Sprawozdanie z Listy 2
Obliczenia Naukowe

Tomasz Hałas

21 listopada 2021

Spis treści

1 Zadanie 1. 2. 3.

1.1 Opis problemu

Zadanie polega na zaimplementowaniu poszczególnych algorytmów wyszukujących miejsce zerowe funkcji. Implementujemy:

- metoda bisekcji (mbisekcji)
- metoda Netwona (mstycznych)
- metoda siecznych (msiecznych)

1.2 Metoda bisekcji

Jest to jedna z metod do rozwiązywania równań $f(x) = 0$, która opiera sie na rozwiązaniu za pomocą twierdzenia Darboux:

„Jeżeli funkcja ciągła $f(x)$ ma na końcach przedziału domkniętego wartości różnych znaków, to wewnątrz tego przedziału, istnieje co najmniej jeden pierwiastek równania $f(x) = 0$."

W celu użycia tej metody musimy:

1. funkcja $f(x)$ jest ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$
2. funkcja przyjmuje różne znaki na końcach przedziału $f(a)f(b) < 0$

Przebieg metody:

1. wybieramy $c_n = \frac{a+b}{2}$ i patrzymy czy $f(c_n) = 0$, jeśli c_n jest rozwiązaniem kończymy działanie
2. następnie wykonujemy podane niżej działania dopóki $|b - a| < \delta$ lub $f(c_n) < \epsilon$:
   (a) musimy wyznaczaczyć ponownie c_{n+1} dzielimy, więc nasz przedział na $[a, c_n]$ i $[c_n, b]$
   (b) sprawdzamy odpowiedni znaki na krańcach przedziału:
   - Jeżeli $f(a)f(c_n) < 0$ to $b = c_n$
   - Jeżeli $f(c_n)f(b) < 0$ to $a = c_n$

   i wybierany jest przedział o znaku przeciwnyk do c_n i ustalony górny lub dolny kraniec przedziału $[a, b]$
3. Powtarzamy do momentu uzyskania wyniku o odpowiedniej dokładności

1.3 Metoda Newtona

Polega ona na znalezieniu iteracyjnie pierwiastka jednokrotnego równania zadanej funkcji $f(x)$ na przedziale $[a, b]$, gdzie pochodna funkcji $f(x) \neq 0$ i funkcja ma różne wartości na krańcach przedziału.

W celu użycia tej metody musimy:

1. funkcja $f(x)$ ma różne wartości na krańcach przedziału $[a, b]$
2. na przedziału $[a, b]$ istnieje jeden pierwiastek
3. pochodna funkcji $f(x) \neq 0$
4. pierwsza i druga pochodna $f(x)$ ma stały znak na tym przedziale

Przebieg metody:

1. wybieramy $x0$, z którego następnie wybieramy styczną $f(x0)$
2. następnie wyliczamy $x1 = x0 - f(x0)/f'(x0)$, do momentu gdy $|x1 - x0| < \delta$ lub $f(x1) < \epsilon$, przez określoną z góry liczbę iteracji
3. Zwracamy wynik to $x1$ oraz wartość $f(x1)$, jednak warto pamiętać o błedach spowodowanych faktem czy udało, się algorytmowi ustalić go w określonej z góry liczby iteracji

1.4 Metoda Siecznych

Polega ona na przyjęciu, że funckja jest ciągła na małym odcinku $[a, b]$. Wtedy funkcję $f(x)$ zastępujemy sieczną, za pomocą której ustalimy miejsce zerowe funkcji (punkt przecięcia siecznej z osia OX)

Wykonujemy ją iteracyjnie w ten sposób:

1. Zaczynając od punktów x_0, x_1 są wartośi x z osi OX dla punktów przeciecią siecznej z $f(x)$
2. liczymy $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} * f(x_n)$
3. do momentu aż $|x_{n+1} - x_n| < \delta$ lub $f(x_{n+1}) < \epsilon$ lub przekroczymy dopuszczalną liczbę iteracji.

1.5 Rozwiązania

Zaimplementowane metody znadują się w pliku Module.jl. Dla powyższych metod przeprowadziłem również testy.

1.6 Wyniki

Metoda	**Funkcja**	**Przedział**	**Wynik oczekiwany**	**Zaokrąglenie**
mbisekcji	cos(2x)	$[0.0,\frac{\pi}{2}]$	$\frac{\pi}{4}$	0.00001
mbisekcji	x^2-5	[-5.0,1.0]	$-\sqrt{5}$	0.00001
mbisekcji	cos(2x)	$[0.0,\pi]$	1	Error

Tabela 1: Wynik testów dla mbisekcji.

Metoda	**Funkcja**	**Fprim**	**Start**	**Wynik oczek**	**Zaokrąglenie**	**Iter**
mstycznych	cos(2x)	-2sin(2x)	$\frac{3}{4}\pi$	$\pi/4$	0.00001	100
mstycznych	x^2-5	2x	-5.0	$-\sqrt{5}$	0.00001	100
mstycznych	cos(2x)	-2sin(2x)	$\frac{3}{4}\pi$	1	Error	3

Tabela 2: Wynik testów dla mstycznych.

Metoda	**Funkcja**	**Przedział**	**Wynik oczek**	**Zaokrąglenie**	**Iter**
msiecznych	cos(2x)	$[0.0,\frac{\pi}{2}]$	$\pi/4$	0.00001	100
msiecznych	x^2-5	[-5.0,-3.0]	$-\sqrt{5}$	0.00001	100
msiecznych	cos(2x)	$[0.0,\frac{3}{4}\pi]$	1	Error	3

Tabela 3: Wynik testów dla msiecznych.

W powyższych testach $\delta = 10^{-5}$ i $\epsilon = 10^{-5}$.

1.7 Wnioski

Zaimplementowane przeze mnie metody są poprawne.

2 Zadanie 4.

2.1 Opis problemu

Wyznaczyć pierwiastek równania $sin(x) - (\frac{1}{2}x)^2 = 0$ za pomocą metody bisekcji, Newtona i siecznych dla $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}$ i $\epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$.

Program WolframAlpha pokazuje nam miejsca zerowe, jako $x \approx 1.93375$ i $x \approx 0.0$

2.2 Rozwiązania

Rozwiązanai znajdują się w pliku Zad4.jl. Polegają one na użyciu modułu z funkcjami dając im określone w zadaniu parametry.

2.3 Wyniki

Metoda	Funkcja	Wynik
mbisekcji	$sin(x) - (\frac{1}{2}x)^2 = 0$	(1.9337539672851562, -2.7027680138402843e-7, 16, 0)
mstycznych	$sin(x) - (\frac{1}{2}x)^2 = 0$	(1.933753779789742, -2.2423316314856834e-8, 4, 0)
msiecznych	$sin(x) - (\frac{1}{2}x)^2 = 0$	(1.933753644474301, 1.564525129449379e-7, 4, 0)

Tabela 4: Wynik dla zadania 4.

Gdzie pierwsza zmienna w Tupli to x, kolejno $f(x)$, ilość iteracji oraz kod błędu (tutaj jego brak)

2.4 Wnioski

Widzimy, że podane metody zwracają poprawny wynik (oczywiście uwzględniając lekkie niedokładności dla dalszych liczb po przecinku), jednak różnią się ilościa iteracji potrzebnej do obliczenia miejsca zerowego, gdzie metoda bisekcji potrzebuje ich aż 16.

3 Zadanie 5.

3.1 Opis problemu

Zadanie polega na wyliczeniu miejsc przecięcia:

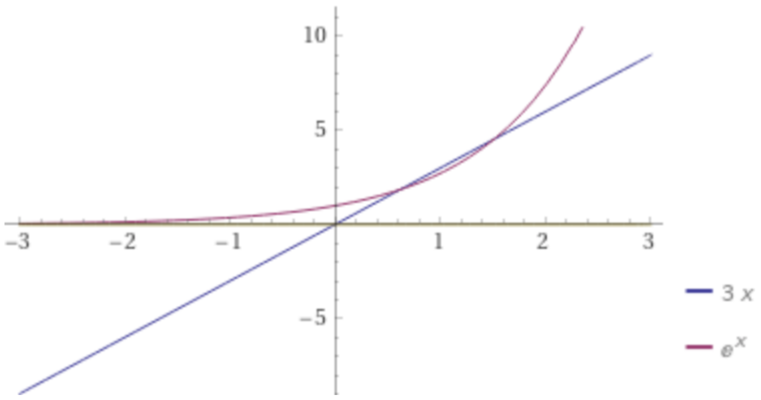
$$3x - e^x \tag{1}$$

za pomocą bisekcji dla $\delta = 10^{-4}$ i $\epsilon = 10^{-4}$.
Program WolframAplha pokazuje nam $x \approx 0.619061$ i $x \approx 1.51213$ jako miejsca zerowe.

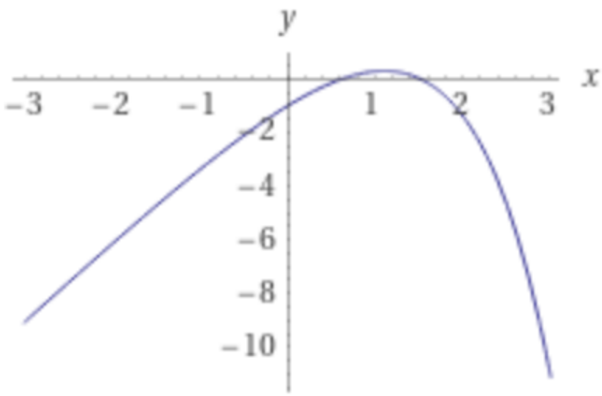
3.2 Rozwiązania

Rozwiązania znajdują się w pliku zad5.jl. Polegają na użyciu metody bisekcji dla określonych w zadaniu parametrów.

3.3 Wyniki



Rysunek 1: Wykres funkcji 3x i e^x.



Rysunek 2: Wykres funkcji $3x - e^x$.

Z początku licząc oraz korzystając powyższych wykresów zauważyłem, że istnieją dwa miejsca zerowe funkcji. Z tego powodu ustaliłem w metodzie bisekcji dwa przedziały.

Metoda	**Przedział**	**Wynik**
mbisekcji	[0.0,1.0]	(0.619140625, 9.066320343276146e-5, 9, 0)
mbisekcji	[1.0,2.0]	(1.5120849609375, 7.618578602741621e-5, 13, 0)

Tabela 5: Wynik dla zadania 5.

Gdzie pierwsza zmienna w Tupli to x, kolejno $f(x)$, ilość iteracji oraz kod błędu (tutaj jego brak)

3.4 Wnioski

Widzimy że przy odpowiednio dobranych parametrach metoda bisekcji zwraca w miarę dokładne miejsce zerowe funkcji $3x - e^x$. W celu polepszenia wyników można oczywiście zwiekszyć precyzję lub podać bardziej dokładny przedział, co do istetnia w nim mniejsca zerowego.

4 Zadanie 6.

4.1 Opis problemu

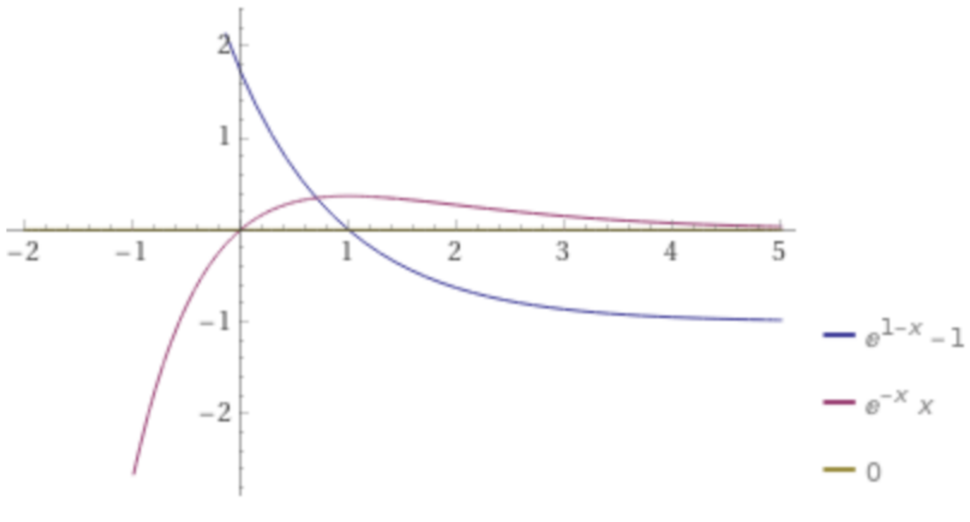
Zadanie polega na znalezeinu miejsc zerowych dla funkcji:

1. $f1(x) = e^{1-x} - 1$
2. $f2(x) = xe^{-x}$

dla $\delta = 10^{-5}$ i $\epsilon = 10^{-5}$.

4.2 Rozwiązania

Rozwiązania znajdują sie w pliku zad6.jl. Polegaja one na dokładnym odwzorowaniu podanych parametrów i znalezieniu miejsc zerowych.



Rysunek 3: Wykres funkcji f1 i f2.

Na podstawie tego wykresu określiłem punktu początkowe dla jakich zaczynać ma swoje poszukiwanie dana metoda. Oczywiście kieruje się kryteriami podanymi w zadaniu 1, o tym jakie punkty moge wybrać, aby dana metoda zadziała.

Metoda	**Przedział**
mbisekcji	[0.5,1.5]
mstycznych	[0.0]
msiecznych	[0.5,1.5]
mbisekcji	[0.5,2.0]

Tabela 6: Przedział dla $f1(x) = e^{1-x} - 1$

Metoda	**Przedział**
mbisekcji	[-0.5,0.5]
mstycznych	[-1.0]
msiecznych	[-0.5,0.5]
mbisekcji	[-0.5,1.0]

Tabela 7: Przedział dla $f2(x) = xe^{-x}$

4.3 Wyniki

Metoda	**Przedział**	**Wynik**
mbisekcji	[0.5,1.5]	(1.0, 0.0, 1, 0)
mstycznych	[0.0]	(0.9999984358892101, 1.5641120130194253e-6, 4, 0)
msiecznych	[0.5,1.5]	(0.9999999624498374, 3.755016342310569e-8, 5, 0)
mbisekcji	[0.5,2.0]	(0.9999923706054688, 7.629423635080457e-6, 16, 0)

Tabela 8: Wynik dla $f1$

Metoda	**Przedział**	**Wynik**
mbisekcji	[-0.5,0.5]	(0.0, 0.0, 1, 0)
mstycznych	[-1.0]	(-3.0642493416461764e-7, -3.0642502806087233e-7, 5, 0)
msiecznych	[-0.5,0.5]	(5.38073548562323e-6, 5.380706533386756e-6, 6, 0)
mbisekcji	[-0.5,1.0]	(-7.62939453125e-6, -7.629452739132958e-6, 16, 0)

Tabela 9: Wynik dla $f2$

Widzimy, że dla odpowiednio dobranych przedziałów metoda bisekcji działa bez problemowo i bardzo szybko. Wynika to przede wszystkim z jej sposobu działania. Dodatkowo pokazałem, jak ważny jest wybór przedziału dla metody bisekcji (celowo zaburzając dobry przedział, ostatnia rubryka w tabelce). Dla tych funkcji okazało się, że metoda siecznych potrzebuje więcej iteracji niz metoda Newtona.

Metoda	**Funkcja**	**Przedział**	**Wynik**
mstycznych	f1	[50.0]	(0, 0, 0, 2) - błąd
mstycznych	f2	[5.0]	(15.194283983439147, 3.827247505782993e-6, 9, 0) - zły wynik
mstycznych	f2	[12.0]	(14.173615857826384, 9.907349924182477e-6, 2, 0) - zły wynik
mstycznych	f2	[1.0]	(0, 0, 0, 2) - błąd

Tabela 10: Wynik dla testów funkcji

Dla x = 50 funkcja f1 zwraca błąd, który jest spowodowany faktem, że $\lim_{x\to\infty} f1(x) = 0$, co powoduje, że obliczenia naszego algorytmu są zbyt mało dokładne, aby poradził on sobie z wyliczeniem tego. Podobnie z resztą wygląda fakt dla funkcji $f2$. Jej granica w nieskończoności daży do zera $\lim_{x\to\infty} f2(x) = 0$, a więc mamy zbyt małą dokładność naszej artmetyki.

Natomiast dla f2 od 1.0 otrzymujemy błąd polegający na tym, że pochodna funkcji $f2(x)$ w punkcie 1.0 jest równa 0. Co powoduje, że styczna będzie równoległa do osi OX, a więc algorytm nie zadziała.

4.4 Wnioski

Jak widzimy metoda bisekcji dla dobrze dobranych parametrów zwraca poprawne wyniki. Bardzo ważne jest tutaj również stwierdzenie, że metoda Newtona w porównaniu do metody siecznych zwraca wynik w mniejszej ilości iteracji.Ponad to w ich przypadku bardzo istotne jest wyznaczenie poprawnie warunków początkowych (przedział, początek), gdyż pomyłka może doprowadzić do błędnych wyników. A zatem bardzo sensowne wydaje się używanie tych wszystkich metod zważywszy na ich wady i zalety.