

1.1 סיכום

שאלה 1

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

X הינו מ"מ בעל פונקציית הצפיפות:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2 \cos 2x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

א. איזי.

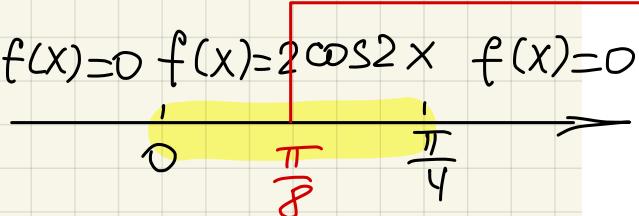
$$P\left(X \geq \frac{\pi}{8}\right) =$$

.1. $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

.2. $1 - \frac{\sqrt{2}}{4}$

.3. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

.4. $\frac{\sqrt{2}}{2}$



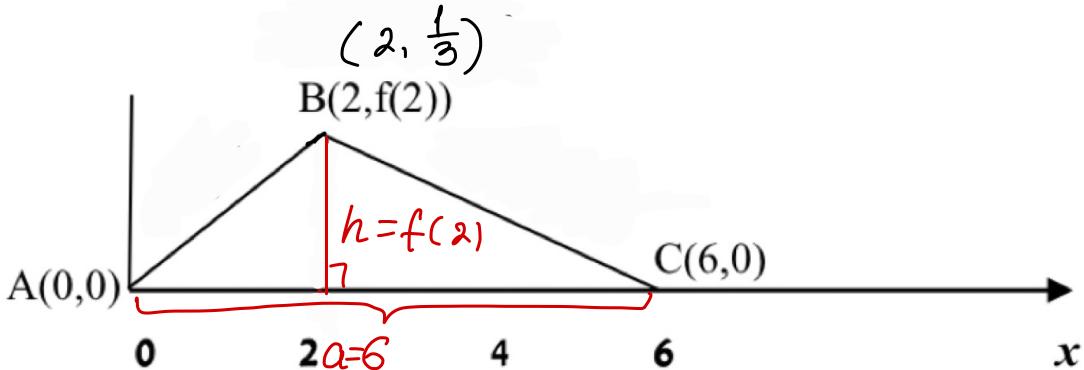
א.5. למעט סעיף זה, כל שאר הסעיפים אינם נכונים.

$$\begin{aligned}
 P(X \geq \frac{\pi}{8}) &= \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} 2 \cos 2x + \cancel{\int_0^{\frac{\pi}{8}} dx} = \frac{2 \sin 2x}{2} \Big|_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} = \\
 &= \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) = \sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{4} = \\
 &= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

ולא מכך!

שאלה 2

X מ"מ בעל פונקציית הצפיפות $f(x)$ המצוירת בתרשים הבא:



.([0, 6] מתחזק מחוץ לקטע $f(x)$ א"ז)

X δε νομίζειν ωρίσαις ε' α' (κ) ιδεαίς

$$P(X > 2 \mid X \leq 4) \quad \textcircled{2}$$

$$1 = \int_0^\infty f(x) dx = S_\Delta = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{3 \cancel{\times} \cdot f(2)}{\cancel{2}}$$

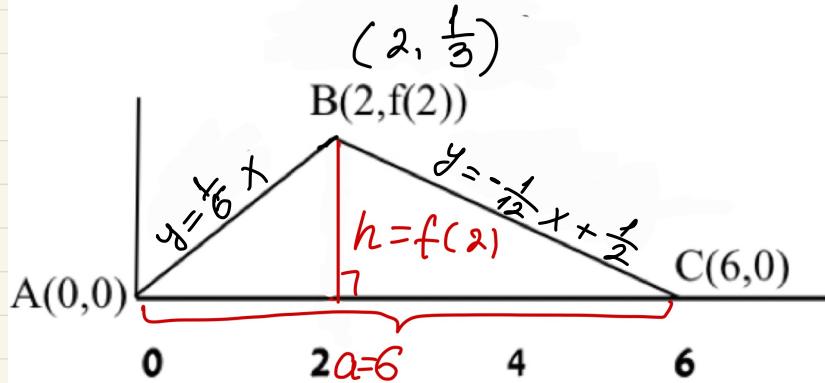
$$3 f(2) = 1$$

$$f(2) = \frac{1}{3}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

: (x_1, y_1) נבנ' בפ' פ' מינימום מינימום בפ' פ' מינימום מינימום

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$



$$A(x_1, y_1) \quad B(x_2, y_2)$$

$$m_{AB} = \frac{\frac{1}{3} - 0}{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{6}$$

$$y - 0 = \frac{1}{6}(x - 0)$$

$$AB: y = \frac{1}{6}x$$

$$B\left(2, \frac{1}{3}\right) \quad C(6, 0)$$

$$m_{BC} = \frac{0 - \frac{1}{3}}{6 - 2} = -\frac{\frac{1}{3}}{4} = -\frac{1}{12}$$

$$y - 0 = -\frac{1}{12}(x - 6) \Rightarrow BC: y = -\frac{1}{12}x + \frac{1}{2}$$

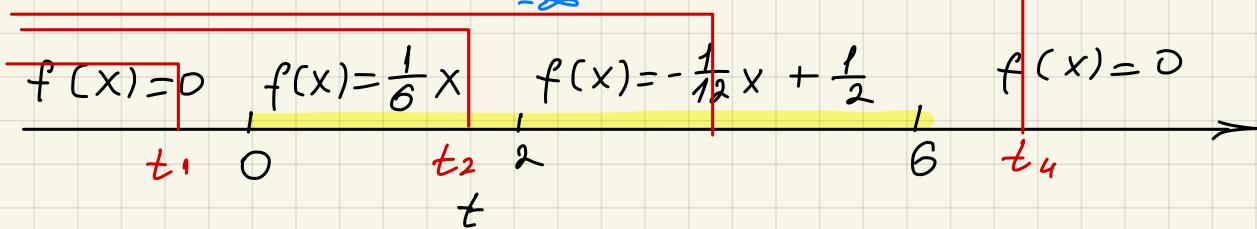
ויש שיקול גאומטרי נסמן נקודות על ציר ה-X ונקודות על ציר ה-Y.

ל'סס נסמן נקודות על ציר ה-X ונקודות על ציר ה-Y.

. m, n סטוד מילוי נסמן א'ג', y = mx + n

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x & 0 < x \leq 2 \\ -\frac{1}{12}x + \frac{1}{2}, & 2 \leq x < 6 \\ 0 & \text{ אחרת} \end{cases}$$

$$F_x(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$



$$1) t < 0 \Rightarrow F_x(t) = \int_{-\infty}^t 0 dx = 0$$

$$2) 0 \leq t < 2 \Rightarrow F_x(t) = P(X \leq t) = \int_0^t \frac{1}{6}x dx = \frac{1}{6} \frac{x^2}{2} \Big|_0^t = \frac{t^2}{12}$$

$$3) 2 \leq t < 6 \Rightarrow F_x(t) = P(X \leq t) = \int_0^2 \frac{1}{6}x dx + \int_2^t -\frac{1}{12}x + \frac{1}{2} dx$$

$$= \dots = -\frac{t^2}{24} + \frac{t}{2} - \frac{1}{2}$$

$$4) t \geq 6 \Rightarrow F_x(t) = P(X \leq t) = \int_0^6 f(x) dx = 1$$

$$F_x(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t^2}{12} & 0 \leq t < 2 \\ -\frac{t^2}{24} + \frac{t}{2} - \frac{1}{2} & 2 \leq t < 6 \\ 1 & t \geq 6 \end{cases}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(X > 2 \mid X \leq 4) \quad (2)$$

$$P(X > 2 \mid X \leq 4) = \frac{P(2 < X \leq 4)}{P(X \leq 4)} = \frac{F_x(4) - F_x(2)}{F_x(4)}$$

$$P(X \leq c) = F_x(c)$$

$$P(X \geq c) = 1 - F_x(c)$$

$$P(a \leq X \leq b) = F_x(b) - F_x(a)$$

$$= \frac{\left(-\frac{4^2}{2^4} + \frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{2^2}{12}\right)}{-\frac{4^2}{2^4} + \frac{4}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{3}{5}.$$

שאלה 3

ישא X משתנה מקרי רציף בעל פונקציה הצפיפות:

$$f_X(x) = \begin{cases} c \cdot |x - a|, & a - 1 \leq x \leq a + 1, \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$|u| = \begin{cases} u, & u \geq 0 \\ -u, & u < 0 \end{cases}$$

$$|x-a| = \begin{cases} x-a, & x \geq a \\ a-x, & x < a \end{cases}$$

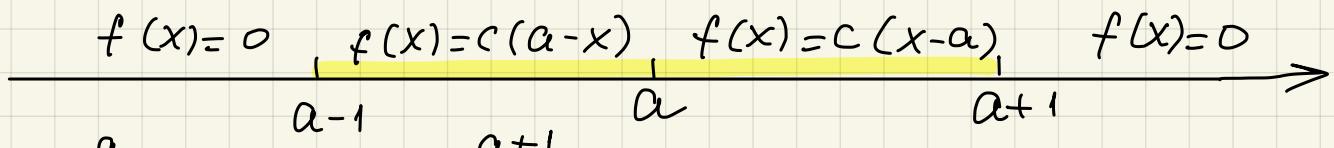
\Downarrow

א. אזי $f(x)$ הינה פונקציה הצפיפות

- א.1. לכל a ממשי $-c = 0$
 - א.2. לכל a ממשי $-1 = 1$
 - א.3. לכל $a = 1 - i$ $c > 0$
 - א.4. ~~לכל $a = c - 1$ $c > 0$~~
 - א.5. אף לא אחת מהן"ל.

$$f(x) = \begin{cases} C(a-x), & a-1 \leq x \leq a \\ C(x-a), & a < x \leq a+1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (2)$$



$$c \cdot (4a+1) = 1$$

לפ'ם נסחן מילון ערך ורשות רשותן

$$\forall a \in \mathbb{R}, c = 0$$

(1)

$$0 \cdot (4a+1) = 1$$

$$0 = 1$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, c = 1$$

(2)

$$1 \cdot (4a+1) = 1$$

$$4 \cdot 2 + 1 = 1$$

$$9 = 1$$

$$\text{5/c } a = 2 \in \mathbb{R} \text{ PK}$$

\emptyset

$$10 = 1$$

$$<= 5 \cdot 2 = 1$$

$$\forall c > 0, a = 1 \quad (3)$$

$$c(4 \cdot 1 + 1) = 1$$

$$5c = 1$$

$$\forall c > 0, a = c \quad (4)$$

$$c \cdot (4c + 1) = 1$$

\emptyset

$$18 = 1$$

$$2 \cdot (4 \cdot 2 + 1) = 1$$

$$\text{5/c } c = 2 > 0 \text{ PK}$$

\checkmark

. א.פ לא אחות מהנ"ל . 5.א.

שאלה 4

פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי X היא:

$$f_X(x) = \begin{cases} C \cdot (2x^2 - 3x + 4), & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

- א) מצא את C ;
- ב) בנה את פונקציית ההתפלגות (x) ; $F_X(x)$
- ג) חשב את $P\left(X \geq \frac{1}{3} \mid X \leq \frac{9}{11}\right)$
- ד) חשב את $P(|X - E(X)| \leq 0.5)$;
- ה) בנה את פונקציית הצפיפות (x) ; $f_Y = \sqrt{X+2}$ של המשתנה המקרי Y
- ו) בנה את פונקציית ההתפלגות (x) ; $F_Z = \max(X, E(X))$ של המשתנה המקרי Z
- ז) בוחרים באקראי 10 ערכים של X . מהי ההסתברות של לפחות 2 ולכל 5 מהם נמצאים בין 0.3 ל-0.1?

פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי X היא:

$$f_X(x) = \begin{cases} C \cdot (2x^2 - 3x + 4), & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

- א) מצא את C ;

- ב) בנה את פונקציית ההתפלגות (x) ; $F_X(x)$

$$\begin{array}{c} f(x)=0 \quad f(x)=C(2x^2-3x+4) \quad f(x)=0 \\ \hline 0 \quad \quad \quad 1 \end{array} \quad (k)$$

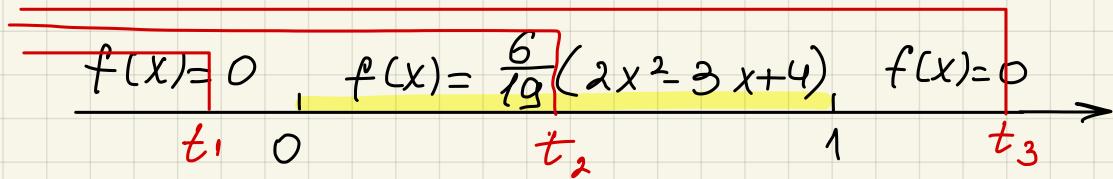
$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = C \int_0^1 2x^2 - 3x + 4 dx = C \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x \Big|_0^1 \right) = (1)$$

$$= \frac{19}{6} C$$

$$\frac{19}{6} C = 1$$

$$C = \frac{6}{19}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6}{19} (2x^2 - 3x + 4), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$



$$1) \quad t < 0 \Rightarrow F_x(t) = 0$$

$$2) \quad 0 \leq t < 1 \Rightarrow F_x(t) = \int_0^t \frac{6}{19} (2x^2 - 3x + 4) dx =$$

$$= \frac{6}{19} \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x \Big|_0^t \right) = \frac{6}{19} \left(\frac{2t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 4t \right) =$$

$$= \frac{4}{19} t^3 - \frac{9}{19} t^2 + \frac{24}{19} t$$

$$3) \quad t \geq 1 \Rightarrow F_x(t) = 1$$

↓

$$F_x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{4}{19} t^3 - \frac{9}{19} t^2 + \frac{24}{19} t, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$$

(ג) חשב את $P\left(X \geq \frac{1}{3} \mid X \leq \frac{9}{11}\right)$

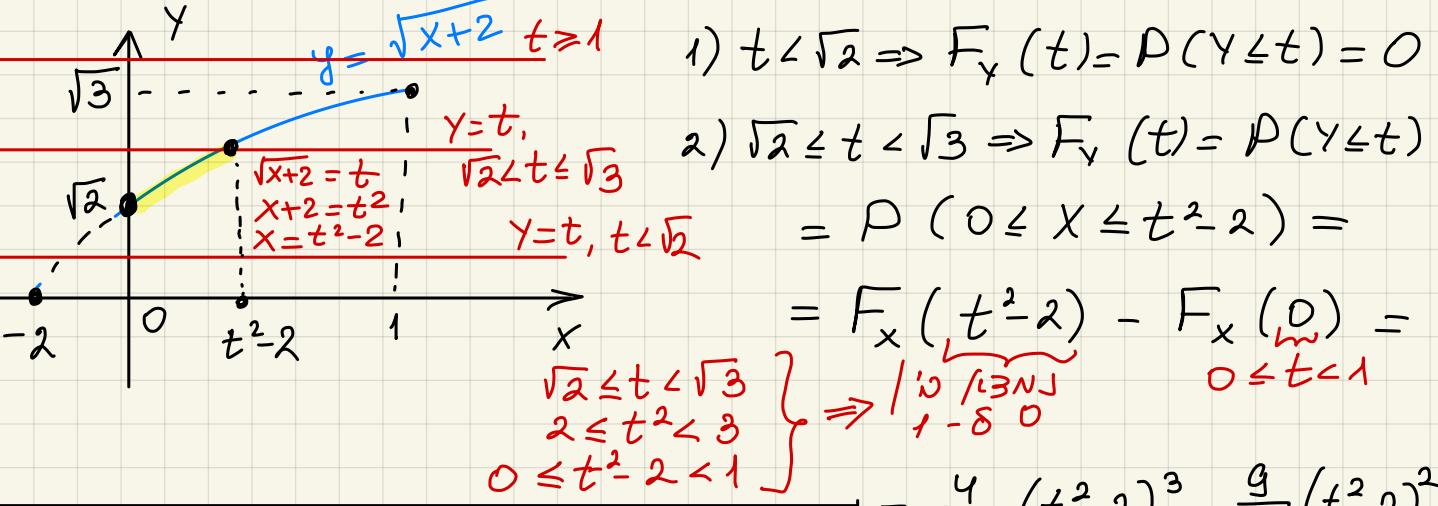
$$\begin{aligned} P(X \geq \frac{1}{3} \mid X \leq \frac{9}{11}) &= \frac{P(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{9}{11})}{P(X \leq \frac{9}{11})} = \\ &= \frac{F_x(\frac{9}{11}) - F_x(\frac{1}{3})}{F_x(\frac{9}{11})} = \dots = 0.5477 \end{aligned}$$

(ה) בנה את פונקציית הצפיפות $f_Y(x)$ של המשתנה המקרי $Y = \sqrt{X+2}$

$$Y = \sqrt{x+2} \quad \text{delta} \quad \text{亂用}$$

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{6}{19} (2x^2 - 3x + 4), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$X \sim \text{Uniform}(0, 1) \quad F_Y(t) = P(Y \leq t) = \int_0^t f_Y(x) dx$$



$$F_x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{4}{19}(t^2 - 2)^3 - \frac{9}{19}(t^2 - 2)^2 + \frac{24}{19}(t^2 - 2), & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases} = \frac{4}{19}(t^2 - 2)^3 - \frac{9}{19}(t^2 - 2)^2 + \frac{24}{19}(t^2 - 2)$$

$$3) t \geq \sqrt{3} \Rightarrow F_y(t) = P(Y \leq t) = 1.$$

↓

$$F_y(t) = \begin{cases} 0, & t < \sqrt{2} \\ \frac{4}{19}(t^2 - 2)^3 - \frac{9}{19}(t^2 - 2)^2 + \frac{24}{19}(t^2 - 2), & \sqrt{2} \leq t < \sqrt{3} \\ 1, & t \geq \sqrt{3} \end{cases}$$

$$f_y(t) = F'_y(t)$$

↓

$$t < \sqrt{2} \Rightarrow f_x(t) = 0' = 0$$

$$t \geq \sqrt{3} \Rightarrow f_x(t) = 1' = 0$$

$$\sqrt{2} \leq t < \sqrt{3} \Rightarrow \left(\frac{4}{19}(t^2 - 2)^3 - \frac{9}{19}(t^2 - 2)^2 + \frac{24}{19}(t^2 - 2) \right)' = \\ = \frac{2t}{19} (4t^4 - 25t^2 + 18t + 40)$$

↓

$$f_y(t) = \begin{cases} \frac{2t}{19} (4t^4 - 25t^2 + 18t + 40) & \sqrt{2} \leq t < \sqrt{3} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ז) בוחרים באקראי 10 ערכאים של א. מהי הסתברות של לפחות 2 ופחות מ-5 מהם מצויים בין 0.1 ל-0.3? 8/02/18

10' license (10 min) X 15' min = T : 20';
0.3 -8 0.1

$X \sim B(n, p)$: נרניר נסיבתית כפולה. מבחן

$X = \text{conv}(\text{edgeconv}(\text{conv}(x, \text{norm})))$

$d = \text{color}(\text{r}, \text{g}, \text{b})$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$T \sim B(10, P(0.1 \leq X \leq 0.3))$$

$$P(2 \leq T \leq 5) = ?$$

$$P(0.1 \leq X \leq 0.3) = F_x(0.3) - F_x(0.1) =$$

$$= \left(\frac{4}{19} 0.3^3 - \frac{9}{19} 0.3^2 + \frac{24}{19} 0.3 \right) - \left(\frac{4}{19} 0.1^3 - \frac{9}{19} 0.1^2 + \frac{24}{19} 0.1 \right)$$

$$= 0.22$$

$$T \sim B(10, 0.22)$$

$$P(2 \leq T \leq 5) = \binom{10}{2} 0.22^2 \cdot 0.78^8 + \binom{10}{3} 0.22^3 \cdot 0.78^7 + \\ + \binom{10}{4} 0.22^4 \cdot 0.78^6 + \binom{10}{5} 0.22^5 \cdot 0.78^5 = \underline{0.6716}.$$

שאלה 6

פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי X היא:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{e^{\alpha \cdot x}}{\alpha}, & x < 0, \\ \frac{e^{-\beta \cdot x}}{\beta}, & x \geq 0, \end{cases} \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

$$P(X > 0) = \frac{1}{4} \iff \underbrace{\int_0^\infty f(x) dx}_{\int_0^\infty} = \frac{1}{4}$$

א) מצא את הפרמטרים α ו- β אם ידוע רבע הערכי X חיוביים;

ב) מצא את $E(2X - 16)$

ג) בנה את פונקציית ההתפלגות $F_Y(x)$ של המשתנה המקרי

$$; Y = \begin{cases} 1, & x < -\ln 3, \\ X + 2, & -\ln 3 \leq x \leq 2 \ln 3, \\ 3, & x > 2 \ln 3. \end{cases}$$

ג) בנה את פונקציית ההתפלגות $F_Z(x)$ של המשתנה המקרי $Z = |X - 1|$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (1) \\ \int_0^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{4} \quad (2) \end{array} \right.$$

$$f(x) = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$$

$$f(x) = \frac{e^{-\beta x}}{\beta}$$

$$(1) \Rightarrow 1 = \int_{-\infty}^0 \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} dx + \int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta x}}{\beta} dx =$$

$$= \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{e^{-\beta x}}{\beta^2} \Big|_0^{\infty} = \left(\frac{e^0}{\alpha^2} - 0 \right) - \left(0 - \frac{e^0}{\beta^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$$

$$(2) = \frac{1}{4} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta x}}{\beta} dx = \left(-\frac{e^{-\beta x}}{\beta^2} \Big|_0^{\infty} \right) = -0 + \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{\beta^2}$$

$$\frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 2}}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}}}$$

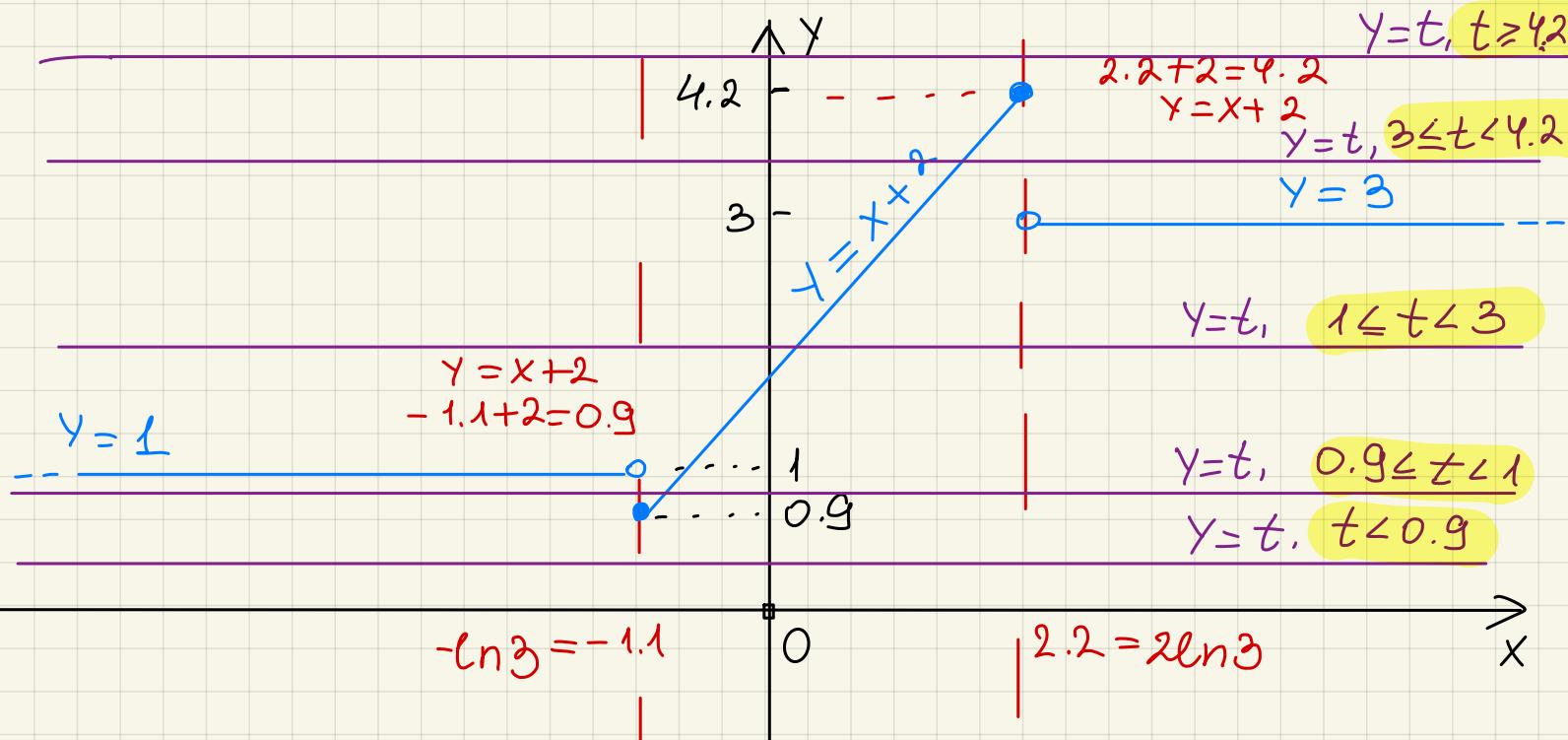
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{e^{\alpha \cdot x}}{\alpha}, & x < 0, \\ \frac{e^{-\beta \cdot x}}{\beta}, & x \geq 0, \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3} e^{\frac{2}{\sqrt{3}}x}}{2}, & x < 0 \\ \frac{e^{-2x}}{2}, & x \geq 0 \end{cases}$$

ג) בנה את פונקציית ההתפלגות $F_Y(x)$ של המשתנה המקרי

$$\ln 3 \approx 1.1$$

$$; Y = \begin{cases} 1, & x < -\ln 3, \\ X+2, & -\ln 3 \leq x \leq 2 \ln 3, \\ 3, & x > 2 \ln 3. \end{cases}$$

$x < -1.1$
 $-1.1 \leq x \leq 2.2$
 $x > 2.2$



ס'כ ערך נס. פ'ס. נ.א.