Sprawozdanie z Listy 4
Obliczenia Naukowe

Tomasz Hałas

6 grudnia 2021

Spis treści

1 Zadanie 1.

1.1 Opis problemu

Zadanie polega na zaimplementowaniu algorytmu liczenia ilorazów różnicowych za pomoca tablicy jednowymiarowej.

1.2 Rowiązanie

Aby rowiązać to zadanie skorzystałem z następujących wzorów:

$$f[x_0] = f(x_0)$$
$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}$$
$$f[x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, ..., x_n] - f[x_0, x_1, ..., x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

Daną mamy na wejściu węzeł x_i oraz wartość funkcji w tym węźle $f(x_i)$. Ponad to za pomocą ($f[x_0] = f(x_0)$) obliczymy również iloraz zerowego rzędu. Tworzę tablice jednowymiarową, której przypisuje wartości $[f_i]$ dla każdego x_i. Nastepnie wyliczam według wzoru

$$array[i] = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-j}}$$

Kolejne wartości zmieniane są kolumnowo oraz wewnątrz każdej kolumny, zaczynając od dołu do góry. Na tej podstawie uzyskuje tablicę, zawierającą ilorazy różnicowe.

```
for i := 0 to n do
   c[i] := y[i];
for j := 1 to n do
   for i := n downto j do
      c[i] := (c[i]-c[i-1])/(x[i]-x[i-j]);
```

:

Rysunek 1: Pseudokod dla zadania 1.

2 Zadanie 2.

2.1 Opis problemu

Zadanie polegało na napisaniu funkcji obliczającej wartość wielomianu interpolacyjnego stopnia n w postaci Newtona $N_n(x)$ w punkcie $x = t$ za pomocą uogólnionego algorytmu Hornera, w czasie $O(n)$.

Wartość w punkcie x wynosi:

$$N_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

gdzie c_i to nasz iloraz różnicowy stopnia i, a x_j jest węzłem interpolacji.

2.2 Rowiązanie

Aby policzyć wartość danego wielomianu w punkcie zastosuje uogólniony algorytm Hornera, według poniższych wzorów:

$$\begin{gathered} w_n(x) := f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \\ w_k(x) := f[x_0, x_1, \ldots, x_k] + (x - x_k) w_{k+1}(x) \quad (k = n-1, \ldots, 0) \\ N_n(x) = w_0(x) \end{gathered}$$

Na tej podstawie możemy zapisać algorytm, wyglądający nastepująco:

```
w := c[n];
for i := n-1 downto 0 do
   w := w*(t-x[i]) + c[i];
```

:

Rysunek 2: Pseudokod dla zadania 2.

3 Zadanie 3.

3.1 Opis problemu

Znając współczynniki wielomianu interpolacyjnego w postaci Newtona $c_0 = f[x_0], c_1 = f[x_0, x_1], c_2 = f[x_0, x_1, x_2], \ldots, c_n = f[x_0, \ldots, x_n]$ (ilorazy różnicowe) oraz węzły $x_0, x_2, \ldots, x_n$ napisać funkcję obliczającą, w czasie $O(n^2)$, współczynniki jego postaci naturalnej $a_0, \ldots, a_n$.

3.2 Rowiązanie

W wielomianie interpolacyjnym współynikiem a_n stojącym przy najwyższej potędze x^n jest c_n, gdzie $c_0, c_1, \ldots$ są ilorazami różnicowymi tego wielomianu. W kolejnych krokach tworzone są współczynniki a_i, które oparte są na a_{i+1}. W celu obliczenia a_i iteruje po wszytskich w_i od n do 0, zmieniając w danym momencie iteracji odpowiednio współczyniki w_i, aby nasz wielomian był w postaci naturalnej.

4 Zadanie 4.

4.1 Opis problemu

Napisać funkcję, która zinterpoluje zadaną funkcję $f(x)$ w przedziale [a, b] za pomocą wielomianu interpolacyjnego stopnia n w postaci Newtona. Następnie narysuje wielomian interpolacyjny i interpolowaną funkcję.

4.2 Rowiązanie

Na wskazanym przedziale $[a, b]$ „wybieram” $n+1$ równoległych węzłów. Nastepnie wyliczam ilorazy różnicowe za pomocą stworzenej przeze mnie funkcji i dyskretyzuje przedział. Dla każdego węzła liczymy wartość funkcji i wielomianu.

5 Zadanie 5.

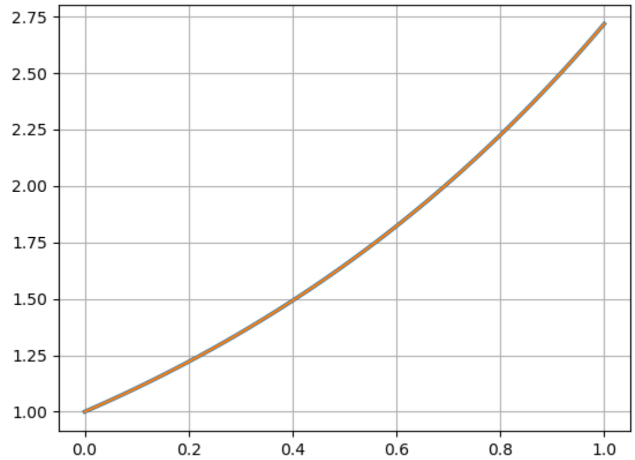
5.1 Opis problemu

Przetestować funkcję $rysujNnfx(f, a, b, n)$ na funkcjach e^x oraz $x^2 sin(x)$.

5.2 Rowiązanie

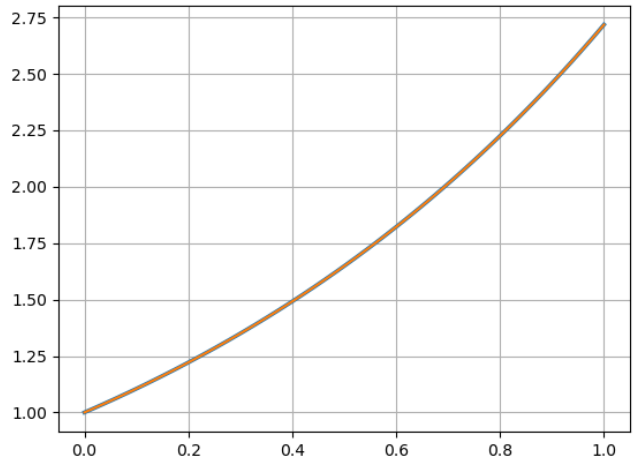
Rozwiązanie znaduję sie w zadaniu 5 oraz w plikach *.png*. Na niebiesko oznaczam moją interpolacje, a na pomarańczowo funkcję.

5.3 Wyniki



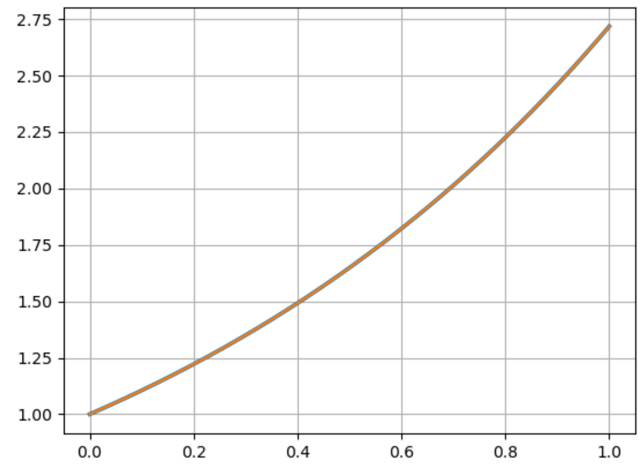
:

Rysunek 3: e^x dla $n = 5$



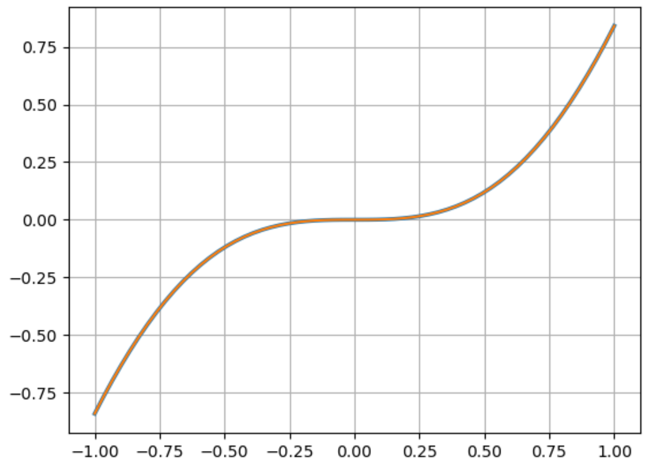
:

Rysunek 4: e^x dla $n = 10$



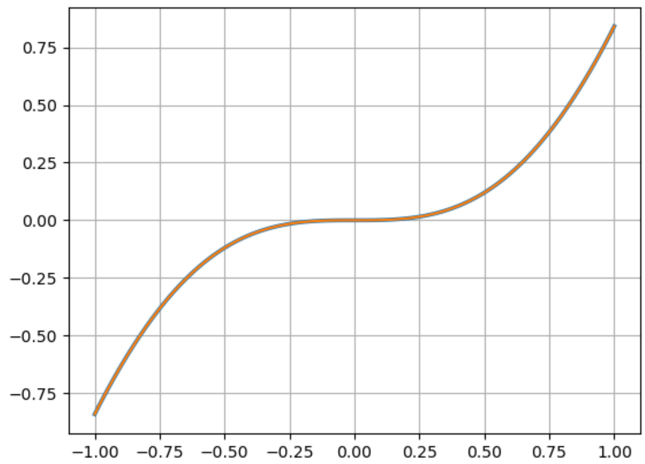
:

Rysunek 5: e^x dla $n = 15$



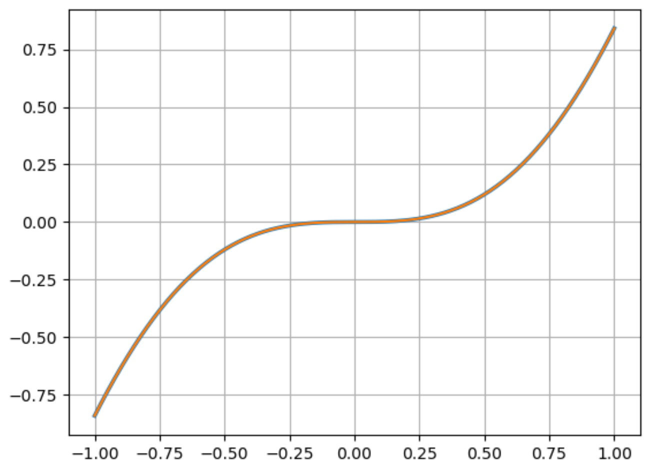
:

Rysunek 6: $x^2 sin(x)$ dla $n = 5$



:

Rysunek 7: $x^2 sin(x)$ dla $n = 10$



:

Rysunek 8: $x^2 sin(x)$ dla $n = 15$

Dla wielomianu o małym stopniu wykresy pokrywają się.

5.4 Wnioski

Interpolowanie funkcji, której wartości nie zmieniają się drastycznie oraz pochodna nie zmienia znaku na danym przedziale, daje bardzo dokładne wielomiany interpolacyjne.

6 Zadanie 6.

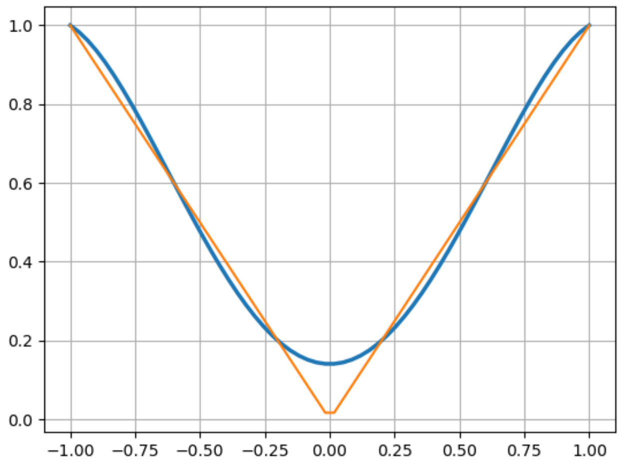
6.1 Opis problemu

Przetestować funkcję $rysujNnfx(f, a, b, n)$ na funkcjach $|x|$ oraz $\frac{1}{1+x^2}$.

6.2 Rowiązanie

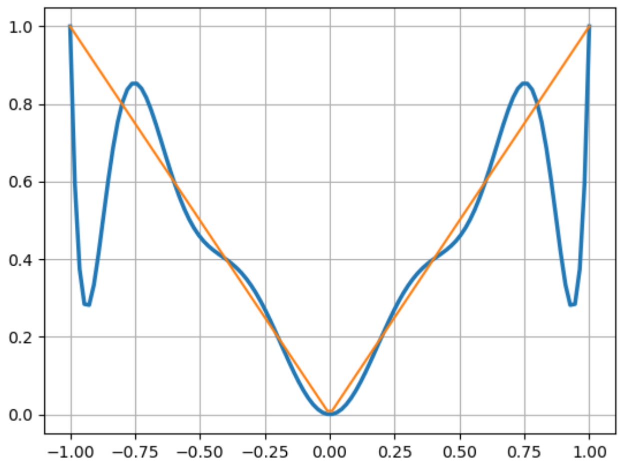
Na wskazanym przedziale $[a, b]$ „wybieram” $n+1$ równoległych węzłów. Nastepnie wyliczam ilorazy różnicowe za pomocą stworzenej przeze mnie funkcji i dyskretyzuje przedział. Dla każdego węzła liczymy wartość funkcji i wielomianu.

6.3 Wyniki



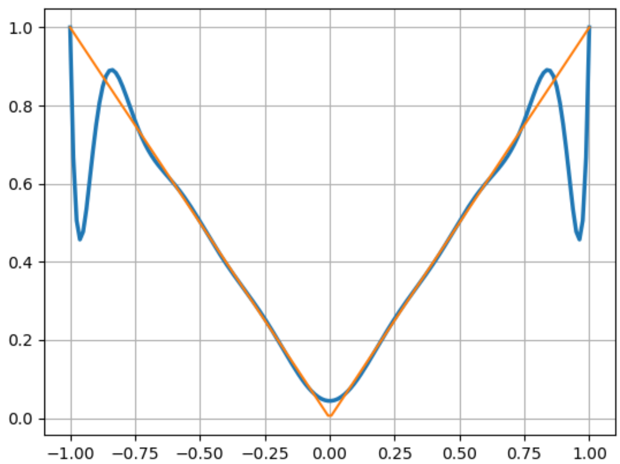
:

Rysunek 9: $|x|$ dla $n = 5$



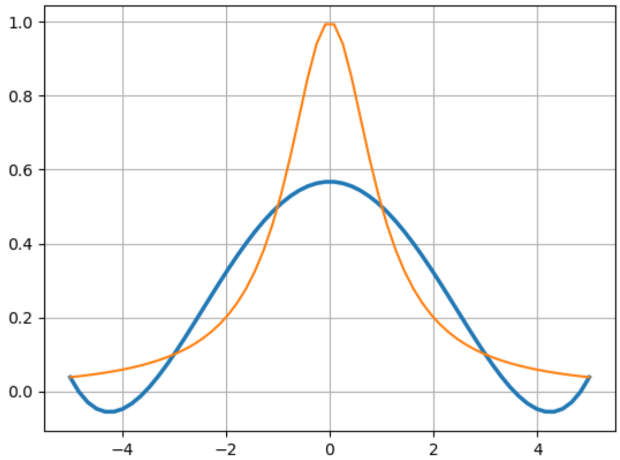
:

Rysunek 10: $|x|$ dla $n = 10$



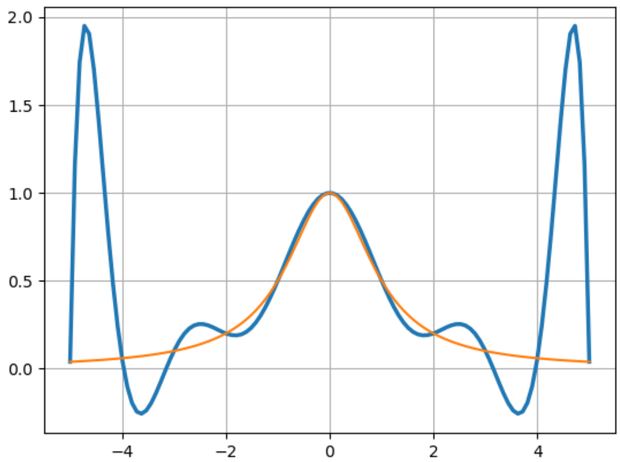
:

Rysunek 11: $|x|$ dla $n = 15$



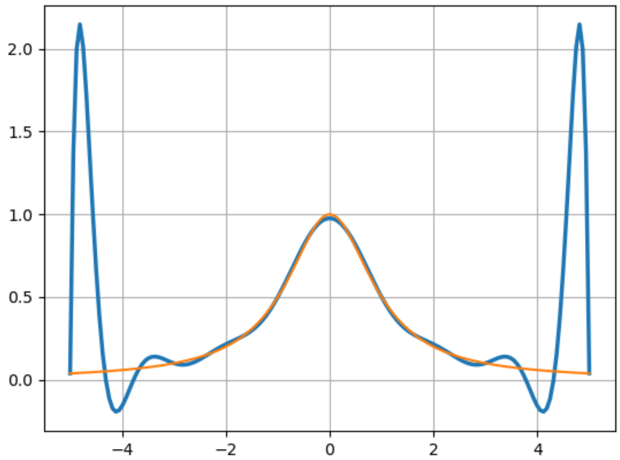
:

Rysunek 12: $\frac{1}{1+x^2}$ dla $n = 5$



:

Rysunek 13: $\frac{1}{1+x^2}$ dla $n = 10$



:

Rysunek 14: $\frac{1}{1+x^2}$ dla $n = 15$

Funckje $|x|$ oraz $\frac{1}{1+x^2}$ mocno zmieniają wartości w swoich przedziałach i znak pochodnych obu funkcji ulega zmianie (powoduje to powstanie lokalnego minimum/maksimum). Ponad to widzimy, że im większy jest stopień wielomianu interpolacyjnego tym dokładniejszse wartości otrzymujemy w centrum interpolacji (tutaj okolice 0), jednak na końcach przedziału pojawiają się duże wahania wartości.

6.4 Wnioski

„Odwzorowanie" wielomianu interpolacyjnego zależy przede wszystkim od funkcji, ponieważ w sytuacji, gdy posiada on pochodną zmieniająca znak lub występuje w niej drastyczna zmianna wartości w danym przedziale, może być ono gorzej przybliżone. Ponad to dla bardzo wysokiego stopnia współczynika wielomianu, stracimy dokładność interpolacji na brzegach przedziału.