الكلية الجامعية للعلوم التطبيقية
University College of Applied Sciences
Leader of Innovation رائـــــدة الإبـــــداع

# مساق الرياضيات للحاسوب

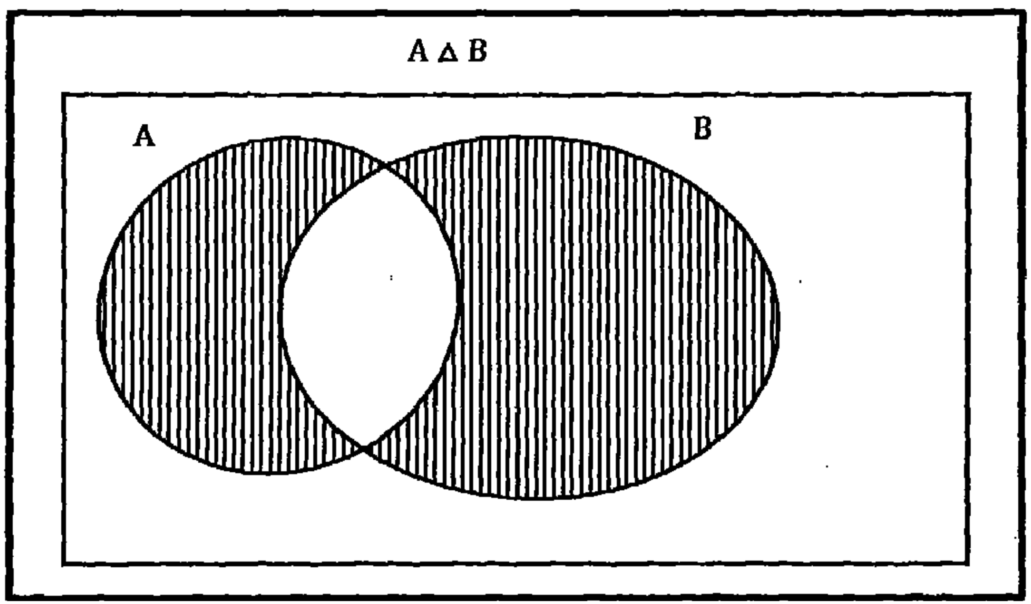
## الفصل الثاني
## المجموعات Sets

### الجزء الثالث: تجزئة المجموعة والضرب الكارتيزي للمجموعات

# الفرق التناظري بين مجموعتين

تعريف (3.6.1): إذا كانت A و B مجموعتين فإن مجموعة الفرق التناظري للمجموعتين A و B هي مجموعة إتحاد المجموعتين A-B و B-A ويرمز لها بالرمز $A \Delta B$ ويمكن وصفها ب:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap B') \cup (B \cap A')$$



مثال: إذا كانت المجموعتين $A=\{a, b, c, d\}, B=\{a, c, e, f\}$

فإن $A-B=\{b, d\}, B-A=\{e, f\}$ وبالتالي:

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = \{b, d\} \cup \{e, f\} = \{b, d, e, f\}$$

---

مثال: إذا كانت $A=\{1, 2, 4, 6, 7, 8\}, B=\{3, 4, 5, 7\}$

فإن $A-B=\{1, 2, 6, 8\}, B-A=\{3, 5\}$ وبالتالي:

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = \{1, 2, 6, 8\} \cup \{3, 5\} = \{1, 2, 3, 5, 6, 8\}$$

---

نظرية (3.6.2): ليكن $A, B$ مجموعتين فإن:

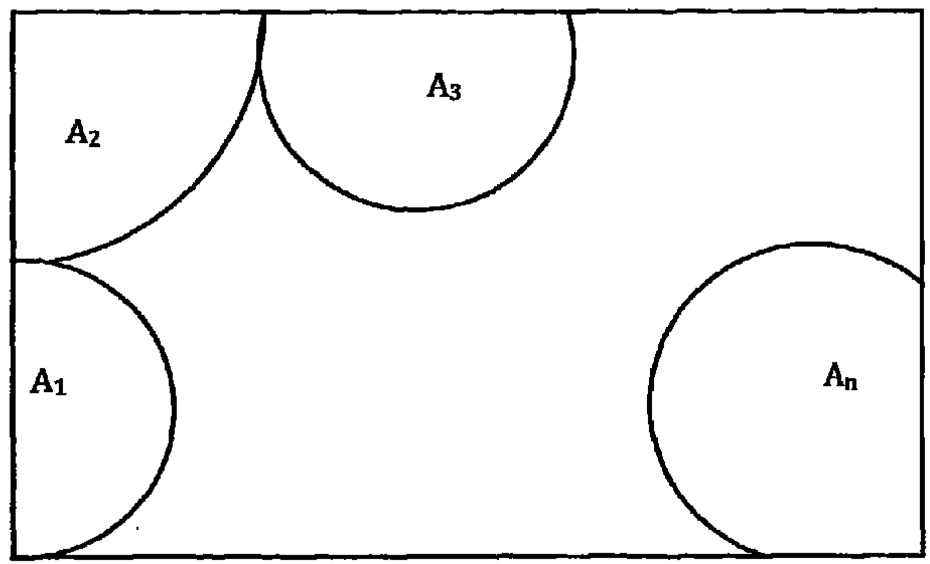
$$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

ملاحظة : بعض المراجع تستخدم الرمز $A \oplus B$ للدلالة على الفرق التناظري وهو يمثل مجموعة العناصر التي تنتمي إلى إحدى المجموعتين فقط و ليس إلى كليهما.

# Partition of a set تجزئة المجموعة

تعريف (3.4.12): ليكن U هي المجموعة الشاملة و $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مجموعات جزئية منها فإننا نقول أن $A_1, A_2, \ldots, A_n$ تشكل تجزئة (Partion) للمجموعة U إذا تحقق:

1. $U \neq \varphi$;
2. $A_i \cap A_j = \varphi \; \forall i \neq j$
3. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = U$




نرمز للتجزئة $A_1, A_2, \ldots, A_n$ بالرمز $[A_1, A_2, \ldots, A_n]$

$[A_1, A_2, \ldots, A_n]$ إنها تشكل تجزئة للمجموعة الغير خالية U إذا وفقط إذا كان كل عنصر من عناصر المجموعة U ينتمي إلى مجموعة وحيدة من بين المجموعات $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

مثال: إذا كانت $A = \{a, b, c, d, e\}$

فإن $[\{e\}, \{d\}, \{a, b, c\}]$ تشكل تجزئة للمجموعة A

كذلك $[\{e\}, \{c, d\}, \{a, b\}]$ تشكل تجزئة للمجموعة A

---

مثال: إذا كانت $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

فإن $[\{3, 6\}, \{1, 2, 4\}, \{5\}]$ تشكل تجزئة للمجموعة A

بينما $[\{3, 6\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 5\}]$ لا تشكل تجزئة للمجموعة A لأن:

$$\{1, 2, 4\} \cap \{1, 5\} = \{1\} \neq \varphi$$

كذلك $[\{3, 6\}, \{1, 2\}, \{5\}]$ لا تشكل تجزئة للمجموعة A لأن:

$$\{3, 6\} \cup \{1, 2\} \cup \{5\} \neq A$$

مثال: أي من تجمع المجموعات الجزئية التالية يشكل تجزئة من المجموعة S
حيث $S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

(i) $[\{1,3,5\},\{2,6\},\{4,8,9\}]$
(ii) $[\{1,3,5\},\{2,4,6,8\},\{5,7,9\}]$
(iii) $[\{1,3,5\},\{2,4,6,8\},\{7,9\}]$

(i) is not a partition of S since 7 in S does not belong to any of the subsets.
(ii) is not a partition of S since $\{1,3,5\}$ and $\{5,7,9\}$ are not disjoint.
(iii) is a partition of S.

**مثال: ليكن:**

$$[a] = \{x \in \mathbb{Z}: x = a + kn, k \in \mathbb{Z}\}$$

**فإذا كانت n=3 فإننا نحصل على:**

$$[0] = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$$

$$[1] = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$$

$$[2] = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$$

**وبالتالي فإن $[[0], [1], [2]]$ تعتبر تجزئة لمجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$**

تسمى [a] صف التكافؤ للعنصر a في، وتتغير عدد صفوف التكافؤ التي تشكل تجزئة لمجموعة الاعداد الصحيحة مع تغير قيمة n ، وسيتم التطرق لصفوف التكافؤ بالتفصيل عند شرح فصل العلاقات وعلاقة التكافؤ.

# حاصل الضرب الكارتيزي

تعريف (3.7.1): إذا كانت A و B مجموعتين غير خاليتين فإننا نعرف الـزوج المرتـب (a, b) حيث $a\in A$ و $b\in B$ والعنصر الأول a يسمى المركبة الأولى (المسقط الأول) والعنصـر الثـاني b يسمى المركبة الثانية (المسقط الثاني).

**ملاحظـات**

1. يتساوي زوجان مرتبان إذا تساوي عناصر الزوج الأول على الترتيب مع عناصر الزوج الثاني بمعنى:

$$(a, b) = (c, d) \leftrightarrow a = c \wedge b = d,$$

$$(a, b) \neq (c, d) \leftrightarrow a \neq c \vee b \neq d$$

2. الرمز (a, b) يعني زوج مرتب وعلى وجهه العموم يكون $(a, b) \neq (b, a)$ بينما الرمـز $\{a, b\}$ يرمز إلى المجموعة (الفئة) التي تحتوي على العنصرين a, b ولا يهم الترتيب بمعنى $\{a, b\} = \{b, a\}$.

**تعريف (3.7.2):** إذا كانت $A$ و $B$ مجموعتين غير خاليتين فإن حاصل الضرب الكارتيزي للمجموعة $A$ في المجموعة $B$ هو مجموعة جميع الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول من المجموعة $A$ ومسقطها الثاني من المجموعة $B$ وتكتب $A\times B$ وتقرأ $A$ في $B$ وهي عبارة عن:

$$A \times B = \{(a,b): a \in A \wedge b \in B\}$$

**ملحوظة:** يرمز أحيانا للمجموعة $A\times A$ بالرمز $A^2$ وبصورة عامة إذا كان لدينا عدد $n$ من المجموعات $A_1, A_2, \ldots, A_n$ فإن:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n): a_i \in A_i\}$$

وبالتالي إذا كانت المجموعات $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$ فإن:

$$A \times A \times \ldots \times A = A^n$$

الضرب الكارتيزي للمجموعات يسمي أيضا بالجداء الديكارتي

مثال:– لنفرض أن $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{x,y\}$ فإحسب $A \times B, B \times A$

الحل:

$$A \times B = \{(1,x),(1,y),(2,x),(2,y),(3,x),(3,y)\}$$

$$B \times A = \{(x,1),(x,2),(x,3),(y,1),(y,2),(y,3)\}$$

---

مثال: إذا كانت $A=\{a, b, c\}$ و $B=\{1, 2\}$ مجموعتين فإكتب $A\times B,\ B\times A,\ A\times A,\ B\times B$

الحل:

$$A \times B = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$$

$$B \times A = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$$

$$A \times A = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$$

$$B \times B = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$$

**ملاحظة هامة: عملية الضرب الديكارتي للمجموعات هي غير إبداليه**

# حساب عدد العناصر

- عدد عناصر الجداء الديكارتي $A \times B$ هو عدد عناصر المجموعة A مضروب عناصر المجموعة B، أي أن :

$$|A \times B| = |A| * |B|$$

- عدد عناصر اتحاد مجموعتين A و B هو عدد عناصر المجموعتين A و B مطروحا منه عدد عناصر تقاطع المجموعتين، أي أن :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

مثال: اذا كان لدينا $A = \{1,2,3,4,5\}$ $B = \{2,4,6,8\}$

$A \cup B = \{1,2,3,4,6,8\} \Rightarrow |A \cup B| = 7$

$A \cap B = \{2,4,\} \Rightarrow |A \cap B| = 2$

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 5 + 4 - 2 = 7$

# متعددات العناصر n-tuples

- يمكن إيجاد حاصل الضرب الكارتيزي لأكثر من مجموعتين، فمثلا A×B×C يتكون من الثلاثيات المرتبة (a,b,c) حيث $a \in A, b \in B, c \in C$.
- متعددات العناصر n-tuple : هي قائمة (سلسلة) من العناصر المرتبة والمنتهية.
- تسمى عناصر المتعدد بأشياء objects أو مركبات components، ونرمز للمتعدد من خلال كتابة عناصره بين قوسين ( ) ونفصل بينها بفاصلة، مثلاً إن للمتعدد (2,3,7) ثلاثة عناصر الأول 2 والثاني 3 والثالث 7.
- يتم الوصول لأي عنصر في tuple بهدف الحصول على قيمته عن طريق رقم فهرسindex (عدد صحيح يبدأ من الصفر)، وكل عنصر يرتبط برقم فهرس.
- لمتعددات العناصر ميزتان أساسيتان تختلف بها عن المجموعات:
  - الترتيب محدد لعناصر المتعددات، مثلا $(t,s,a,b) \neq (b,a,s,t)$.
  - يمكن حدوث تكرار في عناصر المتعددات، فمثلا $(1,2,3) \neq (1,2,2,3)$.
- تعتبر tuples من أنواع البيانات الأساسية في الحاسوب، وتستخدم في أغلب لغات البرمجة، حيث عملية الوصول لعناصر tuple أسرع من الوصول لعناصر في نوع list مثلا.