x_k : vecteur d'état caché à l'instant k composé de $\begin{pmatrix} r_k \\ m_{1_k} \\ m_{2_k} \end{pmatrix}$ avec r_k la position du robot, m_{1_k} la position de l'amer 1 et m_{2_k} la position de l'amer 2.

$$x_{k+1} = Fx_k + w_k, F = \begin{pmatrix} cos(\frac{\pi}{4}) & -sin(\frac{\pi}{4}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ sin(\frac{\pi}{4}) & cos(\frac{\pi}{4}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$w_k \sim \mathcal{N}(0, Q_w), Q_w = \begin{pmatrix} Q_w^R & 0 & 0 \\ 0 & I_2 \times 10^{-20} & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \times 10^{-20} \end{pmatrix}, Q_w^R = I_2 \times 2.5 \times 10^{-3}$$

$$z_k = H_k x_k + v_k = \begin{pmatrix} z_{1_k} \\ z_{2_k} \end{pmatrix}$$

$$v_k \sim \mathcal{N}(0, R), R = I_4 \times 0.01 = \begin{pmatrix} R_1 & 0_2 \\ 0_2 & R_2 \end{pmatrix}$$

Première fonction d'importance proposée (c'est la dynamique a priori) :

$$q(r_k^{(i)}, m_{1_k}^{(i)}, m_{2_k}^{(i)} | r_{k-1}^{(i)}, m_{1_{k-1}}^{(i)}, m_{2_{k-1}}^{(i)}, z_k) = p(r_k^{(i)}, m_{1_k}^{(i)}, m_{2_k}^{(i)} | r_{k-1}^{(i)}, m_{1_{k-1}}^{(i)}, m_{2_{k-1}}^{(i)})$$

Autre fonction d'importance proposée (hypothèses d'indépendance des lois et des variables) :

$$\begin{aligned} q(r_k^{(i)}, m_{1_k}^{(i)}, m_{2_k}^{(i)} | r_{k-1}^{(i)}, m_{1_{k-1}}^{(i)}, m_{2_{k-1}}^{(i)}, z_k) &= q_r(r_k^{(i)} | r_{k-1}^{(i)}) q_a(m_{1_k}^{(i)}, m_{2_k}^{(i)} | r_k^{(i)}, m_{1_{k-1}}^{(i)}, m_{2_{k-1}}^{(i)}, z_k) \\ &= q_r(r_k^{(i)} | r_{k-1}^{(i)}) q_1(m_{1_k}^{(i)} | r_k^{(i)}, m_{1_{k-1}}^{(i)}, z_k) q_2(m_{2_k}^{(i)} | r_k^{(i)}, m_{2_{k-1}}^{(i)}, z_k) \end{aligned}$$

Pour la "partie robot", on utilise la dynamique a priori : $q_r(r_k^{(i)} | r_{k-1}^{(i)}) = p(r_k^{(i)} | r_{k-1}^{(i)})$.
Dans le cas d'un amer visible, par exemple le premier, $q_1(m_{1_k}^{(i)} | r_k^{(i)}, m_{1_{k-1}}^{(i)}, z_k) \sim \mathcal{N}(r_k^{(i)} + z_{1_k}, R_1)$. Ce choix pose problème : étant donné que la mesure est utilisée pour la génération de nouvelles particules, le bruit de mesure est très important, relativement au bruit sur la dynamique des amers (quasi nul). La dynamique a priori des amers est donc proche d'une fonction de dirac. La génération de particules utilisant la mesure comme information ne pose pas de problème, bien que les composantes "amers" des particules seront bien plus dispersées que si l'on avait utilisé la dynamique a priori. L'évaluation des poids des particules tirées va donc être toujours nulle. La somme des poids sera nulle, il sera impossible de normaliser les poids, et l'algorithme ne fonctionnera pas.

Alternative étudiée (et implémentée) : lors de l'évaluation des particules tirées selon cette loi, on ne considère plus la dynamique a priori (seul apparait le terme de vraisemblance de la mesure au numérateur), la dynamique a priori est à variance infinie. L'algorithme fonctionne, donne des résultats toujours vivants, mais globalement le filtre ne parvient pas à estimer correctement l'état caché, et les particules sont toutes évaluées identiquement.

Black-rao : Particule 2D pour la position du robot, 1 gaussienne pour chaque amer : on se donne à chaque instant k

$$\{r_k^{(i)}, m_{1_{k|k}}^{(i)}, P_{1_{k|k}}^{(i)}, m_{2_{k|k}}^{(i)}, P_{2_{k|k}}^{(i)}, w_k^{(i)}, z_k\}$$

avec r_k la particule de la partie robot, m_i l'espérance de la loi Normale pour l'amer i et P_i sa covariance, w le poids de la particule (les indices de temps et de particules omis).
Dans cette partie, les particules correspondant à la partie robot suivent la dynamique a priori (cf parties précédentes).
Pour les amers :

$$\forall j \in \{1, 2\}, m_{j_{k|k-1}}^{(i)} = m_{j_{k-1|k-1}}^{(i)}, P_{j_{k|k-1}}^{(i)} = P_{j_{k-1|k-1}}^{(i)}$$

car les amers ne bougent pas.
Evaluation (la fonction d'importance se simplifie avec la dynamique a priori) :

$$p(z_k|r_k^{(i)}) \sim \mathcal{N}(m_{1_{k|k-1}} - r_k^{(i)}, P_{1_{k|k-1}}^{(i)} + R_1)\mathcal{N}(m_{2_{k|k-1}} - r_k^{(i)}, P_{2_{k|k-1}}^{(i)} + R_2)$$

Cas linéaire additif gaussien : équations du filtre de Kalman :

$$\begin{aligned}
K_{1,k}^{(i)} &= P_{1_{k|k-1}}^{(i)}(R_1 + P_{1_{k|k-1}}^{(i)})^{-1} \\
m_{1_{k|k}}^{(i)} &= m_{1_{k|k-1}}^{(i)} + K_{1,k}^{(i)}(z_{1_k} + r_k^{(i)} - m_{1_{k|k-1}}^{(i)}) \\
P_{1_{k|k}}^{(i)} &= (I_2 - K_{1,k}^{(i)})P_{1_{k|k-1}}^{(i)}
\end{aligned}$$

Ces équations sont valables pour le deuxième amer.
Si un amer n'est pas visible, on écrit directement :

$$m_{j_{k|k}}^{(i)} = m_{j_{k-1|k-1}}^{(i)}, P_{j_{k|k}}^{(i)} = P_{j_{k-1|k-1}}^{(i)}$$

Aussi, pour l'estimation des moments à posteriori, en présence d'un mélange de loi normales (une particule donne une composante du mélange) :

$$\begin{aligned}
\forall k, \sum_i w_k^{(i)} &= 1 \\
m_{1_k} &= \sum_i w_k^{(i)} \mathcal{N}(m_{1_{k|k}}^{(i)}, P_{1_{k|k}}^{(i)}) \\
E[m_{1_k}] &= \sum_i w_k^{(i)} m_{1_{k|k}}^{(i)} \\
Cov[m_{1_k}] &= \sum_i w_k^{(i)} (P_{1_{k|k}}^{(i)} + (m_{1_k} - E[m_{1_k}])(m_{1_k} - E[m_{1_k}])^T)
\end{aligned}$$