الكلية الجامعية للعلوم التطبيقية
University College of Applied Sciences
Leader of Innovation رائــــدة الإبـــداع

مساق الرياضيات للحاسوب

الفصل الأول
الأنظمة العددية وتمثيل البيانات في الحاسب

الجزء الرابع: تمثيل الأعداد الصحيحة في الأنظمة الرقمية

تمثيل البيانات في الحاسوب

- حتى يتمكن أي نظام رقمي مثل الحاسوب من التعامل مع أي نوع من أنواع البيانات فان تلك البيانات يجب أن تكون ممثلة فى الصورة الثنائية (Binary)، أي فى صورة مجموعة من الـ 0's والـ 1's.
- تُسمى الدارات الإلكترونية الداخلة في تركيب الحاسوب بالدارات الإلكترونية الرقمية Digital Circuit لأنها تتعامل مع البيانات الممثلة رقمياً، حيث يقوم الحاسوب بتحويل جميع البيانات الى بيانات رقمية وتُخزن في الذاكرة فيما يُسمى البايت Byte ويتم فيه تخزين حرف واحد. والبايت يتكون من 8 خانات تُسمى كُل خانة بت Bit.
- بسبب امكانية تنفيذه مباشرةً في الإلكترونيات الرقمية فإن نظام العد الثنائي هو المستخدم عملياً في الحواسب، ويعبر الصفر والواحد عن حالتين للتيار الكهربائي: تشغيل أو إيقاف ON / OFF.
- في الحاسوب تمثل الحروف بنظام ترميز يسمى ASCII، الذي يستوعب 128 حرف (256 في نسخته الممتدة)، حيث يقابل كل حرف قيمته الثنائية من جدول الاسكي. فمثلا حرف a (قيمته تساوي 97 بالنظام العشري في جدول الاسكي) وتقابل 00010110.

أنواع الأعداد الصحيحة

تنقسم الأعداد الصحيحة إلى عدة أنواع حسب المساحة المستخدمة في تخزين العدد:

- عدد صحيح قصير (Short Integer) و طوله 1 Byte = 8 bits
- عدد صحيح (Integer) و طوله 2 Byte = 16 bits
- عدد صحيح طويل (Long Integer) و طوله 4 Byte = 32 bits

من ناحية أخرى تنقسم الأعداد الصحيحة حسب طبيعة الأعداد التي يتم تخزينها فيها إلي نوعين وهما:

- الأعداد الصحيحة بدون إشارة (Unsigned Integers) وفيها يتم تخزين الأعداد الموجبة فقط.
- الأعداد الصحيحة بإشارة (signed Integers) وفيها يتم تخزين الاعداد الموجبة والسالبة .

أنواع الأعداد الصحيحة

- يمكن حساب مدى القيم التي يمكن تخزينها في صورة عدد صحيح قصير (Short Integer) كالتالي:
  - المساحة المتاحة هي 1 Byte = 8 bits أي 8 خانات ثنائية

  - نحصل علي أصغر قيمة بملء جميع الخانات بـ 0’s

0	0	0	0	0	0	0	0	= 0

  - و نحصل علي أكبر قيمة بملء جميع الخانات بـ 1’s

1	1	1	1	1	1	1	1	= 255

أنواع الأعداد الصحيحة

الجدول التالي يوضح أنواع الأعداد الصحيحة وطول كل منها ومدي القيم الذي يمكن تخزينه في كل نوع

نوع العدد الصحيح	طوله	مدى القيم
Short Integer	1 Byte = 8 bits	$0 \sim (2^{8} -1)$ $0 \sim 255$
Integer	2 Byte = 16 bits	$0 \sim (2^{16} -1)$ $0 \sim 65,535$
Long Integer	4 Byte = 32 bits	$0 \sim (2^{32} -1)$ $0 \sim 4,294,967,295$
—	N	$0 \sim (2^{N} -1)$

الأعداد الصحيحة بدون اشارة (Unsigned Numbers)

- لتمثيل العدد الصحيح 135 مثلاً، يجب تحويله أولاً من الصورة العشرية (Decimal) إلى الصورة الثنائية (Binary). ويتم ذلك بالقسمة المتكررة على 2 والاحتفاظ بباقي القسمة.
- فالعدد الصحيح العشري 135 يكافئ العدد الثنائي 10000111، ويكتب ذلك رياضياً في الصورة:

$$(135)_{10} = (10000111)_2$$

- للتحقق من ذلك يمكن أن نقوم بالعملية العكسية، أي تحويل العدد الثنائي 10000111 إلى الصورة العشرية.

الأعداد الصحيحة بدون اشارة (Unsigned Numbers)

- تسمى الخانة الواقعة في أقصى اليمين في العدد الثنائي بالخانة الدنيا (Least Significant Bit)، أو LSB اختصاراً، و ذلك لأنها الخانة الأقل وزناً.
- تسمى الخانة الواقعة في أقصى اليسار بالخانة العليا (Most Significant Bit)، أو MSB اختصاراً، و ذلك لأنها الخانة الأعلى وزناً.
- وزن الخانة (القيمة الموضعية) هو عبارة عن الأساس 2 مرفوع لأس يساوى رتبة الخانة.
- نحصل على رتب الخانات بترقيم الخانات ابتداء من الخانة التي تقع في أقصى اليمين، مبتدئين الترقيم بالقيمة صفر.

رتب الخانات ⟶	7	6	5	4	3	2	1	0
	1	0	0	0	0	1	1	1
	↑ MSB							↑ LSB

الأعداد الصحيحة بدون اشارة (Unsigned Numbers)

- بعد تحويل العدد إلي الصورة الثنائية ننظر إلى المساحة المتاحة لتخزين العدد ونقوم بوضع الخانات بالترتيب فيها مبتدئين بالخانة الدنيا (LSB)، مع ملء أي خانات فائضة إلى اليسار بأصفار (0’s).
- إذا كانت المساحة المتاحة 8 bits = 1 Byte فإن التخزين سيتم كالتالي:

1	0	0	0	0	1	1	1

↑ **LSB**

- إذا كانت المساحة المتاحة 16 bits = 2 Bytes فإن التخزين سيتم كالتالي:

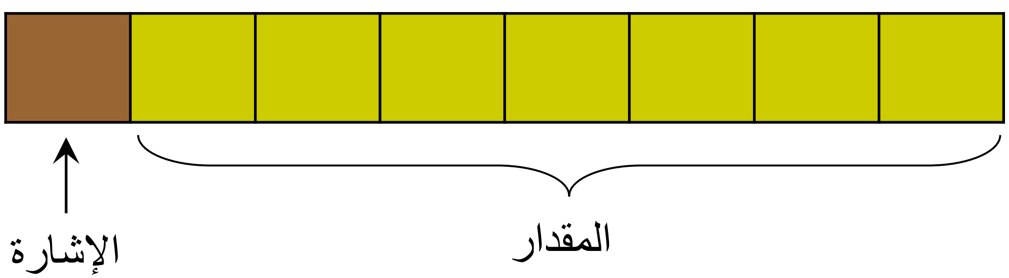
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1

خانات فائضة ←→   ↑ **LSB**

- أي انه إذا كان طول العدد الثنائي أقل من المساحة المتاحة يتم محاذاته إلى اليمين ثم تملأ الخانات الفائضة إلى اليسار بأصفار (0’s). تسمى هذه العملية **بالمحاذاة إلى اليمين مع الملء بأصفار (Right Justify- Zero Fill)**.

الأعداد الصحيحة ذات الإشارة (Signed Integers)

- السؤال هو كيف يتم تمثيل الأعداد السالبة في الحاسوب؟
- لتمثيل الأعداد السالبة يتم حجز خانة bit لتمثيل إشارة العدد (Sign)، وهذه الخانة هي الخانة العليا MSB، بينما يتم تخزين مقدار العدد (Magnitude) في بقية الخانات.



- تستخدم القيمة 0 في الخانة العليا MSB لتمثيل الإشارة الموجبة، في حين تستخدم القيمة 1 لتمثيل الإشارة السالبة. ولمعرفة إشارة العدد ننظر إلى الخانة العليا MSB فإذا كان

MSB = 0 فالعدد موجب

MSB = 1 فالعدد سالب

طريقة المقدار-الإشارة (Sign-Magnitude)

- مثلاً إذا أردنا تمثيل القيمة 27+ في صورة عدد صحيح بإشارة في مساحة تبلغ 1 Byte = 8 bits.
- نتجاهل إشارة القيمة مؤقتاً و نقوم بتحويل المقدار من الصورة العشرية إلى الصورة الثنائية:

$$27 = (11011)_2$$

- المساحة المتاحة تبلغ 8 خانات، لذلك نقوم بإكمال طول العدد الثنائي إلى 8 خانات و ذلك بإضافة أصفار (0's) إلى يسار العدد.

$$(11011)_2 = (00011011)_2$$

- من 8 خانات، نستبعد منها الخانة العليا MSB لتمثيل الإشارة، فيتبقى 7 خانات لتمثيل المقدار.
- يتم تخزين مقدار العدد الصحيح ذو الإشارة في المساحة المتاحة له بنفس طريقة تخزين الأعداد الصحيحة بدون إشارة (Unsigned Integers).
- أخيراً نضع 0 في خانة الإشارة لأن القيمة موجبة.

0	0	0	1	1	0	1	1	=	**+27**

الإشارة المقدار

- و تمثيل القيمة 27- يتم بنفس الطريقة و لكن مع وضع 1 في خانة الإشارة لأن القيمة سالبة.

1	0	0	1	1	0	1	1	=	**-27**

الإشارة المقدار

تسمى هذه الطريقة في تمثيل الأعداد الصحيحة ذات الإشارة بطريقة **المقدار-الإشارة (Sign-Magnitude)**، حيث تم الفصل بصورة كاملة ما بين إشارة القيمة و مقدارها.

- هذا الأسلوب فى تمثيل الأعداد الصحيحة ذات الإشارة به مشكلة خطيرة تتمثل فى أن القيمة صفر لها شكلين

0	0	0	0	0	0	0	0	=	**+0**
1	0	0	0	0	0	0	0	=	**-0**

- وجود شكلين للصفر يعتبر مشكلة لأن عملية فحص قيمة معينة لمعرفة ما إذا كانت مساوية للصفر أم لا هي من أكثر العمليات التي يتم إجراؤها داخل الأنظمة الرقمية، ووجود شكلين للصفر يعنى أن هذه العملية يجب إجراؤها مرتين في كل مرة، مما يقلل كثيراً من كفاءة النظام الرقمي.
- حلاً لهذه المشكلة تستخدم طريقة **المكمل الثاني (2's Complement)** لتمثيل الأعداد الصحيحة ذات الإشارة.

طريقة المكمل الثاني (2’s Complement)

- لتمثيل القيمة 27- فإننا نبدأ بنفس خطوات تمثيل القيمة 27+، حيث نتجاهل إشارة القيمة مؤقتاً ونقوم بتحويل المقدار من الصورة العشرية إلى الصورة الثنائية، ثم نقوم بإكمال طول العدد الثنائي إلى 8 خانات و ذلك بإضافة أصفار (0’s) إلى يسار العدد.

$$27 = (11011)_2 = (00011011)_2$$

- و بما أن القيمة المطلوب تمثيلها سالبة فإننا نحتاج إلى إيجاد المكمل الثاني (2’s Complement) للعدد الثنائي الناتج، حيث أن المكمل الثاني لعدد ثنائي هنا يمثل سالب العدد.

الأعداد الصحيحة ذات الإشارة (Signed Integers)

- إيجاد المكمل الثاني لعدد ثنائي يتم في خطوتين:

الخطوة الأولى هي إيجاد المكمل الأول (1’s Complement) و ذلك بعكس جميع خانات العدد الثنائي، أي تحويل أي 0 إلى 1 و تحويل أي 1 إلى 0.

الخطوة الثانية هي إضافة 1 للمكمل الأول لنحصل على المكمل الثاني.

العدد	00011011
المكمل الأول	11100100
	1 +
المكمل الثاني	11100101

الأعداد الصحيحة ذات الإشارة (Signed Integers)

- أخيراً نقوم بوضع العدد الثنائي الناتج في المساحة المتاحة له.

1	1	1	0	0	1	0	1	= **-27**

- **لاحظ الآتي :**
  - الخانة العليا MSB هنا ما زالت تمثل إشارة العدد، فـ MSB=0 للقيمة الموجبة +27 و MSB=1 للقيمة السالبة -27.
  - المكمل الثاني (2's Complement) لعدد ثنائي يمثل سالب ذلك العدد.
  - لا يوجد فصل ما بين مقدار العدد (Magnitude) و إشارته (Sign)، حيث أن جميع الخانات بما في ذلك خانة الإشارة تدخل في حساب مقدار العدد.

الأعداد الصحيحة ذات الإشارة (Signed Integers)

- **إيجاد مقدار العدد السالب:**

المطلوب مثلاً إيجاد القيمة العشرية للعدد الثنائي 11100101 إذا كان يمثل عدداً صحيحاً قصيراً بإشارة.

- نبدأ بتحديد إشارة العدد و ذلك بالنظر للخانة العليا MSB. في هذه الحالة نجد أن الخانة العليا MSB=1 مما يعني أن العدد سالب. لإيجاد مقدار عدد سالب نقوم بإيجاد المكمل الثاني له، لأن سالب العدد السالب عبارة عن عدد موجب.

العدد	11100101
المكمل الأول	00011010
	+ 1
المكمل الثاني	00011011

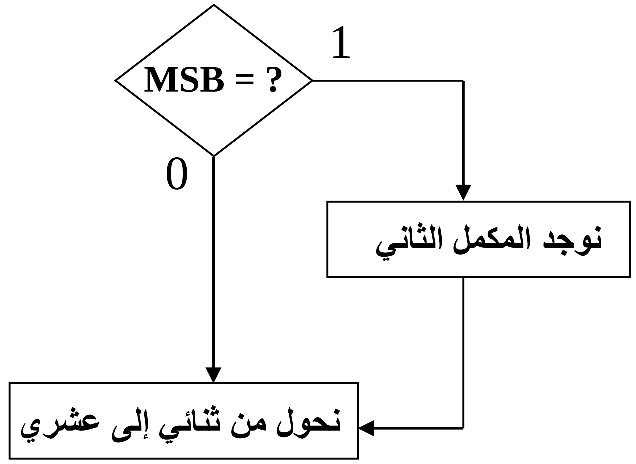
الأعداد الصحيحة ذات الإشارة (Signed Integers)

- أخيراً نقوم بتحويل المقدار من الصورة الثنائية للصورة العشرية

$$(00011011)_2 = (11011)_2 = 27$$

إذن العدد هو 27-

- وعموماً لإيجاد قيمة عدد صحيح بإشارة يمكن استخدام المخطط التالي



مثال: وضح طريقة تمثيل القيمة 13- في صورة:

(أ) عدد صحيح قصير بإشارة (Signed Short Integer)

(ب) عدد صحيح بإشارة (Signed Integer)

نقوم أولاً بتحويل المقدار إلى الصورة الثنائية $13 = (1101)_2$

(أ) عدد صحيح قصير بإشارة:

نكمل طول العدد إلى 8 خانات ثم نقوم بإيجاد المكمل الثاني له

العدد	00001101
المكمل الأول	11110010
	+ 1
المكمل الثاني	11110011

أي أن $-13 = (11110011)_2$

الأعداد الصحيحة ذات الإشارة (Signed Integers)

(ب) عدد صحيح بإشارة:

نكمل طول العدد إلى 16 خانة ثم نقوم بإيجاد المكمل الثاني له

العدد	0000000000001101
المكمل الأول	1111111111110010
	+ 1
المكمل الثاني	1111111111110011

أي أن $-13 = (1111111111110011)_2$

الأعداد الصحيحة ذات الإشارة (Signed Integers)

في المثال السابق قمنا في (أ) بتمثيل العدد الصحيح ذو الإشارة

-13 في 8 خانات ثم قمنا في (ب) بزيادة طول العدد إلى 16 خانة

1	1	1	1	0	0	1	1

								1	1	1	1	0	0	1	1

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1

لاحظ أننا قد قمنا بملء الخانات الفائضة إلى اليسار بـ 1's

الأعداد الصحيحة ذات الإشارة (Signed Integers)

و بالمقارنة إذا أردنا تمثيل القيمة الموجبة 13+ في 8 خانات ثم في 16 خانة

0	0	0	0	1	1	0	1

								0	0	0	0	1	1	0	1

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1

لاحظ أننا قد قمنا بملء الخانات الفائضة إلى اليسار بـ 0’s

- يمكن بصورة عامة القول أنه عند زيادة طول العدد الصحيح ذو الإشارة فإننا نقوم بملء الخانات الفائضة إلى اليسار بإشارة العدد.
- وتسمى هذه العملية بـ**تمديد الإشارة (Sign Extension)**.

الأعداد الصحيحة ذات الإشارة (Signed Integers)

مثال:

أوجد القيمة العشرية للعدد الثنائي 11110101 وذلك إذا كان يمثل:

(أ) عدد صحيح قصير بدون إشارة (Unsigned Short Integer).

(ب) عدد صحيح قصير بإشارة (Signed Short Integer).

الأعداد الصحيحة ذات الإشارة (Signed Integers)

(أ) العدد بدون إشارة (Unsigned) و بالتالي فإن كل الخانات تمثل مقدار العدد، و ما علينا إلا التحويل من الصورة الثنائية للصورة العشرية:

$$(11110101)_2 = 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^0 = 128 + 64 + 32 + 16 + 4 + 1 = 245$$

(ب) العدد بإشارة (Signed) و عليه ننظر للخانة العليا MSB لتحديد إشارته. MSB=1 مما يعني أن العدد سالب. لحساب المقدار نقوم بإيجاد المكمل الثاني

العدد	11110101
المكمل الأول	00001010
	+ 1
المكمل الثاني	00001011

ثم نحول المقدار للصورة العشرية

$$(00001011)_2 = (1011)_2 = 2^3 + 2^1 + 2^0 = 11$$

أي أن القيمة هي 11-

الأعداد الصحيحة ذات الإشارة (Signed Integers)

قيم موجبة	0000	+0
	0001	+1
	0010	+2
	0011	+3
	0100	+4
	0101	+5
	0110	+6
	0111	+7
قيم سالبة	1000	-8
	1001	-7
	1010	-6
	1011	-5
	1100	-4
	1101	-3
	1110	-2
	1111	-1

مدى القيم التي يمكن تخزينها في مساحة معينة في صورة عدد صحيح بإشارة

- لتوضيح الأمر نبدأ بالمثال التالي:

حدد جميع الأعداد الصحيحة ذات الإشارة (Signed Integers) التي يمكن تمثيلها في مساحة قدرها 4 خانات.

- وعليه فان مدى القيم التي يمكن تمثيلها في صورة عدد صحيح بإشارة (Signed Integer) طوله 4 خانات هو

$$-8 \sim +7$$

$$-2^3 \sim +2^3 -1$$

$$-2^{4-1} \sim +2^{4-1} -1$$

تمثيل الأعداد الصحيحة

- الجدول التالي يوضح أنواع الأعداد الصحيحة و مدى القيم الذي يقبلها كل نوع

نوع العدد الصحيح	طوله	مدى القيم	
		Unsigned	Signed
Short Integer	1 Byte = 8 bits	$0 \sim (2^8 - 1)$ $0 \sim 255$	$-2^7 \sim +(2^7 - 1)$ $-128 \sim +127$
Integer	2 Bytes =16 bits	$0 \sim (2^{16} - 1)$ $0 \sim 65{,}535$	$-2^{15} \sim +(2^{15} - 1)$ $-32{,}768 \sim +32{,}767$
Long Integer	4 Bytes = 32 bits	$0 \sim (2^{32} - 1)$ $0 \sim 4{,}294{,}967{,}295$	$-2^{31} \sim +(2^{31} - 1)$ $-2{,}147{,}483{,}648 \sim +2{,}147{,}483{,}647$
-	N bits	$0 \sim (2^N - 1)$	$-2^{N-1} \sim +(2^{N-1} - 1)$

تمثيل الأعداد الصحيحة

- كملخص لما سبق فإن الأعداد الصحيحة (Integers) تنقسم من حيث الإشارة إلى نوعين: بإشارة (Signed) و بدون إشارة (Unsigned)
- كما تنقسم الأعداد الصحيحة (سواء كانت بإشارة أو بدون إشارة)، من حيث الطول، إلى ثلاثة أنواع: Short و Integer و Long

Integers

<u>Signed</u>	**<u>Unsigned</u>**
Short	Short
Integer	Integer
Long	Long

تمثيل الأعداد الصحيحة

ملاحظة:

- عادة لا تذكر كلمة Signed صراحة في لغات البرمجة و إنما تفهم ضمناً، فمثلاً Integer تعني Signed Integer و Short Integer تعني Signed Short Integer. أما كلمة Unsigned فيجب أن تذكر صراحة.

- مما سبق يتضح لنا أن الأعداد الصحيحة يتم تمثيلها دون أي خطأ، أي بالدقة الكاملة، طالما أن عدد الخانات المتاحة يكفي لتمثيل القيمة.
- المشكلة الوحيدة التي يمكن أن تظهر في تمثيل الأعداد الصحيحة هي أن تكون القيمة المطلوب تخزينها خارج المدى المحدد للمساحة المتاحة، عند ذلك يحدث ما يسمى **Over Flow**

تمارين:

وضح طريقة تمثيل كل من القيم التالية في صورة عدد صحيح قصير بإشارة (Signed Short Integer)

- +15 و -15
- +65 و -65
- +127 و -127

أوجد القيمة العشرية لكل من الأعداد الثنائية التالية إذا كان كل منها يمثل عدد قصير بإشارة (Signed Short)

(1) 10111111

(2) 10000000

(3) 01111111

(4) 11111111