الكلية الجامعية للعلوم التطبيقية

University College of Applied Sciences

Leader of Innovation رائـــدة الإبـــداع

مساق الرياضيات للحاسوب

الفصل الثاني

المجموعات Sets

الجزء الثاني: العمليات على المجموعات

مكملة المجموعة

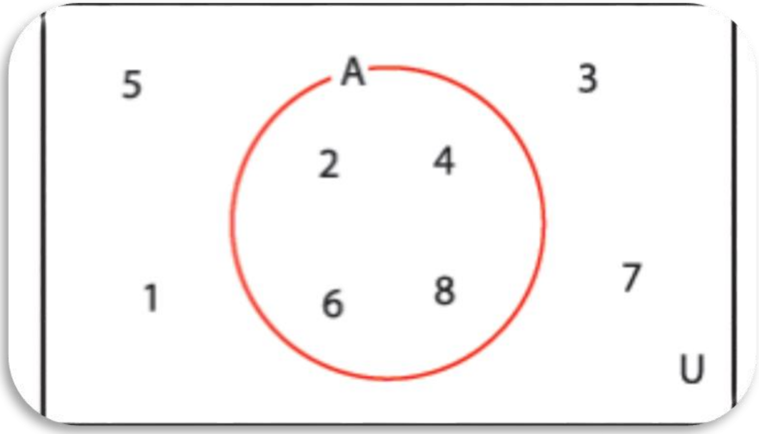
تعريف (3.2.1): ليكن U تكون مجموعة شاملة و A مجموعة جزئية منها فإن المجموعة المتكونة من جميع عناصر U التي لا تنتمي إلى A تسمى متممة (مكملة) A ونرمز لها بالرمز A′ وبالتالي تكون:

$$A' = \{x \in U, x \notin A\} = U - A = U \backslash A$$

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

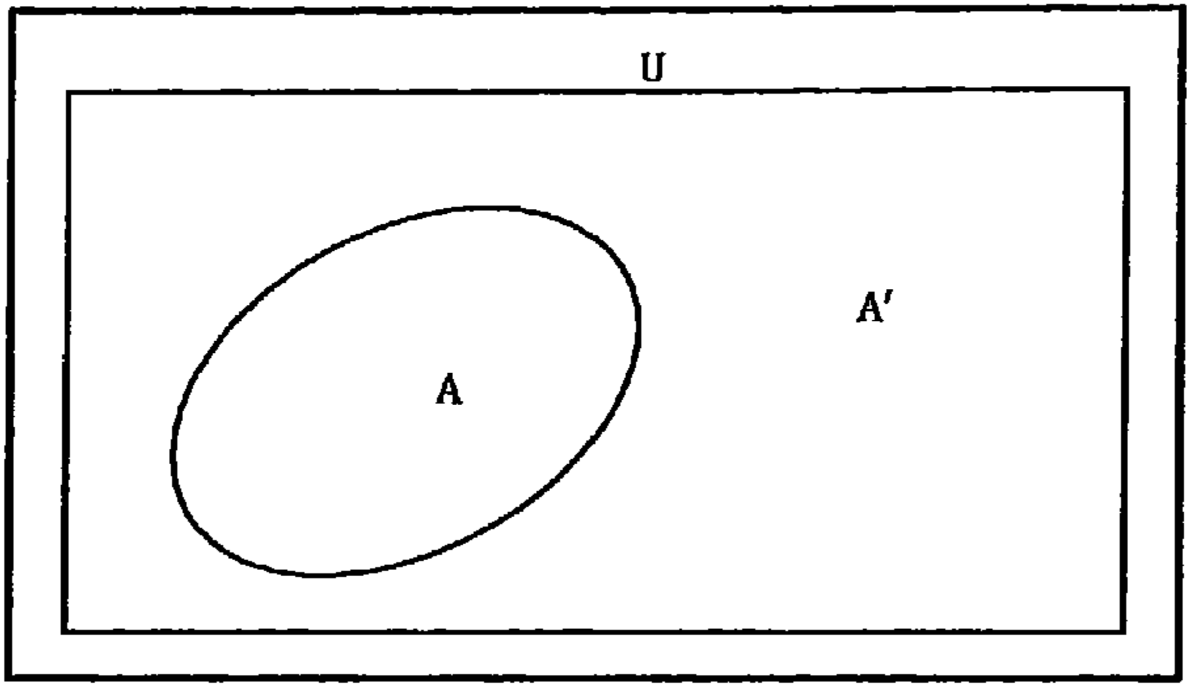
$A = \{2, 4, 6, 8\}$

$A' = \{1, 3, 5, 7\}$



ملاحظات:

1. من الممكن أن نوصف المجموعة المتممة A' بإستخدام أشكال فن كما يلي:

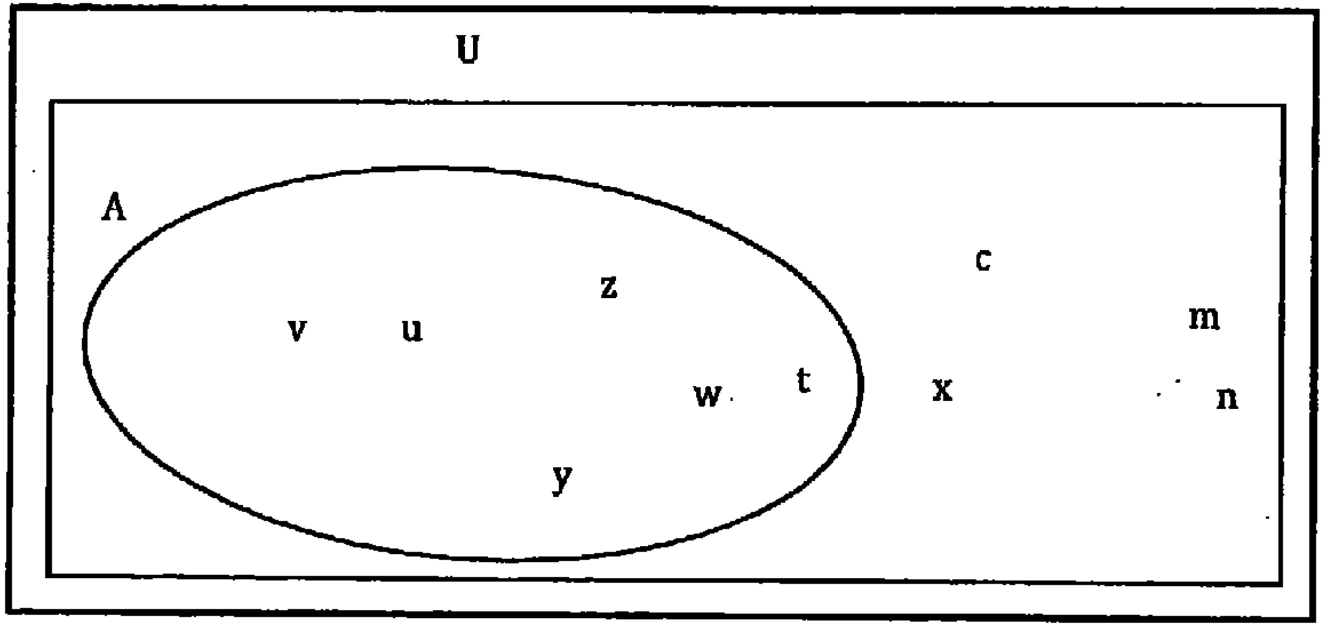


2. دائما يكون $A \cup A' = U$

3. دائما يكون $A = U - A'$

مثال: إذا كانت المجموعة الشاملة $U = \{u, v, y, z, w, t, x, c, m, n\}$

ولها المجموعة الجزئية $A = \{u, v, y, z, w, t\}$



فإن المجموعة المتممة للمجموعة A هي:

$A' = \{x, c, m, n\}$

مثال: إذا كانت $A = \{x \in \mathbb{Z}: x \geq 0\}$ فحدد المجموعة المتممة ل A

الحل:

من الواضح أن المجموعة الشاملة هي مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ وبالتالي تكـون المجموعة المتممة لA هي:

$$A' = \{x \in \mathbb{Z}: x < 0\}$$

مثال: إذا كانت $A = \{x \in \mathbb{Z}: x \leq -3,\ x > 5\}$ فحدد المجموعة المتممة ل A

الحل:

من الواضح أن المجموعة الشاملة هي مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ وبالتالي تكـون المجموعة المتممة لA هي:

$$A' = \{x \in \mathbb{Z}: -3 < x \leq 5\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

مثال: إذا كانت $A = \{(x, y): x^2 + y^2 \geq 4\}$ فحدد المجموعة المتممة ل A

الحل:

المجموعة المتممة لA هي:

$$A' = \{(x, y): x^2 + y^2 < 4\}$$

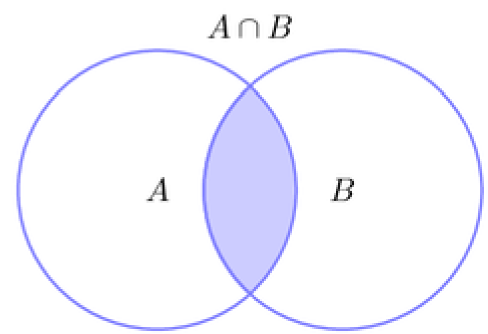
نظرية (3.2.2): ليكن U هي المجموعة الشاملة و A و B مجموعتين جزئيتين منها فإن:

1. $(A')' = A$
2. $\varphi' = U$
3. $U' = \varphi$
4. $A \subseteq B \leftrightarrow B' \subseteq A'$

العمليات على المجموعات

تقاطع المجموعات

العناصر المشتركة بين A و B

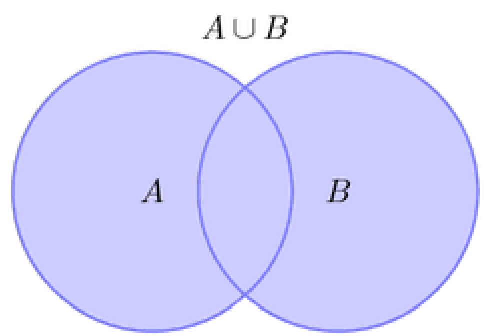


$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ و } x \in B\}$$

العناصر التي تنتمي
للمجموعتين A و B معا

اتحاد المجموعات

كل العناصر في A أو B بدون تكرار

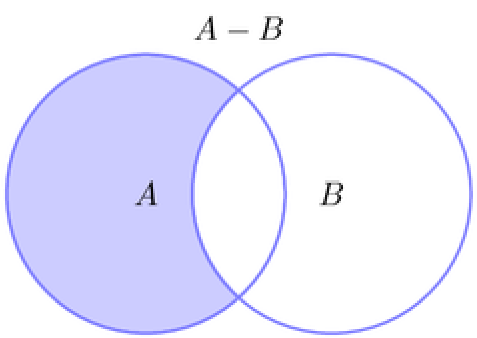


$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ أو } x \in B\}$$

العناصر الموجودة في
A أو B أو كلاهما معا

الفرق بين المجموعات

العناصر الموجودة في
المجموعة A وليست في B

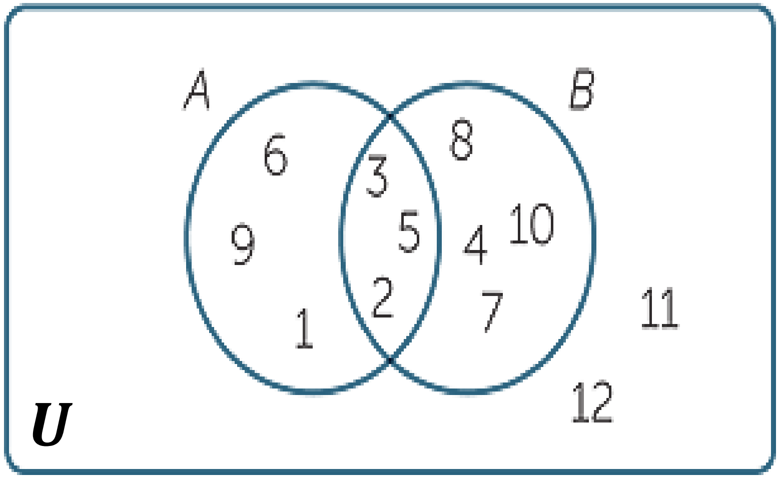


$$A - B = \{x : x \in A \text{ و } x \notin B\}$$

العناصر التي تنتمي للمجموعة A
ولا تنتمي للمجموعة B

مثال

من شكل فن المقابل، أكمل:



$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$A = \{1, 2, 3, 5, 6, 9\}$

$B = \{2, 3, 5, 8, 4, 7, 10\}$

$A' = \{8, 4, 7, 10, 11, 12\}$

$B' = \{1, 6, 9, 11, 12\}$

$A \cap B = \{2, 3, 5\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A - B = \{1, 6, 9\}$

$B - A = \{8, 4, 7, 10\}$

مثال

إذا كان لدينا المجموعات التالية:

A = {2,3,4,5,6,7} B = {2,4,7,8) C = {2,4}.

فأوجد ما يلي:

$\boldsymbol{A - B = \{3 , 5, 6\}}$

$\boldsymbol{B - C = \{7, 8\}}$

$\boldsymbol{A - C = \{3 , 5, 6, 7\}}$

$\boldsymbol{B - A = \{8\}}$

$\boldsymbol{C - B = \emptyset}$

$\boldsymbol{(A - B) - C = \{3 , 5, 6\}}$

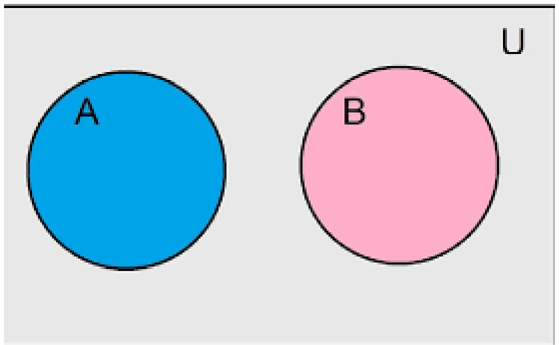
$\boldsymbol{\{3 , 5, 6\} - \{2 , 4\}}$

مثال: لنفرض أن $A = \{x \in \mathbb{Z}: 3 \le x < 9\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z}: -1 < x \le 6\}$ فان

$\boldsymbol{A \cup B = \{x \in Z : -1 < x < 9\} = \{x \in Z : 0 \le x \le 8\}}$

$\boldsymbol{A \cap B = \{x \in Z : 3 \le x \le 6\}}$

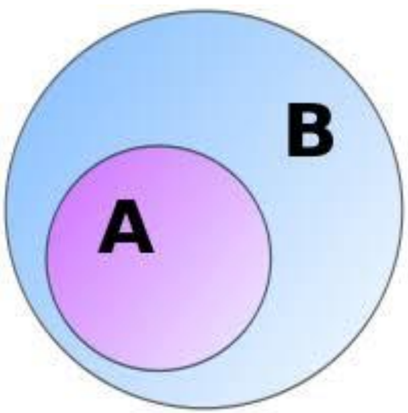
حالات خاصة



كل عناصر المجموعة **A** و المجموعة **B** $A \cup B = B$

$A \cap B = \emptyset$

يقال في هذه الحالة ان المجموعتين منفصلتين



$A \subseteq B$

$A \cup B = B$

$A \cap B = A$

خواص هامة للاتحاد والتقاطع

نظرية (3.3.2): إذا كانت A و B مجموعتين فإن:

1. $A \cup A = A$	1. $A \cap A = A$
2. $A \subseteq A \cup B, \quad B \subseteq A \cup B$	2. $A \cap B \subseteq A, \quad A \cap B \subseteq B$
3. $A \cup B = B \leftrightarrow A \subseteq B$	3. $A \cap B = A \leftrightarrow A \subseteq B$
5. $A \cup \varphi = A$	5. $A \cap \varphi = \varphi$
6. $A \cup U = U$	6. $A \cap U = A$
$A \cup A' = U$	$A \cap A' = \varphi$

من الممكن أن نعمم تعريف الإتحاد على n مجموعة كما يلي:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{x : x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n\}$$

من الممكن أن نعمم تعريف التقاطع على n مجموعة كما يلي:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{x : x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_n\}$$

ملاحظة هامة

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

عملية الفرق غير إبدالية وذلك لأن $A-B \neq B-A$

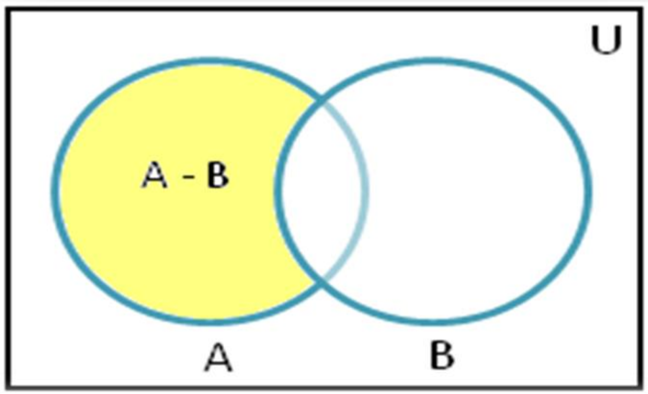
نظرية (2.4.6): نظرية دي مورجان

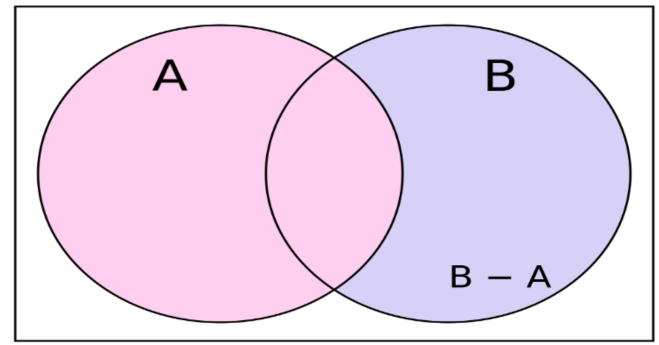
إذا كانت A و B مجموعتان فإن:

قانون مهم

1. $(A \cap B)' = A' \cup B'$
2. $(A \cup B)' = A' \cap B'$

الفرق بين المجموعات





$A - B = \{x : x \in A$ و $x \notin B\}$

$B - A = \{x : x \in B$ و $x \notin A\}$

مبرهنة (3.4.7): إذا كانت A و B مجموعتان فإن:

$A - B = A - (A \cap B)$

خواص هامة

1. $A - B = A \cap B'$
2. $A - B \subseteq A$
3. $A - A = \varphi$

مثال

إذا كان لديك المجموعات التالية،
فأوجد

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$B = \{1, 2, 3, 6, 8\}$
$C = \{2, 3, 4, 6, 7\}$

(a) $A' \cap C'$

(b) $(A \cap B)' \cap C$

(c) $B' \cup (A \cap C')$

$A' = \{6, 7, 8, 9\}$

$c' = \{1, 5, 8, 9\}$

$A \cap B = \{1, 2, 3\}$

$(A \cap B)' = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$B' = \{4, 5, 7, 9\}$

$(A \cap C') = \{1, 5\}$

(a) $A' \cap C' = \{8, 9\}$

(b) $(A \cap B)' \cap C = \{4, 6, 7\}$

(c) $B' \cup (A \cap C')$

$= \{4, 5, 7, 9, 1\}$

تعريف (3.2.1): ليكن A مجموعة فإن P(A) هي مجموعة كل المجموعات الجزئية من A وتسمى مجموعة قوى A (power set of A) ويمكن كتابتها ب:

$P(A) = \{X: X \subseteq A\}$

مثال: إذا كانت $A=\{1, 2, 3\}$ فإن

$$P(A)=\{\varphi,\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$$

ملاحظات:

1. عناصر المجموعة P(A) هي فئة كل المجموعات الجزئية من A .
2. $A \not\subset P(A)$ ولكن $A \in P(A)$ بمعنى أنه إذا كانت $X \in P(A)$ فإن $X \subseteq A$.
3. دائما تكون المجموعات A و φ مجموعات جزئية من A لذا فإن مجموعة القوى P(A) هي مجموعة غير خالية.

4. إذا كانت $A=\varphi$ فإن $P(A)=\{\varphi\}$ وبالتالي يكون $|P(A)| = 2^0 = 1$.

وإذا كانت $A=\{a\}$ فإن $P(A)=\{\varphi, A\}$ وبالتالي يكون $|P(A)| = 2^1 = 2$.

وإذا كانت $A=\{a, b\}$ فإن $P(A)=\{\varphi,\{a\}, \{b\},A\}$ وبالتالي يكون $|P(A)| = 2^2 = 4$.

وإذا كانت $A=\{a, b, c\}$ فإن $P(A)=\{\varphi,\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\},A\}$

وبالتالي يكون $|P(A)| = 2^3 = 8$.

مبرهنة (3.2.4): إذا كانت A هي مجموعة عدد عناصرها يساوي n عنصر فإن
$|P(A)| = 2^n$

مبرهنة (3.2.5): إذا كانت A و B مجموعتين فإن:

1. $A \subseteq B$ إذا وفقط إذا كان $P(A) \subseteq P(B)$.
2. $A = B$ إذا وفقط إذا كان $P(A) = P(B)$.