الكلية الجامعية للعلوم التطبيقية
University College of Applied Sciences
Leader of Innovation رائـــــدة الإبـــــداع

مساق الرياضيات للحاسوب

الفصل الرابع
العلاقات Relations

الجزء الأول: العلاقة الثنائيـة وطرق تمثيلها

العلاقة الثنائية

- العلاقة الثنائية (Binary relation) بين مجموعتين A وB، هي مجموعة من الأزواج المرتبة، ينتمي العنصر الأول إلى المجموعة A والعنصر الثاني إلى المجموعة B، بتعبير آخر **العلاقة الثنائية R من مجموعة A الى مجموعة B هي مجموعة جزئية من الضرب الديكارتي $A \times B$.**
- تسمى المجموعة A المنطلق (Domain)، و B تسمى مجموعة المستقر (Co-domain)، و R هي قاعدة الربط (Relationship) بين عناصر A وB.
- وإذا كانت $A = B$ يقال إن العلاقة ثنائية على A.
- إذا كان $(a,b) \in R$ نقول أن العنصر a مرتبط بعلاقة مع العنصر b ونرمز لها بالرمز "a R b" .
- ليس من الضروري أن تكون المجموعتان A و B متساويتين أو متطابقتين سواء في عدد أو نوعية العناصر.

ملاحظات هامة

إذا كانت A و B مجموعتان فإن:

1. العلاقة R من A الى B هي مجموعة جزئيه من $A \times B$ وبالتالي تكون:

$$R = \{(a, b), a \in A, b \in B, aRb\}$$

2. نطاق (المجال) العلاقة R (Domain) هي مجموعة كل العناصر $a \in A$ حيث $aRb, b \in B$ ويكتب:

$$Dom(R) = \{a \in A: \exists b \in B \wedge (a, b) \in R\}$$

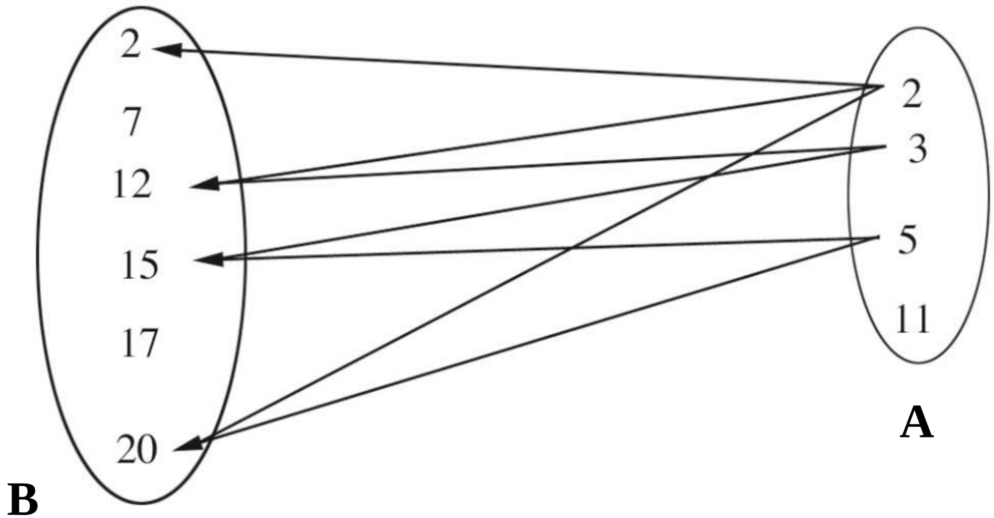
3. النطاق المصاحب (المدى) للعلاقة R (Range) هي مجموعة كل العناصر $b \in B$ حيث $aRb, a \in A$ ويكتب

$$Ran(R) = \{b \in B: \exists a \in A \wedge (a, b) \in R\}$$

ملاحظة: يمكن أن نعرف أكثر من علاقة من المجموعة A إلى المجموعة B،
وتحدد عدد العلاقات بالصيغة 2^p حيث p عدد عناصر الجداء الديكارتي $A \times B$

مثال لعلاقة ثنائية

- لتكن العلاقة الثنائية (A, B, R)، حيث المنطلق $A=\{2,3,5,11\}$ والمستقر $B=\{2,7,12,15,17,20\}$، وقاعدة الربط بينها R هي «يقسم»، فإن قاعدة الربط R تُعين الارتباط بين العناصر كما يلي:
- 2 يقسم 2، 2 يقسم 12، 2 يقسم 20، 3 يقسم 12، 3 يقسم 15، 5 يقسم 15، 5 يقسم 20.
- أو نعبر عنها $R=\{(2,2),(2,12),(2,20),(3,12),(3,15),(5,15),(5,20)\}$
- أو بالرسم:



مثال: إذا كانت $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2,4,5\}$ فأحسب ما يلي:

1. $A \times B$

2. $R_1 = \{(x,y): (x,y) \in A \times B \wedge x = y\}$ $\quad R_1 = \{(1,1), (2,2)\}$

3. $R_2 = \{(x,y): (x,y) \in A \times B \wedge x < y\}$ $\quad R_2 = \{(1,2), (1,4), (1,5), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5)\}$

4. $R_3 = \{(x,y): (x,y) \in A \times B \wedge x > y\}$ $\quad R_3 = \{(2,1), (3,1), (3,2)\}$

5. $R_4 = \{(x,y): (x,y) \in A \times B \wedge x = y + 1\}$ $\quad R_4 = \{(2,1), (3,2)\}$

6. $R_5 = \{(x,y): (x,y) \in A \times B \wedge x|y\}$ $\quad R_5 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (1,5), (2,2), (2,4)\}$

7. $R_6 = \{(x,y): (x,y) \in A \times B \wedge x = y + 3\}$ $\quad R_6 = \varphi$

الحل:

1. $A \times B =$

$$\{\boxed{(1,1)}, \boxed{(1,2)}, \boxed{(1,4)}, \boxed{(1,5)}, (2,1), \boxed{(2,2)}, \boxed{(2,4)}, \boxed{(2,5)}, (3,1), (3,2), \boxed{(3,4)}, \boxed{(3,5)}\}$$

مثال: لتكن $A = \{a, b, c\}, B = \{b, c, d\}, R_1 = \{(a, b), (a, c), (b, b), (c, c)\}$

1. هل R_1 تمثل علاقة ثنائية من A إلى B مع التعليل؟
2. هل R_1 تمثل علاقة ثنائية على A مع التعليل؟
3. هل R_1 تمثل علاقة ثنائية على B مع التعليل؟
4. إذا كانت $R = \{(x, y): (x, y) \in B \times B \wedge x = y\}$ فإكتب عناصر R.

$$A \times B = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d), (c, b), (c, c), (c, d)\}$$

1. نعم العلاقة R_1 تمثل علاقة ثنائية من A إلى B لأن $R_1 \subset A \times B$
2. بما أن

$$A \times A = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$$

وبالتالي فإن العلاقة R_1 تمثل علاقة ثنائية على A وذلك لأن $R_1 \subset A \times A$

3. بما أن

$$B \times B = \{(b, b), (b, c), (b, d), (c, b), (c, c), (c, d), (d, b), (d, c), (d, d)\}$$

وبالتالي فإن العلاقة R_1 لا تمثل علاقة ثنائية على B وذلك لأن $R_1 \not\subset B \times B$ حيث $(a, b) \notin B \times B$

.4

$$R = \{(b, b), (c, c), (d, d)\}$$

العمليات على العلاقات

ملاحظة: إذا كانت R_1, R_2 علاقتان من A إلى B فإن $R_1 \cup R_2,\ R_1 \cap R_2, R_1 - R_2$ تمثل أيضا علاقات ثنائية من A إلى B حيث:

$$R_1 \cup R_2 = \{(a,b): a \in A, b \in B, (a,b) \in R_1 \vee (a,b) \in R_2\}$$

$$R_1 \cap R_2 = \{(a,b): a \in A, b \in B, (a,b) \in R_1 \wedge (a,b) \in R_2\}$$

$$R_1 - R_2 = \{(a,b): a \in A, b \in B, (a,b) \in R_1 \wedge (a,b) \notin R_2\}$$

مثال: إذا كانت $B=\{3, 4, 10, 12\}$, $A=\{2, 5\}$ وكانت R_1, R_2 علاقتان من A إلى B بحيث: R_1 هي العلاقة الثنائية aR_1b إذا وفقط إذا كان a أصغر تماما من b و$a\in A, b\in B$ بينما R_2 هي العلاقة الثنائية aR_2b إذا وفقط إذا كان a يقسم b و$a\in A, b\in B$.

فأحسب كلاً من $R_1 \cup R_2,\ R_1 \cap R_2, R_1 - R_2$

الحل:

$$R_1 = \{(2,3),(2,4),(2,10),(2,12),(5,10),(5,12)\}$$

$$R_2 = \{(2,4),(2,10),(2,12),(5,10)\}$$

$$R_1 \cup R_2 = \{(2,3),(2,4),(2,10),(2,12),(5,10),(5,12)\}$$

$$R_1 \cap R_2 = \{(2,4),(2,10),(2,12),(5,10)\}$$

$$R_1 - R_2 = \{(2,3),(5,12)\}$$

تعريف (4.1.2): إذا كانت R علاقة ثنائية من A إلى B فإن العلاقة العكسية للعلاقة R يرمز لها بالرمز R^{-1} وتعرف كما يلي:

$$R^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in R\}$$

4. معكوس العلاقة R هي العلاقة R^{-1} من B الى A ويكتب:

$$R^{-1} = \{(b,a) : a \in A, b \in B, aRb\}$$

5. إذا كانت $R \subset A \times B$ فإن $R^{-1} \subset B \times A$

لتكن R علاقة من A إلى B فإن:

1. $(R^{-1})^{-1} = R$
2. $\mathrm{Dom}\,(R) = \mathrm{Ran}(R^{-1})$
3. $\mathrm{Ran}\,(R) = \mathrm{Dom}\,(R^{-1})$

مثال: إذا كانت $A=\{1,2,4\}, B=\{2,3,5\}$ وكانت $R\subset A\times B$ حيث:

$R=\{(1,2),(1,3),(2,2)\}$ فعين ما يلي:

1. R^{-1}

2. نطاق $R = Dom(R) = \{x : x \in A \wedge xRy\}$

3. مدى $R = Ran(R) = \{y : y \in B \wedge xRy\}$

4. $\{x : x \in A \wedge (x,y) \notin R\}$

الحل:

1. $R^{-1} = \{(2,1),(3,1),(2,2)\}$

2. نطاق $R = Dom(R) = \{1,2\}$

3. مدى $R = Ran(R) = \{2,3\}$

4. $\{x : x \in A \wedge (x,y) \notin R\} = \{4\}$

تمثيل العلاقة الثنائية

يمكن تمثيل العلاقة الثنائية بعدة طرق:

1. طريقة السرد (الجرد).
2. طريقة الوصف.
3. المخطط السهمي.
4. التمثيل بالجدول.
5. التمثيل البياني.

طريقة السرد (الجرد)

وفيه نسرد جميع عناصر العلاقة على شكل أزواج مرتبة بين أقواس المجموعة.

مثال: إذا كانت $B=\{1, 3, 5, 6, 10, 11, 12\}$, $A=\{2, 4, 5\}$ ولتكن aRb إذا وفقط إذا كان a يقسم b بحيث $a\in A, b\in B$.

فأكتب عناصر هذه العلاقة بطريقة الجرد.

الحل:

$$R = \{(2,6),(2,10),(2,12),(4,12),(5,5),(5,10)\}$$

طريقة الوصف

وفيه نكتب عناصر العلاقة على شكل أزواج مرتبة، مع ذكر الخاصية أو الشرط الذي يربط عناصر الزوج المرتب.

مثال: إذا كانت $A=\{2, 4, 5\}$, $B=\{1, 2, 3, 5, 8\}$ ولتكن aRb إذا وفقط إذا كان a أصغر تماما من b بحيث $a\in A, b\in B$.

طريقة السرد:

$$R=\{(2,3),(2,5),(2,8),(4,5),(4,8),(5,8)\}$$

طريقة الوصف:

$$R=\{(a,b): (a,b)\in A\times B,\ a < b\}$$

أمثلة أخرى لتمثيل العلاقة بطريقة الوصف.

$$R_1 = \{(x,y): (x,y) \in A \times B \wedge x = y\}$$

$$R_2 = \{(x,y): (x,y) \in A \times B \wedge x < y\}$$

$$R_4 = \{(x,y): (x,y) \in A \times B \wedge x = y + 1\}$$

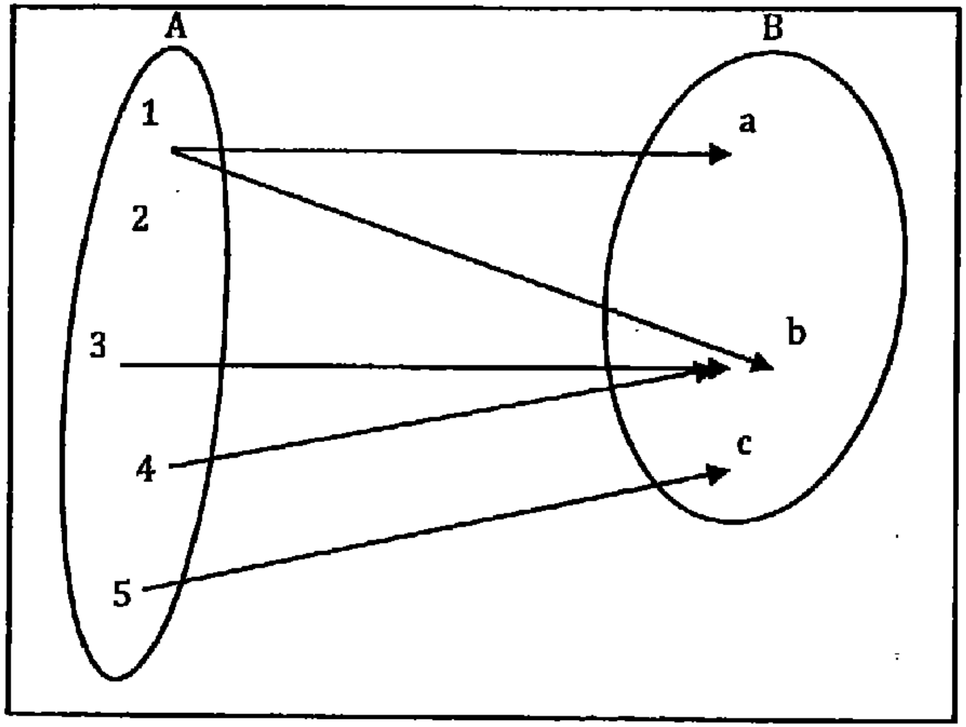
$$R_5 = \{(x,y): (x,y) \in A \times B \wedge x | y\}$$

المخطط السهمي

وفيه نمثل المنطلق A والمستقر B بدائرتين كما نرمز للارتباط بين كل عنصر من A بعنصر من B بسهم بدايته A ونهايته B.

مثال: إذا كانت $B=\{a,b,c\}$, $A=\{1,2,3,4,5\}$ و $R=\{(1,a), (1,b), (3,b),(4,b),(5,c)\}$

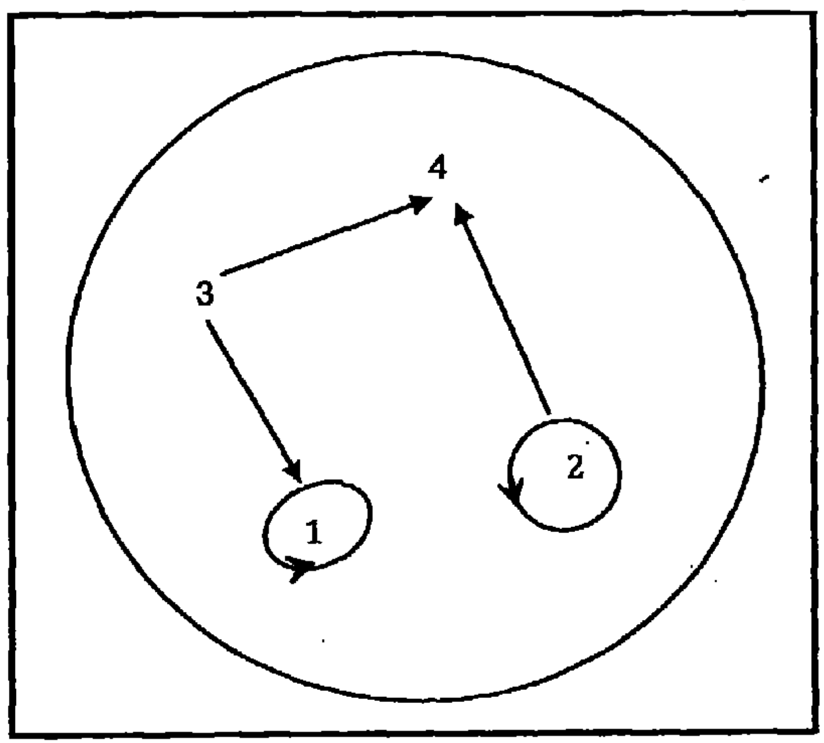
فمثل العلاقة R بالتمثيل السهمي.



المخطط السهمي

ملاحظة: إذا كانت R علاقة على A أي أن R علاقة من A إلى A فإننا نرسم المخطط السهمي بسهم مغلق على دائرة مغلقة.

مثال: إذا كانت $A=\{1,2,3,4\}$ و $R=\{(1,1),(2,2),(2,4),(3,1),(3,4)\}$ فمثل العلاقة R بالمخطط السهمي



التمثيل بالجدول

وفيه نكون جدول بحيث توضع عناصر المجموعة A في العمود الأيسر وعناصر المجموعة B في العمود العلوي، ثم توضع عناصر العلاقة في خلايا الجدول المناسبة. وفي بعض الحالات توضع علامة (x) عند تقاطع سطر وعمود العنصرين المرتبطين.

مثال: إذا كانت $A=\{1,2,3,4,5\}, B=\{a,b,c\}$ و $R=\{(1,a), (1,b), (3,b),(4,b),(5,c)\}$

فمثل العلاقة R بالتمثيل الجدولي.

الحل:

A \ B	a	b	c
1	(1,a)	(1,b)	
2			
3		(3,b)	
4		(4,b)	
5			(5,c)

التمثيل بالجدول

R = {(2,4), (2,14), (2,10), (3,9), (5,10), (7,14)}

R	4	9	10	14
2	×		×	×
3		×		
5			×	
7				×
11				

التمثيل البياني

توضع عناصر المجموعة A على المحور الأفقي، وعناصر المجموعة B على المحور الرأسي، وتمثل عناصر العلاقة بنقاط التقاطع في مستوى XY.

مثال: إذا كانت $A=\{1,3,5\}, B=\{2,4\}$ فمثل بيانيا $A\times B$

$$A \times B = \{(1,2), (1,4), (3,2), (3,4), (5,2), (5,4)\}$$