2.1 特殊矩阵

- 通用性的特殊矩阵
- 用于专门学科的特殊矩阵

1．通用的特殊矩阵

- zeros函数：产生全0矩阵，即零矩阵。
- ones函数：产生全1矩阵，即幺矩阵。
- eye函数：产生对角线为1的矩阵。当矩阵是方阵时，得到一个单位矩阵。
- rand函数：产生（0，1）区间均匀分布的随机矩阵。
- randn函数：产生均值为0，方差为1的标准正态分布随机矩阵。

zeros函数的调用格式：

- zeros(m)：产生m×m零矩阵。
- zeros(m,n)：产生m×n零矩阵。
- zeros(size(A))：产生与矩阵A同样大小的零矩阵。

```
>> A=zeros(2,3)
A =
     0     0     0
     0     0     0
>> zeros(size(reshape(A,3,2)))
ans =
     0     0
     0     0
     0     0
```

例1　首先产生5阶两位随机整数矩阵A，再产生均值为0.6、方差为0.1的5阶正态分布随机矩阵B，最后验证(A+B)I=IA+BI（I为单位矩阵）。

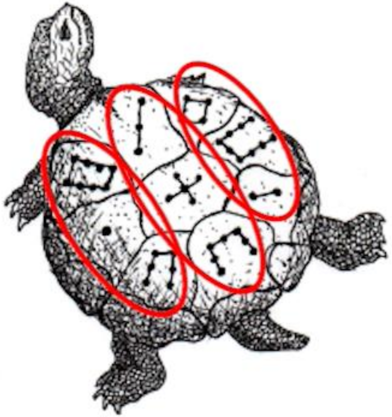
- rand函数：产生(0，1)开区间均匀分布的随机数*x*。
- fix(a+(b-a+1)*x)：产生[a，b]区间上均匀分布的随机整数。
- randn函数：产生均值为0、方差为1的标准正态分布随机数*x*。
- $\mu+\sigma x$：得到均值为μ、方差为σ^2的随机数。

```
>> A=fix(10+(99-10+1)*rand(5));
>> B=0.6+sqrt(0.1)*randn(5);
>> C=eye(5);
>> (A+B)*C==C*A+B*C
ans =
     1     1     1     1     1
     1     1     1     1     1
     1     1     1     1     1
     1     1     1     1     1
     1     1     1     1     1
```

2. 用于专门学科的特殊矩阵

(1)魔方矩阵

—Magic Square



```
>> M=magic(3)
M =
     8     1     6
     3     5     7
     4     9     2
```

- n阶魔方阵由1, 2, 3, …, n^2共n^2个整数组成，且每行、每列以及主、副对角线上各n个元素之和都相等。
- n阶魔方阵每行每列元素的和为$(1+2+3+\cdots+n^2)/n=(n+n^3)/2$
- n>2时有很多不同的n阶魔方阵，MATLAB函数magic(n)产生一个特定的魔方阵。

例2　产生8阶魔方阵，求其每行每列元素的和。

```
>> M=magic(8);
>> sum(M(1,:))
ans =
    260
>> sum(M(:,1))
ans =
    260
```

（2）范德蒙矩阵

对于向量$v=[v_1, v_2, \cdots, v_n]$， 范得蒙矩阵的一般形式为：

$$V=\begin{bmatrix} v_1^{n-1} & \cdots & v_1^2 & v_1^1 & v_1^0 \\ v_2^{n-1} & \cdots & v_2^2 & v_2^1 & v_2^0 \\ v_3^{n-1} & \cdots & v_3^2 & v_3^1 & v_3^0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_n^{n-1} & \cdots & v_n^2 & v_n^1 & v_n^0 \end{bmatrix}$$

范德蒙（Vandermonde）矩阵是法国数学家范德蒙提出的一种特殊矩阵。范得蒙矩阵的最后一列全为1，即向量v各元素的零次方，倒数第二列为指定的向量v，即向量v各元素的一次方， 其他各列是其后列与倒数第二列的点乘积。

在MATLAB中，函数vander(V)生成以向量V为基础的范得蒙矩阵。

```
>> A=vander(1:5)
A =
     1     1     1     1     1
    16     8     4     2     1
    81    27     9     3     1
   256    64    16     4     1
   625   125    25     5     1
```

范德蒙矩阵常用在各种通信系统的纠错编码中，例如，常用的Reed-Solomon编码即以范德蒙矩阵为基础。

(3) 希尔伯特矩阵

n阶希尔伯特（Hilbert）矩阵的一般形式为：

$$H=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & \cdots & 1/n \\ 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/(n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/n & 1/(n+1) & \cdots & 1/(2n-1) \end{bmatrix}$$

希尔伯特矩阵的元素为H(i,j)=1/(i+j-1)。

在MATLAB中，生成n阶希尔伯特矩阵的函数是hilb(n)。

```
>> format rat
>> H=hilb(4)
H =
        1            1/2          1/3          1/4
        1/2          1/3          1/4          1/5
        1/3          1/4          1/5          1/6
        1/4          1/5          1/6          1/7
```

希尔伯特矩阵是著名的病态矩阵，即任何一个元素发生较小的变动，整个矩阵的值和逆矩阵都会发生很大变化。病态程度和矩阵的阶数相关，随着阶数的增加病态越严重。

（4）伴随矩阵

设多项式p(x)为$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$，则多项式的伴随矩阵是：

$$A = \begin{bmatrix} -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} & -\dfrac{a_{n-2}}{a_n} & -\dfrac{a_{n-3}}{a_n} & \cdots & -\dfrac{a_1}{a_n} & -\dfrac{a_0}{a_n} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

p(x)称为A的特征多项式，方程p(x)=0的根称为A的特征值。

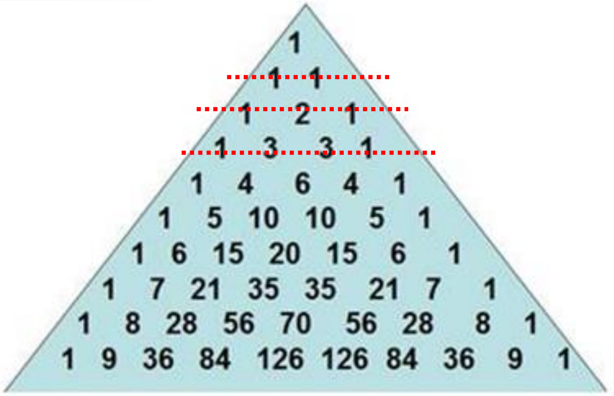
MATLAB生成伴随矩阵的函数是compan(p)，其中p是一个多项式的系数向量，高次幂系数排在前，低次幂排在后。例如，生成多项式x^3-2x^2-5x+6的伴随矩阵。

```
>> p=[1,-2,-5,6];
>> A=compan(p)
A =
     2     5    -6
     1     0     0
     0     1     0
```

可以求出伴随矩阵的特征值，该特征值等于多项式方程的根。

(5) 帕斯卡矩阵

- 根据二项式定理，$(x+y)^n$展开后的系数随着n的增大组成一个三角形表，这个三角形称为杨辉三角形。
- 把二项式系数依次填写在矩阵的左侧对角线上，然后提取左侧的n行n列元素即为n阶帕斯卡（Pascal）矩阵。



$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 28 & 36 \\
1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 & 84 & 120 \\
1 & 5 & 15 & 35 & 70 & 126 & 210 & 330 \\
1 & 6 & 21 & 56 & 126 & 252 & 462 & 792 \\
1 & 7 & 28 & 84 & 210 & 462 & 924 & 1716 \\
1 & 8 & 36 & 120 & 330 & 792 & 1716 & 3432
\end{bmatrix}
$$

- 帕斯卡矩阵的第一行元素和第一列元素都为1，其余位置的元素是该元素的左边元素与上面元素相加，即P(i,j)=P(i,j-1)+P(i-1,j)，且P(i,1)=1,P(1,j)=1。
- 函数pascal(n)生成一个n阶帕斯卡矩阵。

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 28 & 36 \\
1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 & 84 & 120 \\
1 & 5 & 15 & 35 & 70 & 126 & 210 & 330 \\
1 & 6 & 21 & 56 & 126 & 252 & 462 & 792 \\
1 & 7 & 28 & 84 & 210 & 462 & 924 & 1716 \\
1 & 8 & 36 & 120 & 330 & 792 & 1716 & 3432
\end{bmatrix}
$$

例3　生成5阶帕斯卡矩阵，验证它的逆矩阵的所有元素也为整数。

```
>> format rat
>> P=pascal(5)
P =
       1              1              1              1              1
       1              2              3              4              5
       1              3              6             10             15
       1              4             10             20             35
       1              5             15             35             70
>> inv(P)
ans =
       5            -10             10             -5              1
     -10             30            -35             19             -4
      10            -35             46            -27              6
      -5             19            -27             17             -4
       1             -4              6             -4              1
```