CINEMÁTICA Física Dr. Alfonso Serrano Heredia

El **movimiento de un objeto** queda definido a través de magnitudes o cantidades físicas como el desplazamiento, la velocidad, la aceleración, que a su vez para un entendimiento práctico del movimiento puede ser analizado a través de gráficas de estas cantidades físicas en función de la variable tiempo.

Estas cantidades físicas son descritas a continuación:

a. **Posición:** se representa con la variable X, indicando la ubicación del objeto con respecto a un punto de referencia X=0. Cabe mencionar que esta posición depende de dónde se establece el marco de referencia.
b. **Marco de referencia:** es un sistema físico, o un artefacto que se considera fijo, y con respecto a este punto es como se establece la posición de un objeto.
c. **Desplazamiento:** Es el cambio de posición que tuvo el objeto, el cual no depende del marco de referencia y se determina mediante la diferencia entre la posición final con la posición inicial, el desplazamiento es una cantidad vectorial, lo que significa que tiene tanto una dirección, como una magnitud, y se determina por:

$$\Delta X = X_2 - X_1$$

d. **Distancia*:*** es la magnitud del desplazamiento sin tomar en cuenta la dirección, y es una cantidad escalar por tener solo magnitud.
e. **Velocidad media:** es la manera de cómo cambia (razón de cambio) el desplazamiento del objeto en un determinado tiempo y se determina como sigue:

$$\overline{V} = \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{X_2 - X_1}{t_2 - t_1}$$

f. **Velocidad instantánea:** es la manera de cómo cambia (razón de cambio) el desplazamiento del objeto, pero en un tiempo infinitesimalmente pequeño y se determina como sigue

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

por lo que la función de velocidad para cualquier instante de tiempo se obtiene derivando con respecto al tiempo la función de posición del objeto. De la ecuación anterior y aplicando el cálculo integral se obtiene:

$$\Delta X = X - X_o = \int_0^t V\, dt$$

por lo que el desplazamiento del objeto se determina mediante la integral definida de la función de posición con respecto al tiempo. Se recomienda revisar la sección 2.8 del libro de texto, en relación a las ecuaciones de cinemáticas deducidas del cálculo.

g. **Aceleración media:** Es la manera cómo cambia (razón de cambio) la velocidad del objeto en un determinado tiempo y se calcula por la ecuación

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1} = \frac{V_F - V_O}{t}$$

h. **Aceleración instantánea:** Es la manera cómo cambia (razón de cambio) la velocidad del objeto pero en un tiempo infinitesimalmente pequeño y se determina como sigue:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt}$$

por lo que la función de aceleración para cualquier instante de tiempo se obtiene derivando con respecto al tiempo la función de velocidad del objeto. De la ecuación anterior y aplicando el cálculo integral se obtiene:

$$\Delta V = V - V_o = \int_0^t a\, dt$$

por lo que el cambio de velocidad del objeto se determina mediante la integral definida de la función de velocidad con respecto al tiempo. Se recomienda revisar la sección 2.8 del libro de texto, en relación a las ecuaciones de cinemáticas deducidas del cálculo.

De los conceptos y ecuaciones anteriores se deducen las siguientes ecuaciones de cinemática para el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado:

$$X = X_o + V_o t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$V = V_o + at$$

$$V^2 = V + 2a(X - X_o)$$

en caso de que la velocidad sea constante, es decir aceleración cero, el desplazamiento es

$$\Delta X = V_{cte} t \quad , \text{ o bien: } \quad V_{cte} = \frac{\Delta X}{t} = \frac{d}{t}$$

A continuación se presentan ejemplos del movimiento en línea recta con sus correspondientes gráficas:

Ejemplo 1: Movimiento en línea recta con velocidades constantes tanto positiva, como negativa.

Considera el movimiento de un carrito a lo largo de un plano horizontal sin fricción, con una rapidez (magnitud de la velocidad) de 2 m/s, en donde primeramente se mueve hacia la derecha (dirección positiva del eje X) y después de recorrer una distancia de 6 metros, rebota con un resorte, haciendo que el carrito se mueva hacia la izquierda (dirección negativa del eje X) con la misma rapidez de 2 m/s.

a. Gráfica de posición del carrito en función del tiempo.

Primeramente se muestra en la Fig. 1, la gráfica de posición con respecto al tiempo, del movimiento del carrito cuando se mueve tanto hacia a la derecha, como hacia la izquierda. Observa que la rapidez constante de 2 m/s, significa que cada segundo que pasa, el carrito se desplaza 2mts, por lo tanto, al transcurrir tres segundos va a recorrer los 6 metros de distancia, luego rebota con el resorte, moviéndose a la misma rapidez de 2m/s, pero en la dirección negativa del eje X, por lo que regresa al punto de partida en otros tres segundos más, haciendo un total de 6 segundos en todo el recorrido de ida y de vuelta.

Nota sobre variables en los ejes de coordenadas: cabe mencionar que en matemáticas, es común utilizar la variable X en el eje horizontal y la variable Y en el eje vertical, conocidas también como coordenadas espaciales, y corresponde a una ecuación de Y que depende de la variable X, pero en cinemática, en el eje horizontal corresponde siempre a la variable tiempo (t) y en el eje vertical, puede corresponder a la variable X, si la ecuación es de posición que depende del tiempo, o la ecuación de velocidad que depende también del tiempo y por último la ecuación de aceleración que depende del tiempo.

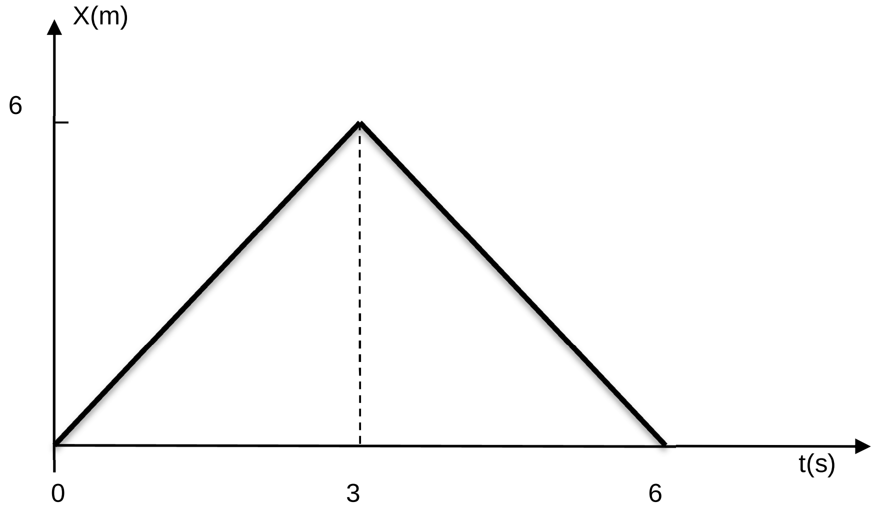


Fig. 1. Gráfica de posición en función del tiempo a velocidad constante.

b. Análisis de la gráfica de posición del carrito en función del tiempo.

Debido a la rapidez constante de 2 m/s, tanto en su movimiento hacia la derecha (dirección positiva en el eje X), como en su movimiento hacia la izquierda (dirección negativa en eje X), se puede obtener la siguiente tabla de valores para el tiempo y la posición:

Movimiento hacia la derecha	
Tiempo (s)	Posición (m)
t_o=0	X_o=0
t_1=1	X_1=2
t_2=2	X_2=4
t_3=3	X_3=6

Movimiento hacia la izquierda	
Tiempo (s)	Posición (m)
t_3=3	X_3=6
t_4=4	X_4=4
t_5=5	X_5=2
t_6=6	X_6=0

Aplicando la ecuación de velocidad media en el intervalo de 0 a 3 seg, cuando se mueve hacia la derecha, se obtiene que la velocidad media corresponda a la misma rapidez del carrito, con signo positivo, esto es:

$$\overline{V} = \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{X_3 - X_o}{t_3 - t_o} = \frac{6-0}{3-0} = \frac{6}{3} = 2 \ \frac{m}{s}$$

De la misma manera, al aplicar la ecuación de velocidad media en el intervalo de 3 a 6 seg, cuando se mueve hacia la izquierda, se determina que la velocidad media tiene la misma magnitud que la rapidez del carrito, pero con signo negativo, esto es:

$$\overline{V} = \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{X_6 - X_3}{t_6 - t_3} = \frac{0-6}{6-3} = \frac{-6}{3} = -2 \ \frac{m}{s}$$

c. Relación de la gráfica con la pendiente de una recta que pasa por dos puntos.

La pendiente de una recta indica su grado de inclinación con respecto a la horizontal, y se obtiene analíticamente a través de la función tangente del ángulo que forma la recta con la horizontal, y que también se puede obtener con los valores de los catetos de un triángulo rectángulo, de acuerdo a la definición de la función tangente, esto es:

$$m = \tan\theta = \frac{cateto\ \ opuesto}{cateto\ \ adyacente}$$

Si se observa la gráfica de la Fig. 1, hay dos triángulos rectángulos formados en los intervalos de 0 a 3 segundos y de 3 a 6 segundos, por lo que al determinar la pendiente de la recta (hipotenusa) del primer triángulo, se obtiene que:

$$m = \frac{cateto \;\; opuesto}{cateto \;\; adyacente} = \frac{6}{3} = 2$$

Que corresponde al valor de la velocidad media en el intervalo de 0 a 3 segundos, de la misma manera, al determinar la pendiente de la recta (hipotenusa) del segundo triángulo, se obtiene que:

$$m = \frac{cateto \;\; opuesto}{cateto \;\; adyacente} = -\frac{6}{3} = -2$$

Que corresponde al valor de la velocidad media en el intervalo de 3 a 6 segundos, cabe mencionar que el signo negativo es debido a la inclinación de la recta (hipotenusa) hacia la izquierda (\) de este segundo triángulo, mientras que la inclinación hacia la derecha (/) de la recta (hipotenusa) del primer triángulo es hacia la derecha, que corresponde a una pendiente positiva. De lo anterior se puede concluir que:

En una gráfica de posición en función del tiempo, el valor de la pendiente de una línea recta entre dos puntos de la gráfica, corresponde al valor de la velocidad media en ese intervalo de tiempo correspondiendo a dichos puntos.

d. Gráfica de velocidad del carrito en función del tiempo.

A continuación se muestra la gráfica de velocidad en función del tiempo, que de acuerdo a los resultados numéricos anteriores, corresponde a dos líneas rectas horizontales en los valores de V=2 m/s y V=–2 m/s, esto es:

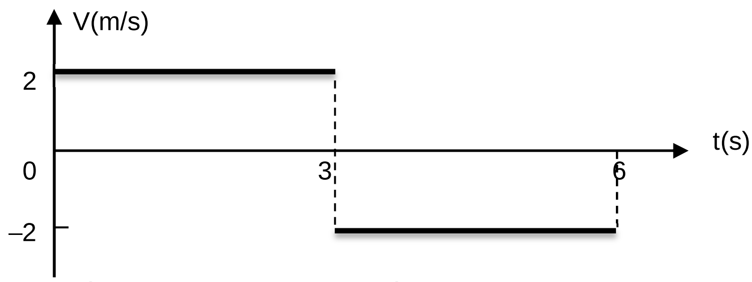


Fig. 2. Gráfica de velocidad en función del tiempo con velocidades constantes.

Por otra parte, anteriormente se escribió la ecuación de desplazamiento que se obtiene mediante la integral definida de la función de velocidad. Una integral representa el área bajo la curva, por lo que el valor del área del rectángulo A, representa el desplazamiento ΔX_1 para el intervalo de tiempo de 0 a 3 segundos, y el valor del área del rectángulo B, representa el desplazamiento ΔX_2 para el intervalo de tiempo de 3 a 6 segundos, y se calcula como:

Área rectángulo A = desplazamiento $\Delta X_1 = (base)(altura) \;= (3)(2) = 6\, m$,

Área rectángulo B = desplazamiento $\Delta X_2 = (base)(altura) = (3)(-2) = -6\, m$

al obtener la suma algebraica de las dos áreas se obtiene el desplazamiento total en el intervalo de tiempo de 0 a 6 segundos, que tiene el valor de cero, ya que el carrito regresa a la misma posición e donde partió.

e. Gráfica de aceleración del carrito en función del tiempo.

A continuación se muestra en la Fig. 3, la gráfica de aceleración en función del tiempo, y debido a que la velocidad es constante en todo el intervalo de tiempo, la aceleración es cero, por lo que la gráfica corresponde a una recta horizontal en el valor de *a*=0 m/s^2 . Por otra parte, anteriormente se escribió la ecuación de aceleración como un cambio de velocidad en un intervalo de tiempo, que se asocia directamente a la pendiente de la recta en la gráfica de velocidad, y debido a que es una recta horizontal, ésta pendiente es cero, confirmando que la aceleración es cero, por lo que la gráfica es:

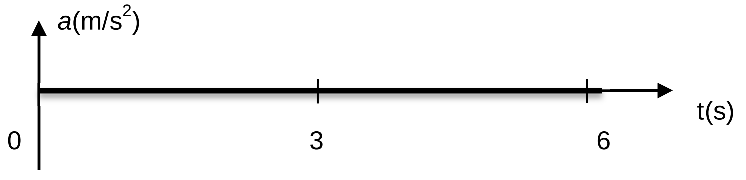


Fig. 3. Gráfica de aceleración en función del tiempo con velocidades constantes.

De lo anterior se puede concluir que:

En una gráfica de velocidad en función del tiempo, el valor de la pendiente de la línea recta, corresponde al valor de la aceleración constante del movimiento rectilíneo.

Otra conclusión importante es que:

En una gráfica de velocidad en función del tiempo, el valor del área bajo la curva o línea recta, corresponde al valor del desplazamiento en ese intervalo de tiempo.

Ejemplo 2: Movimiento en línea recta con aceleración constante diferente de cero.

Considera el movimiento de un carrito a lo largo de un plano sin fricción, inclinado a un ángulo θ por arriba de la horizontal, el cual es lanzado con una velocidad inicial de 8 m/s, pero debido a la pendiente en contra de la gravedad, la aceleración del carrito es negativa con magnitud de 4 m/s^2 , por lo que el carrito se detiene (momentáneamente) en un determinado tiempo y se regresa por el plano inclinado hasta el punto donde fue lanzado.

Primeramente se determina el tiempo y la distancia recorrida que le toma al carrito llegar hasta que se detiene momentáneamente en el plano inclinado, aplicando primero la ecuación:

$V = V_o + at$, sustituyendo valores: $V = 8 - 4t$

que corresponde a la gráfica de una línea recta con pendiente negativa, y para el caso particular de V=0, se determina que el tiempo en que tarda en detenerse el carrito es de 2 segundos, lo cual implica que tardará el mismo tiempo en regresar al punto de partida, es decir que el tiempo total de su recorrido es de 4 segundos. Aplicando la siguiente ecuación se determina la distancia recorrida:

$X = X_o + V_o t + \frac{1}{2}at^2$, sustituyendo valores: $X = 8t - 2t^2$,

que corresponde a la gráfica de una parábola cóncava hacia abajo, y para el caso particular de t=2 s, se determina la posición del carrito en el plano cuando se detiene momentáneamente, esto es X=8 m, y también se puede observar que al sustituir en la ecuación el tiempo total de recorrido de 4 segundos, se obtiene que la posición del carrito es X=0. Se puede también comprobar que al derivar con respecto al tiempo la ecuación de posición, se obtiene la ecuación de velocidad:

$$V = \frac{dX}{dt} = \frac{d}{dt}(8t - 2t^2) = 8 - 4t$$

de igual manera al derivar con respecto al tiempo la ecuación de velocidad, se obtiene la función de aceleración, que en este caso es una constante:

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(8 - 4t) = -4\ m/s$$

a. Gráfica de posición en función del tiempo.

A continuación se muestra en la Fig. 4, la gráfica de posición con respecto al tiempo, del movimiento del carrito cuando se mueve por el plano inclinado, tanto hacia a la derecha, como hacia la izquierda, que corresponde a una función cuadrática. El carrito parte del origen X=0 con una velocidad positiva de 8 m/s, pero debido a la aceleración negativa, la velocidad decrece hasta ser cero, esto se relaciona en la gráfica con la pendiente de una línea recta que sea tangente a cada punto de la curva, por lo que en t=0, la recta tangente A es la de mayor inclinación, comparada con las rectas tangentes B y en el caso de la recta tangente C, es horizontal, es decir de pendiente cero, que corresponde a V=0 para el tiempo t=2 s. Por otro lado, al observar las rectas tangentes D y E se observan que éstas son de pendientes negativas que corresponde a las velocidades negativas del carrito ya que para tiempos mayores a 2 segundos, el carrito se mueve en la dirección negativa.

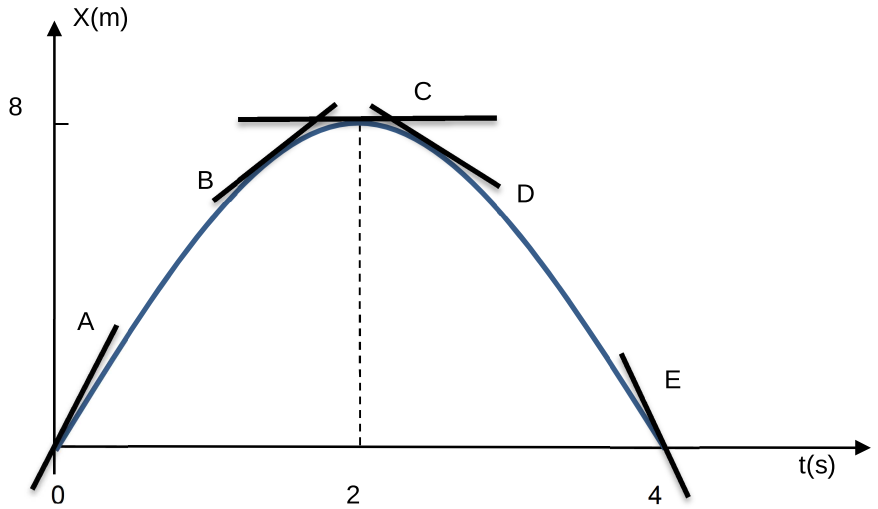


Fig. 4. Gráfica de posición en función del tiempo en movimiento con aceleración constante negativa.

De lo anterior se puede concluir que:

En una gráfica de posición en función del tiempo, el valor de la pendiente de una línea recta que es tangente a un punto de la curva, corresponde al valor de la velocidad instantánea en ese tiempo.

Otra conclusión es la siguiente:

En una gráfica de posición en función del tiempo, si la curva en una parábola cóncava hacia abajo, indica que en todo ese intervalo de tiempo la aceleración es negativa. De igual manera, si la curva es una parábola cóncava hacia arriba, indica que en todo ese intervalo de tiempo la aceleración es positiva.

b. Gráfica de velocidad en función del tiempo.

A continuación se muestra en la Fig. 5, la gráfica de velocidad con respecto al tiempo, del movimiento del carrito cuando se mueve por el plano inclinado, tanto hacia a la derecha, como hacia la izquierda, que corresponde a una función lineal. El carrito parte del origen X=0 con una velocidad positiva de 8 m/s, pero debido a la aceleración negativa, la velocidad decrece hasta ser cero en t=2 s, posteriormente la velocidad es negativa hasta llegar al valor de V=-8 m/s en t=4 s.

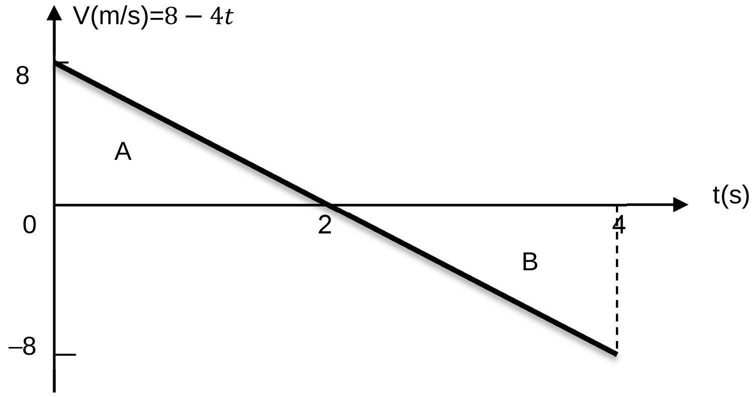


Fig. 5. Gráfica de velocidad en función del tiempo en movimiento con aceleración constante negativa.

Otro aspecto que se puede analizar en la gráfica anterior es que el valor de la pendiente de la línea recta representa la aceleración, que en este caso por la definición de una pendiente:

$$m = tan\theta = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = a = -\frac{8}{2} = -4\ m/s^2$$

Por otra parte, anteriormente se escribió la ecuación de desplazamiento que se obtiene mediante la integral definida de la función de velocidad. Una integral representa el área bajo la curva, por lo que el valor del área del triángulo A, representa el desplazamiento ΔX_1 para el intervalo de tiempo de 0 a 2 segundos, y el valor del área del triángulo B, representa el desplazamiento ΔX_2 para el intervalo de tiempo de 2 a 4 segundos, y se calcula como:

Área triángulo A = desplazamiento $\Delta X_1 = \frac{base\ X\ altura}{2} = \frac{(2)(8)}{2} = 8\ m$,

Área triángulo B = desplazamiento $\Delta X_2 = \frac{base\ X\ altura}{2} = \frac{(2)(-8)}{2} = -8\ m$,

al obtener la suma algebraica de las dos áreas se obtiene el desplazamiento total en el intervalo de tiempo de 0 a 4 segundos, que tiene el valor de cero, ya que el carrito regresa a la misma posición e donde partió.

De lo anterior se puede concluir que:

En una gráfica de velocidad en función del tiempo, el valor de la pendiente de la línea recta, corresponde al valor de la aceleración constante del movimiento rectilíneo. El signo de la aceleración es el mismo signo de la pendiente de la recta: positivo si está inclinada hacia la derecha, y negativo si está inclinada hacia la izquierda.

Otra conclusión importante es que:

En una gráfica de velocidad en función del tiempo, el valor del área bajo la curva o línea recta, corresponde al valor del desplazamiento en ese intervalo de tiempo.

c. Gráfica de aceleración en función del tiempo.

Ahora se muestra en la Fig. 6, la gráfica de aceleración con respecto al tiempo, del movimiento del carrito cuando se mueve por el plano inclinado, tanto hacia a la derecha, como hacia la izquierda, que corresponde a una línea recta horizontal, en el valor a=-4 m/s^2 , es importante observar que cuando el carrito se mueve hacia la derecha va frenando, por lo que su aceleración es negativa, y cuando se regresa moviéndose hacia la izquierda va acelerándose, esto también resulta en una aceleración negativa.

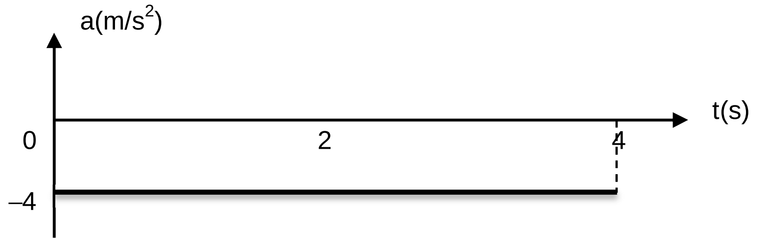


Fig. 6. Gráfica de aceleración en función del tiempo en movimiento con aceleración constante negativa.

Se escribió anteriormente la ecuación de cambio de velocidad que se obtiene mediante la integral definida de la función de aceleración. Una integral representa el área bajo la curva, por lo que el valor del área del rectángulo que se forma en la Fig. 4, representa el cambio de velocidad en el intervalo de tiempo de 0 a 4 segundos, y se calcula como sigue:

Área del rectángulo = cambio de velocidad $\Delta V = base\ X\ altura = (4)(-4) = -16\ m/s$,

O también: $\Delta V = V_F - V_O = -16$, despejando $V_F = \Delta V + V_O = -16 + 8 = -8\ m/s$

De lo anterior se puede concluir que:
En una gráfica de aceleración en función del tiempo, el valor del área bajo la curva o línea recta, corresponde al valor del cambio de velocidad en ese intervalo de tiempo.

MOVIMIENTO RECTILINEO EN EL EJE "Y": CAIDA LIBRE.

Este caso corresponde al movimiento vertical de un objeto bajo la aceleración de la gravedad que es negativa de magnitud g=9.8 m/s^2 . Ya que el movimiento es en línea recta se aplican las mismas ecuaciones anteriores, solo que la aceleración es a=-g, estas son:

$$Y = Y_o + V_o t - \frac{1}{2} g t^2 \ ,$$

$$V = V_o - gt$$

$$V^2 = V_o^2 - 2g(Y - Y_o)$$

Como un ejemplo de movimiento en caída libre, consideremos el caso del lanzamiento vertical hacia arriba de un objeto a una velocidad inicial de 39.2 m/s, al sustituir este valor en las dos primeras ecuaciones anteriores resultan las ecuaciones:

$$Y = 39.2t - 4.9t^2 \ , \qquad\qquad V = 39.2 - 9.8t$$

en donde las gráficas de estas ecuaciones son similares a las figuras anteriores; la de posición vertical en función del tiempo es una parábola cóncava hacia abajo, y para determinar la altura máxima alcanzada, primero se calcula el tiempo en alcanzar esta altura que corresponde cuando la velocidad es cero, esto es:

$$V = 39.2 - 9.8t = 0 \ ,$$

al despejar el tiempo se obtiene t=4 s, y luego se sustituye en la ecuación de posición en Y,

$Y = 39.2(4) - 4.9(4)^2$, por lo que se obtiene que Y=78.4 m, es la máxima altura alcanzada en el lanzamiento vertical hacia arriba. Otro punto a definir en la gráfica es el tiempo total en el aire, que se puede obtener de dos maneras, una forma es multiplicar por 2 el tiempo en que el objeto alcanza su altura máxima, ya que el tiempo que tarda en subir el objeto es el mismo tiempo en que tarda en bajar, además de que alcanza la misma magnitud de la velocidad con que se lanzó, pero con signo negativo, por lo que entonces t=(4)(2) = 8 segundos es el tiempo total en el aire. Otra manera de obtener este tiempo total es emplear la ecuación de posición vertical, fijando el valor de Y=0, y despejando para el tiempo, esto es:

$Y = 39.2t - 4.9t^2 = 0$, al despejar se obtiene t=8 s.

a. Gráfica de posición vertical en función del tiempo.

En la Fig. 7, se muestra esta gráfica de posición vertical en función del tiempo, en donde también se muestran las rectas tangentes en diferentes puntos de la curva, que se relacionan con la siguiente información obtenida con las ecuaciones de posición y de velocidad:

Recta tangente	Tiempo t(s)	Posición Y(m)	Velocidad V(m/s)
A	0	0	39.2
B	3	73.5	9.8
C	4	78.4	0
D	5	73.5	–9.8
E	8	0	–39.2

Obsérvese que los valores de la velocidad en los tiempos indicados, corresponden a los valores de las pendientes de dichas rectas en esos tiempos:

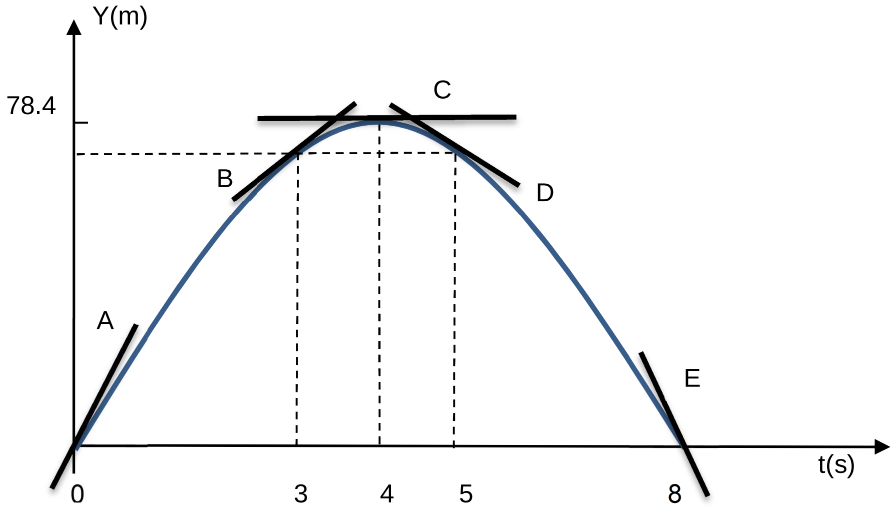


Fig. 7. Gráfica de posición vertical en función del tiempo del movimiento en caída libre.

b. Gráficas de velocidad y aceleración en función del tiempo.

A continuación se muestra en la Fig. 8, la gráfica de velocidad en función del tiempo, que es una línea recta con pendiente negativa:

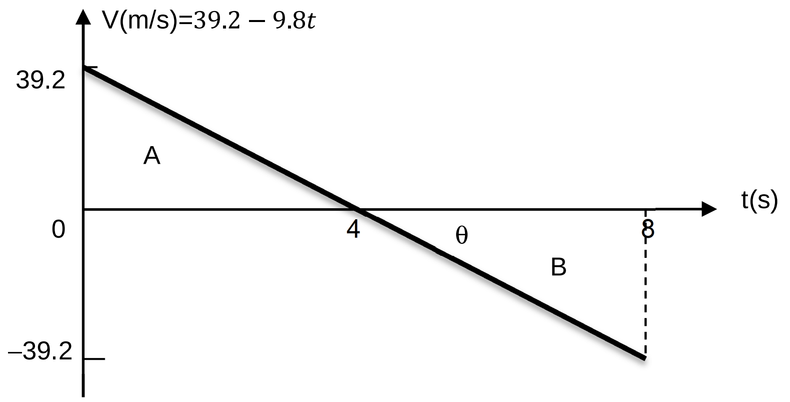


Fig. 8. Gráfica de velocidad vertical en función del tiempo del movimiento en caída libre.

En la gráfica anterior, se puede comprobar la aceleración negativa de la gravedad, al obtener la pendiente de la recta, en particular del triángulo "B", esto es:

$$m = tan\theta = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = a = \frac{-39.2}{4} = -9.8\ m/s^2$$

por lo que en la Fig. 9, se muestra la gráfica de aceleración en función del tiempo para este movimiento vertical en caída libre, correspondiendo a una línea recta horizontal en el valor de a=–9.8 m/s^2 , que corresponde al valor de la gravedad con signo negativo:

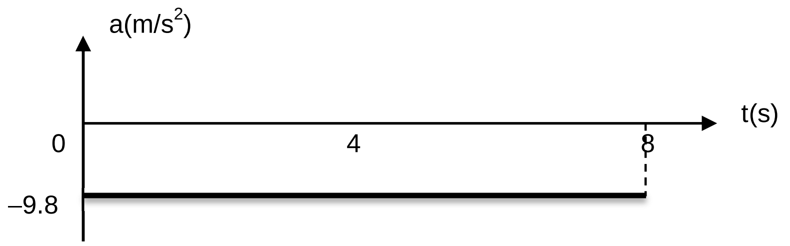


Fig. 8. Gráfica de la aceleración de la gravedad de un objeto en un movimiento vertical en caída libre.

3. Movimiento en un plano

El movimiento en un plano resulta de la combinación de los movimientos horizontal y vertical. Un casi importante de este movimiento es en donde la velocidad horizontal es constante, y el movimiento vertical corresponde al caso de caída libre, lo cual da como resultado un movimiento en un plano conocido como "**tiro parabólico**", ya que la trayectoria descrita por el movimiento sigue una parábola cóncava hacia abajo. El análisis de este movimiento se realiza como sigue:

a) Lanzamiento inicial

Este movimiento se produce cuando un objeto es lanzado con una velocidad inicial V_o formando un ángulo θ (diferente de 90° y 270°) con respecto al eje "X" positivo, gráficamente esta velocidad se puede representar mediante un vector, y para realizar el análisis, deben obtenerse las componentes horizontal y vertical de la velocidad inicial. En la Fig. 10, se muestra la trayectoria de un tiro parabólico, en donde el lanzamiento inicial es desde el punto A con una velocidad inicial V_o y a un ángulo θ arriba de la horizontal. En los puntos B, C, D y E se muestra la forma en que varía el vector velocidad.

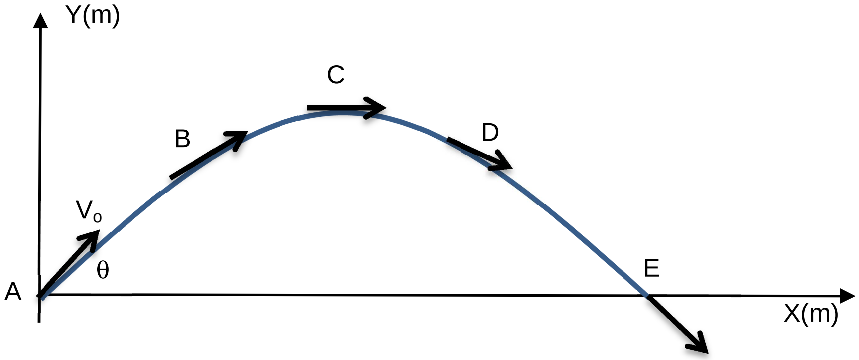


Fig. 10. Gráfica de la trayectoria de un movimiento en tiro parabólico.

b) Análisis del movimiento en el eje "X"

El movimiento horizontal del tiro parabólico corresponde al caso de un objeto con velocidad constante, ya que no hay aceleración en X, solo en el eje Y, por lo que el desplazamiento horizontal, asociado a una posición X, se plantea mediante el producto de la componente horizontal de la velocidad inicial por el tiempo transcurrido. Por lo que su ecuación es:

$X = V_x * t$, en donde V_x, corresponde a la componente horizontal de la velocidad que se obtiene por la relación: $V_x = V_o \cos\theta$, entonces la posición horizontal queda entonces como: $X = V_o\, t \cos\theta$, en donde V_o es la velocidad inicial, θ es el ángulo del lanzamiento con respecto a la horizontal (eje X), y t es el tiempo transcurrido de movimiento.

c) **Análisis del movimiento en el eje "Y"**

El movimiento vertical del tiro parabólico corresponde al caso de un objeto en movimiento tiro vertical o caída libre con aceleración constante negativa de magnitud el valor de la gravedad, por lo que el desplazamiento vertical, asociado a una posición Y, se plantea mediante la ecuación de posición del movimiento uniformemente acelerado para el eje Y, que fue analizado en la sección anterior de "Caída Libre". Por lo que las ecuaciones para la posición vertical y velocidad vertical son:

$$Y = Y_o + V_y^o t - \frac{1}{2} g t^2 , \qquad V_y^f = V_y^o - gt$$

en donde V_y^o , corresponde a la componente vertical de la velocidad inicial, que se obtiene por la relación: $V_y^o = V_o \, sen\theta$, y V_y^f representa la componente vertical de la velocidad, por lo que al sustituir en las ecuaciones de posición vertical y de velocidad, se obtienen las ecuaciones:

$$Y = Y_o + V_o\, t \, sen\theta - \frac{1}{2} g t^2 , \qquad V_y^f = V_o \, sen\theta - gt$$

por otro lado, la velocidad final V_F se obtiene mediante el teorema de Pitágoras, así como el ángulo θ_F de esta velocidad, esto es:

$$V_F = \sqrt{V_x^2 + V_{fy}^2} \ , \qquad \theta_F = \tan^{-1}\left[\frac{V_{fy}^2}{V_x^2}\right]$$

d) Combinación de los movimientos en el eje "X" y en el eje "Y"
Mediante la combinación de las ecuaciones de posición tanto en X como en Y, así como de la velocidad vertical en Y, se pueden resolver problemas de tiro parabólico, los cuales pueden dividirse en 4 casos que se describen a continuación:

CASO 1: Tiro Parabólico Perfecto:
Este caso corresponde al que se muestra en la Fig. 10, en donde las posiciones verticales del punto inicial del lanzamiento (Y_o=0) y del punto final (Y=0) de llegada son iguales, por lo que al sustituir en la ecuación de posición vertical se obtiene:

$$0 = 0 + V_o t\ sen\theta - \frac{1}{2}gt^2\ ,$$ y despejando $$t = \frac{2\,V_o\ sen\theta}{g}\quad ,$$

en donde t corresponde al tiempo total de vuelo para este caso de tiro parabólico. Como ejemplo consideremos que la velocidad inicial del lanzamiento es V_o = 20 m/s, a un ángulo θ=30°, entonces el tiempo total de vuelo será de:

$$t = \frac{2\ (20)\ sen(30°)}{9.8} = 2.04\ s$$

Combinando adecuadamente las ecuaciones de los movimientos horizontal y vertical, se obtienen las siguientes ecuaciones para X, el alcance horizontal máximo, y para Y_m , la altura máxima alcanzada en este tiro parabólico, obteniéndose las ecuaciones:

$$X = \frac{V_o^2\ sen(2\theta)}{g} \quad ; \quad Y_m = \frac{V_o^2\ sen^2(\theta)}{2g}$$

Sustituyendo V_o = 20 m/s, y θ=30°, se obtiene:

$$X = \frac{(20)^2\ sen(60°)}{9.8} = 35.34\ m \quad ; \quad Y_m = \frac{(20)^2\ sen^2(30°)}{2(9.8)} = \ 5.1\ m$$

CASO 2: Tiro parabólico con lanzamiento inicial horizontal:
En este caso la velocidad inicial V_O es horizontal, por lo que $V_X = V_O$, y V_y^o=0, como ejemplo considerar el caso de una pelota que se mueve horizontalmente a una velocidad de V_O=4 m/s, por una mesa de h=2 m de alto, como se muestra en la Fig. 11, debe notarse que la posición final inicial del movimiento es en Y=h=2 m, y la posición final es en Y=0, entonces la trayectoria descrita es la de una semiparábola, el tiempo (t) en el aire, así como la velocidad final y el ángulo final son calculados como sigue:

$$0 = h + 0 - \frac{1}{2}gt^2\ , \qquad V_y^f = 0 - gt$$

Sustituyendo valores se obtiene: t=0.64 s, y $V_y^f = -6.3\ m/s$, para calcular la velocidad y el ángulo final, se considera que V_X = 4 m/s, y se sustituye en las ecuaciones:

$$V_F = \sqrt{(4)^2 + (-6.3)^2} = 7.46\ m/s \quad , \qquad \theta_F = \tan^{-1}\left[\frac{-6.3}{4}\right] = -57.6°$$

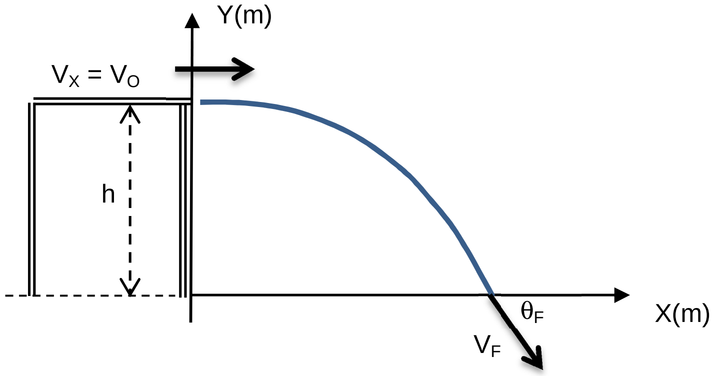


Fig. 11. Gráfica de la trayectoria de un movimiento en tiro parabólico con lanzamiento inicial horizontal.

CASO 3: Tiro parabólico con ángulo positivo en su lanzamiento inicial:

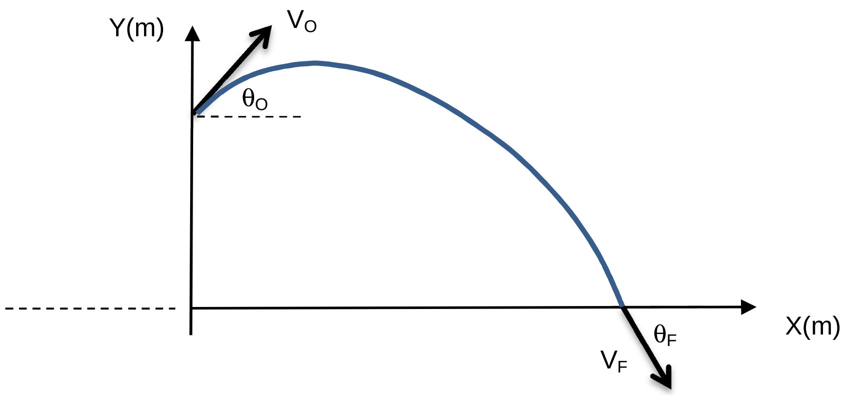


Fig. 12. Gráfica de la trayectoria de un movimiento con ángulo positivo en su lanzamiento inicial

CASO 4: Tiro parabólico con ángulo negativo en su lanzamiento inicial:

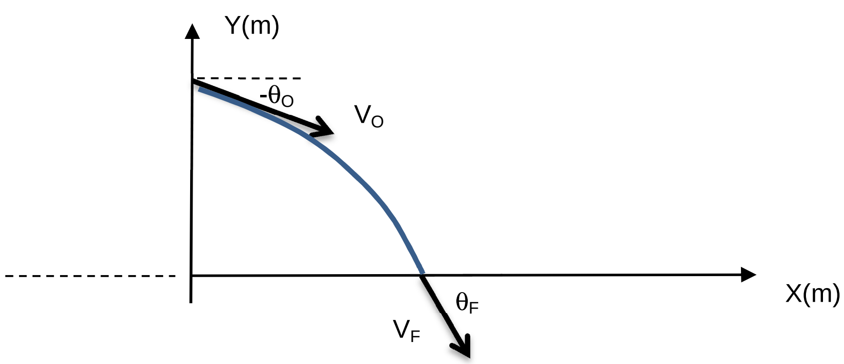


Fig. 13. Gráfica de la trayectoria de un movimiento con ángulo negativo en su lanzamiento inicial

En los casos 3 y 4 mostrados en las Figs. 12 y 13, respectivamente, a diferencia del caso 1, las posiciones verticales, inicial Y_O y final Y, son diferentes, por lo que se aplican las ecuaciones anteriores, de posición y de velocidades, siendo estas:

Para el análisis del movimiento horizontal: $X = V_X\, t$, en donde $V_x = V_o \cos\theta$, y
El ángulo inicial del lanzamiento (θ), puede ser positivo (caso 3) o negativo (caso 4).
Para el análisis del movimiento vertical las ecuaciones son:

$$Y = Y_o + V_y^o t - \frac{1}{2} g t^2 \,, \qquad V_y^f = V_y^o - gt$$

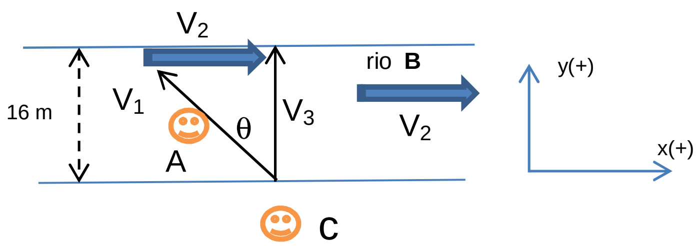
En donde, $V_y^o = V_o\, sen\theta$, y para el caso 4, el ángulo θ es negativo por lo que la componente inicial de la velocidad vertical será negativa también.
Para la obtención de la velocidad y ángulo final del tiro parabólico:

$$V_F = \sqrt{V_x^2 + V_{fy}^2} \,, \qquad \theta_F = \tan^{-1}\left[\frac{V_{fy}^2}{V_x^2}\right] \,,$$

el ángulo final θ_F será negativo, si la componente final de la velocidad vertical es negativa.

4. Velocidad relativa

Dentro del movimiento de los objetos, se tiene el caso de dos objetos “A” y “B” en un movimiento relativo uno con respecto al otro, y a la vez observados por un observador “C” en un punto fijo de referencia, por ejemplo, el movimiento de una balsa “A” desplazándose a una velocidad $\mathbf{V_1}$, por el ancho de un río “B” en donde el agua fluye a una velocidad $\mathbf{V_2}$. En este caso se presenta un movimiento llamado “relativo” de la balsa con respecto al rio, en donde $\mathbf{V_1}$ es llamada la **velocidad relativa** de la balsa con respecto al rio, y para determinar la velocidad de la balsa V_3 con respecto a un observador “C”, en punto fijo fuera del río, se traza el vector resultante $\mathbf{V_3}$ de los vectores $\mathbf{V_1}$ y $\mathbf{V_2}$, que analíticamente corresponde a la operación suma vectorial, esto es: $\mathbf{V_3} = \mathbf{V_1} + \mathbf{V_2}$, por lo que la **velocidad relativa** de la balsa con respecto al río se determina por: $\mathbf{V_1} = \mathbf{V_3} - \mathbf{V_2}$, esto es la diferencia vectorial entre la velocidad de la balsa medida por el observador “C” (colocado en un punto fijo fuera del rio), con la velocidad del rio también medida por el observador “C”.
Como ejemplo, consideremos un rio “B” de 16 m de ancho que lleva aguas que se mueven a una velocidad V_2=2 m/s en la dirección del eje X(+), y por otro lado, una persona “A” que se encuentra dentro de una balsa, sobre el rio, la cual se mueve a una rapidez V_1=3 m/s (velocidad relativa de la balsa con respecto al rio), y también se encuentra una persona “C”, en un punto fijo fuera del rio, determinemos lo siguiente:
a) ¿en qué dirección o ángulo θ debe dirigirse la lancha para que pueda cruzar el rio, en forma perpendicular, a lo largo del eje Y(+)?
A continuación se muestra un esquema del rio “B”, con la persona en la balsa “A” y la persona “B” en un punto fijo fuera del rio:



Se puede observar que debido a la velocidad del rio “C” en la dirección de X(+), la balsa “A” debe moverse en la dirección inclinada mostrada en el esquema, a fin de que al sumar vectorialmente las velocidades de la balsa V_1 y la del rio V_2 , se obtenga la velocidad resultante V_3 , que es la velocidad de la balsa medida con respecto al observador “C” en un punto fijo fuera del rio. Entonces, para obtener el ángulo θ, se puede aplicar la función senθ en el triángulo formado con las tres velocidades, esto es:

$$sen\theta = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenuza} = \frac{V_2}{V_1}$$

sustituyendo valores y despejando para el ángulo se obtiene:

$$\theta = sen^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 41.8°$$

b) Lo siguiente a determinar es el valor de la velocidad V_3 de la balsa medida con respecto al observador "C" en un punto fijo fuera del rio, para esto podemos utilizar el mismo triángulo de velocidades mostrado en el esquema y aplicar el teorema de Pitágoras para encontrar el cateto correspondiente a la velocidad V_3 , esto es:

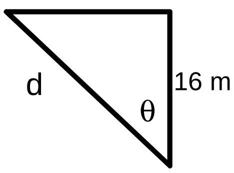
$$V_1^2 = V_2^2 + V_3^2$$

sustituyendo valores y despejando para V_3 , se obtiene:

$$V_3 = \sqrt{(3)^2 - (2)^2} = 2.24\ m/s$$

c) Obtengamos ahora la distancia real "d" que se mueve la balsa dentro del rio, para ello podemos construir un triángulo rectángulo de distancias en donde uno de sus ángulos internos es el de 41.8° obtenido en el inciso a), y uno de sus catetos es el valor del ancho del rio 16 m, esto es:

$$\cos(41.8°) = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenuza} = \frac{16}{d}$$



despejando la distancia es d = 21.46 m

d) Finalmente calculemos el tiempo que tarda la balsa en cruzar el rio, el cual puede ser obtenido de dos maneras; una es considerando el ancho del rio y la velocidad V_3 de la balsa con respecto al observador "C", esto es:

$V_3 = \frac{16}{t}$, despejando para t se obtiene: $t = \frac{16}{2.24} = 7.14\ seg$

la otra manera es considerar la distancia real, d=21.46 m, que se desplaza la balsa y su velocidad relativa V_1 = 3 m/s con respecto al rio, esto es:

$V_1 = \frac{d}{t}$, despejando para t se obtiene: $t = \frac{21.46}{3} = 7.15\ seg$

la diferencia de una centésima de segundo es debido al redondeo en dos cifras decimales.