

# Sprawozdanie z Listy 2 Obliczenia Naukowe

Tomasz Hałas

7 listopada 2021

## Spis treści

|          |                         |           |
|----------|-------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Zadanie 1.</b>       | <b>3</b>  |
| 1.1      | Opis problemu . . . . . | 3         |
| 1.2      | Rozwiązanie . . . . .   | 3         |
| 1.3      | Wyniki . . . . .        | 3         |
| 1.4      | Wniosek . . . . .       | 4         |
| <b>2</b> | <b>Zadanie 2.</b>       | <b>4</b>  |
| 2.1      | Opis problemu . . . . . | 4         |
| 2.2      | Rozwiązanie . . . . .   | 4         |
| 2.3      | Wyniki . . . . .        | 4         |
| 2.4      | Wniosek . . . . .       | 5         |
| <b>3</b> | <b>Zadanie 3.</b>       | <b>6</b>  |
| 3.1      | Opis problemu . . . . . | 6         |
| 3.2      | Rozwiązanie . . . . .   | 6         |
| 3.3      | Wyniki . . . . .        | 6         |
| 3.4      | Wniosek . . . . .       | 8         |
| <b>4</b> | <b>Zadanie 4.</b>       | <b>8</b>  |
| 4.1      | Opis problemu . . . . . | 8         |
| 4.2      | Rozwiązanie . . . . .   | 8         |
| 4.3      | Wyniki . . . . .        | 9         |
| 4.4      | Wniosek . . . . .       | 11        |
| <b>5</b> | <b>Zadanie 5.</b>       | <b>11</b> |
| 5.1      | Opis problemu . . . . . | 11        |
| 5.2      | Rozwiązanie . . . . .   | 12        |
| 5.3      | Wyniki . . . . .        | 12        |
| 5.4      | Wniosek . . . . .       | 12        |
| <b>6</b> | <b>Zadanie 6.</b>       | <b>12</b> |
| 6.1      | Opis problemu . . . . . | 12        |
| 6.2      | Rozwiązanie . . . . .   | 13        |
| 6.3      | Wyniki . . . . .        | 13        |
| 6.4      | Wniosek . . . . .       | 17        |

# 1 Zadanie 1.

## 1.1 Opis problemu

Problem opiera się na policzeniu iloczynu skalarnego dwóch znanych wektorów na kilka sposobów:

- w przód.
- w tył.
- od największego do najmniejszego.
- od najmniejszego do największego.

zmieniając dane wejściowe.

## 1.2 Rozwiązanie

Rozwiązania znajdują się w pliku zad1L2.jl. Zaimplementowałem wyżej wymienione sposoby liczenia iloczynu skalarnego za pomocą czterech funkcji odpowiadającym podpunktom w zadaniu, uwzględniając zmienione dane.

## 1.3 Wyniki

| Artmetyka | Wynik a)              | Wynik b)              |
|-----------|-----------------------|-----------------------|
| Float32   | -0.4999443            | -0.4543457            |
| Float64   | -0.004296342739891585 | -0.004296342998713953 |
| Artmetyka | Wynik c)              | Wynik d)              |
| Float32   | -0.5                  | -0.5                  |
| Float64   | -0.004296342842280865 | -0.004296342842280865 |

Tabela 1: Wynik iloczynu skalaranego dla nowych danych.

| Artmetyka | Wynik a)              | Wynik b)              |
|-----------|-----------------------|-----------------------|
| Float32   | 0.0                   | 0.0                   |
| Float64   | 0.004296342842410399  | 0.004296342842280865  |
| Artmetyka | Wynik c)              | Wynik d)              |
| Float32   | 0.0                   | 0.0                   |
| Float64   | -0.004296342842280865 | -0.004296342842280865 |

Tabela 2: Różnica iloczynu skalaranego obliczonego w zad1L2 z zad5L1.

## 1.4 Wniosek

Na podstawie otrzymanych danych możemy zauważyć, że zadanie jest źle uwarunkowane, gdyż niewielkie „zaburzenie” w danych początkowych powoduje znaczną różnicę wyników końcowych (ustrate dokładności obliczeń).

## 2 Zadanie 2.

### 2.1 Opis problemu

Problem opiera się na narysowaniu funkcji  $f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$  w co najmniej dwóch programach do wizualizacji i policzeniu jej granicy.

### 2.2 Rozwiązanie

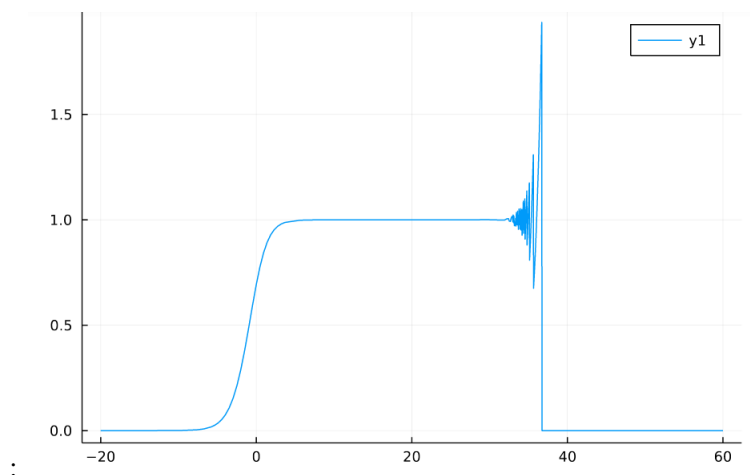
Do wykonania tego użyłem Juli (plik zad2L2.jl), Wolframa Alpha oraz MatLabu.

### 2.3 Wyniki

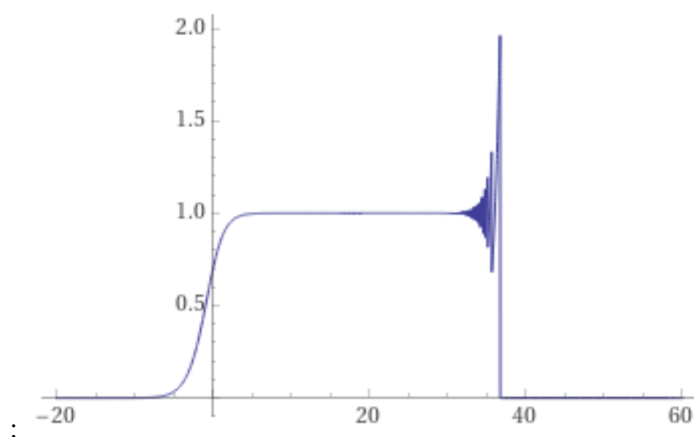
Obliczona granica wynosi:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x}) = 1$$

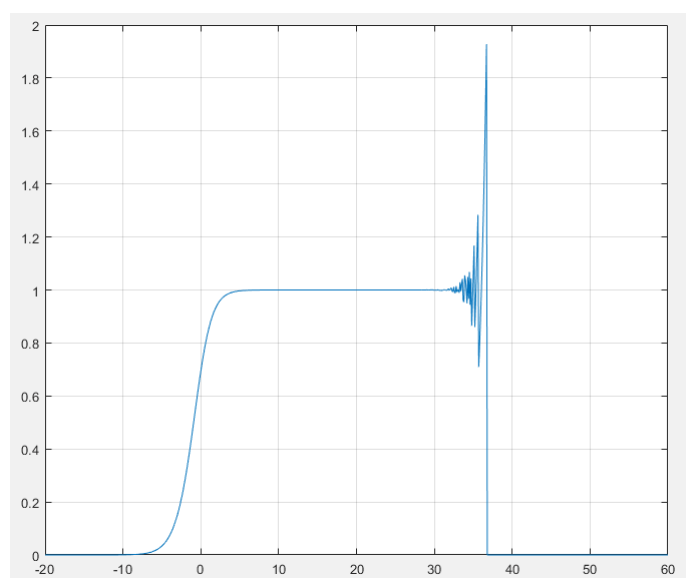
Na dole przedstawiam wizualizacje z programów:



Rysunek 1: Wykres z Julia.



Rysunek 2: Wykres Wolfram Aplha.



Rysunek 3: Wykres MatLab.

Dla wartości większych od 32 nasz wykres zaczyna odchyłać się od oczekiwanej wartości. Widzimy bardzo dużą rozbieżność pomiędzy wizualizacją funkcji, która dąży do 0, a jej rzeczywistą granicą równą 1.

## 2.4 Wniosek

Powodem tak wielkich odchyłeń dla wartości większych od 32, jest fakt że liczba  $e^{-x}$  dla takich liczb dąży do epsilon maszynowego, a wyrażenie  $\ln(1 + e^{-x})$  jest bliske 0. Co w

ostatecznym rozrachunku powoduje, że mnożymy liczbę bliską 0 z bardzo dużą liczbą  $e^x$ , co dla  $x > 32$  powoduje coraz to większe zniekształcenie wykresu  $f(x)$ . Widzimy, że nawet zaawansowane programy do wizualizacji nie poradziły sobie z narysować poprawnie tej funkcji.

### 3 Zadanie 3.

#### 3.1 Opis problemu

Musimy rozwiązać układ równań liniowych

$$Ax = b$$

Macierz  $A$  jest macierzą Hilberta lub macierzą losową. W celu wyliczenia stosujemy eliminację Gaussa lub inwersję.

#### 3.2 Rozwiązanie

Rozwiązania znajdują się w pliku zad3L2.jl. Za pomocą podanych metod (`hilb(n)` oraz `matcond(c,n)`) wyliczam określoną macierz  $A$ . Pierwsza metoda zwraca macierz Hilberta, natomiast za pomocą drugiej otrzymuje macierz losową stopnia  $n$  z danym wskaźnikiem uwarunkowania. Następnie wyliczam wektor  $x$ . Wykonuje algorytmy:

- a. Eliminacji Gaussa
- b. Inwersji

dla określonych danych.

#### 3.3 Wyniki

| n | Rząd | Wsk Uwarunkowania     | Błąd wzg Inwersja      | Błąd wzg Gauss         |
|---|------|-----------------------|------------------------|------------------------|
| 1 | 1    | 1.0                   | 0.0                    | 0.0                    |
| 2 | 2    | 19.28147006790397     | 1.4043333874306803e-15 | 5.661048867003676e-16  |
| 3 | 3    | 524.0567775860644     | 0.0                    | 8.022593772267726e-15  |
| 4 | 4    | 15513.738738928929    | 7.542470546988852e-13  | 4.637277712035294e-13  |
| 5 | 5    | 476607.25024224253    | 7.45602798259539e-12   | 1.7697056701418277e-13 |
| 6 | 6    | 1.495105864125091e7   | 3.533151828962887e-10  | 3.496491467713994e-10  |
| 7 | 7    | 4.7536735637688667e8  | 6.190844397992631e-9   | 1.3175049864850338e-8  |
| 8 | 8    | 1.5257575516147259e10 | 3.775275483015941e-7   | 2.487433466002445e-7   |
| 9 | 9    | 4.9315408927806335e11 | 1.1659486044133412e-5  | 9.643625435772316e-6   |

|    |    |                       |                       |                        |
|----|----|-----------------------|-----------------------|------------------------|
| 10 | 10 | 1.6024859712306152e13 | 0.0003357158826776558 | 0.00022035288727930986 |
| 11 | 10 | 5.2210348947688544e14 | 0.01113776822564549   | 0.006022512934347414   |
| 12 | 11 | 1.7255427417341868e16 | 0.16218620232347905   | 0.19509235225028912    |
| 13 | 11 | 7.126491965424366e17  | 5.511855154155295     | 7.894191771622431      |
| 14 | 11 | 6.101307732044041e17  | 3.3522039875276723    | 0.8270688593203056     |
| 15 | 12 | 4.223311222761075e17  | 4.354299435453685     | 3.10349386243609       |
| 16 | 12 | 3.535827507735838e17  | 54.189834405860445    | 9.083139658689422      |
| 17 | 12 | 3.1182808742153696e17 | 5.786281231941037     | 4.24328971542452       |
| 18 | 12 | 1.5639169583348145e18 | 5.7599951815224495    | 4.7860299021083        |
| 19 | 13 | 1.3274441976880407e18 | 12.309212980457932    | 6.114994252530053      |
| 20 | 13 | 2.2777635596453635e18 | 17.030822563878868    | 19.122235961045973     |
| 21 | 13 | 1.5088647979164173e18 | 4.797191888763164     | 5.528693844520417      |
| 22 | 13 | 2.148587035517758e18  | 19.452979830106727    | 14.91838193889066      |
| 23 | 13 | 8.53990580100839e18   | 6.265996982174681     | 7.050470984846638      |
| 24 | 13 | 1.1703742699502748e19 | 17.20261485961593     | 13.918474300172141     |
| 25 | 13 | 1.5100611248172846e18 | 31.685081256911236    | 28.59107844940893      |
| 26 | 14 | 6.7061676715063665e19 | 20.609586025517647    | 10.291326254384165     |
| 27 | 14 | 4.3599859152937656e18 | 365.5935558097509     | 59.829564755903704     |
| 28 | 14 | 1.3045387550900326e19 | 118.77505272951088    | 129.44544841399153     |
| 29 | 14 | 1.0145758471780368e20 | 14.393580547213602    | 17.694035946947576     |
| 30 | 14 | 2.0443844273023086e18 | 32.235350888091794    | 17.012568794347324     |

Tabela 3: Błędy względne dla macierzy Hilberta

| n  | Rząd | Wsk Uwarunkowania     | Błąd wzg Inwersja      | Błąd wzg Gauss         |
|----|------|-----------------------|------------------------|------------------------|
| 5  | 5    | 1.0000000000000007    | 7.021666937153402e-17  | 1.719950113979703e-16  |
| 5  | 5    | 10.000000000000007    | 2.808666774861361e-16  | 3.1401849173675503e-16 |
| 5  | 5    | 1000.0000000000067    | 1.801492093815358e-14  | 2.6057244226792505e-14 |
| 5  | 5    | 9.9999999780248e6     | 8.231806349783991e-11  | 2.982476263032775e-11  |
| 5  | 5    | 1.0000754130994948e12 | 1.7397696305834012e-5  | 1.2742664544753693e-5  |
| 5  | 4    | 9.202880812262646e15  | 0.1342523059043121     | 0.19415647851285806    |
| 10 | 10   | 1.0000000000000013    | 3.274687455368547e-16  | 3.2177320244274193e-16 |
| 10 | 10   | 10.000000000000016    | 5.254534392573277e-16  | 2.1355566272775288e-16 |
| 10 | 10   | 999.999999998993      | 2.3019076220321125e-14 | 2.4793544732318398e-14 |
| 10 | 10   | 1.0000000005408261e7  | 1.0872627819491399e-10 | 1.207423219988384e-10  |
| 10 | 10   | 9.999277729844752e11  | 1.3477505146343368e-5  | 1.600372213562927e-5   |
| 10 | 9    | 2.0808171338329812e16 | 0.27341517766027545    | 0.25591507689612236    |
| 20 | 20   | 1.0000000000000013    | 5.822058658345461e-16  | 4.755851266270182e-16  |

|    |    |                       |                        |                        |
|----|----|-----------------------|------------------------|------------------------|
| 20 | 20 | 10.0000000000000014   | 4.570830125558456e-16  | 4.2927028441178026e-16 |
| 20 | 20 | 1000.00000000000076   | 1.9577737160465176e-14 | 2.7819583882570482e-14 |
| 20 | 20 | 9.99999999663152e6    | 1.345686467497988e-10  | 1.148082865046246e-10  |
| 20 | 20 | 1.0000296363395857e12 | 5.701146104478469e-6   | 2.848989100390986e-6   |
| 20 | 19 | 8.11660555498424e15   | 0.5809611884792529     | 0.5711935687851183     |

Tabela 4: Błędy względne dla macierzy losowej

### 3.4 Wniosek

Widać, że eliminacja Gausa ma o wiele mniejszy błąd niż mnożenie przez odwrotność macierzy. Szczególnie widoczne jest to w przypadku macierzy Hilberta. Można też zauważyć, że duże uwarunkowanie macierzy przekłada się na wzrost błędu względnego niezależnie od użytej metody. Poza tym macierz Hilberta jest bardzo źle uwarunkowana niezależnie od algorytmu którego użyliśmy.

## 4 Zadanie 4.

### 4.1 Opis problemu

W zadaniu mamy do czynienia z złośliwym wielomianem Wilkinsona. Za pomocą pakietu *Polynomials* mamy wyliczyć zera tego wielomianu i porównać je ze znanymi już zerami, a następnie powtórzyć wyliczanie zmieniając współczynnik.

### 4.2 Rozwiązanie

Rozwiązanie znajduje się w pliku zad4L2.jl. Za pomocą funkcji *Polynomial()* tworzę gotowy wielomian w postaci naturalnej. Następnie za pomocą funkcji *roots()* wyliczam zera tego wielomianu. W pętli kolejno podstawiam wyliczone miejsca zerowe do wielomianów. Następnie powtarzam wszystko dla zmiennionych współczynników wielomianu naturalnego.



### 4.3 Wyniki

| Pierwiastek        | i  | $ P(z_k) $         | $ p(z_k) $         | $ z_k - k $            |
|--------------------|----|--------------------|--------------------|------------------------|
| 0.9999999999996989 | 1  | 36352.0            | 38400.0            | 3.0109248427834245e-13 |
| 2.0000000000283182 | 2  | 181760.0           | 198144.0           | 2.8318236644508943e-11 |
| 2.9999999995920965 | 3  | 209408.0           | 301568.0           | 4.0790348876384996e-10 |
| 3.9999999837375317 | 4  | 3.106816e6         | 2.844672e6         | 1.626246826091915e-8   |
| 5.000000665769791  | 5  | 2.4114688e7        | 2.3346688e7        | 6.657697912970661e-7   |
| 5.999989245824773  | 6  | 1.20152064e8       | 1.1882496e8        | 1.0754175226779239e-5  |
| 7.000102002793008  | 7  | 4.80398336e8       | 4.78290944e8       | 0.00010200279300764947 |
| 7.999355829607762  | 8  | 1.682691072e9      | 1.67849728e9       | 0.0006441703922384079  |
| 9.002915294362053  | 9  | 4.465326592e9      | 4.457859584e9      | 0.002915294362052734   |
| 9.990413042481725  | 10 | 1.2707126784e10    | 1.2696907264e10    | 0.009586957518274986   |
| 11.025022932909318 | 11 | 3.5759895552e10    | 3.5743469056e10    | 0.025022932909317674   |
| 11.953283253846857 | 12 | 7.216771584e10     | 7.2146650624e10    | 0.04671674615314281    |
| 13.07431403244734  | 13 | 2.15723629056e11   | 2.15696330752e11   | 0.07431403244734014    |
| 13.914755591802127 | 14 | 3.65383250944e11   | 3.653447936e11     | 0.08524440819787316    |
| 15.075493799699476 | 15 | 6.13987753472e11   | 6.13938415616e11   | 0.07549379969947623    |
| 15.946286716607972 | 16 | 1.555027751936e12  | 1.554961097216e12  | 0.05371328339202819    |
| 17.025427146237412 | 17 | 3.777623778304e12  | 3.777532946944e12  | 0.025427146237412046   |
| 17.99092135271648  | 18 | 7.199554861056e12  | 7.1994474752e12    | 0.009078647283519814   |
| 19.00190981829944  | 19 | 1.0278376162816e13 | 1.0278235656704e13 | 0.0019098182994383706  |
| 19.999809291236637 | 20 | 2.7462952745472e13 | 2.7462788907008e13 | 0.00019070876336257925 |

Tabela 5: Tabela dla wielomianu Wilkinsona.

| <b>Pierwiastek</b>                        |
|---|
| 0.9999999999998357 + 0.0im                |
| 2.0000000000550373 + 0.0im                |
| 2.99999999660342 + 0.0im                  |
| 4.000000089724362 + 0.0im                 |
| 4.99999857388791 + 0.0im                  |
| 6.000020476673031 + 0.0im                 |
| 6.99960207042242 + 0.0im                  |
| 8.007772029099446 + 0.0im                 |
| 8.915816367932559 + 0.0im                 |
| 10.095455630535774 - 0.6449328236240688im |
| 10.095455630535774 + 0.6449328236240688im |
| 11.793890586174369 - 1.6524771364075785im |
| 11.793890586174369 + 1.6524771364075785im |
| 13.992406684487216 - 2.5188244257108443im |
| 13.992406684487216 + 2.5188244257108443im |
| 16.73074487979267 - 2.812624896721978im   |
| 16.73074487979267 + 2.812624896721978im   |
| 19.5024423688181 - 1.940331978642903im    |
| 19.5024423688181 + 1.940331978642903im    |
| 20.84691021519479 + 0.0im                 |

Tabela 6: Tabela pierwiastków dla wielomianu Wilkinsona (modyfikacja).

| <b>i</b> | $ P(z_k) $            | $ p(z_k) $            | $ z_k - k $            |
|----------|-----------------------|-----------------------|------------------------|
| 1        | 20496.0               | 22544.0               | 1.6431300764452317e-13 |
| 2        | 339570.0              | 372338.0              | 5.503730804434781e-11  |
| 3        | 2.2777455e6           | 2.4436335e6           | 3.3965799062229962e-9  |
| 4        | 1.0488020625e7        | 1.0750164625e7        | 8.972436216225788e-8   |
| 5        | 4.1239073125e7        | 4.02662678125e7       | 1.4261120897529622e-6  |
| 6        | 1.406328934140625e8   | 2.15631041265625e8    | 2.0476673030955794e-5  |
| 7        | 4.122812662421875e8   | 1.7767613706484375e9  | 0.00039792957757978087 |
| 8        | 1.0307901272578125e9  | 1.869983012953125e10  | 0.007772029099445632   |
| 9        | 2.1574055781816406e9  | 1.3687969854061133e11 | 0.0841836320674414     |
| 10       | 9.384147605647182e9   | 1.4914426921125325e12 | 0.6519586830380407     |
| 11       | 9.384147605647182e9   | 1.4914426921125325e12 | 1.1109180272716561     |
| 12       | 3.0012060598372482e10 | 3.2972366160664863e13 | 1.665281290598479      |
| 13       | 3.0012060598372482e10 | 3.2972366160664863e13 | 2.0458202766784277     |
| 14       | 2.0030917431984006e11 | 9.546145387156686e14  | 2.518835871190904      |
| 15       | 2.0030917431984006e11 | 9.546145387156686e14  | 2.7128805312847097     |
| 16       | 1.1583329328642004e12 | 2.7421284549276744e16 | 2.9060018735375106     |
| 17       | 1.1583329328642004e12 | 2.7421284549276744e16 | 2.825483521349608      |
| 18       | 5.867381806750561e12  | 4.252532516608892e17  | 2.4540214463129764     |
| 19       | 5.867381806750561e12  | 4.252532516608892e17  | 2.0043294443099486     |
| 20       | 9.550552334336e12     | 1.3743481126061834e18 | 0.8469102151947894     |

Tabela 7: Tabela dla wielomianu Wilkinsona (modyfikacja).

## 4.4 Wniosek

Zaburzenie współczynnika wielkości  $2^{-23}$  zmieniło całkowicie wyniki, a więc zadanie jest źle uwarunkowane. Widzimy też, że dla otrzymanych pierwiastków, żaden nie daje 0. Niedokładność wyliczonych przeze mnie miejsc zerowych, powstaje przez duże współczynniki wielomianu, których niedokładne zapisanie wynika z niewystarczającej liczby cyfr znaczących (błędna reprezentacja).

## 5 Zadanie 5.

### 5.1 Opis problemu

Równanie rekurencyjne dane jako  $p_n + 1 := p_n + rp_n(1 - p_n)$ , dla  $n = 0, 1, \dots$ , gdzie  $r$  jest pewną daną stałą,  $r(1 - p_n)$  jest czynnikiem wzrostu populacji, a  $p_0$  jest wielkością populacji stanowiącą procent maksymalnej wielkości populacji dla danego stanu środowiska.

## 5.2 Rozwiązanie

Rozwiązanie znajduje się w pliku zad5L2.jl. Polega ono na użyciu rekursji w celu rozwiązania tego równania po 40 iteracji dla danych  $p_0 = 0.01$  i  $r = 3$ . Następnie uruchamiam ponownie z tym że po 10 iteracji ucinam wynik, uzyskując tym samym 0.722, potem iteruję do 40. Powtarzam to samo dla Float64.

## 5.3 Wyniki

| Artemtyka | Wynik po 40 Iter     | Wynik po 10 Iter | Wynik po 30 kolejnych Iter |
|-----------|----------------------|------------------|----------------------------|
| Float32   | 0.25860548           | 0.722            | 1.093568                   |
| Float64   | 0.011611238029748606 | 0.722            | 0.7305550338104317         |

Tabela 8: Rekursji dla Float32 i Float 64 z i bez obcięcia.

Widzimy, jak duży wpływ na obliczenia ma obcięcie paru cyfr znaczących i jak istotna jest zwiększona precyzja obliczeń.

## 5.4 Wniosek

Równanie rekurencyjne poprzez pobieranie danych z poprzednich iteracji powiela bardzo często błąd „poprzednika”, co w znacznym stopniu pogarsza precyzję naszych obliczeń.

# 6 Zadanie 6.

## 6.1 Opis problemu

Musimy rozwiązać równanie rekurencyjne:

$$x_{n+1} := x_n^2 + c \text{ dla } n = 0, 1, \dots$$

gdzie  $c$  jest pewną stałą, dla pewnych danych w artmetyce Float64:

1.  $c = -2$  i  $x_0 = 1$
2.  $c = -2$  i  $x_0 = 2$
3.  $c = -2$  i  $x_0 = 1.9999999999999999$
4.  $c = -1$  i  $x_0 = 1$
5.  $c = -1$  i  $x_0 = -1$

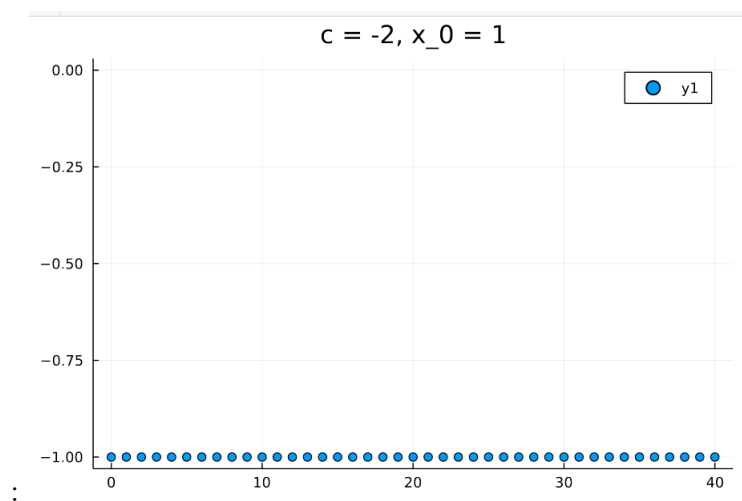
6.  $c = -1$  i  $x_0 = 0.75$

7.  $c = -1$  i  $x_0 = 0.25$

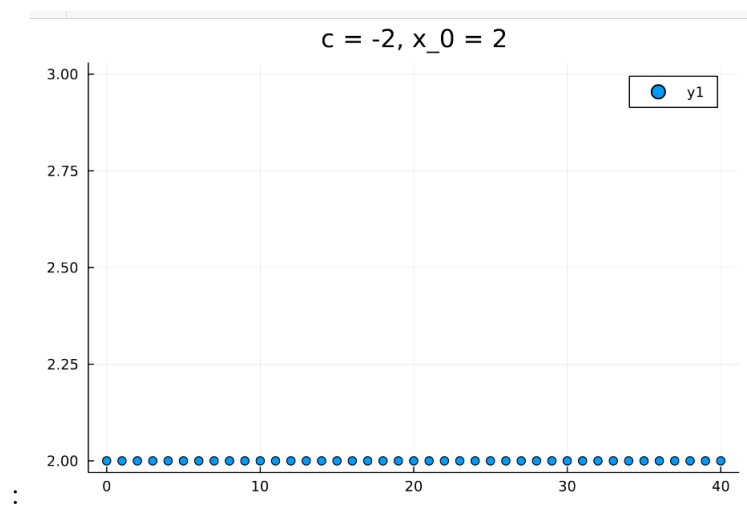
## 6.2 Rozwiązanie

Rozwiązanie znajduje się w pliku zad6L2.jl. Polega ono na użyciu rekursji w celu rozwiązania tego równania po 40 iteracji dla wybranych  $c$  i  $x_0$ . Podczas wykonywania rekursji zapisuję wyniki dla poszczególnych wariantów, które następnie umieszczam na wykresie.

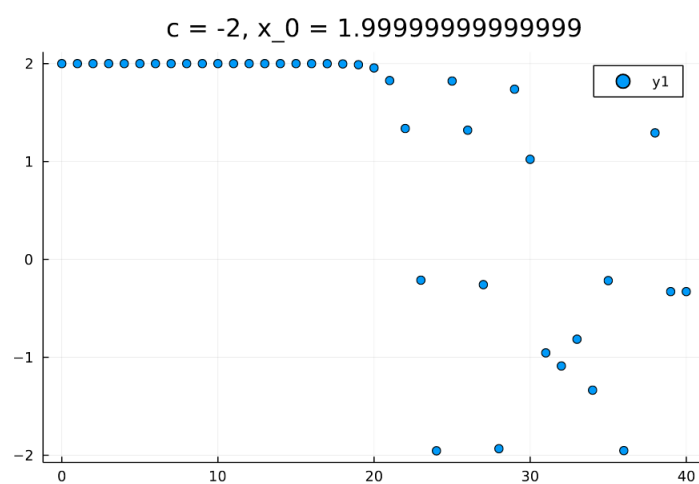
## 6.3 Wyniki



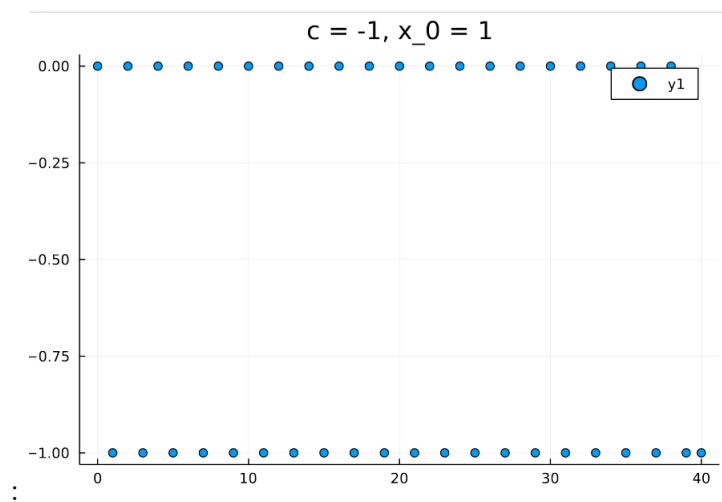
Rysunek 4: Wykres 1.



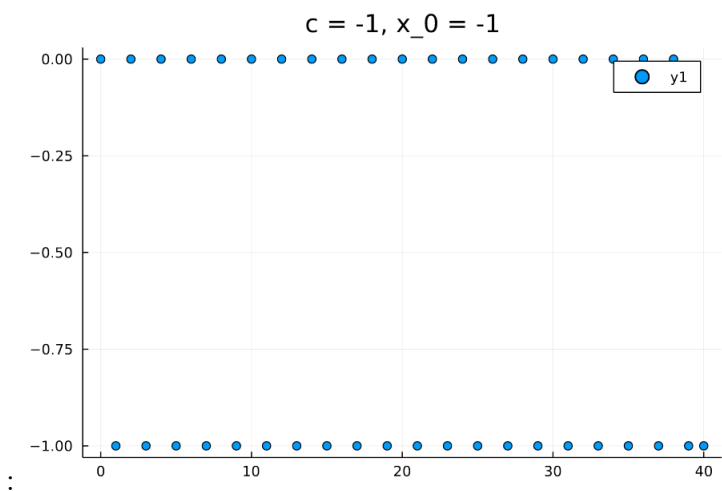
Rysunek 5: Wykres 2.



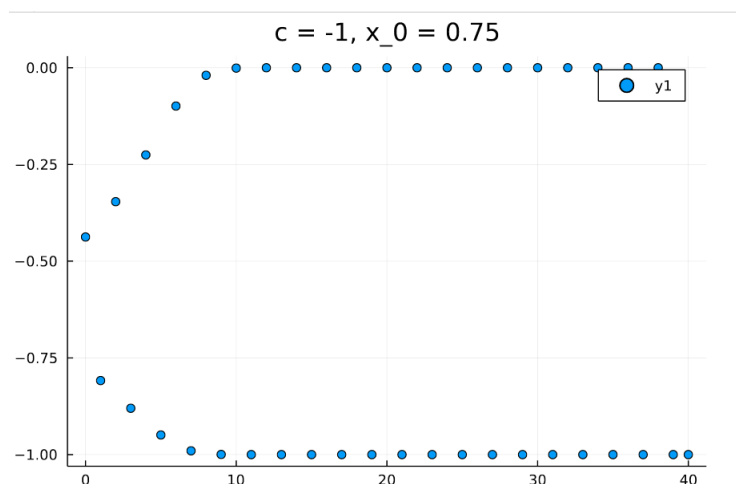
Rysunek 6: Wykres 3.



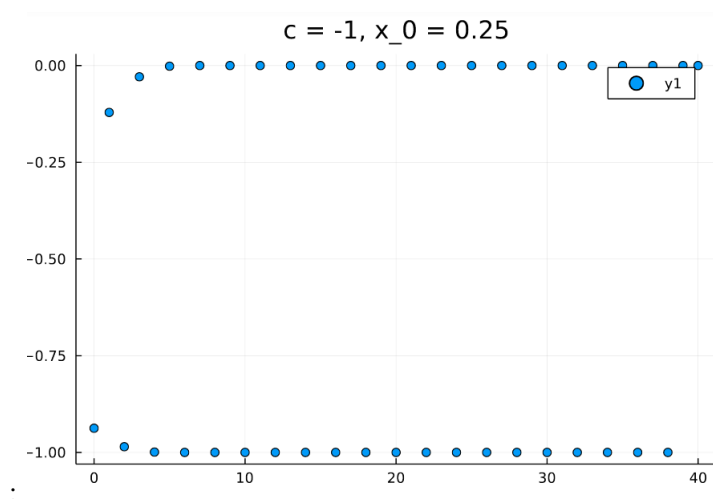
Rysunek 7: Wykres 4.



Rysunek 8: Wykres 5.



Rysunek 9: Wykres 6.



Rysunek 10: Wykres 7.

W przypadku gdy  $x_0$  jest całkowite nasze wyniki są trafne i oczekiwane. Natomiast w przypadku, gdy  $x_0$  jest zmiennopoczyzny (0.25 lub 0.75) w wyniku działania rekursji nasze liczby dążą do liczb całkowitych (0 lub  $-1$ ), przez nieustanną utratę cyfr znaczących w wyniku działań (wraz kolejną iteracją). Zupełnie inaczej wygląda wykres dla  $c=1.999999999999999$  (wykres 3). Z początku przyjmuje wartości bliskie 2 aby potem w wyniku powielania błędu (działanie rekurencji) tracimy precyzję obliczeń, a przy tym cyfry znaczące, co powoduje „rozbieżność” wartości.



## 6.4 Wniosek

Widzimy, że przez ograniczoną precyzję arytmetyki liczby 0.25 oraz 0.75 w wyniku wielu błędów zaokrągleń zbiegają do liczby całkowitej. Natomiast sytuacja, gdzie  $c = 1.999999999999999$  (wykres 3), obrazuje jak utrata liczb znaczących diametralnie wpływa na wyniki.