2.2 矩阵变换

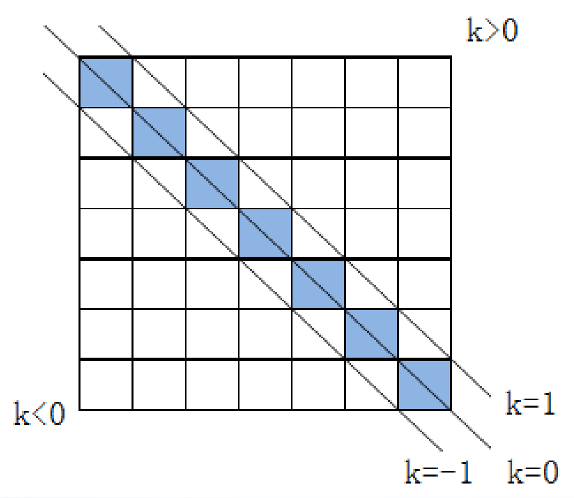
- 对角阵
- 三角阵
- 矩阵的转置
- 矩阵的旋转
- 矩阵的翻转
- 矩阵求逆

1．对角阵

- 对角阵：只有对角线上有非零元素的矩阵。
- 数量矩阵：对角线上的元素相等的对角矩阵。
- 单位矩阵：对角线上的元素都为1的对角矩阵。

(1) 提取矩阵的对角线元素

- diag(A)：提取矩阵A主对角线元素，产生一个列向量。
- diag(A,k)：提取矩阵A第k条对角线的元素，产生一个列向量。



矩阵的对角线：与主对角线平行，往上为第1条、第2条、一直到第n条对角线，往下为第-1条、-2条、一直到-n条对角线。主对角线为第0条对角线。

(2) 构造对角阵

- diag(V)：以向量 V为主对角线元素，产生对角矩阵。
- diag(V,k)：以向量 V为第k条对角线元素，产生对角矩阵。

例1　先建立5×5矩阵A，然后将A的第一行元素乘以1，第二行乘以2，…，第五行乘以5。

```
>> A=[7,0,1,0,5;3,5,7,4,1;4,0,3,0,2;1,1,9,2,3;1,8,5,2,9]
A =
     7     0     1     0     5
     3     5     7     4     1
     4     0     3     0     2
     1     1     9     2     3
     1     8     5     2     9
>> D=diag(1:5);
>> D*A
ans =
     7     0     1     0     5
     6    10    14     8     2
    12     0     9     0     6
     4     4    36     8    12
     5    40    25    10    45
```

用一个对角阵左乘一个矩阵时，相当于用对角阵对角线的第1个元素乘以该矩阵的第一行，用对角阵对角线的第2个元素乘以该矩阵的第二行，…，依此类推。

要将A的各列元素分别乘以对角阵的对角线元素，如何实现？

```
>> A=[7,0,1,0,5;3,5,7,4,1;4,0,3,0,2;1,1,9,2,3;1,8,5,2,9]
A =
     7     0     1     0     5
     3     5     7     4     1
     4     0     3     0     2
     1     1     9     2     3
     1     8     5     2     9
>> D=diag(1:5);
>> A*D
ans =
     7     0     3     0    25
     3    10    21    16     5
     4     0     9     0    10
     1     2    27     8    15
     1    16    15     8    45
```

要将A的各列元素分别乘以对角阵的对角线元素，可以用一个对角阵右乘矩阵A。

2．三角阵

- 上三角阵：矩阵的对角线以下的元素全为零的矩阵。
- 下三角阵：对角线以上的元素全为零的矩阵。

（1）上三角矩阵

- triu(A)：提取矩阵A的主对角线及以上的元素。
- triu(A,k)：提取矩阵A的第k条对角线及以上的元素。

```
>> triu(ones(4),-1)
ans =
     1     1     1     1
     1     1     1     1
     0     1     1     1
     0     0     1     1
```

（2）下三角矩阵

在MATLAB中，提取矩阵A的下三角矩阵的函数是tril，其用法与triu函数完全相同。

3．矩阵的转置

- 转置运算符是小数点后面接单引号（.'）。
- 共轭转置，其运算符是单引号（'），它在转置的基础上还要取每个数的复共轭。

```
>> A=[1,3;3+4i,1-2i]
A =
   1.0000 + 0.0000i   3.0000 + 0.0000i
   3.0000 + 4.0000i   1.0000 - 2.0000i
>> A.'
ans =
   1.0000 + 0.0000i   3.0000 + 4.0000i
   3.0000 + 0.0000i   1.0000 - 2.0000i
>> A'
ans =
   1.0000 + 0.0000i   3.0000 - 4.0000i
   3.0000 + 0.0000i   1.0000 + 2.0000i
```

- 矩阵的转置：把源矩阵的第一行变成目标矩阵的第一列，第二行变成第二列，…，依此类推。
- 如果矩阵的元素是实数，那么转置和共轭转置的结果是一样的。

4．矩阵的旋转

rot90(A,k)：将矩阵A逆时针方向旋转90°的k倍，当k为1时可省略。

```
>> A=[1,3,2;-3,2,1;4,1,2]
A =
     1     3     2
    -3     2     1
     4     1     2
>> rot90(A)
ans =
     2     1     2
     3     2     1
     1    -3     4
>> rot90(A,2)
ans =
     2     1     4
     1     2    -3
     2     3     1
```

5．矩阵的翻转

对矩阵实施左右翻转是将原矩阵的第一列和最后一列调换，第二列和倒数第二列调换，…，依此类推。

- fliplr(A)：对矩阵A实施左右翻转
- flipud(A)：对矩阵A实施上下翻转。

例2 验证魔方阵的主对角线、副对角线元素之和相等。

```
>> A=magic(5);
>> D1=diag(A);
>> sum(D1)
ans =
    65
>> B=flipud(A);
>> D2=diag(B);
>> sum(D2)
ans =
    65
```

- 对矩阵A实施上下翻转得到矩阵B，这样A的副对角线就移到了B的主对角线
- 5阶魔方阵的主对角线、副对角线元素之和相等，都为65。

6．矩阵的求逆

- 对于一个方阵A，如果存在一个与其同阶的方阵B，使得AB=BA=I（I为单位矩阵），则称B为A的逆矩阵，当然，A也是B的逆矩阵。
- inv(A)：求方阵A的逆矩阵。

例3　用求逆矩阵的方法解线性方程组。

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ x + 4y + 9z = -2 \\ x + 8y + 27z = 6 \end{cases}$$

在线性方程组Ax=b两边各左乘A^{-1}，得$x=A^{-1}b$。

```
>> A=[1,2,3;1,4,9;1,8,27];
>> b=[5;-2;6];
>> x=inv(A)*b
x =
   23.0000
  -14.5000
    3.6667
>> x=A\b
x =
   23.0000
  -14.5000
    3.6667
```