الكلية الجامعية للعلوم التطبيقية
University College of Applied Sciences
Leader of Innovation رائدة الإبداع

مساق الرياضيات للحاسوب

الفصل الثاني
المجموعات Sets

الجزء الأول: مفاهيم أساسية في نظرية المجموعات

تعريف المجموعة

- **نظرية المجموعات** (Set theory) تعد من الفروع الأساسية لعلم الرياضيات.
- **المجموعة** هي عبارة عن تجمع من أشياء (عناصر) معرفة تعريفا جيدا، ولها صفة مميزة مشتركة بينها، بحيث:
  - يمكن التمييز بين هذه العناصر داخل المجموعة.
  - يمكن الحكم بوجود الشيء داخل المجموعة من عدمه.
- نرمز عادة للمجموعات بحروف كبيرة مثل A, B, C, …, X, Y, Z، بينما يرمز لعناصر المجموعة بحروف صغيرة مثل a, b, c, …, x,y,z.
- توضع العناصر بين قوسين من النوع {   }، ويوضع بين كل عنصر وعنصر فاصلة.
- **ملاحظة: ترتيب العناصر داخل المجموعة غير مهم وليس له تأثير، وتكرار العنصر في المجموعة غير محبذ ولا يؤثر في المجموعة، فمثلا** $\{3,1,2\} = \{1,2,3\}$

مثال: العبارات الآتية تمثل مجموعات:

1. كليات جامعة صنعاء.
2. طلاب كلية العلوم.
3. مجموعة الأعداد الطبيعية ... ,1, 2
4. مجموعة الألوان : أحمر – ابيض – اسود – ازرق – اخضر – اصفر.
5. مجموعة الأعداد: 1, 7, 2, 9

مثال: من أمثلة الأشياء التي لا تمثل مجموعات:

1. "الأعداد المهمة" لإننا لا نستطيع أن نميز مثلا العدد 5 هل هو مهم أو غير مهم.
2. "الأولاد الأذكياء" لأن الذكاء هو نسبي بمعنى قد يكون الولد ذكي جدا في الدراسة ولكنه ليس كذلك في رياضة كرة القدم.
3. "المدن الجميلة" لأن صفة الجمال نسبية وتختلف من شخص لأخر فقد تكون أحد المدن القديمة جميلة جدا من وجهة نظر شخص ما ولكنها ليست كذلك من جهة شخص أخر.
4. "الطعام اللذيذ" لأن صفة لذة الطعام نسبية وتختلف من شخص لأخر فقد يحب شخص

طرق وصف المجموعة

نعبر عن المجموعات بإحدى الطريقتين التاليتين:

- طريقة الحصر أو السرد: في هذه الطريقة يتم ذكر أو كتابة جميع عناصر المجموعة بين قوسين { } وبينهم فواصل، مثلا A = {a,b,c,d} مجموعة مكونة من الحروف الأربعة.
  - مثال: مجموعة الأعداد الطبيعية أقل أو يساوي 20 تكتب $S = \{1 ,2,3, \dots ,20\}$
- طريقة القاعدة: نكتب عناصر المجموعة بدلالة الصفة المميزة، على الشكل التالي:

A = {a : نضع هنا الخاصية المميزة لعناصر المجموعة}

- أمثلة:
  - A = {x: x is a letter in the English alphabet, x is a vowel}
  - B = {x: من الأشهر الهجرية الحرم x }
  - $X = \{x \in N : 5 < x < 10\}$

- النقطتين : تعني (حيث أو على اعتبار أن).
- النقاط الثلاث ... تشير بأن العناصر تسير بشكل لا نهائي.

الانتماء للمجموعة

ينتمي $\in$

العنصر موجود داخل المجموعة

$3 \in \{1, 3, 5, 7, \dots\}$

$9 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$

$-4 \in$ مجموعة الأعداد الصحيحة

لا ينتمي $\notin$

العنصر غير موجود داخل المجموعة

$5 \notin \{2, 4, 6, 8, \dots\}$

$18 \notin \{1, 3, 5, 7, \dots\}$

$9 \notin$ مجموعة الأعداد الأولية

مجموعات الأعداد

مجموعة الأعداد الطبيعية $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

مجموعة الأعداد الصحيحة $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

مجموعة الأعداد النسبية $Q = \left\{\frac{a}{b} : a \,\&\, b \in Z, b \neq 0\right\}$

المجموعة الخالية Empty set

- هي المجموعة التي لا تحتوي على أية عناصر، ويرمز لها بالرمز {   } أو Ø وتقرأ (فاي). المجموعات التالية جميعها خالية.

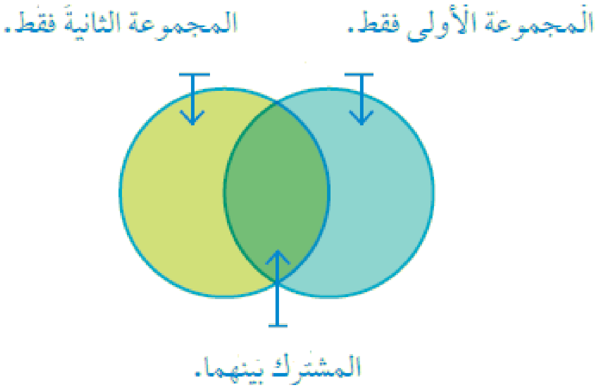
- مثال1: مجموعة الأعداد الطبيعية المحصورة بين 4 و 5.
- مثال2: مجموعة الشهور التي عدد ايامها 35.
- مثال3: مجموعة الأشخاص الذين يعيشون على الأرض وتزيد أعمارهم عن 150.
- مثال4: $\boldsymbol{A = \{x : |x| < 0\}}$
- مثال5: $\boldsymbol{B = \{x : sin\, x \geq 2\}}$
- مثال6: $\boldsymbol{C = \left\{x = 2k + 1, k \in Z : 2 \text{ يقسم } x \text{ العدد}\right\}}$

المجموعة المنتهية وغير منتهية

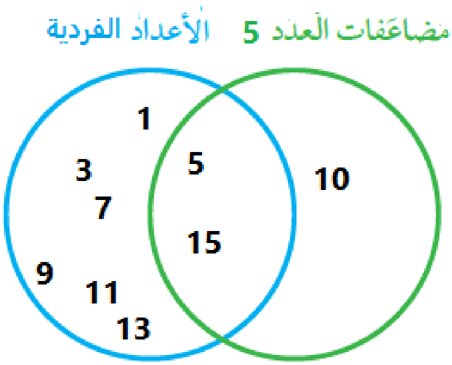
- يقال لمجموعة أنها منتهية أو محدودة (finite) اذا كانت تحتوي على عدد محدود من العناصر أو أنها تكون مجموعة خالية، وما عدا ذلك تكون غير منتهية (infinite).
- اذا كانت المجموعة منتهية فإننا نرمز لعدد عناصر المجموعة S بالرمز $|S|$ أو $n(S)$ فمثلا المجموعة $S = \{1 ,2,3 ,4,5\}$ عدد عناصرها $|S| = 5$ ، بينما المجموعة الخالية عدد عناصرها $|\emptyset| = 0$
- أمثلة:
  - مجموعة أيام الأسبوع منتهية، وعدد عناصرها 7.
  - مجموعة الأحرف الابجدية منتهية.
  - مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية من 80 الى 90 منتهية.
  - مجموعة الأعداد الطبيعية التي تقل عن 5 منتهية.
  - مجموعة الأعداد الطبيعية التي تزيد عن 5 غير منتهية.
  - مجموعة الأعداد الصحيحة غير منتهية.
- من الممكن أن تكون عناصر المجموعة أيضا مجموعات، مثلا مجموعة الأعداد الصحيحة تتكون من الأعداد الصحيحة الموجبة والأعداد الصحيحة السالبة ومجموعة الصفر.

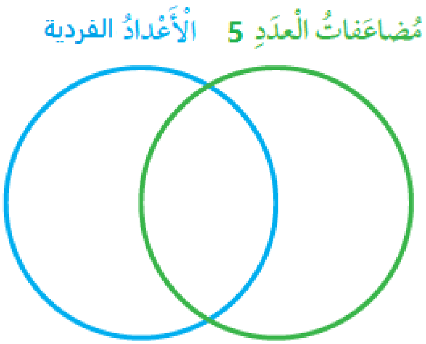
تمثيل المجموعات بأشكال فن

- أشكال فن Venn هي طريقة لتمثيل المجموعات، إذ تشكل كل دائرة أو مستطيل مجموعة مستقلة يوضع داخلها عناصر المجموعة على شكل نقاط، ويمثل الجزء المتداخل العناصر المشتركة بين المجموعتين.



- مثل المجموعتين التاليتين بأشكال فن:
  - المجموعة الأولى هي مضاعفات العدد 5 حتى العدد 16.
  - المجموعة الثانية هي الأعداد الطبيعية الفردية حتى العدد 16.





تعريف (3.1.2): يقال أن المجموعتان A و B إنهما متساويتان إذا وإذا فقط كانتا تحتويان على نفس العناصر بالظبط أو بعبارة أخرى إذا كان كل عنصر من عناصر المجموعة A يكون موجود أيضا داخل المجموعة B وكذلك كل عنصر من عناصر المجموعة B يكون موجود أيضاً داخل المجموعة A وفي هذه الحالة نكتب

$[A=B]\equiv[\forall x\in A\leftrightarrow x\in B]$

بينما تكون المجموعتان A و B غير متساويتان إذا وجد عنصر واحد على الأقل من أحد المجموعتين لا ينتمي إلى المجموعة الأخرى وفي هذه الحالة نكتب $A\neq B$

مثال: لتكن

$$A=\{5,5,2,1,6\},\ B=\{1,6,2,5,2\}$$

إذن المجموعتان متساويتان ونكتب:

$$A=B=\{5,2,1,6\}$$

مثال: لتكن

$$A=\{x\in\mathbb{Z}:\ -1\leq x<4\},\ B=\{-1,0,1,2,3\}$$

إذن المجموعتان متساويتان ونكتب: $A=B$.

مثال: لتكن

$$A = \{x \in \mathbb{Z}: -1 \leq x < 4\}, \qquad B = \{-2, 0, 1, 2, 3\}$$

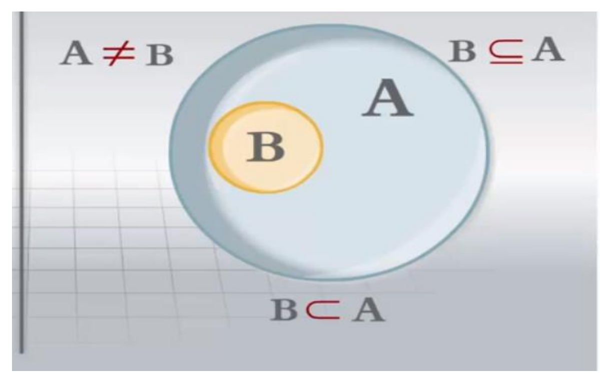
إذن المجموعتان غير متساويتان لأن العنصر $-1 \in A, -1 \notin B$

كذلك العنصر $-2 \in B, -2 \notin A$ وفي هذه الحالة نكتب: $A \neq B$

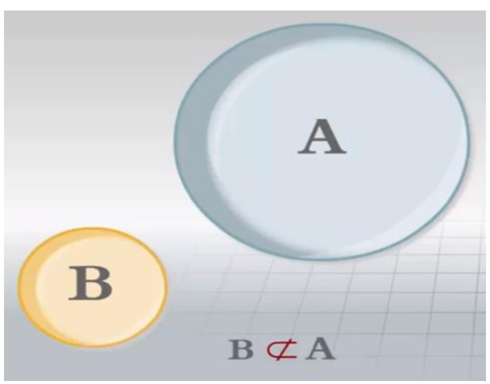
تعريف (3.1.3): المجموعة A تكون مجموعة جزئيه مـن B إذا كـان كـل عنصـر مـن A ينتمي إلى B بمعنى إذا كان لكل $x \in A$ فإن $x \in B$ وفي هـذه الحالـه نكتـب $A \subseteq B$ حيث

$A \subseteq B \equiv [\forall x \in A \rightarrow x \in B]$ وتقرأ A محتواه في B

جزئية



ليست جزئية



ضع إحدى العلامات التالية $\not\subset$, $\subseteq$, $\notin$, $\in$ لتصبح العلاقة صحيحة:

a) $\{2, 4\}$ ..$\not\subset$.... $\{4, 24, 42, 13\}$

b) 2 ..$\notin$.... $\{22, 23, 42, 12\}$

c) $\{4, 6\}$ ..$=$.... $\{6, 4\}$

d) $\emptyset$ ..$\subsetneq$.... $\{1, 9, 5, 13\}$

e) 13 ..$\in$.... $\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\ldots\ldots\ldots\}$

f) $\{2, 4,5,6\}$ ..$\not\subset$.... $\{2, 4, 5\}$

مثال: لنفرض أن $A = \{x \in \mathbb{Z}: 1 \leq x < 4\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z}: 0 < x \leq 11\}$

اذن $A \subset B$.

ملاحظه:

- نقول أن المجموعة A ليست مجموعة جزئية من B وتكتب $A \not\subset B$ إذا وجد على الأقل عنصر واحد x من A لا ينتمي إلى B ويمكن كتابة ذلك ب

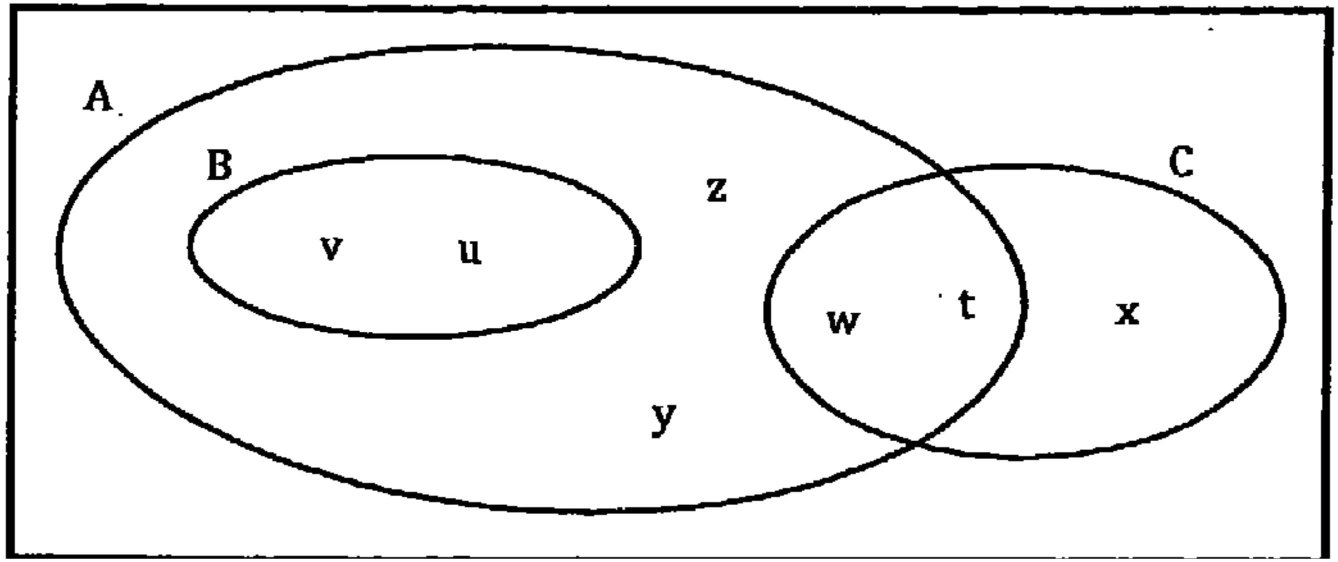
$A \not\subset B \equiv [\exists x \in A, x \notin B]$

- نقول أن المجموعة A مجموعة جزئية فعلية (proper subset) من B وتكتب $A \subset B$ إذا كانت A مجموعة جزئية من B و $A \neq B$ وفي هذه الحالة يوجد على الأقل عنصر واحد من المجموعة B لا ينتمي إلى المجموعة A .
- المجموعتان A, B يقال أنهما مجموعات قابلة للمقارنة (Comparable Sets) إذا كانت أحد المجموعتان مجموعة جزئية من الأخرى وهذا يحدث إذا كانت $A \subset B$ أو $B \subset A$ وغير ذلك تكون المجموعتان غير قابلتان للمقارنة .

مثال: إعتبر المجموعات

$$A = \{u, v, w, t, y, z\}, \qquad B = \{u, v\}, \qquad C = \{w, t, x\}$$

بإستخدام أشكال فن:



إذن:

$$B \subset A, \qquad C \not\subset A$$

مثال: إعتبر المجموعات

$$A = \{0, 1, 2, 3, 5\}, \qquad B = \{0, 2, 3, 4\}, \qquad C = \{0, 1, 3\}$$

$$C \subset A, \qquad B \not\subset A, \qquad A \not\subset B$$

إذن المجموعات A, C قابلة للمقارنة بينما المجموعات A, B غير قابلة للمقارنة.

نظرية (3.1.4): إذا كانت A و B و C فإن:

1. $A \subseteq A$.
2. إذا كان $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ فإن $A \subseteq C$.
3. $A = B$ إذا وإذا فقط كان $B \subseteq A$, $A \subseteq B$.

نظرية (3.1.5):

1. المجموعة الخالية φ تكون دائماً مجموعة جزئية من أي مجموعة أخرى. $\emptyset \subseteq A$

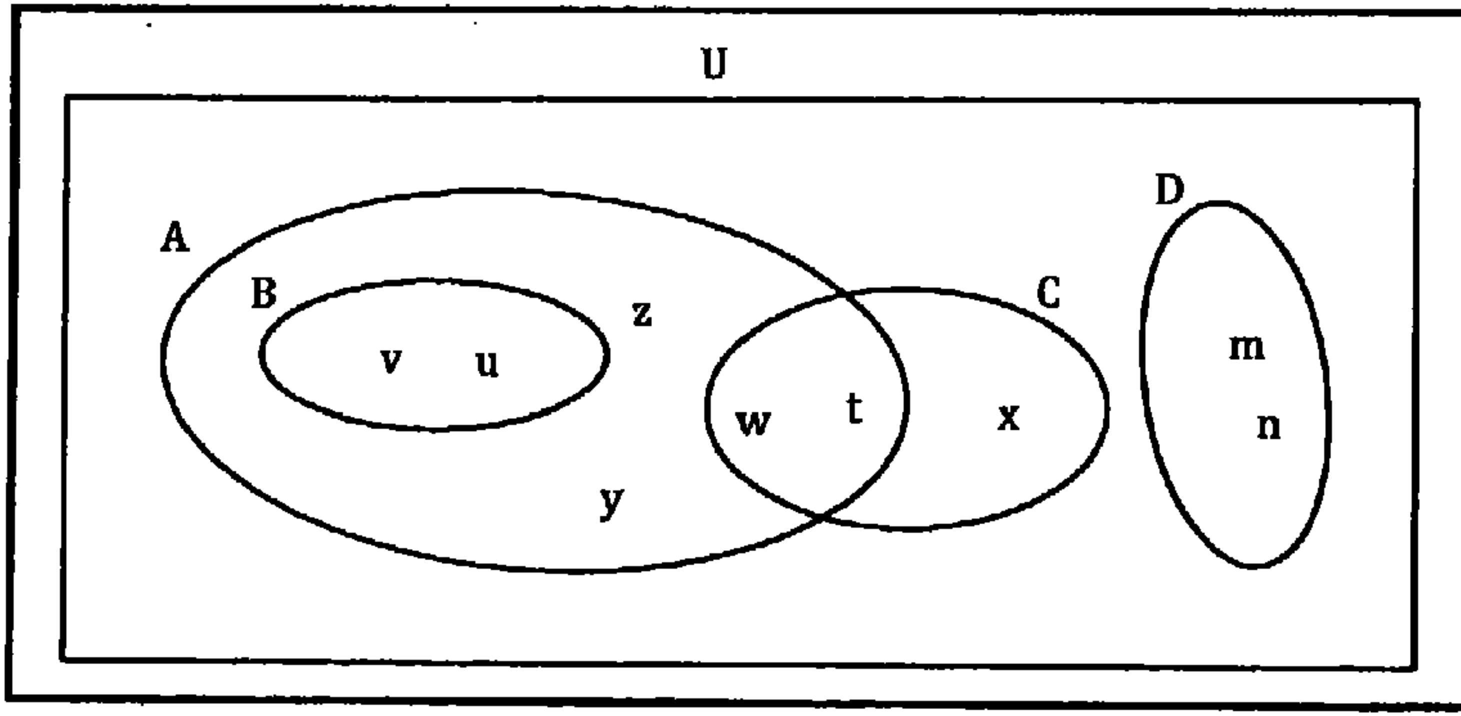
(3-2) المجموعة الشاملة Universal set

في أي مسألة من مسائل المجموعات لا بد من وجود مجموعة كاملة (شاملة) U بحيث تكون جميع المجموعات التي ندرسها تكون مجموعات جزئية من U أو بمعنى أخر يجب أن تكون جميع عناصر المجموعات الجزئية تنتمي جميعها إلى U وفي العادة عند إستخدام أشكال فن فإن المجموعة الشاملة تأخذ شكل المستطيل ويداخلها تقع المجموعات الجزئية.

مثال: إعتبر المجموعات

$A = \{u, v, w, t, y, z\}, \qquad B = \{u, v\}, \qquad C = \{w, t, x\}, \qquad D = \{m, n\}$

بإستخدام أشكال فن:



إذن:

$A \subset U, \qquad B \subset U, \qquad C \subset U, \qquad B \subset A$

$U = \{u, v, w, t, y, z, x, m, n\}$

مثال: إذا كان:

$$A = \{1,3,5,7,9\}, B = \{2,4,6,8\}, C = \{0,1,2,11\}$$

إذن من الممكن أن نختار المجموعة الشاملة بأنها:

$$U_1 = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$$

أيضا من الممكن أن نختار المجموعة الشاملة بأنها:

$$U_2 = \{0,1,2,3,\dots\} = \mathbb{N}$$

أيضا من الممكن أن نختار المجموعة الشاملة بأنها:

$$U_3 = \{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\} = \mathbb{Z}$$

إذن المجموعة الشاملة على أرض الواقع من الممكن أن نختارها بأكثر من طريقة ولكن أتفق الرياضيون بأن تجاه أية مسألة من مسائل المجموعات لابد أولا من تحديد مجموعة U لا تتغير داخل المسألة بحيث كل المجموعات الجزئية تكون داخلها وهذه U هي المجموعة الشاملة وبالتالي فإن المجموعة الشاملة بهذا المفهوم تكون وحيدة .