# 2.4 矩阵的特征值与特征向量

- 矩阵特征值的数学定义
- 求矩阵的特征值与特征向量
- 特征值的几何意义

# 1．矩阵特征值的数学定义

设A是n阶方阵，如果存在常数λ和n维非零列向量x，使得等式Ax=λx成立，则称λ为A的特征值，x是对应特征值λ的特征向量。

# 2．求矩阵的特征值与特征向量

在MATLAB中，计算矩阵的特征值和特征向量的函数是eig，常用的调用格式有两种：

- E=eig(A)：求矩阵A的全部特征值，构成向量E。
- [X,D]=eig(A)：求矩阵A的全部特征值，构成对角阵D，并产生矩阵X，X各列是相应的特征向量。

```
>> A=[1,1,0;1,0,5;1,10,2]
A =
     1     1     0
     1     0     5
     1    10     2
>> [X,D]=eig(A)
X =
    0.0722    0.9751    0.0886
    0.5234   -0.0750   -0.6356
    0.8490   -0.2089    0.7669
D =
    8.2493         0         0
         0    0.9231         0
         0         0   -6.1723
```

```
>> A*X(:,1)
ans =
    0.5956
    4.3174
    7.0040
>> D(1)*X(:,1)
ans =
    0.5956
    4.3174
    7.0040
```

例1　设

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{3\times3} & \boldsymbol{O}_{3\times2} \\ \boldsymbol{O}_{2\times3} & \boldsymbol{S}_{2\times2} \end{bmatrix}$$

又设$\boldsymbol{\lambda}_i$为R的特征值，$\boldsymbol{\lambda}_j$为S的特征值，$\boldsymbol{x}_{\mathrm{i}}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)'$是R对应于$\boldsymbol{\lambda}_i$的特征向量，$\boldsymbol{y}_{\mathrm{j}}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)'$是S对应于$\boldsymbol{\lambda}_j$的特征向量，试验证：

（1）$\boldsymbol{\lambda}_i$、$\boldsymbol{\lambda}_j$为A的特征值。

（2）$\mathbf{p}_{\mathrm{i}}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\mathbf{0},\mathbf{0})'$是A对应于$\boldsymbol{\lambda}_i$的特征向量，$\boldsymbol{q}_{\mathrm{j}}=(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)'$是A对应于$\boldsymbol{\lambda}_j$的特征向量。

```
R=[-1,2,0;2,-4,1;1,1,-6];
S=[1,2;2,3];
A=[R,zeros(3,2);zeros(2,3),S];
[X1,d1]=eig(R)
[X2,d2]=eig(S)
[X3,d3]=eig(A)
```

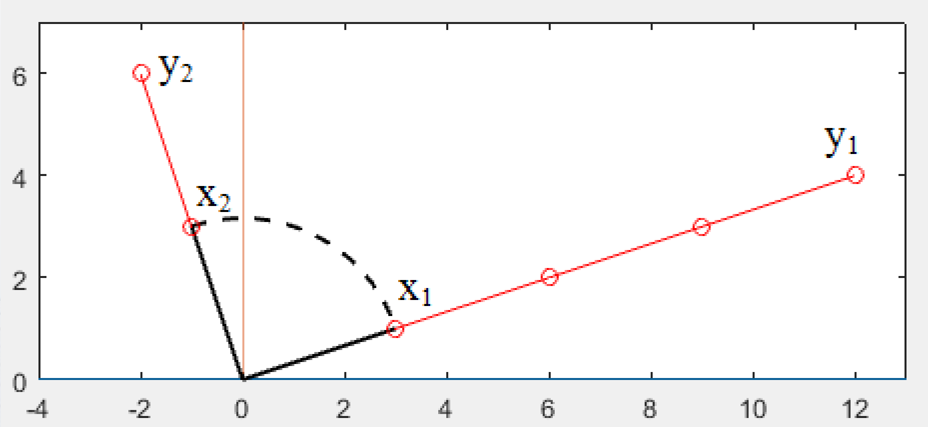
A矩阵的特征值由R矩阵的特征值和S矩阵的特征值组成，关于A矩阵每个特征值的特征向量，前三个特征向量的前三个元素是R的特征向量，后两个特征向量的后两个元素是S的特征向量，运算结果与结论相符。

```
X1 =
    0.8553    0.4517    0.1899
    0.4703   -0.8395   -0.5111
    0.2173   -0.3021    0.8383
d1 =
    0.0996         0         0
         0   -4.7165         0
         0         0   -6.3832
X2 =
   -0.8507    0.5257
    0.5257    0.8507
d2 =
   -0.2361         0
         0    4.2361
```

```
X3 =
    0.8553    0.4517    0.1899         0         0
    0.4703   -0.8395   -0.5111         0         0
    0.2173   -0.3021    0.8383         0         0
         0         0         0   -0.8507   -0.5257
         0         0         0    0.5257   -0.8507
d3 =
    0.0996         0         0         0         0
         0   -4.7165         0         0         0
         0         0   -6.3832         0         0
         0         0         0   -0.2361         0
         0         0         0         0    4.2361
```

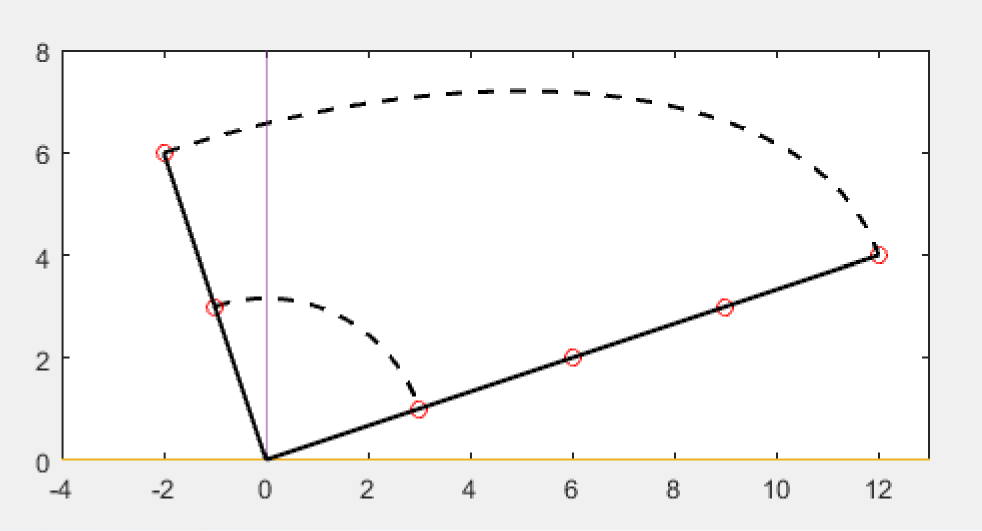
# 3．特征值的几何意义

设$A=\begin{bmatrix}3.8 & 0.6\\ 0.6 & 2.2\end{bmatrix}$，其特征向量有$x_1=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$，$x_2=\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$，对应的特征值分别为$\lambda_1=4$和$\lambda_2=2$，令$y_1=Ax_1=\lambda_1x_1$，$y_2=Ax_2=\lambda_2x_2$，我们讨论$y_1$与$x_1$，$y_2$与$x_2$之间的关系。

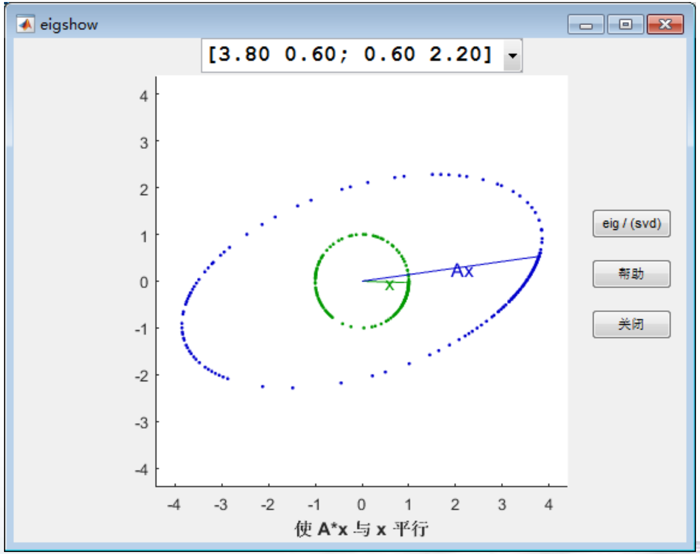



$y_1$、$y_2$是$x_1$、$x_2$经过矩阵A变换以后的结果，A相当于一个变换矩阵。把$\lambda_1$、$\lambda_2$当作伸缩因子，$y_1$、$y_2$是$x_1$、$x_2$经过$\lambda_1$、$\lambda_2$伸缩以后的结果，如图所示。黑色部分代表向量$x_1$和$x_2$，红色部分代表对$x_1$和$x_2$进行拉伸的结果。

更进一步，连续取单位向量x，让它大小保持为1，那么Ax就将四分之一圆弧进行拉伸，变成四分之一椭圆。



MATLAB提供了一个eigshow命令，可以演示向量x和Ax之间的关系。用鼠标拖动绿色的单位向量x绕原点转动，图中同步出现蓝色的Ax向量。Ax的大小在变化，方向也在变化，而且Ax的方向与x不一定相同。在变化过程中，x与Ax共线的位置称为特征方向。在特征方向上有Ax等于λx。



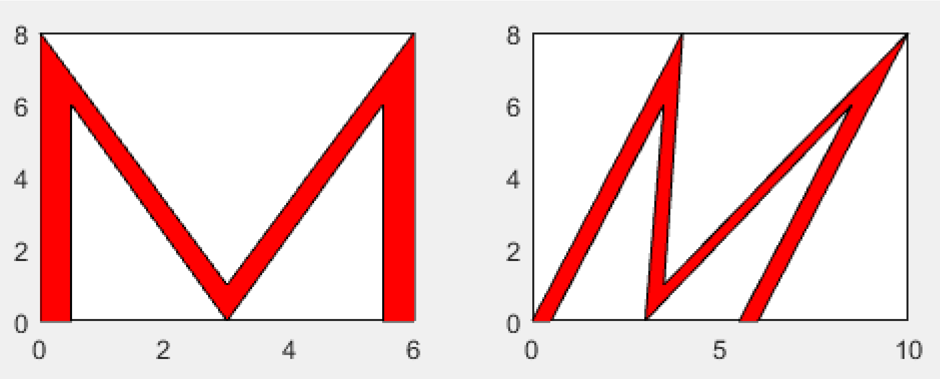
例2 已知大写字母M的各个结点坐标如表所示（第一行代表横坐标，第二行代表纵坐标）。

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 0.5 | 0.5 | 3 | 5.5 | 5.5 | 6 | 6 | 3 | 0 |
| y | 0 | 0 | 6 | 0 | 6 | 0 | 0 | 8 | 1 | 8 |

（1）绘制M的图形。

（2）设$A=\begin{bmatrix}1 & 0.5\\0 & 1\end{bmatrix}$，用A对M的结点坐标进行变换，并绘制变换后的图形。

```
x=[0,0.5,0.5,3,5.5,5.5,6,6,3,0;0,0,6,0,6,0,0,8,1,8];
A=[1,0.5;0,1];
y=A*x;
subplot(2,2,1);                %选择1号子图，详见专题四
fill(x(1,:),x(2,:),'r');       %绘制M的图形，并用红色（red）填充
subplot(2,2,2);                %选择2号子图
fill(y(1,:),y(2,:),'r');       %绘制变换后的M图形，并用红色填充
```



- 定义变换矩阵A，再利用A对x进行变换，得到y矩阵，最后分别绘制变换前后的图形，M原来是正体，变换后改为斜体。
- **启示：**在构建字库时，不必单独创建斜体字库，而只需对正体字库进行适当的线性变换即可，这样可以大大节省存储空间。