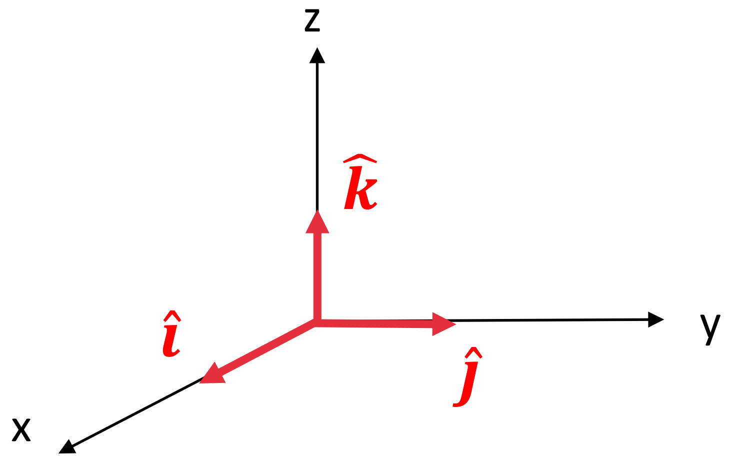
Vector Unitario

Es un vector con magnitud igual a uno

Vectores unitarios $\hat{\imath}\,,\ \hat{\jmath}\,,\ \hat{k}$

Son vectores de magnitud uno y con dirección a lo largo de los ejes cartesianos x, y, z



$$|\hat{\imath}| = 1$$

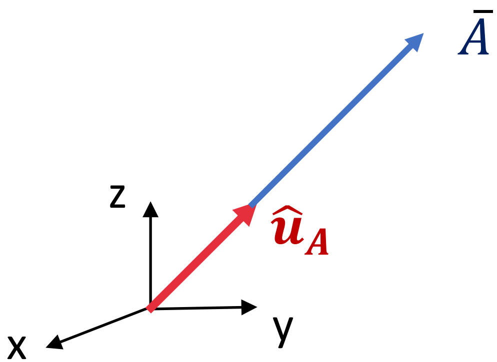
$$|\hat{\jmath}| = 1$$

$$|\hat{k}| = 1$$

Vector unitario en la dirección del vector

$$\bar{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$$

Es un vector de magnitud uno y con la misma dirección del vector $\bar{A}$



$$\boxed{|\hat{\boldsymbol{u}}_A| = \mathbf{1}}$$

$$|\bar{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

$$\hat{\boldsymbol{u}}_A = \frac{\bar{A}}{|\bar{A}\,|} = \frac{A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}}{|\bar{A}\,|}$$

$$\hat{\boldsymbol{u}}_A = \frac{A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}}{|\bar{A}\,|}$$

$$\hat{\boldsymbol{u}}_A = \frac{A_x}{|\bar{A}\,|}\hat{\imath} + \frac{A_y}{|\bar{A}\,|}\hat{\jmath} + \frac{A_z}{|\bar{A}\,|}\hat{k}$$

Ejemplo-Vector Unitario

Obtener el vector unitario en la dirección del vector: $\bar{A} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} - 2\hat{k}$

$$\hat{\boldsymbol{u}}_A = \frac{A_x}{|\bar{A}\,|}\hat{\imath} + \frac{A_y}{|\bar{A}\,|}\hat{\jmath} + \frac{A_z}{|\bar{A}\,|}\hat{k} \qquad |\bar{A}| = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$$

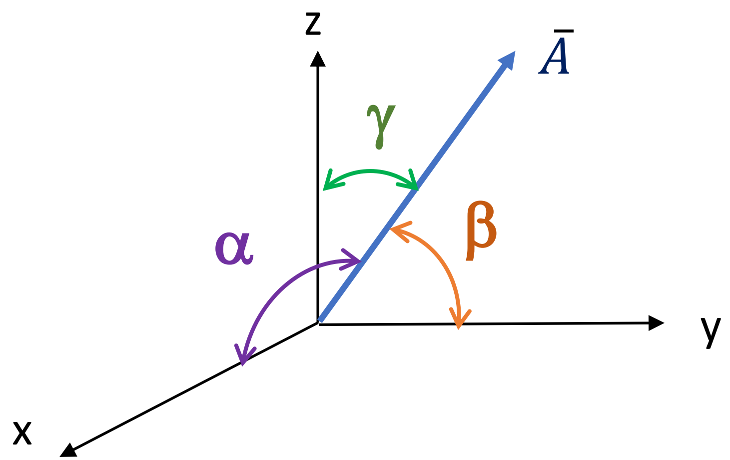
$$\hat{\boldsymbol{u}}_A = \frac{2}{3}\hat{\imath} - \frac{1}{3}\hat{\jmath} - \frac{2}{3}\hat{k}$$

$$comprobando \Rightarrow \qquad |\hat{\boldsymbol{u}}_A| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$|\hat{\boldsymbol{u}}_A| = \sqrt{\left(\frac{4}{9}\right) + \left(\frac{1}{9}\right) + \left(\frac{4}{9}\right)} = \sqrt{\left(\frac{9}{9}\right)} = 1$$

Ángulos Directores

Son los ángulos que se forman entre un vector, en el espacio tridimensional, con cada uno de los ejes cartesianos X, Y, Z



$\alpha \Rightarrow$ ángulo entre el vector $\bar{A}$ con el eje X

$\beta \Rightarrow$ ángulo entre el vector $\bar{A}$ con el eje Y

$\gamma \Rightarrow$ ángulo entre el vector $\bar{A}$ con el eje Z

Ángulos Directores

Ecuaciones para los Cosenos Directores

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{|\bar{A}|} \qquad \cos\beta = \frac{A_y}{|\bar{A}|} \qquad \cos\gamma = \frac{A_z}{|\bar{A}|}$$

$$en\ donde:$$

$$\bar{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \qquad |\bar{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Ecuaciones para los Ángulos Directores

$$\alpha = cos^{-1}\left[\frac{A_x}{|\bar{A}|}\right] \qquad \beta = cos^{-1}\left[\frac{A_y}{|\bar{A}|}\right] \qquad \gamma = cos^{-1}\left[\frac{A_z}{|\bar{A}|}\right]$$

Ejemplo-Ángulos Directores

Obtener los ángulos directores del vector: $\bar{A} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} - 2\hat{k}$

$$\left.\begin{array}{r} componentes \\ del\ vector\ \bar{A} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} A_x = 2 \\ A_y = -1 \\ A_z = -2 \end{array}$$

$$magnitud\ del\ vector\ \bar{A}$$

$$|\bar{A}| = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$$

$$\alpha = cos^{-1}\left[\frac{A_x}{|\bar{A}|}\right] \qquad \beta = cos^{-1}\left[\frac{A_y}{|\bar{A}|}\right] \qquad \gamma = cos^{-1}\left[\frac{A_z}{|\bar{A}|}\right]$$

$$\alpha = cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \qquad \beta = cos^{-1}\left(\frac{-1}{3}\right) \qquad \gamma = cos^{-1}\left(\frac{-2}{3}\right)$$

$$\boxed{\alpha = 48.19°} \qquad \boxed{\beta = 109.47°} \qquad \boxed{\gamma = 131.81°}$$

Producto Cruz

Operación vectorial entre dos vectores que obtiene un vector perpendicular a los vectores que se multiplican

$$\bar{A}\; x\; \bar{B} = \bar{C}$$

$$\bar{C}\;\; es\; perpendicular\;\; \bar{A}\; y\; \bar{B}$$

$$\bar{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$$

$$\bar{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$$

$$\bar{C} = C_x\hat{\imath} + C_y\hat{\jmath} + C_z\hat{k}$$

producto cruz entre vectores unitarios

$$\hat{\imath}\; x\; \hat{\jmath} = \hat{k} \qquad \hat{\jmath}\; x\; \hat{k} = \hat{\imath} \qquad \hat{k}\; x\; \hat{\imath} = \hat{\jmath}$$

$$\hat{\jmath}\; x\; \hat{\imath} = -\hat{k} \qquad \hat{k}\; x\; \hat{\jmath} = -\hat{\imath} \qquad \hat{\imath}\; x\; \hat{k} = -\hat{\jmath}$$

$$\hat{\imath}\; x\; \hat{\imath} = 0 \qquad \hat{\jmath}\; x\; \hat{\jmath} = 0 \qquad \hat{k}\; x\; \hat{k} = 0$$

producto cruz entre vectores paralelos = cero

Magnitud-Producto Cruz

La magnitud del producto cruz se obtiene:

$$si \;\; \bar{C} = \bar{A} \; x \; \bar{B} \qquad y \qquad \bar{C} = C_x\hat{\imath} + C_y\hat{\jmath} + C_z\hat{k}$$

$$entonces \; la \; magnitud \; es \Rightarrow \qquad |\bar{C}| = \sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2}$$

también se obtiene la magnitud por la relación:

$$|\bar{A} \; x \; \bar{B}| = |\bar{A}||\bar{B}|sen\theta$$

pero debe conocerse θ que es el ángulo entre $\bar{A}$ y $\bar{B}$

en donde las magnitudes de $\bar{A}$ y $\bar{B}$ se obtienen:

$$|\bar{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \qquad y \qquad |\bar{B}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Ejemplo-Producto Cruz

Obtener el vector resultante del producto cruz de los vectores: $\bar{A} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} - 2\hat{k}$, $\bar{B} = -4\hat{\imath} + 3\hat{k}$

$se\ puede\ aplicar\ la\ regla \Rightarrow$

$$\begin{array}{c} \rightarrow (+) \\ \hat{\imath}\ x\ \hat{\jmath}\ x\ \hat{k}\ x\ \hat{\imath}\ x\ \hat{\jmath} \\ (-) \leftarrow \end{array}$$

$además:\ \hat{\imath}\ x\ \hat{\imath} = \hat{\jmath}\ x\ \hat{\jmath} = \hat{k}\ x\ \hat{k} = 0$

$$\bar{A}\ x\ \bar{B} = \left(2\hat{\imath} - \hat{\jmath} - 2\hat{k}\right)\ x\ (-4\hat{\imath} + 3\hat{k})$$

$$\bar{C} = -8(\hat{\imath}\ x\ \hat{\imath}) + 6\left(\hat{\imath}\ x\ \hat{k}\right) + 4(\hat{\jmath}\ x\ \hat{\imath}) - 3\left(\hat{\jmath}\ x\ \hat{k}\right) + 8\left(\hat{k}\ x\ \hat{\imath}\right) - 6(\hat{k}\ x\ \hat{k})$$

$$\bar{C} = -8(0) + 6(-\hat{\jmath}) + 4\left(-\hat{k}\right) - 3(\hat{\imath}) + 8(\hat{\jmath}) - 6(0)$$

$$\bar{C} = -3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 4\hat{k}$$

$\bar{C}\ \ es\ perpendicular\ \ \bar{A}\ y\ \bar{B}$

$magnitud \Rightarrow |\bar{C}| = \sqrt{9 + 4 + 16} = \sqrt{29}$ =5.385

Producto Punto

Es una operación entre dos vectores que resulta del producto de las magnitudes de cada vector por el coseno del ángulo entre ellos

$$\bar{A} \bullet \bar{B} = |\bar{A}||\bar{B}|cos\theta$$

θ *es el ángulo entre* $\bar{A}$ *y* $\bar{B}$

$$\bar{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$$

$$|\bar{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

$$\bar{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$$

$$|\bar{B}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

producto punto entre vectores unitarios

$\hat{\imath} \bullet \hat{\imath} = 1$ $\qquad$ $\hat{\jmath} \bullet \hat{\jmath} = 1$ $\qquad$ $\hat{k} \bullet \hat{k} = 1$

$\hat{\jmath} \bullet \hat{\imath} = 0$ $\qquad$ $\hat{k} \bullet \hat{\jmath} = 0$ $\qquad$ $\hat{\imath} \bullet \hat{k} = 0$

producto punto entre vectores perpendiculares = cero

Ejemplo-Producto Punto

Obtener el producto punto entre los vectores:
$\bar{A} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} - 2\hat{k}$, $\bar{B} = -4\hat{\imath} + 3\hat{k}$

$$regla: \quad \hat{\imath} \bullet \hat{\imath} = \hat{\jmath} \bullet \hat{\jmath} = \hat{k} \bullet \hat{k} = 1 \qquad y \quad \hat{\imath} \bullet \hat{\jmath} = \hat{\imath} \bullet \hat{k} = \hat{\jmath} \bullet \hat{k} = 0$$

$$\bar{A} \bullet \bar{B} = \left(2\hat{\imath} - \hat{\jmath} - 2\hat{k}\right) \bullet (-4\hat{\imath} + 3\hat{k})$$

$$\bar{A} \bullet \bar{B} = -8(\hat{\imath} \bullet \hat{\imath}) + 6\left(\hat{\imath} \bullet \hat{k}\right) + 4(\hat{\jmath} \bullet \hat{\imath}) - 3\left(\hat{\jmath} \bullet \hat{k}\right) + 8\left(\hat{k} \bullet \hat{\imath}\right) - 6(\hat{k} \bullet \hat{k})$$

$$\bar{A} \bullet \bar{B} = -8(1) + 6(0) + 4(0) - 3(0) + 8(0) - 6(1)$$

$$\boxed{\bar{A} \bullet \bar{B} = -14}$$

$$\left.\begin{matrix} procedimiento \\ rápido \end{matrix}\right\} \quad \boxed{\begin{array}{l} \bar{A} \bullet \bar{B} = \quad 2\hat{\imath} - 1\hat{\jmath} - 2\hat{k} \\ \qquad\quad\; -4\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 3\hat{k} \\ \qquad\quad\; \text{-------------------} \\ \bar{A} \bullet \bar{B} = -8 + 0 - 6 = -14 \end{array}}$$

Ejemplo-ángulo entre los vectores

Obtener el ángulo entre los vectores:

$$\bar{A} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} - 2\hat{k} \quad , \quad \bar{B} = -4\hat{\imath} + 3\hat{k}$$

$$\bar{A} \bullet \bar{B} = |\bar{A}||\bar{B}|cos\theta \qquad \theta \; es\ el\ ángulo\ entre\ \bar{A}\ y\ \bar{B}$$

$$regla: \quad \hat{\imath} \bullet \hat{\imath} = \hat{\jmath} \bullet \hat{\jmath} = \hat{k} \bullet \hat{k} = 1$$
$$\hat{\imath} \bullet \hat{\jmath} = \hat{\imath} \bullet \hat{k} = \hat{\jmath} \bullet \hat{k} = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{rl} \bar{A} \bullet \bar{B} = & 2\hat{\imath} - 1\hat{\jmath} - 2\hat{k} \\ & -4\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 3\hat{k} \\ & \text{-------------------} \\ \bar{A} \bullet \bar{B} = & -8 + 0 - 6 = -14 \end{array}}$$

$$\left.\begin{array}{c} magnitudes\ de\ los \\ vectores\ \bar{A}\ y\ \bar{B} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} |\bar{A}| = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3 \\ |\bar{B}| = \sqrt{16+0+9} = \sqrt{25} = 5 \end{array}$$

$$cos\theta = \frac{\bar{A} \bullet \bar{B}}{|\bar{A}||\bar{B}|} = \frac{-14}{(3)(5)} = -0.933 \qquad \boxed{\theta = cos^{-1}(-0.933) = 158.9°}$$

texto