Tema 13 Cinemática del movimiento rotacional

Una de las áreas de la física es la **mecánica rotacional**, que estudia el movimiento de rotación de los objetos rígidos, como un disco, una esfera, una barra, etc. Para su estudio, la mecánica rotacional se divide en **cinemática rotacional**; que estudia y analiza la rotación de los objetos sin considerar las causa que producen dicha rotación, y por otro lado está la **dinámica rotacional**; que analiza las causas que producen la rotación, estudiando conceptos como momento de inercia, momento de torsión, momento angular, etc. En este tema se estudiarán los conceptos fundamentales de la cinemática rotacional.

13.1 Movimiento rotacional puro y movimiento combinado

El movimiento lineal de un objeto queda definido a través de magnitudes o cantidades físicas como el desplazamiento, la velocidad, la aceleración, en el movimiento rotacional de un objeto, los conceptos son similares, lo cual facilita su estudio y comprensión. A continuación de definen y se describen las cantidades físicas que rigen a la cinemática rotacional, que también es llamada cinemática angular o cinemática circular.

a. **Posición angular:** se representa con la variable θ, indicando el ángulo en donde se ubica el objeto con respecto a un eje de referencia, llamado eje polar, que forma el ángulo θ=0. En este caso el objeto describe una trayectoria circular de radio r, siendo este radio la distancia de la línea recta o rayo que va del centro del círculo hasta donde está ubicado el objeto. El ángulo θ puede ser medido en radianes, grados o revoluciones.

b. **Radián:** es el ángulo que forma el rayo que limita una longitud de arco de circunferencia igual al radio del círculo.
El perímetro de una circunferencia tiene una longitud: $P = \pi(diámetro) = 2\pi r$, y su abertura angular abarca una vuelta o una revolución, por lo tanto:

$$1\ revolución = 2\pi\ radianes = 360\ grados$$

c. **Desplazamiento angular ($\Delta\theta$):** es el cambio de posición angular que giró el objeto y se determina mediante la diferencia entre la posición angular final con la posición angular inicial, que se expresa por la relación:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

d. **Velocidad angular media ($\overline{\omega}$):** es la razón de cambio del desplazamiento angular del objeto en un determinado tiempo y se determina como sigue:

$$\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}[rad/s]$$

e. **Velocidad angular instantánea:** es la razón de cambio del desplazamiento del objeto, pero en un tiempo infinitesimalmente pequeño y se determina como sigue

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = pendiente\ en\ gráfica(t, \theta)$$

$$\omega = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = pendiente\ en\ gráfica(t, \theta)$$

Por lo que la velocidad angular para cualquier instante de tiempo se obtiene mediante la pendiente de la recta que toca un punto en la gráfica de posición angular con respecto al tiempo. En el caso del desplazamiento angular, se obtiene como sigue:

$$\Delta\theta = \theta - \theta_o = Area\ en\ gráfica(t, \omega)$$

Por lo que el desplazamiento angular del objeto se determina obteniendo el área bajo la curva de la gráfica de velocidad angular con respecto al tiempo.

f. **Aceleración angular media:** es la razón de cambio de la velocidad angular del objeto en un determinado tiempo y se calcula por la ecuación

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\omega_F - \omega_O}{t}[rad/s^2]$$

g. **Aceleración angular instantánea:** es la razón de cambio la velocidad del objeto pero en un tiempo infinitesimalmente pequeño y se determina como sigue:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = pendiente\ en\ gráfica(t, \omega)$$

$$\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = pendiente\ en\ gráfica(t, \omega)$$

Por lo que la aceleración angular para cualquier instante de tiempo se obtiene mediante la pendiente de la recta que toca un punto en la gráfica de velocidad angular con respecto al tiempo. En el caso del cambio de velocidad angular, se obtiene como sigue:

$$\Delta\omega = \omega - \omega_o = Area\ en\ gráfica(t, \alpha)$$

Por lo que el cambio de velocidad angular del objeto se determina obteniendo el área bajo la curva de la gráfica de aceleración angular con respecto al tiempo.

13.2 Ecuaciones de movimiento para el movimiento rotacional con aceleración angular constante

De los conceptos y ecuaciones de la sección anterior, se deducen las siguientes ecuaciones de cinemática rotacional con aceleración angular constante:

$$\theta = \theta_o + \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$
$$\omega = \omega_o + \alpha t$$

Para este caso de aceleración angular constante, la velocidad angular media es igual a la velocidad angular promedio, esto es:

$$\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{t} = \frac{\omega_o + \omega_f}{2}$$

Si de las dos ecuaciones anteriores se despeja el tiempo en cada ecuación y luego se igualan, se obtiene la ecuación:

$$\omega^2 = \omega_o + 2\alpha\,(\Delta\theta)$$

en donde $\Delta\theta = \theta - \theta_o$.

En caso de que la velocidad angular sea constante, es decir aceleración angular cero, el desplazamiento angular es:

$\Delta\theta = \omega_{cte} t$, o bien: $\omega_{cte} = \frac{\Delta\theta}{t} = \frac{\theta}{t}$

A continuación se presentan ejemplos del movimiento rotacional con sus correspondientes gráficas en función del tiempo:

Ejemplo 1: Movimiento rotacional con velocidad angular constante

Considera el movimiento rotacional de un disco, (por ejemplo un CD o un DVD) sin fricción, con una rapidez angular de 2 rad/s, dibujar la gráfica de posición y velocidad angular después de haber girado 6 rad.

a. Gráfica de posición angular en función del tiempo.

En la Fig. 1, se muestra la gráfica de posición angular con respecto al tiempo. Observa que la rapidez angular constante de 2 rad/s, significa que cada segundo que pasa, el disco gira un ángulo de 2 rad, por lo tanto, al transcurrir tres segundos va a girar 6 rad.

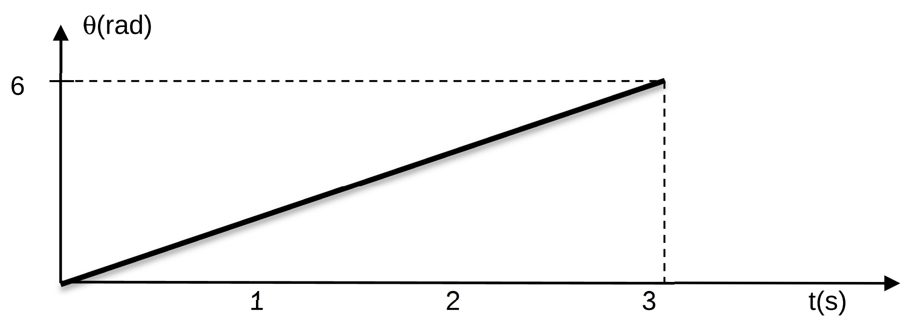


Fig. 1. Gráfica de posición en función del tiempo a velocidad constante.

b. Análisis de la gráfica de posición del carrito en función del tiempo.

Aplicando la ecuación de velocidad angular media en el intervalo de 0 a 3 seg, se obtiene:

$$\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_f - X_o}{t_f - t_o} = \frac{6-0}{3-0} = \frac{6}{3} = 2 \ \frac{rad}{s}$$

c. Relación de la gráfica con la pendiente de una recta que pasa por dos puntos.

La pendiente de una recta indica su grado de inclinación con respecto a la horizontal, y se obtiene analíticamente a través de la función tangente del ángulo que forma la recta con la horizontal, y que también se puede obtener con los valores de los catetos de un triángulo rectángulo, de acuerdo a la definición de la función tangente, esto es:

$$m = \tan\theta = \frac{cateto \ \ opuesto}{cateto \ \ adyacente}$$

En un plano cartesiano (x,y), esta ecuación de la pendiente queda como:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Si se observa la gráfica de la Fig. 1, se forma un triángulo rectángulo en los intervalo de 0 a 3 segundos, por lo que al determinar la pendiente de la recta (hipotenusa) del triángulo, se obtiene que:

$$m = \frac{cateto \ \ opuesto}{cateto \ \ adyacente} = \frac{6}{3} = 2$$

Que corresponde al valor de la velocidad media en el intervalo de 0 a 3 segundos.

Al igual que en cinemática lineal, se puede concluir que:

En una gráfica de posición angular en función del tiempo, el valor de la pendiente de una línea recta entre dos puntos de la gráfica, corresponde al valor de la velocidad media en ese intervalo de tiempo correspondiendo a dichos puntos.

d. Gráfica de velocidad angular de la rotación del disco en función del tiempo.

A continuación se muestra la gráfica de velocidad angular en función del tiempo, que de acuerdo a los resultados numéricos anteriores, corresponde a una línea recta horizontal en el valor de ω=2 rad/s, esto es:

Fig. 2. Gráfica de velocidad angular en función del tiempo con velocidades constantes.

Por otra parte, anteriormente se escribió la ecuación de desplazamiento angular que se obtiene mediante la integral definida de la función de velocidad. Una integral representa el área bajo la curva, por lo que el valor del área del rectángulo, representa el desplazamiento angular Δθ para el intervalo de tiempo de 0 a 3 segundos, esto es:

Área rectángulo = desplazamiento angular, $\Delta\theta = (base)(altura) \ = (3)(2) = 6 \ rad$

e. Gráfica de aceleración angular del disco en función del tiempo.

A continuación se muestra en la Fig. 3, la gráfica de aceleración angular en función del tiempo, y debido a que la velocidad angular es constante en todo el intervalo de tiempo, la aceleración angular es cero, por lo que la gráfica corresponde a una recta horizontal en el valor de α=0 rad/s^2. Por otra parte, anteriormente se escribió la ecuación de aceleración angular como un cambio de la velocidad angular en un intervalo de tiempo, que se asocia directamente a la pendiente de la recta en la gráfica de velocidad angular, y debido a que es una recta horizontal, esta pendiente es cero, confirmando que la aceleración angular es cero, como se muestra en la siguiente gráfica:

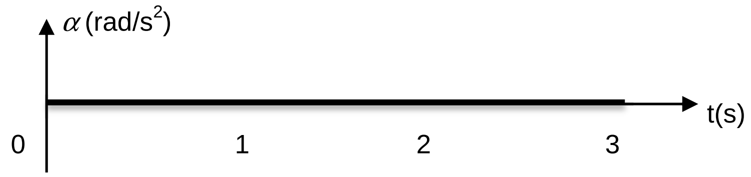


Fig. 3. Gráfica de aceleración angular en función del tiempo.

de lo anterior se puede concluir que:

En una gráfica de velocidad angular en función del tiempo, el valor de la pendiente de la línea recta, corresponde al valor de la aceleración angular constante.

Otra conclusión importante es que:

En una gráfica de velocidad angular en función del tiempo, el valor del área bajo la curva o línea recta, corresponde al valor del desplazamiento angular en ese intervalo de tiempo.

Ejemplo 2: Movimiento rotacional con aceleración angular constante

Considera que el disco inicia su rotación con una velocidad angular inicial de 8 rad/s, pero frena uniformemente con una aceleración angular negativa de 4 rad/s^2.

Primeramente se determina el tiempo y el desplazamiento angular hasta que se detiene, aplicando primero la ecuación:

$$\omega = \omega_o + \alpha t \quad , \text{ sustituyendo valores: } \quad \omega = 8 - 4t$$

Que corresponde a la gráfica de una línea recta con pendiente negativa, y para el caso en que ω=0, se determina que el tiempo en que tarda en detenerse el disco es de 2 segundos. Aplicando la siguiente ecuación se determina el desplazamiento angular:

$$\theta = \theta_o + \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \ , \quad \text{Sustituyendo valores:} \qquad \theta = 8t - 2t^2 \ ,$$

Que corresponde a la gráfica de una parábola cóncava hacia abajo, y para el caso particular de t=2 s, se determina la posición angular del disco cuando se detiene es de θ=8 rad.

a. Gráfica de posición en función del tiempo.

A continuación se muestra en la Fig. 4, la gráfica de posición angular con respecto al tiempo, del movimiento rotacional del disco, que corresponde a una función cuadrática. El disco parte del origen θ=0 con una velocidad angular de 8 rad/s, pero debido a la aceleración angular negativa, la velocidad decrece hasta ser cero, esto se relaciona en la gráfica con la pendiente de una línea recta que sea tangente a cada punto de la curva, por lo que en t=0, la recta tangente A es la de mayor inclinación, comparada con las rectas tangentes B y en el caso de la recta tangente C, es horizontal, es decir de pendiente cero, que corresponde a ω=0 para el tiempo t=2 s.

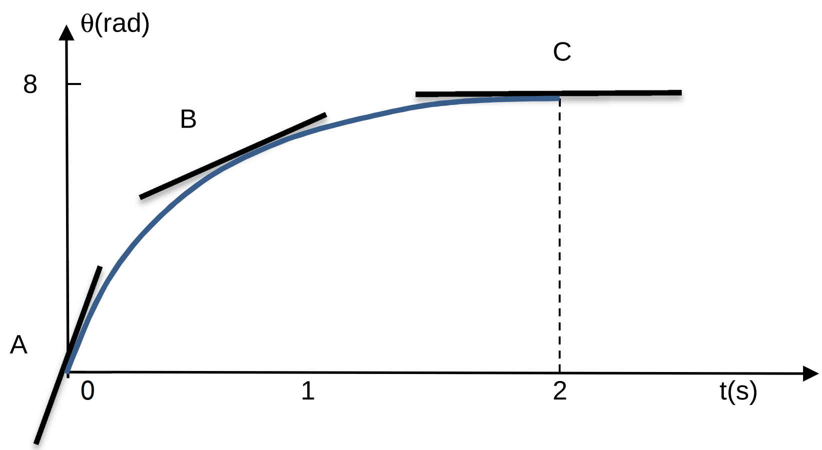


Fig. 4. Gráfica de posición angular en función del tiempo en movimiento de rotación con aceleración angular constante negativa.

de lo anterior se puede concluir que:

En una gráfica de posición angular en función del tiempo, el valor de la pendiente de una línea recta que es tangente a un punto de la curva, corresponde al valor de la velocidad angular instantánea en ese tiempo.

Otra conclusión es la siguiente:

En una gráfica de posición angular en función del tiempo, si la curva en una parábola cóncava hacia abajo, indica que en todo ese intervalo de tiempo la aceleración angular es negativa. De igual manera, si la curva es una parábola cóncava hacia arriba, indica que en todo ese intervalo de tiempo la aceleración angular es positiva.

b. Gráfica de velocidad en función del tiempo.

A continuación se muestra en la Fig. 5, la gráfica de velocidad angular con respecto al tiempo, del movimiento rotacional del disco, que corresponde a una función lineal. El disco parte del origen θ=0 con una velocidad angular positiva de 8 rad/s, debido a la aceleración angular negativa, la velocidad angular decrece hasta ser cero en t=2 s.

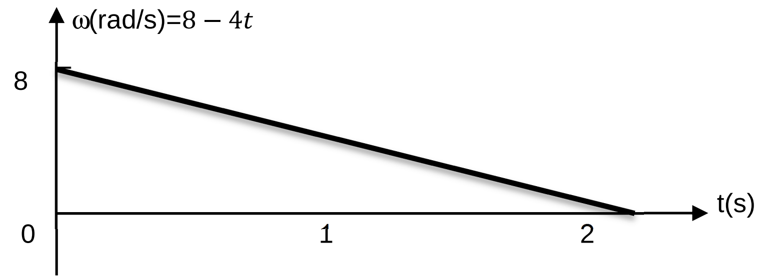


Fig. 5. Gráfica de velocidad angular en función del tiempo en movimiento de rotación con aceleración angular constante negativa.

Otro aspecto que se puede analizar en la gráfica anterior es que el valor de la pendiente de la línea recta representa la aceleración angular, que en este caso por la definición de una pendiente:

$$m = tan\theta = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \alpha = -\frac{8}{2} = -4\ rad/s^2$$

Por otra parte, anteriormente se escribió la ecuación de desplazamiento angular que se obtiene mediante la integral definida de la función de velocidad angular. Una integral representa el área bajo la curva, por lo que el valor del área del triángulo formado, representa el desplazamiento angular Δθ para el intervalo de tiempo de 0 a 2 segundos y se calcula como:

Área triángulo = desplazamiento $\Delta\theta = \frac{base\ X\ altura}{2} = \frac{(2)(8)}{2} = 8\ rad$,

de lo anterior se puede concluir que:

En una gráfica de velocidad angular en función del tiempo, el valor de la pendiente de la línea recta, corresponde al valor de la aceleración angular constante de la rotación. El signo de la aceleración angular es el mismo signo de la pendiente de la recta: positivo si está inclinada hacia la derecha con respecto al eje vertical, y negativo si está inclinada hacia la izquierda.

Otra conclusión importante es que:

En una gráfica de velocidad angular en función del tiempo, el valor del área bajo la curva o línea recta, corresponde al valor del desplazamiento angular en ese intervalo de tiempo.

c. Gráfica de aceleración angular en función del tiempo.

Ahora se muestra en la Fig. 6, la gráfica de aceleración angular con respecto al tiempo, del movimiento de rotación del disco, que corresponde a una línea recta horizontal, en el valor α=-4 rad/s^2.

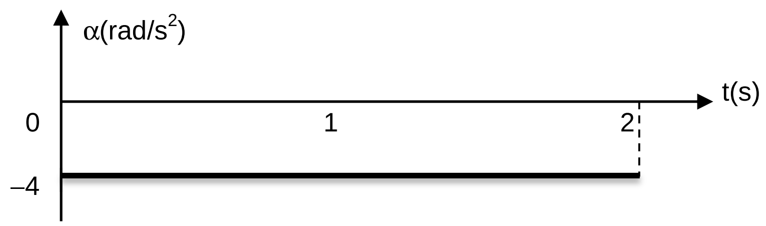


Fig. 6. Gráfica de aceleración angular en función del tiempo.

Se escribió anteriormente la ecuación de cambio de velocidad angular que se obtiene mediante la integral definida de la función de aceleración. Una integral representa el área bajo la curva, por lo que el valor del área del rectángulo que se forma en la Fig. 4, representa el cambio de velocidad angular en el intervalo de tiempo de 0 a 4 segundos, y se calcula como sigue:

Área del rectángulo = cambio de velocidad angular $\Delta\omega = base\ X\ altura = (2)(-4) = -8\,rad/s$

O también: $\Delta\omega = \omega_F - \omega_O = -8$, despejando $\omega_F = \Delta\omega + \omega_O = -8 + 8 = 0$

De lo anterior se puede concluir que:
En una gráfica de aceleración angular en función del tiempo, el valor del área bajo la curva o línea recta, corresponde al valor del cambio de velocidad angular en ese intervalo de tiempo.

13.3 Relación entre cantidades lineales y angulares

Consideremos el caso del movimiento lineal de un automóvil que parte del reposo ($v_o = 0$), y acelera uniformemente con valor de $a = 2\,m/s^2$, durante 4 segundos. La velocidad final se calcula como sigue:

$$v_f = v_o + at = 0 + 2(4) = 8\,m/s$$

y el desplazamiento lineal es:

$$\Delta x = v_o t + \frac{1}{2}at^2 = 0 + \frac{1}{2}(2)(4^2) = 16\,m$$

¿Qué sucede con la rotación de las llantas? Supongamos que son de 80 cm de diámetro, el radio es entonces de 40 cm=0.4 m, la ecuación que relaciona la distancia lineal recorrida con el ángulo girado es la ecuación de la longitud de arco (s) de una circunferencia de radio r:

$$s = \theta r$$

en donde θ es ángulo que forma el rayo que limita a dicha longitud de arco de circunferencia, a dicha longitud por la posición lineal x, se tiene:

$$x = \theta r$$

en la ecuación anterior se observa la relación entre las posiciones lineal y angular con el factor del radio, de la misma manera, las relaciones entre las velocidades lineal (v) y angular (ω) queda en forma semejante como:

$$v = r\omega$$

para el caso de las relaciones entre las aceleraciones lineal (a) y angular (α) de forma similar queda la ecuación como:

$$a = r\alpha$$

Con las ecuaciones anteriores, se puede obtener las variables angulares en la rotación de las llantas, por ejemplo si la distancia recorrida por el automóvil fue de 16 m, entonces el ángulo en radianes girado por las llantas fue:

$$\theta = \frac{x}{r} = \frac{16}{0.4} = 40\,rad$$

que se pueden convertir a revoluciones o vueltas giradas, esto es:

$$\theta = 40\,rad\left[\frac{1\,rev}{2\pi rad}\right] = 6.37\ rev$$

la velocidad angular final de las llantas se determina:

$$\omega_f = \frac{v_f}{r} = \frac{8}{0.4} = 20\ rad/s$$

y la aceleración angular de las llantas se determina:

$$\alpha = \frac{a}{r} = \frac{2}{0.4} = 5\ rad/s^2$$

Conclusión:

En este tema se estudió ampliamente y con detalle los conceptos de la cinemática rotacional y su relación con los parámetros geométricos de las gráficas que describen las ecuaciones teniendo un caso particular de geometría analítica de la cinemática rotacional, analizando parámetros geométricos de las ecuaciones, como pendientes, áreas, a fin de relacionarlos con variables de cinemática rotacional. Por otro lado, se estudió la relación entre variables de cinemática lineal con las de cinemática rotacional y las ecuaciones correspondientes.

- ✓ De este tema asegúrate de comprender:
  - Ecuaciones de cinemática rotacional
  - Ecuaciones que relacionan los movimientos lineal y rotacional

Tema 14 Dinámica del movimiento rotacional

Introducción

La **dinámica rotacional**; estudia y analiza las causas que producen la rotación, a través de los conceptos como momento de inercia, momento de torsión, momento angular, etc. Mediante esta teoría, se puede contestar y explica preguntas como: ¿por qué la perilla de una puerta se coloca en un extremo y no en medio de la puerta?, ¿por qué en algunas bicicletas de carreras muy sofisticadas, las llantas son discos, sin rayos?, ¿por qué no llegan al mismo tiempo dos esferas, una sólida y otra hueca, cuando rotan en un plano inclinado, aunque tengan la misma masa?

14.1 Concepto de torca y aceleración angular

a) Torca o momento de torsión, τ (N.m):

Es una cantidad física vectorial que produce una rotación o una tendencia al giro de un objeto rígido, con respecto a un punto llamado eje de giro o eje de rotación, y se define por la ecuación siguiente ecuación que es un producto cruz o producto vectorial:

$$\vec{\tau} = \vec{r}\ x\ \vec{F}$$

la magnitud del producto cruz, va a ser la magnitud de la torca aplicada, esto es:

$$\tau = rF(sen\theta)$$

en donde θ es el ángulo formado entre la fuerza aplicada F y el brazo de palanca ***r***, que es la distancia del punto donde se aplica la fuerza al eje de giro (eje de rotación).

Cuando se aplica una torca se produce un giro, o al menos una tendencia al giro del objeto rígido con respecto a un eje de rotación, por ejemplo, una puerta cuando gira en el momento en que se aplica una fuerza.

14.2 Segunda ley de Newton para el movimiento rotacional

De la segunda Ley de Newton para el movimiento lineal: $F_{neta} = ma$, se puede obtener una ecuación equivalente para la dinámica rotacional. Esta ecuación es:

$$\tau_{neta} = I\alpha \quad , \text{ o también } \quad \alpha = \frac{\tau_{neta}}{I}$$

la cual establece la aceleración angular α que adquiere un objeto rígido en una rotación, es directamente proporcional a la torca neta (momento de torsión) τ_{neta} , aplicada al objeto rígido, e inversamente proporcional al momento de inercia ***I*** del objeto. Esta cantidad física conocida como momento de inercia, mide la resistencia que presenta un objeto a su rotación. Existe una expresión que determina el momento de inercia de diversos objetos rígidos en rotación, a continuación se muestra en la siguiente tabla algunos casos, en donde ***m*** es la masa del objeto, ***r*** es el radio:

Tipo de objeto rígido	Expresión de momento de inercia
Aro - Cascarón cilíndrico	$I = mr^2$
Disco - Cilindro	$I = \frac{1}{2}mr^2$

Esfera sólida	$I = \frac{2}{5}mr^2$
Esfera hueca	$I = \frac{2}{3}mr^2$

Para una comprensión práctica del concepto del momento de inercia, supongamos que los objetos rígidos anteriores son de 1 kg de masa y de 1 m de radio, entonces los valores específicos de momentos de inercia son:

Tipo de objeto rígido	Valor del momento de inercia
Aro - Cascarón cilíndrico	$I = 1 \quad kg.m^2$
Disco - Cilindro	$I = \frac{1}{2} = 0.5 \quad kg.m^2$
Esfera sólida	$I = \frac{2}{5} = 0.4 \quad kg.m^2$
Esfera hueca	$I = \frac{2}{3} = 0.67 \quad kg.m^2$

lo que significa que la esfera sólida tiene menor momento de inercia, en consecuencia presenta una menor resistencia a la rotación, y en el caso del aro o el cascarón cilíndrico tiene el mayor momento de inercia y en consecuencia presenta una mayor resistencia a la rotación.

En otro caso de aplicación de la segunda Ley de Newton para el movimiento circular, se presenta el concepto de “fuerza centrípeta”, que se refiere al conjunto de fuerzas que están actuando sobre un objeto hacia el centro del movimiento circular que produce la aceleración centrípeta, esto es

$$F_C = ma_c$$

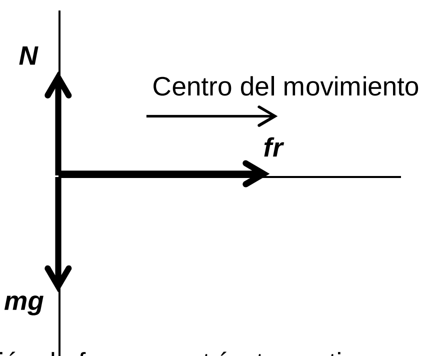
En donde m es la masa del objeto en el movimiento circular y a_c es la aceleración centrípeta determinada por la ecuación:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

En donde v es la velocidad lineal o tangencial del objeto en el movimiento circular de radio ***r***, y ω es la velocidad angular en rad/s, por lo tanto la ecuación de fuerza centrípeta queda como:

$$F_C = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$$

La fuerza centrípeta es la fuerza responsable que mantiene a un objeto en un movimiento circular. Un ejemplo de aplicación de la ecuación anterior es el caso de un automóvil que da una vuelta en una esquina, en donde la fuerza centrípeta en este caso es la fricción estática entre el pavimento y las llantas del automóvil, al dibujas las fuerzas presentes se obtiene:



Aplicando la ecuación de fuerza centrípeta, se tiene que.

$$F_C = \frac{mv^2}{r} = fr \quad , \quad \frac{mv^2}{r} = \mu N$$

En donde μ es el coeficiente de fricción y N es la fuerza normal, debido al contacto entre el pavimento y las llantas del automóvil, entonces:

$$N = mg \quad , \text{ por lo tanto } \quad \frac{mv^2}{r} = \mu mg$$

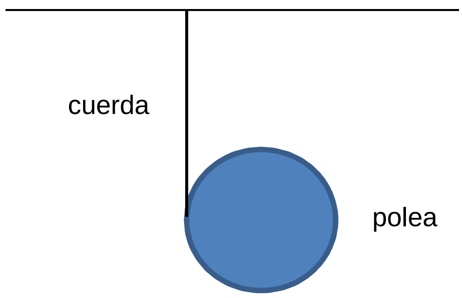
Se puede observar que las masas se cancelan, y al despejar para la velocidad lineal del automóvil se obtiene:

$$v = \sqrt{r\mu g}$$

En un caso real, el coeficiente de fricción es aproximadamente μ=0.6 y el radio de curvatura de la vuelta que da el automóvil en una calle es aproximadamente de r=8 m, por lo que se obtiene: $v = \sqrt{8(0.6)(9.8)} = 6.9\ m/s$, o bien 24.7 km/hr, este valor es la máxima velocidad a la que puede ir el automóvil sin que derrape.

14.3 Solución de problemas de dinámica rotacional

Considérese el caso de una polea de 6 kg de masa y 40 cm de radio que se está desenrollando de una cuerda que está sujeta a un techo, como se muestra en la siguiente figura:



se deben dibujar dos diagramas, uno de las fuerzas actuando sobre la polea, y el otro, de las torcas o momentos de torsión, y aplicar las ecuaciones correspondientes de la segunda ley de Newton para los casos lineal y rotacional:

$$\sum F_{mov} = ma \qquad \sum \tau_{rot} = I\alpha$$

$$mg - T = ma \qquad TR = I\alpha = (½mR^2)(a/R)$$

$$60 - T = 6a \qquad T = (½)(6a)$$

resolviendo el sistema de ecuaciones resultan los valores de:

$$a = 6.67 \ \text{m/s}^2 \qquad T = 20\ N$$

con estos valores se obtienen también las cantidades físicas de la torca momento de torsión (τ), actuando sobre la polea y la aceleración angular (α) que adquiere, esto es:

$$\tau = 8 \quad N.m \qquad \alpha = 16.67 \ \text{rad/s}^2$$

Conclusión:

En conclusión se ha estudiado los conceptos básicos de la dinámica rotacional, que analiza las causa que producen la rotación de los objetos, como es el concepto de la torca o momento de torsión, que aplicado a un objeto rígido, con respecto a un eje de giro, produce en consecuencia la rotación del objeto generando una aceleración angular, que es precisamente el concepto de la segunda ley de Newton para la dinámica rotacional, en donde se involucra el parámetro físico llamado momento de inercia, el cual también fue analizado en este tema. Por otro lado, se estudió un caso particular de fuerzas actuando en un movimiento circular que es la fuerza centrípeta.

- ✓ En este tema asegúrate de comprender:
  - Las aplicaciones de las ecuaciones de cinemática rotacional
  - Las aplicaciones de las ecuaciones de la dinámica rotacional

Tema 15 Equilibrio de cuerpos no puntuales

Introducción:

El equilibrio es un tema importante y fundamental en el diseño, construcción y colocación de anuncios espectaculares, construcción de puentes, etc., aplicaciones en ingeniería civil, hasta el simple caso de la colocación de una escalera recargada en una pared. En este tema se describen las características del equilibrio que puede ser de tipo **traslacional** y de tipo **rotacional**.

15.1 Equilibrio estable y equilibrio inestable

El equilibrio puede ser estable, cuando el objeto está en reposo, sin movimiento alguno, también se le conoce como equilibrio estático. Por otro lado, el equilibrio es inestable cuando el objeto se mueve a velocidad constante, a este equilibrio también se le llama dinámico. En ambos casos la aceleración es cero.

15.2 Equilibrio traslacional y rotacional

Los sistemas en equilibrio no presentan ni aceleración lineal (a), ni aceleración angular (α) por lo que al aplicar la segunda ley de Newton, tanto para la dinámica lineal, como para la dinámica rotacional, los valores de aceleración son cero, esto da lugar a las siguientes ecuaciones conocidas como condiciones de equilibrio.

Primera condición para el equilibrio estático:

$$\sum F_x = 0 \qquad \text{y} \qquad \sum F_y = 0$$

estas ecuaciones indican que la suma algebraica de tolas las fuerzas involucradas en un sistema en equilibrio debe ser cero.

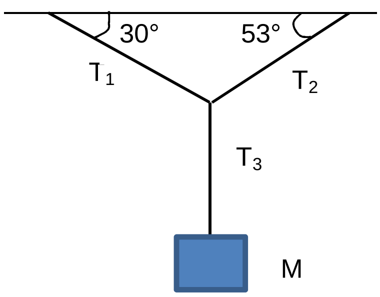
Segunda condición para el equilibrio rotacional:

$$\sum \tau = 0$$

La ecuación anterior establece que en un sistema en equilibrio en donde hay un objeto rígido, existe un equilibrio de todas las torcas o momentos de torsión, con respecto a un punto de apoyo.

15.3 Solución de problemas de equilibrio

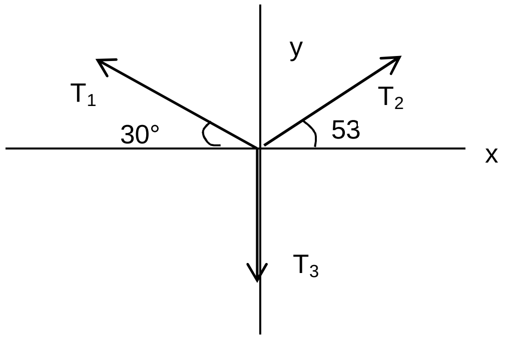
A continuación se muestra un sistema en equilibrio en donde una masa M = 8 kg, está sostenida por una cuerda vertical que a su vez está conectada a otras dos cuerdas, como se muestra en la siguiente figura, el propósito de este ejercicio es aplicar las ecuaciones de equilibrio para determinar los valores de las tensiones en las cuerdas.



Primeramente se debe obtener el valor de la tensión T_3 que sostiene al peso del bloque, por lo que de manera directa:

$$T_3 = mg = (8)(10) = 80\ N$$

y ahora se debe dibujar el diagrama de fuerzas del conjunto de tensiones, cuyo punto de referencia es el nudo de unión de las cuerdas, esto es:



y aplicar la primera condición de equilibrio para el eje X, esto es: $\sum F_x = 0$

$$T_2 \cos(53°) - T_1 \cos(30°) = 0$$

de la misma manera aplicar la primera condición de equilibrio para el eje Y, esto es: $\sum F_y = 0$

$$T_2 \operatorname{sen}(53°) + T_1 \operatorname{sen}(30°) - T_3 = 0$$

Sustituyendo el valor de T_3 =80 N, y resolviendo el sistema de ecuaciones resultan los valores de las tensiones de T_1 = 48.5 N, T_2 = 69.8 N.

Conclusión:

En todo momento están presentes los sistemas en equilibrio en la industria y en general en la vida diaria, por lo que saber resolver estos sistemas es fundamental para conocer la forma en que las fuerzas están actuando en estos sistemas, especialmente para el ingeniero o más específicamente el especialista en construcción que debe realizar cálculos de este tipo para el mejor diseño de las construcciones, y hasta de los mismos anuncios espectaculares, construcción de puentes. Lo visto en este tema da las bases para que en cursos superiores de física se analicen y se resuelvan problemas más complejos.

- ✓ En este tema asegúrate de comprender:
  - Equilibrio rotacional y traslacional
  - Las condiciones para cumplir el equilibrio estático y dinámico

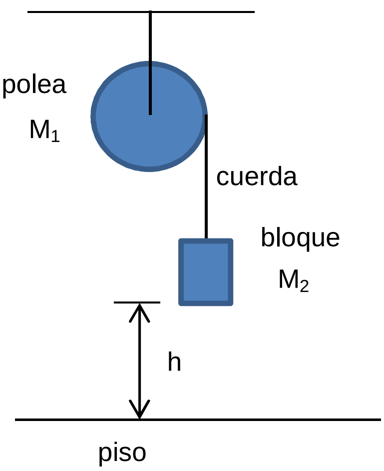
Videos educativos	**https://www.youtube.com/watch?v=fNfXWTucc2w&list=PL5CE447B0CDD683AE** http://www.educreations.com/lesson/view/torca-neta-sobre-polea/9086852/?s=E34Vxb&ref=appemail

EJERCICIOS

Palabras clave:	Cinemática lineal, cinemática rotacional, dinámica lineal, dinámica rotacional
Título:	Dinámica rotacional en una polea
Objetivo del ejercicio:	Aplicar las ecuaciones de la cinemática y dinámica rotacional, combinadas con las ecuaciones de la cinemática y dinámica lineal, en un sistema físico formado por una polea y un bloque.
Descripción del ejercicio:	Los alumnos deben construir un sistema físico formado por un bloque y una polea, a fin de que apliquen las ecuaciones de la cinemática y dinámica rotacional, combinadas con las ecuaciones de la cinemática y dinámica lineal y de esta manera determinar cantidades físicas como aceleración lineal, aceleración angular y tensión en la cuerda.

Requerimientos para la práctica:	Polea de radio R y masa M_1 , objeto de madera de masa M_2 , cuerda resistente ligera, cinta métrica, cronómetro.
Instrucciones para el alumno:	(ver abajo)

1. Reúnanse en equipo y construyan un sistema físico consistente de una polea de radio R (previamente medido) y de masa M_1 (previamente pesada) colgada de un soporte, y enrollen una cuerda resistente pero ligera, alrededor de la polea, para que en el extremo libre de la cuerda se amarre a un bloque de masa M_2 (previamente pesada) como se muestra en la siguiente figura:



2. Sostengan el bloque a una altura de 50 cm, suelten el bloque y midan el tiempo que tarda en chocar con el piso, repitan este procedimiento 5 veces, escribiendo los resultados en la siguiente tabla, y obtengan el tiempo promedio:

movimiento	Tiempo (seg)
1	
2	
3	
4	
5	

tiempo promedio:____________

3. Determinen la aceleración lineal experimental que adquiere el bloque, considerando el tiempo promedio, y empleando las ecuaciones de cinemática lineal con aceleración constante, escribiendo el resultado a continuación:

aceleración lineal experimental:__________

4. Dibujen, en los siguientes cuadros, el diagrama de momentos de fuerza para la polea M_1 y el diagrama de cuerpo libre para el bloque M_2 :

diagrama para M_1 | diagrama para M_2

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
5. Calculen el momento de inercia de la polea, escribiendo en el siguiente recuadro; primeramente la ecuación correspondiente y luego el resultado de este valor:
<table>
<tr><td>Momento de inercia de la polea</td><td></td></tr>
</table>
6. Apliquen la segunda ley de Newton, tanto para la dinámica rotacional, como para la dinámica lineal, para la polea y bloque, respectivamente, y escriban las ecuaciones correspondientes para cada masa, en los recuadros siguientes:
<table>
<tr><td>Para M_1</td><td></td></tr>
<tr><td>Para M_2</td><td></td></tr>
</table>
7. Resuelvan en forma algebraica las ecuaciones anteriores y escriban los resultados a continuación:

Aceleración lineal:___________ Tensión:__________

Aceleración angular:___________

8. Comparen el valor de la aceleración lineal del obtenida en el punto anterior, con el valor de la aceleración lineal experimental obtenida en el punto 4, y expliquen la diferencia de los valores en casa de que exista.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Criterios de evaluación de la actividad</td>
<td>
1. Determina la aceleración lineal experimental.
2. Dibuja el diagrama de momentos de fuerza sobre la polea y determina el momento de inercia de la polea.
3. Emplea la ecuación de dinámica rotacional, combinándola con la de dinámica lineal, obteniendo las aceleraciones lineal y angular, así como la tensión en la cuerda.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Entregable(s):</td>
<td>
Documento que incluya:
• El cálculo de la aceleración lineal experimental mediante las ecuaciones de cinemática lineal.
• Los diagramas: el de momento de torsión para la polea y de cuerpo libre para el bloque, obteniendo el momento de inercia de la polea.
• El procedimiento para calcular la aceleración lineal del bloque, la aceleración angular de la polea y la tensión en la cuerda.
</td>
</tr>
</table>

Ejercicio tema 14

Palabras clave:	Dinámica rotacional
Nivel (bachillerato, profesional, maestría):	Bachillerato
Título de la actividad:	Dinámica rotacional de un disco
Género (casos, solución de problemas, ejercicio, etc.):	Ejercicio
Objetivo de la actividad:	Aplicar las ecuaciones de dinámica rotacional al movimiento circular uniforme de un disco
Descripción de la actividad:	Los alumnos van a aplicar las ecuaciones de la dinámica rotacional al movimiento circular uniforme de un disco.
Requerimientos para la actividad:	Teoría del aprendizaje conceptual de los conceptos de dinámica rotacional.

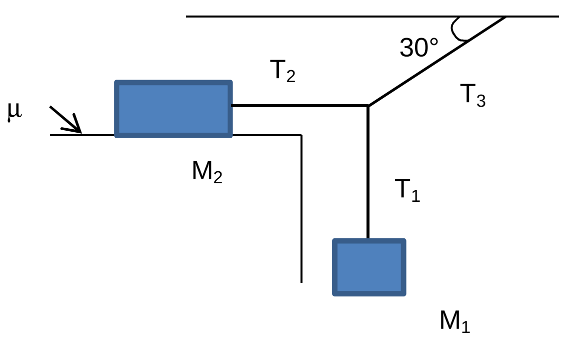
<table>
<tr><td>Instrucciones para el alumno:</td><td>
1. Reúnanse con sus compañeros de equipo.
2. Consideren el siguiente ejemplo de un disco de 20 cm de diámetro y 400 gr de masa, que inicialmente está en reposo y se le aplica una fuerza de 8 N, tangencialmente al borde del disco, determinen primeramente el momento de inercia del disco y el momento de torsión aplicado al disco:
<table>
<tr><td>momento de inercia</td><td></td></tr>
<tr><td>momento de torsión</td><td></td></tr>
</table>
3. Apliquen las ecuaciones de dinámica rotacional para determinar las cantidades físicas de la tabla, considerando un tiempo transcurrido de 30 seg:
<table>
<tr><td>aceleración angular</td><td></td></tr>
<tr><td>desplazamiento angular en radianes</td><td></td></tr>
<tr><td>velocidad angular final</td><td></td></tr>
</table>
4. Determinen el valor del momento de torsión y de su fuerza necesaria para detener uniformemente el disco en 22 seg.
<table>
<tr><td>momento de torsión</td><td></td></tr>
<tr><td>fuerza</td><td></td></tr>
<tr><td>desplazamiento angular</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Criterios de evaluación de la actividad</td><td>
1. Calcula el momento de torsión y momento de inercia mediante las ecuaciones de dinámica rotacional.
2. Dibuja un diagrama que muestre el momento de torsión actuando sobre el disco.
3. Determina cantidades físicas angulares mediante ecuaciones de dinámica rotacional.
</td></tr>
<tr><td>Entregable(s):</td><td>
Documento que incluya:
• El cálculo del momento de torsión y momento de inercia mediante las ecuaciones de dinámica rotacional.
• El diagrama que muestre el momento de torsión actuando sobre el disco.
• El Cálculo de las cantidades físicas angulares mediante ecuaciones de dinámica rotacional
</td></tr>
</table>

Ejercicio tema 15

<table>
<tr><td>Palabras clave:</td><td>Dinámica rotacional</td></tr>
<tr><td>Título de la actividad:</td><td>Equilibrio estático</td></tr>
<tr><td>Objetivo de la actividad:</td><td>Aplicar la primera condición de equilibrio a un sistema físico en equilibrio traslacional</td></tr>
<tr><td>Descripción de la actividad:</td><td>Los alumnos van a aplicar las ecuaciones de la primera condición de equilibrio a un sistema físico en equilibrio traslacional consistente en un sistema de cuerdas que sujetan a un bloque.</td></tr>
<tr><td>Requerimientos para la actividad:</td><td>Teoría del aprendizaje conceptual de los conceptos de equilibrio traslacional.</td></tr>
<tr><td>Instrucciones para el alumno:</td><td>
1. Reúnanse con sus compañeros de equipo.
2. Consideren el siguiente ejemplo de un sistema en equilibrio en donde la masa M_1 = 2 kg, está sostenida por una cuerda vertical que a su vez está conectada a otras dos cuerdas, como se muestra en la siguiente figura, y la cuerda horizontal está conectada a otra masa M_2 de valor desconocido, que
</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

está sobre una mesa horizontal, en donde el coeficiente de fricción estático entre este bloque y la mesa es de 0.6 , primeramente dibujen los diagramas de cuerpo libre de las dos masas, así como un diagrama del punto de unión (nudo) entre las tres cuerdas.



3. Apliquen las ecuaciones de equilibrio estático para cada uno de los tres diagramas de fuerzas.
4. Resuelvan el sistema de ecuaciones aplicando adecuadamente el álgebra que se requiere.
5. Escriban los resultados en la siguiente tabla de las diferentes incógnitas del sistema de ecuaciones:

<table>
<tr><td>tensión de la cuerda: T_1</td><td></td></tr>
<tr><td>tensión de la cuerda: T_2</td><td></td></tr>
<tr><td>tensión de la cuerda: T_3</td><td></td></tr>
<tr><td>valor de la masa: M_2</td><td></td></tr>
</table>

6. Finalmente analicen la situación de que el coeficiente estático de fricción se reduce al valor de 0.1 , ante esto, ¿Cuál de las dos masas sería más adecuado cambiar para el sistema siga quedando en equilibrio? y ¿por qué?

</td>
</tr>
<tr>
<td>Criterios de evaluación de la actividad</td>
<td>

1. Dibuja los diagramas de cuerpo libre del sistema físico en equilibrio.
2. Escribe las ecuaciones del sistema físico.
3. Determina los valores de las tensiones en las cuerdas y de la masa M_2.

</td>
</tr>
<tr>
<td>Entregable(s):</td>
<td>

Documento que incluya:

- Los diagramas de cuerpo libre del sistema físico en equilibrio.
- Las ecuaciones del sistema físico.
- El proceso algebraico así como la solución de las ecuaciones del sistema físico.

</td>
</tr>
</table>