tout $n \leq N$, nous avons $\bar{u}_n = u_n$.

(\Leftarrow) Pour la réciproque, considérons un entier naturel $N \geq 1$. Nous disposons de $(v_n)_n \in \mathcal{SDR}$ et $c \geq 0$ tels que :

$$\forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad \phi_n(u) = \phi_n(v) c^n \geq 0$$

Cette égalité est vérifiée car pour un n donné, $\phi_n(u)$ ne dépend que des valeurs de u_1, \dots, u_n . Puisque cette relation est vraie pour tout entier $N \geq 1$, nous pouvons en déduire que l'inégalité ci-dessus est vérifiée pour tout entier naturel $n \geq 1$. □

Nous venons de constater que les suites de renouvellement généralisées diffèrent significativement des suites de renouvellement uniquement lorsqu'elles croissent plus rapidement que toute progression géométrique. Nous examinerons donc les deux cas dans la section suivante.

C.3 Sauvagerie et domesticité

L'hypothèse (C.2) introduite précédemment revêt une importance particulière et nous permet de diviser notre étude des suites de renouvellement généralisées en deux cas distincts.

L'une des distinctions les plus fondamentales et courantes que l'on trouve dans les textes concerne la différenciation entre les animaux sauvages et les animaux domestiques. KINGMAN, après avoir établi un parallèle avec les régimes politiques dans son étude précédente, utilise également cette distinction. Ces deux classes d'animaux sont familières à chacun d'entre nous, et c'est pourquoi l'auteur les utilise dans la définition suivante :

Définition C.3 (Classes de SDRG). Soit $(u_n)_n$ une suite de renouvellement généralisée. On dit que :

$$(u_n)_n \text{ est } \underline{\text{apprivoisée}} \iff \exists c \geq 0 / \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq c^n$$

et dans le cas contraire :

$$(u_n)_n \text{ est } \underline{\text{sauvage}} \iff \forall c \geq 0 / \exists n \in \mathbb{N}^*, u_n > c^n$$

Essayons de mettre en relation les suites de KINGMAN avec les termes liés aux animaux en utilisant la remarque suivante :

Remarque C.2. Dans le domaine animalier, un animal sauvage est généralement considéré comme vivant en liberté, indépendant et suivant ses propres règles et instincts. En revanche, un animal domestique est habitué à la proximité et à l'influence humaine, ce qui le rend plus prévisible et soumis à un certain degré de contrôle.

De manière similaire, les suites de renouvellement généralisées peuvent présenter des comportements différents. Une suite est qualifiée d'"apprivoisée" si ses termes croissent de manière limitée, en suivant une progression géométrique avec un facteur limité. Cela implique une certaine régularité et une prédictibilité dans la croissance des termes de la suite. En revanche, une suite est qualifiée de "sauvage" si ses termes croissent plus rapidement que toute progression géométrique, ce qui rend leur comportement moins prévisible et potentiellement plus chaotique.

Ainsi, en utilisant les termes "sauvage" et "apprivoisée" pour décrire les suites de renouvellement généralisées, KINGMAN cherche à établir une analogie avec la distinction entre des comportements plus réguliers et prévisibles (analogues aux animaux domestiques) et des comportements plus erratiques et imprévisibles (analogues aux animaux sauvages). Cette analogie permet de mieux appréhender les caractéristiques et les propriétés des suites étudiées.

Ce qui est remarquable, c'est que le terme "sauvagerie" n'est pas un terme technique spécifique à un groupe de spécialistes, contrairement à de nombreux autres termes. Il s'agit d'une catégorie largement comprise. Cette catégorie, d'une pertinence universelle et adaptable, est présente dans les poèmes homériques, les textes médicaux d'Hippocrate, les écrits philosophiques de Platon, les études biologiques d'Aristote et les textes théologiques de Philon.

Concentrons nous sur le point de vue d'Aristote en raison de la nature de notre sujet d'étude. Les Problèmes aristotéliens établissent une analogie entre l'apprivoisement des animaux et l'éducation des enfants, où il est soutenu que l'animal sauvage est à l'animal apprivoisé ce que l'enfant est à l'adulte. Le philosophe grec de l'Antiquité distingue en réalité trois catégories d'animaux en termes de sauvagerie : les animaux sauvages par nature, les animaux domestiquables et les animaux domestiques. Cependant, on peut également considérer que toutes les espèces apprivoisées sont également sauvages. Selon Aristote, l'état sauvage est le seul état naturel pour un animal, et tous les animaux domestiques ont une forme sauvage.

La dernière proposition de la section précédente affirme que chaque suite sauvage concorde sur n'importe quel intervalle fini avec une suite apprivoisée. Ainsi, les résultats mathématiques présentés sont en accord avec les commentaires philosophiques énoncés. Nous pouvons donc utiliser cette théorie pour étudier une vaste famille de suites de renouvellement généralisées, comme le démontre le théorème suivant.

Théorème C.6. Soit $(u_n)_n$ une suite de réels strictement positifs et de premier terme égal à 1 :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$$

telle que la suite des quotients de ses termes successifs $(r_n)_n$ soit croissante, définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

Alors $(u_n)_n$ est une suite de renouvellement généralisée. De plus,

$$(u_n)_n \text{ est apprivoisée} \iff r = \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n < +\infty$$

Démonstration. Soit un entier naturel $N \geq 1$ et posons $c = r_N > 0$. Définissons une suite $(v_n)_n$ comme suit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \begin{cases} u_n c^{-n} & \text{si } n \leq N \\ u_N c^{-N} & \text{si } n > N \end{cases}$$

Puisque $(r_n)_n$ est croissante, on observe que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < v_n \leq 1 = v_0$$

En utilisant le même raisonnement, combiné au fait que :

$$u_N \leq c u_{N-1} \implies v_{N+1} v_{N-1} = u_N c^{-N} u_{N-1} c^{-N+1} \geq u_N^2 c^{-2N} = v_N^2$$

pour le cas intermédiaire, on remarque que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} v_{n-1} \geq v_n^2$$

Ainsi, le théorème de Kaluza nous garantit que $(v_n)_n$ est une suite de renouvellement généralisée, et la proposition C.3 nous assure qu'elle est en fait une suite de renouvellement ordinaire. Puisque le choix de N est arbitraire, le théorème C.5 nous permet de conclure que $(u_n)_n$ est également une suite de renouvellement généralisée.

Notons, par abus de notation, $r = \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n$ la limite de la suite des quotients des termes successifs de $(u_n)_n$, qu'elle soit finie ou non. Ainsi, pour tout entier naturel n , nous avons $u_n \leq r^n$, ce qui nous permet d'écrire :

$$\exists c \geq 0 / \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq c^n \iff r \leq c$$

Cette conclusion achève la preuve du théorème. □

Ainsi, nous avons démontré un théorème puissant permettant de décrire une famille de suites de renouvellement généralisées. Toutefois, dans la pratique, nous nous limitons généralement à la deuxième partie de la conclusion du théorème concernant les suites de renouvellement généralisées dont la suite des quotients des termes successifs est croissante. Nous allons caractériser certaines de ces suites dans la section suivante.

C.4 Problème des moments et monotonie

En utilisant les concepts et les résultats du chapitre sur les suites de renouvellement, nous pouvons exprimer les suites de renouvellement généralisées en termes de moments afin de déterminer la croissance des suites des quotients des termes successifs qui leur sont associées.

Théorème C.7 (Suites de renouvellement généralisées comme moments). *Considérons une mesure borélienne finie μ définie sur l'ensemble des réels positifs \mathbb{R}_+ . Pour cette mesure, définissons sa suite de moments $(f_n)_n$ de la manière suivante :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n = \int_0^{+\infty} x^n \mu(dx)$$

Ensuite, nous introduisons la suite de renouvellement généralisée associée $(u_n)_n$, définie comme suit :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = f_n + \sum_{k=1}^{n-1} f_k u_{n-k}$$

Alors, il existe une mesure de probabilité ν définie sur l'ensemble des réels positifs \mathbb{R}_+ telle que $(u_n)_n$ soit sa suite de moments, c'est-à-dire :

$$\exists \nu \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}_+} / \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_0^{+\infty} x^n \nu(dx)$$

Démonstration. Pour démontrer ce théorème, nous suivrons une approche similaire à celle utilisée pour les suites de renouvellement ordinaires, en divisant la démonstration en deux étapes. La première étape consiste à examiner le cas particulier où la mesure μ a un support dans un intervalle fini, tandis que la deuxième étape généralise ce résultat au cas où le support n'est pas borné, en prenant la limite du cas particulier.

Cas particulier : Supposons que μ a un support inclus dans l'intervalle $[0, A]$, où $A > 1$ est un réel suffisamment grand. Dans ce cas, les moments f_n peuvent être exprimés comme suit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n = \int_0^A x^n \mu(dx)$$

On peut alors choisir un réel α suffisamment petit tel que $\alpha < A^{-1}$ et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \alpha^n \leq 1$$

Par exemple, nous pouvons prendre $\alpha = (f_1 + A)^{-1}$. Ainsi, si $(u_n)_n$ est la suite de renouvellement généralisée associée à $(f_n)_n$, alors $(u_n \alpha^n)_n$ est la suite de renouvellement associée à $(f_n \alpha^n)_n$. En appliquant le théorème B.1 qui exprime les suites de renouvellement comme moments, et en effectuant des renormalisations si nécessaire, nous obtenons que $(u_n)_n$ est la suite des moments d'une mesure de probabilité ν sur l'intervalle $]0, \alpha^{-1}]$.

Cas général : Pour traiter le cas général, nous nous appuyons sur l'observation que dans le contexte des suites de renouvellement, nous pouvons définir une suite $(f^{(l)})_l$ qui satisfait le cas particulier précédent, avec ses suites de renouvellement généralisées correspondantes $(u^{(l)})_l$ convergent respectivement vers les suites $(f_n)_n$ et $(u_n)_n$ mentionnées dans l'énoncé. Pour tout $l \in \mathbb{N}^*$, nous définissons la suite $f^{(l)}$ comme suit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n^{(l)} = \int_0^l x^n \mu(dx)$$

Cette suite satisfait les conditions du cas particulier, et grâce à la convergence dominée, nous pouvons établir que $(f^{(l)})_l$ converge vers $(f_n)_n$. Cette convergence s'étend également aux suites de renouvellement généralisées par récurrence.

Pour prouver que la limite $(u_n)_n$ représente effectivement une suite de moments d'une mesure de probabilités, nous notons que \mathbb{R}_+ est un espace métrique dans lequel les boules fermées sont compactes. Par conséquent, notre argument de convergence faible reste valide lorsqu'il est appliqué à l'espace des mesures de probabilités sur \mathbb{R}_+ . Cela conclut la démonstration du théorème. \square

Il convient de mentionner que ce résultat est bien connu, mais il est tout de même présenté dans l'article intitulé « Compacité faible de l'ensemble des probabilités » de BUZZI, au cas où une référence supplémentaire serait nécessaire.

En conséquence de ce théorème, nous sommes en mesure d'étudier la suite des quotients des termes successifs des suites de renouvellement généralisées. Étant donné que la preuve est identique à celle du cas ordinaire, nous pouvons énoncer le corollaire suivant sans démonstration :

Corollaire C.7.1 (Monotonie). *Sous les hypothèses du théorème précédent, la suite des quotients des termes successifs de la suite de renouvellement généralisée $\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right)_n$ est croissante.*

Contrairement aux suites de renouvellement, où l'on peut déduire directement un intervalle où se situe la limite potentielle, dans le cas des suites de renouvellement généralisées, nous n'avons pas d'informations sur la monotonie. Ainsi, il faut traiter chaque cas individuellement pour déterminer l'intervalle où se situe éventuellement la limite. Cependant, de manière générale, la suite des quotients diverge.

Annexe D

Approche probabiliste

Dans ce quatrième chapitre de l'annexe, nous adoptons une perspective probabiliste pour réexaminer l'équation (2.3), qui décrit la distribution de fitness. Reprenons dès le début de notre étude cette équation et étudions-la sous l'angle de la probabilité. Nous nous rappelons que nous avons initialement :

$$p_n(dx) = \beta \sum_{k=0}^{n-1} \frac{W_{n-k}}{W_n} (1-\beta)^k x^k q(dx) + \frac{1}{W_n} (1-\beta)^n x^n p_0(dx) = \beta \sum_{k=0}^{n-1} \frac{v_{n-k}}{v_n} x^k q(dx) + \frac{1}{v_n} (1-\beta) x^n p_0(dx)$$

Pour atteindre notre objectif, nous introduisons les quantités suivantes :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \theta_{k,n} = \beta \frac{v_{n-k}}{v_n} \mu_k \quad \text{et} \quad \theta_{n,n} = (1-\beta) \frac{1}{v_n} m_n$$

De plus, nous définissons les mesures de probabilités suivantes :

$$\forall k \in \mathbb{N}, q_k(dx) = \frac{x^k q(dx)}{\mu_k} \quad \text{et} \quad p_{0,n}(dx) = \frac{x^n p_0(dx)}{m_n}$$

En utilisant ces nouvelles définitions, nous pouvons établir une probabilité sur l'ensemble $\llbracket 0, n \rrbracket$. Pour ce faire, nous introduisons une variable aléatoire T_n telle que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}(T_n = k) = \theta_{k,n}$$

Cette formulation de la probabilité nous permet de satisfaire la condition de normalisation :

$$\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(T_n = k) = \sum_{k=0}^n \theta_{k,n} = 1$$

Cette approche probabiliste nous ouvre ainsi de nouvelles perspectives pour appréhender la distribution de fitness et pour explorer ses propriétés fondamentales.

D.1 Exploration du cas particulier de fitness non bornée

Revenons au cinquième chapitre où nous avons approfondi notre analyse en considérant la dynamique évolutive avec une fitness non bornée, notamment en étudiant les distributions initiales exponentielles. Grâce à notre nouvelle perspective probabiliste, nous pouvons désormais mettre en lumière une observation intéressante. Il devient évident que le théorème final 5.11, qui traite de la fitness asymptotique, pouvait être anticipé et démontré à l'aide de notre nouvelle équation :

$$p_n(dx) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(T_n = k) q_k(dx) + \mathbb{P}(T_n = n) p_{0,n}(dx)$$

En nous remémorant que nous avons

$$m_n = \mu_n = n! \quad \text{et} \quad v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n!$$

Nous pouvons conclure que le résultat découle naturellement de l'observation suivante :

$$\mathbb{P}(T_n = 0) = \beta, \mathbb{P}(T_n = 1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\beta}{n}, \dots, \mathbb{P}(T_n = n-1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\beta}{n}, \mathbb{P}(T_n = n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \beta$$

Cette analyse illustre comment notre approche probabiliste enrichit notre compréhension du comportement asymptotique dans le contexte de la fitness non bornée, ouvrant la voie à une meilleure appréciation des mécanismes sous-jacents qui régissent l'évolution des populations.

D.2 Exemple significatif : trajectoire ascendante des viabilités

Dans cette section, nous allons examiner en détail un cas particulier associé à une distribution initiale p_0 inhabituelle. Pour ce faire, considérons les valeurs suivantes :

$$p_0 = \delta_0 \quad \text{et} \quad p_1 = \beta q + (1 - \beta)\delta_0$$

Sous ces hypothèses, pour tout entier $n \geq 2$, la formule explicite de p_n se simplifie en :

$$p_n(dx) = \sum_{k=0}^{n-1} \theta_{k,n} q_k(dx)$$

où :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad \theta_{k,n} = \beta \frac{(1 - \beta)^k}{w_{n-1} \dots w_{n-k}} \mu_k \quad \text{et} \quad q_k(dx) = \frac{x^k q(dx)}{\mu_k}$$

Nous entreprendrons alors une étude approfondie de la suite des viabilités $(w_n)_n$ dans ce contexte spécifique. Pour faciliter la compréhension et la réalisation de cette analyse, nous commencerons par une sous-section préliminaire sur l'ordre stochastique. Les résultats présentés dans cette section sont attribuables au travail de Camille Coron, maître de conférences au Laboratoire de Mathématiques d'Orsay.

D.2.1 Une relation d'ordre pertinente

Dans cette sous-section, nous nous attardons sur une nouvelle relation d'ordre qui revêt une signification particulière dans notre étude. Nous commençons par définir cette relation de manière formelle.

Définition-Proposition D.1 (Ordre stochastique). *Soit \preceq la relation définie sur l'ensemble \mathcal{P}_I des mesures de probabilités sur I par :*

$$\forall p, q \in \mathcal{P}_I, \quad p \preceq q \iff \int_0^1 xp(dx) \leq \int_0^1 xq(dx)$$

La relation \preceq est alors une relation d'ordre particulière, appelée ordre stochastique.

Démonstration. La démonstration de ce résultat s'inscrit dans une démarche classique. La réflexivité et la transitivité de la relation se manifestent de manière évidente, tandis que son caractère antisymétrique découle du théorème de représentation de Riesz. □

Utilisons à présent cette définition pour déduire un résultat significatif. En réalité, (\mathcal{P}_I, \preceq) forme un ensemble partiellement ordonné. Un exemple de mesures comparables peut être mis en évidence grâce à la proposition suivante :

Proposition D.1 (Croissance stochastique). *La suite de mesures de probabilités $(q_k)_k$ présente une croissance selon l'ordre stochastique.*

Démonstration. La démonstration de ce résultat n'est pas particulièrement complexe. Soit k un nombre naturel. L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous indique que :

$$\left[\int_0^1 x q_k(dx) \right]^2 \leq \int_0^1 x^2 q_k(dx)$$

Par conséquent, nous en déduisons que :

$$\int_0^1 x q_k(dx) \leq \int_0^1 x \frac{x q_k(dx)}{\int_0^1 y q_k(dy)} = \int_0^1 x q_{k+1}(dx)$$

Cette observation nous permet de conclure la démonstration de la proposition. □

D.2.2 Évolution ascendante des viabilités

Plongeons-nous à présent dans l'étude de la trajectoire de la suite des viabilités, en présentant le théorème central qui la régit. Avant d'en arriver là, observons que la croissance stochastique des mesures de probabilités $(q_k)_k$ est en réalité équivalente à la croissance ordinaire de la suite des quotients des termes successifs $(\mu_{k+1}/\mu_k)_k$. Par conséquent, puisque $(\mu_n)_n$ forme une séquence de moments, il aurait été possible d'éviter la sous-section précédente, présentée de manière anecdotique, en démontrant ce résultat comme en annexe B. Cette constatation nous permet d'énoncer le théorème suivant :

Théorème D.2 (de Coron). *Supposons que les distributions initiales sont définies par :*

$$p_0 = \delta_0 \quad \text{et} \quad p_1 = \beta q + (1 - \beta)\delta_0$$

où q est une mesure de probabilité sur l'intervalle $I = [0, 1]$. Dans ce contexte, la suite des viabilités $(w_n)_n$ présente une trajectoire croissante selon l'ordre usuel.

Démonstration. Considérons $n \geq 1$ comme un entier naturel et introduisons la proposition $A(n)$ définie comme suit :

$$w_{n-1} \leq w_n$$

Démontrons cette proposition par récurrence forte sur n , en commençant par l'initialisation pour les deux premiers termes.

Initialisation : Pour $1 \leq n \leq 2$, il est évident que :

$$w_1 = \int_0^1 \beta x q(dx) \geq 0 = w_0 \quad \text{et} \quad w_2 = \int_0^1 x [\beta q(dx) + \theta_{1,2} q_1(dx)] \geq w_1$$

Par conséquent, les propriétés $A(1)$ et $A(2)$ sont vérifiées.

Hérédité : Soit $n \geq 2$ un entier naturel, supposons que $A(1), \dots, A(n-1)$ soient vraies. Démontrons maintenant que $A(n)$ est également vérifiée. Remarquons qu'à k fixé, les nombres $(\theta_{k,n})_n$ vérifient un certain ordre :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket, \quad \theta_{k,n} \leq \theta_{k,n-1}$$

Cette observation découle de l'hypothèse de récurrence car :

$$\frac{\theta_{k,n}}{\theta_{k,n-1}} = \frac{w_{n-1-k}}{w_n} \leq 1$$

Ensuite, en utilisant la formule explicite précédemment énoncée, nous avons :

$$p_n(dx) = \sum_{k=0}^{n-1} \theta_{k,n} q_k(dx) \quad \text{et} \quad p_{n-1}(dx) = \sum_{k=0}^{n-2} \theta_{k,n-1} q_k(dx)$$

Étant donné que :

$$\sum_{k=0}^{n-2} \theta_{k,n} = 1 - \theta_{n-1,n} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \theta_{k,n-1} = 1$$

nous pouvons déduire par notre observation ainsi que par la croissance stochastique que :

$$\begin{aligned} w_n - w_{n-1} &= \int_0^1 x p_n(dx) - \int_0^1 x p_{n-1}(dx) \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} (\theta_{k,n} - \theta_{k,n-1}) \frac{\mu_{k+1}}{\mu_k} + \theta_{n-1,n} \frac{\mu_n}{\mu_{n-1}} \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} (\theta_{k,n} - \theta_{k,n-1}) \left(\frac{\mu_{k+1}}{\mu_k} - \frac{\mu_n}{\mu_{n-1}} \right) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Cela prouve que $A(n)$ est également vérifiée.

Conclusion : En résumé, nous avons démontré que $A(1)$ et $A(2)$ sont vraies, et que $A(1), \dots, A(n-1) \implies A(n)$ pour tout entier naturel $n \geq 2$. Ainsi, par une récurrence forte, nous avons établi que la proposition $A(n)$ est valide pour tout entier naturel $n \geq 1$. □

D.2.3 Conséquences favorables

L'énoncé de ce théorème, attribué à Camille Coron, apporte une simplification substantielle à l'étude des fitness dans un cas particulier. En supposant que nous partons de p_1 en tant que fitness initiale, une relation significative relie les moments d'ordre n :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad m_n = \beta \mu_n = (1 - \beta) f_n$$

En se remémorant les définitions des suites données en (5.1), nous obtenons une relation concise entre ces deux éléments :

$$v_n = \sum_{k=1}^n m_k u_{n-k} = (1 - \beta) \sum_{k=1}^n f_k u_{n-k} = (1 - \beta) u_n$$

En utilisant (3.7), nous parvenons ainsi à la relation liant la suite des viabilités à notre suite $(u_n)_n$:

$$w_n = \frac{W_{n+1}}{W_n} = (1 - \beta) \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

Cette connexion entre la croissance des viabilités et celle de la suite des quotients des termes successifs élimine la nécessité de l'annexe sur le problème des moments associé aux suites de renouvellement, simplifiant ainsi notre analyse des fitness.

Approfondissons davantage cette exploration. Par définition, la suite des viabilités est bornée par 1, ce qui implique que la suite des quotients des termes successifs est bornée par $(1 - \beta)^{-1}$. L'ajout de sa croissance conduit à sa convergence. Trois cas potentiels de convergence se dessinent :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\delta} > 1 \quad \text{ou} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{ou} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sigma < 1$$

- ★ Le premier cas correspond au régime démocratique. Dans cette situation, la suite des viabilités converge vers $(1 - \beta)\delta^{-1}$. En notant cette limite comme étant égale à s , cette constante correspond au même s que dans le cas démocratique de notre étude principale.
- ★ Le deuxième cas est largement reconnu et correspond au régime méritocratique. La suite des viabilités converge effectivement vers la valeur $1 - \beta$.
- ★ En revanche, le dernier cas ne se produit jamais. Ainsi, dans cette population, le régime aristocratique ne peut pas se manifester. Cette hypothèse est corroborée par le lemme 3.8, qui démontre qu'avoir une telle limite pour la suite des quotients des termes successifs est impossible, sous peine de compromettre le caractère probabiliste de p_1 : le support de cette distribution doit nécessairement avoir un maximum fixé à 1.

Annexe E

Représentations graphiques

Dans cette section de l'annexe, notre objectif est de surmonter l'un des défis majeurs inhérents aux mathématiques fondamentales, en particulier dans le cadre de l'analyse que nous avons entreprise au cours de cette recherche. Ce domaine des mathématiques engendre des résultats parfois abstraits, et bien que nous puissions développer des intuitions et des explications a posteriori, rien ne remplace la clarté offerte par une représentation graphique, numérique ou manuelle.

E.1 Points essentiels

C'est dans cet esprit que nous consacrons un chapitre à l'élaboration de représentations graphiques des limites de fitness dans les cas démocratique et non-démocratique. Il est crucial de rappeler que ces deux situations se différencient par les inégalités (2.9) et (2.8) :

$$\int_0^1 \frac{q_d(dx)}{1-x} > \beta^{-1} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{q_{nd}(dx)}{1-x} \leq \beta^{-1}$$

Cette distinction élémentaire engendre deux limites de fitness possibles :

$$p_d(dx) = \frac{\beta s}{s - (1 - \beta)x} q_d(dx) \quad \text{et} \quad p_{nd}(dx) = \frac{\beta}{1 - x} q_{nd}(dx) + \left(1 - \int_0^1 \frac{\beta}{1 - y} q_{nd}(dy)\right) \delta_1(dx)$$

Il est important de noter que dans la première limite, la constante s est choisie de manière à satisfaire les conditions (3.1) :

$$\int_0^1 \frac{\beta x}{s - (1 - \beta)x} q_d(dx) = 1 \quad \text{et} \quad 1 - \beta < s \leq 1$$

E.2 Profil des mutations

Passons ensuite à l'examen des distributions de fitness mutantes que nous allons utiliser dans ce chapitre. Nous puisons notre inspiration dans la partie sur l'émergence de la condensation. Optons pour des distributions qui prennent la forme suivante :

$$q^\alpha(dx) = \alpha(1 - x)^{\alpha-1}, \quad \text{avec} \quad \alpha > 1$$

Cette forme simplifie le calcul de l'intégrale de distinction :

$$\int_0^1 \frac{q^\alpha(dx)}{1-x} = \frac{\alpha}{\alpha-1}$$

Ainsi, nous pouvons établir une distinction basée uniquement sur la valeur de α , tout en fixant β au préalable :

$$\alpha < \frac{1}{1-\beta} \quad \text{et} \quad \alpha \geq \frac{1}{1-\beta}$$

Optons pour $\beta = 0.7$, ce qui favorise l'incorporation d'une proportion significative de mutants à chaque génération. Ensuite, choisissons des constantes α spécifiques pour chaque régime : fixons $\alpha = 2$ pour le premier cas, et prenons deux valeurs, $\alpha \in \{5, 10\}$, pour le deuxième cas. Par conséquent, les distributions de fitness mutantes que nous retenons sont exprimées par les formules suivantes :

$$q_d(dx) = 2(1-x)dx \quad \text{et} \quad q_{nd}^\alpha(dx) = \alpha(1-x)^{\alpha-1}dx, \quad \text{où } \alpha \in \{5, 10\}$$

E.3 À la quête de l'inverse du pôle

Ayons maintenant comme objectif de déterminer les formules des fitness limites, en commençant par le cas démocratique. La détermination de la constante s , inverse du pôle de la fonction méromorphe dans (2.7), est essentielle pour cette démarche.

E.3.1 Équation à résoudre

À partir des sections précédentes, la constante recherchée s doit satisfaire les conditions suivantes :

$$\int_0^1 \frac{2\beta x(1-x)}{s - (1-\beta)x} dx = 1 \quad \text{et} \quad 1 - \beta < s \leq 1$$

Notons \mathfrak{J} l'intégrale dans l'équation précédente et développons son expression. Avant cela, considérons deux équations utiles :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \frac{\theta^2}{1-\theta} = -\left(\frac{-\theta}{1-\theta} + \theta\right) \quad (\text{E.1})$$

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \frac{-\theta}{1-\theta} = 1 - \frac{1}{1-\theta} \quad (\text{E.2})$$

Procédons maintenant au développement de \mathfrak{J} :

$$\begin{aligned} \mathfrak{J} &= \frac{2\beta}{s} \left\{ \int_0^1 \frac{x}{1 - \frac{1-\beta}{s}x} dx - \int_0^1 \frac{x^2}{1 - \frac{1-\beta}{s}x} dx \right\} \\ &= \frac{2\beta}{s} \left\{ \left(-\frac{s}{1-\beta}\right) \int_0^1 \frac{\left(-\frac{1-\beta}{s}x\right)}{1 - \frac{1-\beta}{s}x} dx - \left(\frac{s}{1-\beta}\right)^2 \int_0^1 \frac{\left(\frac{1-\beta}{s}x\right)^2}{1 - \frac{1-\beta}{s}x} dx \right\} \\ &= -\frac{2\beta}{1-\beta} \left\{ \int_0^1 \frac{\left(-\frac{1-\beta}{s}x\right)}{1 - \frac{1-\beta}{s}x} dx - \frac{s}{1-\beta} \left[\int_0^1 \frac{\left(-\frac{1-\beta}{s}x\right)}{1 - \frac{1-\beta}{s}x} dx + \frac{1-\beta}{s} \int_0^1 x dx \right] \right\}, \quad \text{par (E.1)} \\ &= -\frac{2\beta}{1-\beta} \left\{ \left(1 - \frac{s}{1-\beta}\right) \int_0^1 \frac{\left(-\frac{1-\beta}{s}x\right)}{1 - \frac{1-\beta}{s}x} dx - \frac{1}{2} \right\} \\ &= -\frac{2\beta}{1-\beta} \left\{ \left(1 - \frac{s}{1-\beta}\right) \left[1 + \frac{s}{1-\beta} \int_0^1 \frac{\left(-\frac{1-\beta}{s}x\right)}{1 - \frac{1-\beta}{s}x} dx \right] - \frac{1}{2} \right\}, \quad \text{par (E.2)} \\ &= -\frac{2\beta}{1-\beta} \left\{ \left(1 - \frac{s}{1-\beta}\right) \left[1 + \frac{s}{1-\beta} \ln \left(1 - \frac{1-\beta}{s}\right) \right] - \frac{1}{2} \right\} \end{aligned}$$

Ainsi, en éliminant l'intégrale, nous pouvons résoudre l'équation $\mathfrak{J} = 1$. Considérons $\mathfrak{J} - 1$ en tant que fonction de s afin de déterminer son zéro :

$$f : s \mapsto -\frac{2\beta}{1-\beta} \left\{ \left(1 - \frac{s}{1-\beta}\right) \left[1 + \frac{s}{1-\beta} \ln \left(1 - \frac{1-\beta}{s}\right) \right] - \frac{1}{2} \right\} - 1 \quad (\text{E.3})$$

E.3.2 Résolution numérique

Nous disposons de diverses méthodes pour déterminer les zéros d'une fonction. Notre fonction est clairement de classe \mathcal{C}^∞ sur l'intervalle $]1 - \beta, 1]$, ce qui permet l'application de l'algorithme de Newton, reconnu pour sa convergence quadratique en une dizaine d'itérations.

Algorithme 1 : Algorithme de Newton

Entrées : point initial s_0 et borne du critère d'arrêt ε

solution provisoire : $s = s_0$;

nombre d'itérations : $n = 0$;

variable du critère d'arrêt : $d = \frac{f(s_0)}{f'(s_0)}$;

tant que $n < 10$ *et* $d > \varepsilon$ **faire**

$s = s - \frac{f(s)}{f'(s)}$;

$n = n + 1$;

fin

retourner s ;

Pour appliquer cet algorithme, nous devons calculer la dérivée de la fonction f et vérifier l'existence d'un zéro. Soit s un réel de l'intervalle $]1 - \beta, 1]$.

$$\begin{aligned} f'(s) &= -\frac{2\beta}{1-\beta} \left\{ -\frac{1}{1-\beta} \left[1 + \frac{s}{1-\beta} \ln \left(1 - \frac{1-\beta}{s} \right) \right] \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \left(1 - \frac{s}{1-\beta} \right) \left[\frac{1}{1-\beta} \ln \left(1 - \frac{1-\beta}{s} \right) + \frac{s}{1-\beta} \frac{\frac{1-\beta}{s^2}}{1 - \frac{1-\beta}{s}} \right] \right\} \\ &= -\frac{2\beta}{1-\beta} \left\{ -\frac{1}{1-\beta} \left[1 + \frac{s}{1-\beta} \ln \left(1 - \frac{1-\beta}{s} \right) \right] \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \left(1 - \frac{s}{1-\beta} \right) \left[\frac{1}{1-\beta} \ln \left(1 - \frac{1-\beta}{s} \right) + \frac{1}{s} \frac{1}{1 - \frac{1-\beta}{s}} \right] \right\} \\ &= -\frac{2\beta}{1-\beta} \left\{ -\frac{1}{1-\beta} \left[1 - \left(1 - 2\frac{s}{1-\beta} \right) \ln \left(1 - \frac{1-\beta}{s} \right) \right] - \frac{1}{1-\beta} \right\} \end{aligned}$$

La dérivée de f est donnée par l'expression suivante :

$$f' : s \mapsto -\frac{2\beta}{(1-\beta)^2} \left\{ \left(1 - 2\frac{s}{1-\beta} \right) \ln \left(1 - \frac{1-\beta}{s} \right) - 2 \right\} \quad (\text{E.4})$$

Il est remarquable que f' est strictement croissante avec des limite et valeur particulières aux bornes (en rappelant que $\beta = 0.7$) :

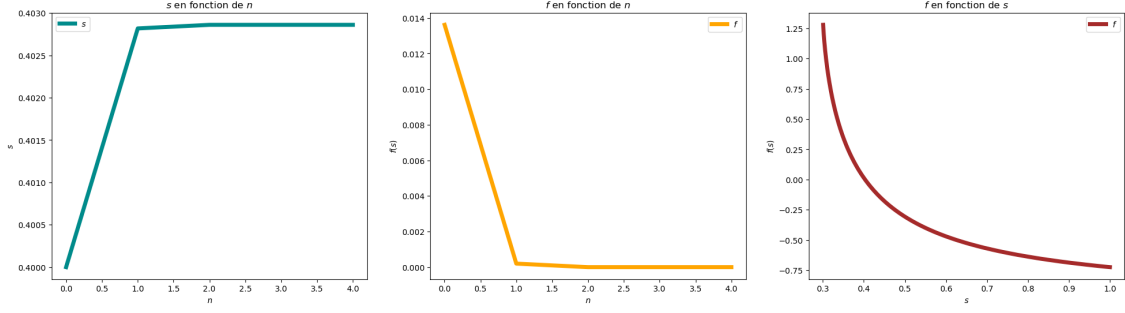
$$f'(s) \xrightarrow{s \rightarrow 1-\beta} -\infty \quad \text{et} \quad f'(1) = -\frac{2\beta}{(1-\beta)^2} \left\{ \left(1 - \frac{2}{1-\beta} \right) \ln(\beta) - 2 \right\} \simeq -0.329$$

Étant donné que ces valeurs sont strictement négatives, la fonction f est strictement décroissante sur son intervalle de définition, avec des limite et valeur particulières aux bornes :

$$f(s) \xrightarrow{s \rightarrow 1-\beta} \frac{\beta}{1-\beta} - 1 \simeq 1.333 \quad \text{et} \quad f(1) = 2 \left(\frac{\beta}{1-\beta} \right)^2 \left(1 + \frac{\ln \beta}{1-\beta} \right) + \frac{\beta}{1-\beta} - 1 \simeq -0.724$$

Ces valeurs encadrent zéro, ce qui, par le théorème des valeurs intermédiaires, implique l'existence d'une unique solution à l'équation $f(s) = 0$ dans l'intervalle $]1 - \beta, 1]$.

Après une analyse graphique de la fonction, il est remarquable que la solution se trouve autour de 0.4. Nous choisirons donc cette valeur comme point initial dans l'algorithme de Newton et résoudrons numériquement notre équation avec une borne du critère d'arrêt $\varepsilon = 10^{-15}$. La figure suivante illustre les résultats obtenus :

FIGURE E.1 – Détermination de s à l'aide de la méthode de Newton

De manière exceptionnelle, en seulement 4 itérations, nous parvenons à obtenir une estimation remarquablement précise de l'inverse du pôle s , comme en témoigne le tableau suivant :

s	$f(s)$
0.40286047677014253	$-1.332267629501878 \times 10^{-15}$

TABLE E.1 – Estimation précise de la solution obtenue

Cette valeur déterminée sera ensuite utilisée pour établir l'expression de la fitness limite dans le cas démocratique.

E.4 Configurations liminales de fitness

Nous sommes à présent en mesure de décrire les profils des distributions de fitness limites, que ce soit dans le cadre démocratique ou non-démocratique. L'ensemble des éléments requis a été soigneusement exposé dans les sections précédentes. Ainsi, nous pouvons exprimer les distributions limites comme suit :

$$p_d(dx) = \frac{2\beta s(1-x)}{s - (1-\beta)x} dx \quad \text{et} \quad p_{nd}^\alpha(dx) = \left\{ \alpha\beta(1-x)^{\alpha-2} + \left(1 - \beta\frac{\alpha}{\alpha-1}\right) \delta_1(x) \right\} dx \quad (\text{E.5})$$

Toutefois, il ne suffit pas de visualiser uniquement les distributions limites. Il est essentiel de suivre l'évolution des profils de fitness au fil des générations pour saisir pleinement leur comportement convergeant vers la limite. Cette approche dynamique nous permettra de mieux appréhender ces distributions limites.

E.5 Sélection à chaque génération

Dans le cadre des hypothèses formulées au sein de ce chapitre, nous fusionnons celles-ci avec les prémisses du chapitre antérieur, où les distributions initiales étaient spécifiées comme suit :

$$p_0 = \delta_0 \quad \text{et} \quad p_1 = \beta q + (1-\beta)\delta_0$$

En conséquence, les valeurs de fitness pour chaque génération, pour $n \geq 2$, s'expriment à l'aide de la formule suivante :

$$p_n(dx) = \beta \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-\beta)^k}{\prod_{i=1}^k w_{n-i}} x^k q(dx) = \alpha\beta(1-x)^\alpha \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(1-\beta)^k x^k}{\prod_{i=1}^k w_{n-i}} \right\} dx \quad (\text{E.6})$$

Cette formule s'applique de manière générale aux deux cas de sélection. Concernant la viabilité associée, elle est nulle à l'état initial, toutefois sa valeur devient inopérante par la suite. Pour les générations

subséquentes, une formule récurrente générale est énoncée :

$$w_n = \beta \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-\beta)^k}{\prod_{i=1}^k w_{n-i}} \mu_{k+1}$$

Cette dernière dépend des moments liés aux mutants, dont l'expression s'obtient aisément par le biais d'intégrations par parties répétées :

$$\begin{aligned} \mu_n &= \int_0^1 x^n q(dx) \\ &= \alpha \int_0^1 x^n (1-x)^{\alpha-1} dx \\ &= [x^n (1-x)^\alpha]_0^1 + n \int_0^1 x^{n-1} (1-x)^\alpha dx \\ &= \frac{n(n-1)}{\alpha+1} \int_0^1 x^{n-2} (1-x)^{\alpha+1} dx \\ &= \frac{n(n-1) \dots 1}{(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)} \int_0^1 (1-x)^{\alpha+n-1} dx \\ &= \frac{n!}{\prod_{i=1}^n (\alpha+i)} \end{aligned}$$

Remarque E.1 (Équivalent des moments). *En considérant α comme un entier, il est remarquable que nous pouvons retrouver immédiatement l'équivalent présenté en (4.5) dans le chapitre sur l'émergence de la condensation :*

$$\mu_n = \frac{n!}{\prod_{i=1}^n (\alpha+i)} = \frac{\alpha!}{\prod_{i=n+1}^{n+\alpha} i} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{n^\alpha}$$

En conséquence, nous sommes maintenant à même de fournir une expression pour les valeurs de viabilité de chaque génération :

$$w_n = \beta \left\{ \frac{1}{\alpha+1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(1-\beta)^k}{\prod_{i=1}^k w_{n-i}} \frac{(k+1)!}{\prod_{i=1}^{k+1} (\alpha+i)} \right\} \quad (\text{E.7})$$

E.6 Visualisation

Nous disposons désormais de tous les éléments nécessaires pour créer des représentations graphiques captivantes, qui constituent le cœur de cette annexe. Notre objectif principal est de visualiser graphiquement les distributions p_n , où la formule récurrente est définie par (E.6), en utilisant les valeurs de viabilité énoncées dans (E.7). Pour des raisons de contraintes computationnelles, nous nous concentrons uniquement sur les densités des générations 3 et 20, une sélection qui suffit largement à illustrer notre propos. Nous allons également superposer ces courbes à leurs fitness limites correspondantes, définies par (E.5). Cette démarche sera réalisée pour les cas démocratique et non-démocratique. Dans ce dernier cas, nous répéterons cette opération deux fois, en choisissant α égal à 5 et 10, afin d'étudier l'impact de la valeur de α . La figure suivante présente les résultats de cette analyse :

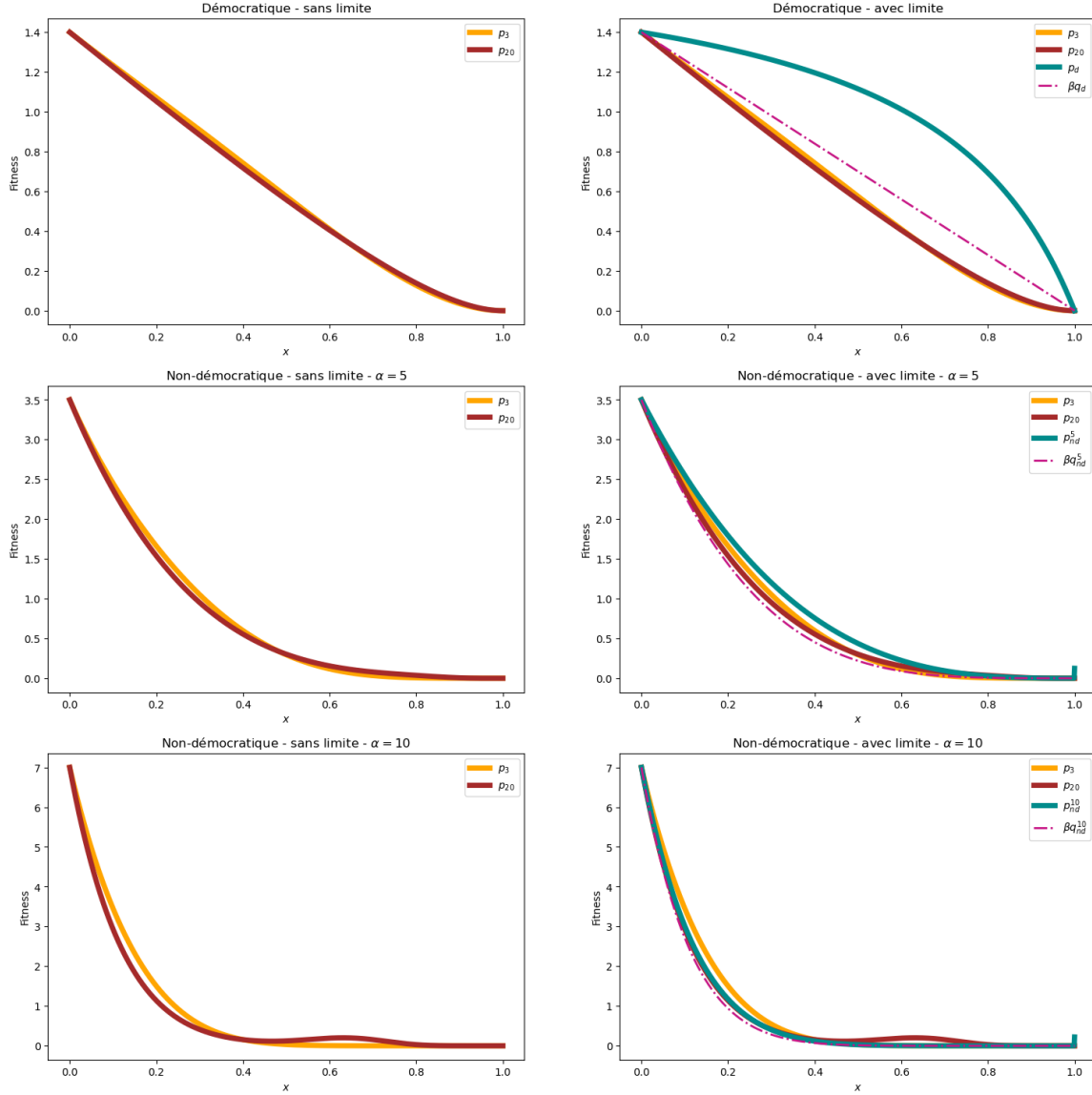


FIGURE E.2 – Distributions de fitness aux générations 3, 20 et limites

Faisons à présent quelques observations pertinentes à partir de ces graphiques. Dans le scénario démocratique, il est notable que malgré un écart de 17 générations, les distributions présentent un changement minime. Ce résultat est cohérent avec les attentes de ce régime. L'égalitarisme inhérent à ce modèle perdure au fil du temps, suggérant que la convergence vers l'état limite sera extrêmement lente (dans le sens où la variation totale des distributions restera en deçà d'un seuil pour les générations "inatteignables"). En revanche, dans le cas non-démocratique, on observe que les distributions varient un peu plus avec le passage des générations, en plus du fait que les densités sont déjà assez proches de la densité limite.

Il est également remarquable que du côté gauche de toutes les courbes, un accroissement des générations entraîne une diminution de la densité. En contraste, du côté droit, on observe une légère élévation, contribuant à la formation de la vague démocratique ou de l'atome non-démocratique. Ce phénomène est plus prononcé lors du saut générationnel lorsque α est de grande valeur.

À mesure que α augmente, la densité limite (ainsi que les densités de chaque génération en réalité) est fidèle au premier terme, βq . Ce rapprochement peut être expliqué dans le cas démocratique par la prédominance des mutants dans la population initiale. Dans le second cas, cette tendance peut être démontrée analytiquement en utilisant des équivalents. Cette proximité grandissante entraîne la

formation d'un pic atomique de hauteur croissante avec α , mais qui reste limitée par $1 - \beta$. Les valeurs de ces pics atomiques pour les cas sélectionnés sont indiquées dans le tableau suivant :

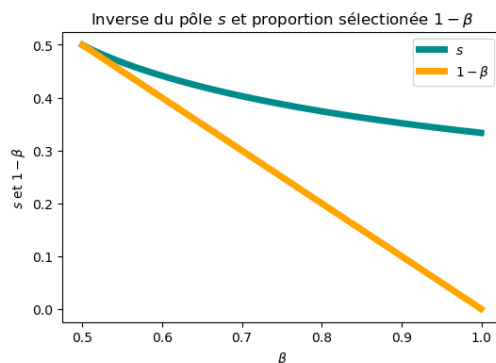
$\alpha = 5$	$\alpha = 10$
0.125	0.222

TABLE E.2 – Pics atomiques dans le cas non-démocratique

Ces observations enrichissent notre compréhension des dynamiques évolutives dans les deux régimes de sélection et nous fournissent des indications précieuses sur l'impact des paramètres du modèle.

E.7 Exploration graphique supplémentaire

Pour satisfaire notre curiosité, nous souhaitons explorer de nouvelles représentations graphiques. Grâce à la rapidité de convergence de la méthode de Newton, nous pouvons étudier la relation entre l'inverse du pôle s et la proportion de la population soumise à la sélection, notée $1 - \beta$. En conservant les paramètres précédents, avec $\alpha = 2$, nous savons que β doit se situer strictement entre 0 et 1, tout en étant supérieur au quotient $(\alpha - 1)/\alpha$. Cela nous amène à examiner comment s évolue en fonction de β sur l'intervalle $]1/2, 1[$, tout en superposant cette étude à celle de $1 - \beta$ en fonction de β . Le graphique ci-dessous présente les résultats de cette exploration :

FIGURE E.3 – Inverse du pôle s en fonction de β

Nous pouvons observer que s décroît lorsque β augmente, se rapprochant progressivement de $1/3$ à mesure que β s'approche de la borne supérieure de son intervalle. D'autre part, s semble converger vers la valeur $1 - \beta$ lorsque β diminue. Cependant, il est à noter que ces valeurs étaient en fait déterminables analytiquement grâce à l'équation intégrale vérifiée par s , rappelée ci-dessous :

$$\int_0^1 \frac{2\beta x(1-x)}{s - (1-\beta)x} dx = 1 \quad \text{et} \quad 1 - \beta < s \leq 1$$

Annexe F

Démonstrations manquantes

Dans ce chapitre, nous présentons les démonstrations qui ont été omises de la partie principale du rapport pour diverses raisons. Certaines d'entre elles ont été exclues en raison de leur faible difficulté, tandis que d'autres ont été laissées de côté car les grandes étapes étaient déjà fournies par les auteurs. Nous avons pris la décision de les regrouper en annexe afin de ne pas surcharger inutilement notre étude principale. Chaque section de cette partie correspond à un chapitre et les résultats des démonstrations s'enchaînent.

F.1 Mathématisation de la dynamique

Proposition F.1 (Formule explicite de p_n). *Pour tout entier naturel n , la distribution de fitness à la génération n peut être exprimée de la manière suivante :*

$$p_n(dx) = \beta \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-\beta)^k}{\prod_{i=0}^{k-1} w_{n-1-i}} x^k q(dx) + \frac{(1-\beta)^n}{\prod_{i=0}^{n-1} w_{n-1-i}} x^n p_0(dx) \quad (\text{F.1})$$

où w_i représente la viabilité de la population à la génération i .

Démonstration. Soit n un entier naturel et $P(n)$ la proposition suivante :

$$p_n(dx) = \beta \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-\beta)^k}{\prod_{i=0}^{k-1} w_{n-1-i}} x^k q(dx) + \frac{(1-\beta)^n}{\prod_{i=0}^{n-1} w_{n-1-i}} x^n p_0(dx)$$

Nous allons montrer cette proposition par récurrence sur n .

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $p_0(dx) = 0 + p_0(dx)$, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel et supposons que $P(n)$ est vraie. Nous allons montrer que $P(n+1)$ est également vraie. Partons de l'équation (2.2) :

$$p_{n+1}(dx) = \beta q(dx) + (1-\beta) \frac{x p_n(dx)}{w_n}$$

En remplaçant $p_n(dx)$ par son expression selon $P(n)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
p_{n+1}(dx) &= \beta q(dx) + (1-\beta) \frac{x}{w_n} \left(\beta \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-\beta)^k}{\prod_{i=0}^{k-1} w_{n-1-i}} x^k q(dx) + \frac{(1-\beta)^n}{\prod_{i=0}^{n-1} w_{n-1-i}} x^n p_0(dx) \right) \\
&= \beta q(dx) + (1-\beta) \frac{x}{w_n} \left(\beta \sum_{k=1}^n \frac{(1-\beta)^{k-1}}{\prod_{i=1}^{k-1} w_{n-i}} x^{k-1} q(dx) + \frac{(1-\beta)^n}{\prod_{i=1}^n w_{n-i}} x^n p_0(dx) \right) \\
&= \beta q(dx) + \beta \sum_{k=1}^n \frac{(1-\beta)^k}{\prod_{i=1}^{k-1} w_{n-i}} x^k q(dx) + \frac{(1-\beta)^{n+1}}{\prod_{i=0}^n w_{n-i}} x^{n+1} p_0(dx) \\
&= \beta \sum_{k=0}^n \frac{(1-\beta)^k}{\prod_{i=1}^{k-1} w_{n-i}} x^k q(dx) + \frac{(1-\beta)^{n+1}}{\prod_{i=0}^n w_{n-i}} x^{n+1} p_0(dx)
\end{aligned}$$

Cela prouve que $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Ainsi, puisque $P(0)$ est vraie et $P(n) \implies P(n+1)$ pour tout entier naturel n , nous avons montré par récurrence que la proposition est vraie. \square

Proposition F.2 (Formule récurrente de W_n). *Le produit des viabilités sur les n premières générations, W_n , peut être exprimé en fonction des moments de la manière suivante :*

$$W_n = \beta \sum_{k=0}^{n-1} W_{n-k} (1-\beta)^k \mu_k + (1-\beta)^n m_n \quad (\text{F.2})$$

$$= \beta \sum_{k=1}^{n-1} W_{n-k} (1-\beta)^{k-1} \mu_k + (1-\beta)^{n-1} m_n \quad (\text{F.3})$$

Démonstration. Tout d'abord, nous modifions l'équation (F.1) pour isoler W_n :

$$p_n(dx) = \beta \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-\beta)^k}{\prod_{i=0}^{k-1} w_{n-1-i}} x^k q(dx) + \frac{(1-\beta)^n}{\prod_{i=0}^{n-1} w_{n-1-i}} x^n p_0(dx)$$

Ceci est équivalent à :

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{i=0}^{n-1} w_{n-1-i} \right) p_n(dx) &= \beta \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{i=k}^{n-1} w_{n-1-i} \right) (1-\beta)^k x^k q(dx) + (1-\beta)^n x^n p_0(dx) \\
&= \beta \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{i=0}^{n-k-1} w_{n-k-1-i} \right) (1-\beta)^k x^k q(dx) + (1-\beta)^n x^n p_0(dx) \\
&= \beta \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{i=0}^{n-k-1} w_i \right) (1-\beta)^k x^k q(dx) + (1-\beta)^n x^n p_0(dx)
\end{aligned}$$

Nous en déduisons alors que :

$$W_n p_n(dx) = \beta \sum_{k=0}^{n-1} W_{n-k} (1-\beta)^k x^k q(dx) + (1-\beta)^n x^n p_0(dx) \quad (\text{F.4})$$

Nous intégrons ensuite l'équation (F.4) pour faire apparaître les moments μ_k et m_n , ce qui nous permet d'obtenir l'équation (F.2) :

$$W_n = \beta \sum_{k=0}^{n-1} W_{n-k} (1-\beta)^k \mu_k + (1-\beta)^n m_n$$

En sortant le premier terme de la somme, nous obtenons :

$$W_n = \beta W_n + \beta \sum_{k=1}^{n-1} W_{n-k} (1-\beta)^k \mu_k + (1-\beta)^n m_n$$

ce qui équivaut à

$$(1-\beta)W_n = \beta \sum_{k=1}^{n-1} W_{n-k} (1-\beta)^k \mu_k + (1-\beta)^n m_n$$

et en divisant par $(1-\beta)$, nous obtenons l'équation (F.3) :

$$W_n = \beta \sum_{k=1}^{n-1} W_{n-k} (1-\beta)^{k-1} \mu_k + (1-\beta)^{n-1} m_n$$

□

Lemme F.3 (Convergence des séries entières).

☛ $\forall z \in D_\beta$, $\sum_{n \geq 1} (1-\beta)^n m_n z^n$ et $\sum_{n \geq 1} (1-\beta)^n \mu_n z^n$ sont absolument convergentes

☛ $\forall z \in D_0$, $\sum_{n \geq 1} W_n z^n$ est absolument convergente

Démonstration. La démonstration de ces propriétés découle naturellement du lemme d'Abel, grâce à l'utilisation de suites bornées. En effet, les suites de termes généraux

$$(1-\beta)^n m_n \left(\frac{1}{1-\beta} \right)^n, \quad (1-\beta)^n \mu_n \left(\frac{1}{1-\beta} \right)^n \quad \text{et} \quad W_n$$

sont toutes bornées par 1. Ainsi, en appliquant le lemme d'Abel, on peut conclure que les séries entières sont absolument convergentes pour tout $z \in D_\beta$ et $z \in D_0$.

□

F.2 Évolution et régimes de sélection

Lemme F.4 (Quotient des termes successifs). *La suite des quotients des termes successifs de $(v_n)_n$ converge, et nous avons :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{v_{n-1}} = 1$$

Démonstration. Pour démontrer ce lemme, nous allons procéder en trois étapes avant de conclure. Tout d'abord, nous réécrivons la suite $(v_n)_n$ sous la forme intégrale d'une suite de fonctions, ce qui nous permettra d'étudier les limites supérieures et inférieures des quotients des termes successifs de notre suite.

Réécriture : Soit n un entier naturel. Nous rappelons que $(u_n)_n$ représente une suite de moments, de même que $(m_n)_n$, où :

$$u_n = \int_0^1 x^n \nu(dx) \quad \text{et} \quad m_n = \int_0^1 x^n p_0(dx)$$

Définissons $\lambda = \nu \otimes p_0$ comme la mesure produit de ces deux mesures. Ainsi, la suite $(v_n)_n$ peut être réécrite de la manière suivante :

$$v_n = \sum_{k=1}^n \int_{I^2} x^{n-k} y^k \lambda(dxdy) = \int_{I^2} y \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k \lambda(dxdy)$$

Définissons maintenant la suite de fonctions $(g_n)_n$ de la manière suivante :


$$g_n : (x, y) \in I^2 \mapsto \begin{cases} y \frac{x^n - y^n}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ nx^n & \text{si } x = y \end{cases}$$

Ainsi, nous pouvons réécrire la suite $(v_n)_n$ comme une intégrale de la suite $(g_n)_n$:

$$v_n = \int_{I^2} g_n(x, y) \lambda(dxdy)$$

Cette nouvelle écriture nous permettra d'étudier plus facilement les propriétés de la suite des quotients des termes successifs de $(v_n)_n$.

Limite supérieure : Grâce à cette nouvelle écriture, nous sommes maintenant en mesure d'étudier la limite supérieure de notre suite. Pour cela, nous considérons $x, y \in I$.

 Supposons, sans perte de généralité, que $x > y$. En utilisant la décroissance de la suite $(t^n)_n$ pour tout $t \in I$, nous pouvons établir les implications suivantes :

$$\int_y^x t^{n-1} dt \geq \int_y^x t^{n-1} dt \implies \frac{x^{n-1} - y^{n-1}}{n-1} \geq \frac{x^n - y^n}{n} \implies \frac{g_{n-1}(x, y)}{n-1} \geq \frac{g_n(x, y)}{n}$$

 Supposons maintenant que $x = y$. Par le même argument, nous obtenons le résultat suivant :

$$x^{n-1} \geq x^n \implies \frac{g_{n-1}(x, x)}{n-1} \geq \frac{g_n(x, x)}{n}$$

Cela nous permet de conclure par les implications suivantes :

$$\frac{v_{n-1}}{n-1} \geq \frac{v_n}{n} \implies \frac{v_n}{v_{n-1}} \leq \frac{n}{n-1} \implies \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{v_{n-1}} \leq 1$$

Limite inférieure : L'étude de la limite inférieure de la suite est un peu plus fastidieuse. Pour la trouver, considérons un réel $\alpha \in]0, 1[$ ainsi que nos deux réels $x, y \in I$.

 Supposons que l'un des deux réels est supérieur ou égal à α , c'est-à-dire $\max(x, y) \geq \alpha$.

 Dans le cas où $x > y$, nous obtenons le résultat suivant :

$$x^x - y^n \geq x^n - xy^{n-1} \geq \alpha (x^{n-1} - y^{n-1}) \implies g_n(x, y) \geq \alpha g_{n-1}(x, y)$$


 De même, pour $x = y$, l'inégalité persiste :

$$nx^n \geq \alpha nx^{n-1} \geq \alpha(n-1)x^{n-1} \implies g_n(x, x) \geq \alpha g_{n-1}(x, x)$$

 Supposons maintenant le cas contraire où les deux réels sont strictement inférieurs à α , c'est-à-dire $\max(x, y) < \alpha$.

 Dans le cas où $x > y$, nous obtenons le résultat suivant :

$$y \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k \leq y \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1} \left(\frac{y}{x}\right)^k < n\alpha^n \implies g_n(x, y) < n\alpha^n$$

 De même, pour $x = y$, l'inégalité persiste :

$$nx^n < n\alpha^n \implies g_n(x, y) < n\alpha^n$$

Ainsi, en utilisant ces propriétés, nous obtenons la suite d'inégalités suivante :

$$\begin{aligned}
v_n &= \int_{I^2} g_n(x, y) \lambda(dxdy) \\
&\geq \int_{\max(x, y) \geq \alpha} g_n(x, y) \lambda(dxdy) \\
&\geq \alpha \int_{\max(x, y) \geq \alpha} g_{n-1}(x, y) \lambda(dxdy) \\
&= \alpha v_{n-1} - \alpha \int_{\max(x, y) < \alpha} g_{n-1}(x, y) \lambda(dxdy) \\
&\geq \alpha v_{n-1} - n\alpha^n
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous pouvons établir une borne inférieure pour le quotient des termes successifs de notre suite :

$$\frac{v_n}{v_{n-1}} \geq \alpha - \frac{n\alpha^n}{v_{n-1}} \geq \alpha - \frac{n\alpha^n}{m_1 u_{n-2}}$$

Définissons le dernier terme comme M_n et étudions sa limite. Remarquons que la suite $(u_n)_n$ est décroissante et positive, donc elle converge. Par conséquent, nous obtenons le résultat suivant :

$$\frac{M_{n+1}}{M_n} = \alpha \frac{n+1}{n} \frac{u_{n-2}}{u_{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha < 1$$

Ainsi, Ainsi, nous déduisons la limite de $(M_n)_n$:

$$M_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha^{n-2} M_2 \implies M_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

En revenant à l'inégalité précédente, nous obtenons :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{v_{n-1}} \geq \alpha$$

Puisque cette propriété est vérifiée pour tout réel $\alpha \in]0, 1[$, nous obtenons finalement :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{v_{n-1}} \geq 1$$

Conclusion : En combinant nos deux résultats, nous en arrivons à :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{v_{n-1}} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{v_{n-1}} = 1$$

Ainsi, nous concluons que la suite des quotients des termes successifs converge, et sa limite est donnée par :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{v_{n-1}} = 1$$

□

Lemme F.5 (Produit des viabilités). *Le produit des viabilités peut être exprimé en fonction de la suite $(v_n)_n$ de la manière suivante :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad W_n = (1 - \beta)^{n-1} v_n$$

Démonstration. Soit $n \geq 1$ un entier naturel. Pour démontrer le résultat, nous allons procéder par récurrence sur n . Notons $Q(n)$ la proposition suivante :

$$W_n = (1 - \beta)^{n-1} v_n = (1 - \beta)^{n-1} \sum_{k=1}^n m_k u_{n-k}$$

Initialisation : Pour $n = 1$, nous avons $W_1 = m_1$ d'après l'équation rappelée précédemment. Ainsi, $Q(1)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que la proposition $Q(n)$ soit vraie pour un certain entier naturel $n \geq 1$. Nous allons démontrer que la proposition $Q(n+1)$ est également vraie. Partant de l'équation (F.3), nous utiliserons l'hypothèse de récurrence et l'inversion de somme pour simplifier l'expression et ainsi appliquer la définition des suites de renouvellement afin de parvenir à la conclusion souhaitée.

$$\begin{aligned}
W_{n+1} &= \beta \sum_{k=1}^n W_{n+1-k} (1-\beta)^{k-1} \mu_k + (1-\beta)^n m_{n+1} \\
&= \beta \sum_{k=1}^n \left((1-\beta)^{n-k} \sum_{j=1}^{n+1-k} m_j u_{n+1-k-j} \right) (1-\beta)^{k-1} \mu_k + (1-\beta)^n m_{n+1} \\
&= (1-\beta)^n \sum_{j=1}^n m_j \sum_{k=1}^{n+1-j} \frac{\beta}{1-\beta} \mu_k u_{n+1-j-k} + (1-\beta)^n m_{n+1} \\
&= (1-\beta)^n \sum_{j=1}^n m_j u_{n+1-j} + (1-\beta)^n m_{n+1} \\
&= (1-\beta)^n \sum_{j=1}^{n+1} m_j u_{n+1-j}
\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons prouvé que $Q(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Puisque $Q(1)$ est vraie et que $Q(n) \implies Q(n+1)$ pour tout entier naturel $n \geq 1$, nous avons démontré par récurrence que la proposition est vraie. □

Lemme F.6 (Support de la distribution de fitness des mutants). *Le support de la distribution de fitness des mutants est restreint par la limite des quotients des termes successifs de la suite de renouvellement :*

$$\text{supp}(q) \subset [0, \sigma]$$

Démonstration. Soit $n \geq 1$ un entier naturel. Notons tout d'abord que nous avons l'inégalité immédiate suivante :

$$f_n \leq \sum_{k=1}^n f_k u_{n-k} = u_n$$

De plus, étant donné que la suite des quotients des termes successifs de la suite de renouvellement est croissante et converge vers σ , nous pouvons en déduire par récurrence immédiate le résultat suivant :

$$u_n \leq \sigma u_{n-1} \implies u_n \leq \sigma^n$$

En combinant ces deux inégalités, nous obtenons :

$$f_n \leq \sigma^n$$

Prouvons maintenant le résultat du lemme par l'absurde en utilisant cette inégalité. Supposons qu'il existe un réel $\eta \in]\sigma, 1[$ tel que $q([\eta, 1]) > 0$. Dans ce cas, nous avons le résultat suivant :

$$\frac{f_n}{\sigma^n} = \frac{\beta}{1-\beta} \frac{\mu_n}{\sigma^n} \geq \frac{\beta}{1-\beta} \frac{1}{\sigma^n} \int_{\eta}^1 x^n q(dx) \geq \frac{\beta}{1-\beta} \left(\frac{\eta}{\sigma}\right)^n q([\eta, 1]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Cette limite finale étant absurde, nous en concluons le résultat souhaité. □

Proposition F.7 (Viabilité limite aristocratique). *La suite des viabilités $(w_n)_n$ converge, et la viabilité limite correspond à la proportion de population non mutante :*

$$w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \beta$$

Démonstration. La démonstration de ce résultat dans le cas aristocratique est presque identique à celle du cas méritocratique, à l'exception près que, puisque le support de q est modifié, la partie de la preuve concernant la limite inférieure de la suite des quotients des termes successifs de la nouvelle suite $(v_n)_n$ sera ajustée. Considérons donc les résultats de cette preuve et prenons un réel $\xi \in]\alpha, 1[$. Nous avons alors les inégalités suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad m_n \geq \int_{\xi}^1 x^n p_0(dx) \geq \xi^n p_0([\xi, 1]) > 0$$

Par conséquent, nous obtenons la limite suivante, par croissances comparées :

$$\frac{v_n}{v_{n-1}} \geq \alpha - \frac{n\alpha^n}{v_{n-1}} \geq \alpha - \frac{n\alpha^n}{m_{n-1}} \geq \alpha - \frac{n\xi}{p_0([\xi, 1])} \left(\frac{\alpha}{\xi}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$$

Cela nous permet de conclure :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{v_{n-1}} \geq \alpha$$

Le reste de la démonstration reste identique. □

F.3 Émergence de la condensation

Lemme F.8 (Équation de renouvellement). *La suite $(v_n)_n$ satisfait l'équation de renouvellement suivante :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = m_n + \sum_{k=1}^{n-1} f_k v_{n-k}$$

Démonstration. La preuve de ce résultat est en effet concise. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en substituant l'équation de renouvellement vérifiée par $(u_n)_n$:

$$u_n = \sum_{j=1}^n f_j u_{n-j}$$

dans la définition de $(v_n)_n$ et en réorganisant les termes par l'intermédiaire d'une inversion de sommes, on obtient :

$$v_n = m_n + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-k} f_j m_k u_{n-k-j} = m_n + \sum_{j=1}^{n-1} f_j \sum_{k=1}^{n-j} m_k u_{n-j-k} = m_n + \sum_{j=1}^{n-1} f_j v_{n-j}$$

□

Lemme F.9 (Moments des mutants). *Pour tout $x > 0$, on a l'équivalence suivante :*

$$\int_{1-x/n}^1 y^n q(dy) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha}{n^\alpha} \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t} dt \quad (\text{F.5})$$

En particulier, on a :

$$\mu_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{n^\alpha} \quad (\text{F.6})$$

Démonstration. Par hypothèse, on a $q(dy) = \alpha(1-y)^{\alpha-1}dy$, alors un simple changement de variable affine conduit à l'expression suivante pour l'intégrale :

$$\int_{1-x/n}^1 y^n q(dy) = \int_{1-x/n}^1 y^n \alpha(1-y)^{\alpha-1} dy = \frac{\alpha}{n^\alpha} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{\alpha-1} \mathbf{1}_{t \leq x} dt$$

Posons

$$\gamma_n^x : t \mapsto \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{\alpha-1} \mathbf{1}_{t \leq \min\{x, n\}}$$

La suite de fonctions $(\gamma_n^x)_n$ satisfait les propriétés suivantes :

➤ Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la limite suivante est vérifiée :

$$\gamma_n^x(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} \mathbf{1}_{t \leq x}$$

➤ Pour tout $(n, t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$|\gamma_n^x(t)| \leq e^{-t} t^{\alpha-1}$$

Si l'on note $\gamma^*(t)$ le terme de droite, alors γ^* est une fonction intégrable sur \mathbb{R}_+ (d'intégrale $\Gamma(\alpha)$).

En appliquant le théorème de convergence dominée, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \gamma_n^x(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} \mathbf{1}_{t \leq x} dt$$

Cela établit le premier résultat du lemme :

$$\int_{1-x/n}^1 y^n q(dy) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha}{n^\alpha} \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

Le deuxième résultat, obtenu en prenant " $x = n$ " dans le premier résultat, est démontré de manière similaire, avec l'indicatrice dépendant de x disparaissant, conduisant à l'expression :

$$\int_0^1 \alpha y^n (1-y)^{\alpha-1} dy \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha}{n^\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

Ceci conclut la démonstration du lemme. □

Lemme F.10. La suite $(v_n)_n$ satisfait l'équivalence suivante :

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{c}{n^\alpha}$$

avec

$$c = \frac{\beta}{\gamma(\beta)} \Gamma(\alpha+1) \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$$

Démonstration. Soient $\delta > 0$ et $0 < \varepsilon < \eta < 1$. Nous commencerons par remarquer que d'après le lemme précédent, il existe un entier $N \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N$, $n-1 \geq n\eta$, et :

$$\forall k \geq (1-\eta)n \geq 1, \quad \frac{\Gamma(\alpha+1) - \delta}{k^\alpha} \leq \mu_k \leq \frac{\Gamma(\alpha+1) + \delta}{k^\alpha} \quad (\text{F.7})$$

Nous introduisons maintenant la proposition $R(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\exists c_n, \tilde{c}_n > 0 \quad / \quad \frac{\tilde{c}_n}{n^\alpha} \leq v_n \leq \frac{c_n}{n^\alpha}$$

Nous allons démontrer cette propriété par récurrence forte, en nous concentrant sur l'inégalité de droite, car les démonstrations sont similaires.

Initialisation : Pour $n = 1$, nous avons $v_1 = m_1$, donc nous pouvons choisir $c_1 = m_1$, ce qui satisfait $R(1)$.

Hérédité : Supposons que $R(1), \dots, R(n-1)$ soient vraies pour un certain entier naturel $n \geq 2$. Nous montrons que $R(n)$ est également vraie.

$$\forall k \in \llbracket \lfloor \varepsilon n \rfloor + 1, n-1 \rrbracket, \exists c_k > 0 / v_k \leq \frac{c_k}{k^\alpha}$$

Nous évaluons maintenant $v_k \mu_{n-k}$ selon trois cas pour les valeurs de k . En utilisant les inégalités précédentes, nous obtenons :

♥ Si $k \geq \lfloor \eta n \rfloor + 1$, alors $k \geq \eta n$, et nous avons :

$$v_k \mu_{n-k} \leq \frac{c_k}{(\eta n)^\alpha} \mu_{n-k}$$

♥ Si $\lfloor \varepsilon n \rfloor + 1 \leq k \leq \lfloor \eta n \rfloor$, alors $(1-\varepsilon)n \leq n-k \leq (1-\varepsilon)n$, et nous avons :

$$v_k \mu_{n-k} \leq \frac{c_k}{k^\alpha} \frac{\Gamma(\alpha+1) + \delta}{(n-k)^\alpha}$$

♥ Si $k \leq \lfloor \varepsilon n \rfloor$, alors $(1-\varepsilon)n \leq n-k$, et nous avons :

$$v_k \mu_{n-k} \leq v_k \frac{\Gamma(\alpha+1) + \delta}{((1-\varepsilon)n)^\alpha}$$

Nous obtenons donc :

$$v_n = m_n + \sum_{k=1}^{n-1} v_k \mu_{n-k} \leq \frac{c_n}{n^\alpha}$$

où c_n est donné par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} c_n = & \frac{\beta}{1-\beta} \left[\frac{\Gamma(\alpha+1) + \delta}{(1-\varepsilon)^n} \sum_{k=1}^{\lfloor \varepsilon n \rfloor} v_k \dots \right. \\ & \dots + \frac{\Gamma(\alpha+1) + \delta}{n^{\alpha-1}} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=\lfloor \varepsilon n \rfloor + 1}^{\lfloor \eta n \rfloor} c_k \left(\frac{k}{n} \right)^{-\alpha} \left(1 - \frac{k}{n} \right)^{-\alpha} \right) \dots \\ & \left. \dots + \frac{1}{\eta^\alpha} \sum_{k=\lfloor \eta n \rfloor + 1}^{n-1} c_k \mu_{n-k} \right] + m_n n^\alpha \end{aligned}$$

Cela montre que $R(n)$ est vraie.

Conclusion : Ainsi, puisque $R(1)$ est vraie et $R(1), \dots, R(n-1) \implies R(n)$ pour tout entier naturel $n \geq 2$, nous avons montré par récurrence forte que la proposition est vraie.

Cette récurrence nous a permis de construire les suites $(c_n)_n$ et $(\tilde{c}_n)_n$ majorant et minorant respectivement la suite $(v_n n^\alpha)_n$. Continuons notre étude de la suite $(c_n)_n$ étant donné que celle de $(\tilde{c}_n)_n$ sera similaire. Puisque la suite $(m_n n^\alpha)_n$ converge vers 0 selon l'hypothèse (4.1) :

$$m_n n^\alpha = o(\mu_n n^\alpha) = o(\Gamma(\alpha+1)) = o(1)$$

il en résulte que la suite $(c_n)_n$ est bornée. De plus, la suite de terme général S_n défini comme la deuxième somme dans l'expression de c_n est un O d'une intégrale de Riemann :

$$\exists K > 0 / S_n \leq \frac{K}{n^{\alpha-1}} \int_{\varepsilon}^{\eta} t^{-\alpha} (1-t)^{-\alpha} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Par conséquent, la suite $(c_n)_n$ converge vers une constante $c_\infty = c_\infty(\delta, \varepsilon, \eta)$ qui est la solution unique de l'équation suivante :

$$c_\infty = \frac{\beta}{1-\beta} \left[\frac{\Gamma(\alpha+1) + \delta}{(1-\varepsilon)^\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} v_n + \frac{c_\infty}{\eta^\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n \right]$$

En faisant tendre δ, ε vers 0 et η vers 1, nous obtenons que c_∞ converge vers la constante c qui est la solution unique de l'équation suivante :

$$c = \frac{\beta}{1-\beta} \Gamma(\alpha+1) \sum_{n=1}^{+\infty} v_n + c \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$$

En utilisant l'équation (4.3), nous obtenons finalement :

$$c = \frac{\beta}{\gamma(\beta)} \Gamma(\alpha+1) \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$$

En réalisant une étude similaire sur la suite $(\tilde{c}_n)_n$, nous obtenons que cette suite converge vers une constante $\tilde{c}_\infty(\delta, \varepsilon, \eta)$, et celle-ci converge vers c lorsque $(\delta, \varepsilon, \eta)$ tend vers $(0, 0, 1)$. Par le théorème des gendarmes, nous en concluons que la suite $(v_n n^\alpha)_n$ converge également vers c , ce qui démontre le résultat souhaité. □

F.4 Dynamique évolutive avec fitness non bornée

Lemme F.11 (Divergence). *La suite des quotients des termes successifs de la suite $(v_n)_n$ est divergente :*

$$\frac{v_n}{v_{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Démonstration. La démonstration de ce lemme est presque identique à celle du lemme E.4 qui traite de la même suite dans le cas de fitness bornée. Cependant, dans cette situation, l'étude de la limite supérieure est inutile. Nous nous concentrons donc sur la limite inférieure en considérant un réel $A > 1$ suffisamment grand au lieu de $\alpha \in]0, 1[$. Reprenons à partir de l'étape suivante :

$$\frac{v_n}{v_{n-1}} \geq A - \frac{nA^n}{m_1 u_{n-2}}$$

et examinons le dernier terme, que nous définissons comme M_n . Selon la proposition précédente, l'inverse de la suite des quotients des termes successifs de $(u_n)_n$ converge vers 0. Par conséquent, nous en déduisons que :

$$\frac{M_{n+1}}{M_n} = A \frac{n+1}{n} \frac{u_{n-2}}{u_{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Il existe donc un entier $N \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N$:

$$\frac{M_{n+1}}{M_n} \leq \frac{1}{2} \implies M_n \leq \frac{2^N M_N}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

En revenant à l'inégalité précédente, nous obtenons :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{v_{n-1}} \geq A$$

Puisque cette propriété est vérifiée pour tout réel $A > 1$, nous en déduisons finalement la conclusion de notre lemme :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{v_{n-1}} = +\infty$$

□

Proposition F.12 (Fitness et viabilité). *Les notions de fitness et de viabilité à la n -ième génération s'expriment explicitement comme suit :*

$$p_n(dx) = \frac{x^n e^{-x}}{n!} dx \quad \text{et} \quad w_n = n + 1$$

Démonstration. Montrons cette proposition par récurrence, mais notons d'abord que la formule pour les viabilités s'obtient directement, à condition d'avoir prouvé la formule pour la fitness. Introduisons donc la proposition $S(n)$ pour tout entier naturel n :

$$p_n(dx) = \frac{x^n e^{-x}}{n!} dx$$

Initialisation : Pour $n = 0$, nous avons $p_0(dx) = e^{-x} dx$ par définition, ce qui vérifie $S(0)$.

Hérédité : Supposons que $S(n)$ soit vraie pour un certain entier naturel n et montrons que $S(n+1)$ l'est également. Remarquons d'abord que par hypothèse de récurrence :

$$w_n = \int_0^{+\infty} x p_n(dx) = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} x^{n+1} e^{-x} dx = \frac{(n+1)!}{n!} = n + 1$$

De même, nous obtenons :

$$p_{n+1}(dx) = \frac{x p_n(dx)}{w_n} = \frac{x}{n+1} \frac{x^n e^{-x}}{n!} dx = \frac{x^{n+1} e^{-x}}{(n+1)!} dx$$

Cela prouve que $S(n+1)$ est vérifiée.

Conclusion : Ainsi, puisque $S(0)$ est vraie et $S(n) \implies S(n+1)$ pour tout entier naturel n , nous avons prouvé par récurrence que la proposition est vraie. □

Lemme F.13 (Coefficients binomiaux).

$$\forall n \geq 5, \forall k \in \llbracket 2, n-2 \rrbracket, \binom{n}{k} \geq 2n$$

Démonstration. Soit $n \geq 5$ un entier naturel, on a :

$$n-1 \geq 4 \implies \frac{n(n-1)}{2} \geq 2n \implies \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} \geq 2n$$

Soit $k \in \llbracket 2, n-2 \rrbracket$, on a finalement :

$$\binom{n}{k} \geq \binom{n}{2} \geq 2n$$
□

Lemme F.14 (Borne). *Pour un réel $\alpha > 0$, considérons la suite $(a_n)_n$ définie récursivement comme suit :*

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = a_0 + \alpha \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{\binom{n}{k}}$$

Alors la suite $(a_n)_n$ est bornée :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq C$$

où la borne C est donnée par :

$$C = \max \left\{ \frac{5}{5-3\alpha}, 1 + \frac{2\alpha}{3} + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^3}{24}, 1 + \frac{3\alpha}{5} + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^3}{15} + \frac{\alpha^4}{120} \right\}$$

Démonstration. Soit n un entier naturel, et considérons la proposition $T(n)$ définie comme suit :

$$a_n \leq C$$

Nous allons démontrer cette proposition par récurrence forte sur n , en commençant par l'initialisation pour les 6 premiers termes.

Initialisation : Pour $0 \leq n \leq 5$, nous constatons que :

- $a_0 = a_1 = 1 \leq C$
- $a_2 = 1 + \frac{\alpha}{2} \leq C$
- $a_3 = 1 + \frac{\alpha}{3} + \alpha \frac{1 + \frac{\alpha}{2}}{3} = 1 + \frac{2\alpha}{3} + \frac{\alpha^2}{6} \leq C$
- $a_4 = 1 + \frac{\alpha}{4} + \alpha \frac{1 + \frac{\alpha}{2}}{6} + \alpha \frac{1 + \frac{2\alpha}{3} + \frac{\alpha^2}{6}}{4} = 1 + \frac{2\alpha}{3} + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^3}{24} \leq C$
- $a_5 = 1 + \frac{\alpha}{5} + \alpha \frac{1 + \frac{\alpha}{2}}{10} + \alpha \frac{1 + \frac{2\alpha}{3} + \frac{\alpha^2}{6}}{10} + \alpha \frac{1 + \frac{2\alpha}{3} + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^3}{24}}{5} = 1 + \frac{3\alpha}{5} + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^3}{15} + \frac{\alpha^4}{120} \leq C$

Ainsi, nous avons vérifié que $T(0), \dots, T(5)$ sont vraies.

Hérédité : Soit $n \geq 5$ un entier naturel, et supposons que $T(0), \dots, T(n-1)$ sont vraies. Nous allons maintenant montrer que $T(n)$ est également vraie. Nous partons de la définition de $(a_n)_n$ et appliquons le lemme E.12 ainsi que l'hypothèse de récurrence :

$$a_n = a_0 + \alpha \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \leq a_0 + \frac{2\alpha C}{n} + \frac{(n-3)\alpha C}{2n} \leq a_0 + \frac{\alpha C}{2} + \frac{\alpha C}{2n}$$

Ainsi, nous obtenons :

$$a_n \leq C \iff 1 \leq C \left(1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2n}\right) \iff C \geq \frac{2n}{(2-\alpha)n - \alpha}$$

En remarquant que le dernier terme est le terme général d'une suite décroissante, nous avons :

$$\frac{2}{2-\alpha-\alpha/n} = \frac{2n}{(2-\alpha)n - \alpha} \leq \frac{10}{10-6\alpha} = \frac{5}{5-3\alpha}$$

Par conséquent, nous en déduisons que :

$$a_n \leq C \iff C \geq \frac{5}{5-3\alpha}$$

Ceci prouve que $T(n)$ est vraie.

Conclusion : En récapitulant, nous avons montré que $T(0), \dots, T(5)$ sont vraies, et que $T(0), \dots, T(n-1) \implies T(n)$ pour tout entier naturel n . Ainsi, nous avons démontré par récurrence forte que la proposition $T(n)$ est vraie pour tout entier naturel n . □

Lemme F.15 (Développement asymptotique). *Pour un réel $\alpha > 0$, considérons la suite $(a_n)_n$ définie récursivement comme suit :*

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = a_0 + \alpha \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{\binom{n}{k}}$$

Alors la suite $(a_n)_n$ peut être développée de la forme suivante :

$$a_n = a_0 + O(n^{-1})$$

Démonstration. Soit $n \geq 3$ un entier naturel. En partant de la définition de $(a_n)_n$ et en utilisant le résultat précédent, nous pouvons établir l'encadrement suivant :

$$a_0 \leq a_n \leq a_0 + 2\frac{\alpha C}{n} + (n-3)\frac{\alpha C}{\frac{n(n-1)}{2}} \leq a_0 + \frac{4\alpha C}{n}$$

Cela démontre le lemme. □

Proposition F.16 (Viabilité et écart-type).

$$w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (1-\beta)n \quad \text{et} \quad \sigma_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\beta(1-\beta)n}$$

Démonstration. En utilisant la proposition 5.9 qui établit que :

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n!$$

nous pouvons immédiatement déduire le premier résultat sur la viabilité :

$$w_n = \frac{W_{n+1}}{W_n} = (1-\beta)\frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (1-\beta)n$$

Pour le deuxième résultat concernant l'écart-type, nous revenons à l'équation (2.2) :

$$p_{n+1}(dx) = (1-\beta)\frac{xp_n(dx)}{w_n} + \beta q(dx)$$

En multipliant cette équation par la variable x avant de l'intégrer, nous obtenons :

$$w_{n+1} = \frac{1-\beta}{w_n} \int_0^{+\infty} x^2 p_n(dx) + \beta \mu_1$$

La variance peut alors être exprimée comme :

$$\int_0^{+\infty} x^2 p_n(dx) - w_n^2 = \frac{w_n}{1-\beta} (w_{n+1} - \beta \mu_1) - w_n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (1-\beta)n^2 - (1-\beta)^2 n^2 = \beta(1-\beta)n^2$$

Cela nous permet de conclure cette démonstration. □

Théorème F.17 (Fitness asymptotique). *La suite des distributions de fitness $(p_n)_n$ est équivalente à la somme pondérée d'une exponentielle et d'une gamma :*

$$\|p_n - \beta q - (1-\beta)\Gamma_{n+1}\|_{VT} = \|p_n - \beta q - (1-\beta)\Gamma_{n+1}\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Démonstration. Pour démontrer ce théorème, nous commençons par rappeler l'équation (F.1), adaptée aux densités et en faisant apparaître la suite $(v_n)_n$:

$$p_n(x) = \beta \sum_{k=0}^{n-1} \frac{v_{n-k}}{v_n} x^k q(x) + \frac{1}{v_n} (1-\beta) x^n p_0(x)$$

En isolant les deux termes qui nous intéressent, nous obtenons :

$$p_n(x) = \beta e^{-x} + (1-\beta) \frac{x^n e^{-x}}{n!} + \beta \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\binom{n}{k}} \frac{x^k}{k!} e^{-x}$$

Nous nous intéressons alors à la somme restante :

$$\beta \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\binom{n}{k}} \frac{x^k}{k!} e^{-x} \leq \frac{\beta e^{-x}}{n} \left[x + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + 2 \frac{\lfloor x \rfloor \lfloor x \rfloor!}{\lfloor x \rfloor!} \right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

En utilisant le corollaire du lemme de Scheffé, qui s'applique ici car les mesures impliquées sont des mesures de probabilité, nous pouvons conclure le théorème.

□

Bibliographie

- BUZZI, Jérôme (2011). « Compacité faible de l'ensemble des probabilités ». In : URL : <https://drive.google.com/file/d/16FXntkZTJ44Y1AEcLAM2RoePEth3Fk20/view?usp=sharing>.
- DEREICH, Steffen et Peter MÖRTERS (2013). « Emergence of condensation in Kingman's model of selection and mutation ». In : *Acta Applicandae Mathematicae* 127.1, p. 17-26. DOI : [10.1007/s10440-012-9790-3](https://doi.org/10.1007/s10440-012-9790-3). URL : <https://drive.google.com/file/d/1zGhaHSxsCqSRgAnRMzvJNdchonhLeEib/view?usp=sharing>.
- DICTIONNAIRE DE MATHÉMATIQUES - BIBMATH (2023). *Théorème du porte-manteau*. URL : https://drive.google.com/file/d/1cKSPNhTPFiiH7X8a1TAITK1_LsBfX730/view?usp=sharing.
- FELLER, William (1991). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume 1*. 3rd. John Wiley & Sons. Chap. XIII, p. 303-341. ISBN : 978-0-471-25708-0. URL : https://drive.google.com/file/d/1XtNa_UOtRX-YeJLqoI4gndNyGT5OM-_h/view?usp=sharing.
- KALUZA, Th. (1928). « Über die Koeffizienten reziproker Potenzreihen ». In : *Mathematische Zeitschrift* 28.1, p. 161-170. DOI : [10.1007/BF01181155](https://doi.org/10.1007/BF01181155). URL : https://drive.google.com/file/d/1feL3JkVDwc5XGdhwafIr6_qBTAGDBcWl/view?usp=sharing.
- KINGMAN, J. F. C. (1972). « Semi-p-Functions ». In : *Transactions of the American Mathematical Society* 174, p. 257-273. DOI : [10.2307/1996107](https://doi.org/10.2307/1996107). URL : https://drive.google.com/file/d/1IOI_u9KScHbz54vnBt0_XwXLib6NfMVX/view?usp=sharing.
- (1978). « A simple model for the balance between selection and mutation ». In : *Journal of Applied Probability* 15.1, p. 1-12. URL : <https://drive.google.com/file/d/1EI55pD7MJ1bLRNxxI493DT-91r0R0ySz/view?usp=sharing>.
- (1996). « Powers of Renewal Sequences ». In : *Bulletin of the London Mathematical Society* 28.5, p. 527-532. URL : https://drive.google.com/file/d/12v1_rhr-d2YYw20Sh3fqt3sxW2bVlu2_/view?usp=sharing.
- WIKIPEDIA - L'ENCYCLOPÉDIE LIBRE (2023). *Convergence de mesures*. URL : <https://drive.google.com/file/d/1biWu22NdixKFV4fPXPiGLUH80ZXfLLMC/view?usp=sharing>.
- ZUCKER, Arnaud (2005). *Les classes zoologiques en Grèce ancienne : D'Homère (VIIIe av. J.-C.) à Élien (IIIe ap. J.-C.)*. Nouvelle édition. Presses universitaires de Provence. Chap. 3, p. 111-123. ISBN : 9782821827646. DOI : <https://doi.org/10.4000/books.pup.586>. URL : https://drive.google.com/file/d/1pIaOPkgnwsLhAvBKa4Fs-fG_75wzva8R/view?usp=sharing.