2.5 稀疏矩阵

- 矩阵的存储方式
- 稀疏存储方式的产生
- 稀疏矩阵的应用实例

1. 矩阵的存储方式

- 完全存储方式：将矩阵的全部元素按列存储。
- 稀疏存储方式：只存储矩阵的非零元素的值及其位置，即行号和列号。

注意，采用稀疏存储方式时，矩阵元素的存储顺序并没有改变，也是按列的顺序进行存储。

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 7\end{bmatrix}$$

A矩阵的稀疏存储方式：

（1，1），1

（3，1），2

（2，2），5

（3，4），7

当矩阵的规模很大时，采用稀疏存储方式可以大大节约存储空间。

2．稀疏存储方式的产生

（1）完全存储方式与稀疏存储方式之间的转化

- A=sparse(S)：将矩阵S转化为稀疏存储方式的矩阵A。
- S=full(A)：将矩阵A转化为完全存储方式的矩阵S。

```
>> A=sparse(eye(5))
A =
   (1,1)        1
   (2,2)        1
   (3,3)        1
   (4,4)        1
   (5,5)        1
>> B=full(A)
B =
     1     0     0     0     0
     0     1     0     0     0
     0     0     1     0     0
     0     0     0     1     0
     0     0     0     0     1
>> whos
  Name      Size            Bytes  Class     Attributes
  A         5x5               128  double    sparse
  B         5x5               200  double
```

（2）直接建立稀疏存储矩阵

sparse函数的其他调用格式：

- sparse(m, n)：生成一个m×n的所有元素都是零的稀疏矩阵。
- sparse(u, v, S)：其中u、v、S是3个等长的向量。S是要建立的稀疏存储矩阵的非零元素，u(i)、v(i)分别是S(i)的行和列下标。

```
>> A=sparse([1,2,2],[2,1,4],[4,5,-7])
A =
    (2,1)          5
    (1,2)          4
    (2,4)         -7
>> B=full(A)
B =
     0     4     0     0
     5     0     0    -7
```

使用spconvert函数直接建立稀疏存储矩阵，其调用格式为：

```
B=spconvert(A)
```

其中，A为一个m×3或m×4的矩阵，其每行表示一个非零元素，m是非零元素的个数。

- A(i,1)表示第i个非零元素所在的行。
- A(i,2)表示 第i个非零元素所在的列。
- A(i,3)表示第i个非零元素值的实部。
- A(i,4)表示第i个非零元素值的虚部。

若矩阵的全部元素都是实数，则无须第4列。

```
>> A=[2,2,1;2,1,-1;2,4,3]
A =
     2     2     1
     2     1    -1
     2     4     3
>> B=spconvert(A)
B =
   (2,1)        -1
   (2,2)         1
   (2,4)         3
```

（3）带状稀疏矩阵的稀疏存储

- 稀疏矩阵有两种基本类型：无规则结构的稀疏矩阵与有规则结构的稀疏矩阵。
- 带状稀疏矩阵就是一种十分典型的具有规则结构的稀疏矩阵，它是指所有非零元素集中在对角线上的矩阵。

- [B,d]=spdiags(A)：从带状稀疏矩阵A中提取全部非零对角线元素赋给矩阵B及其这些非零对角线的位置向量d。
- A=spdiags(B,d,m,n)：产生带状稀疏矩阵的稀疏存储矩阵A，其中m、n为原带状稀疏矩阵的行数与列数，矩阵B的第i列即为原带状稀疏矩阵的第i条非零对角线，向量d为原带状稀疏矩阵所有非零对角线的位置。

```
>> A =[11,0,0,12,0,0;0,21,0,0,22,0;0,0,31,0,0,32;41,0,0,42,0,0;0,51,0,0,52,0]
A =
    11     0     0    12     0     0
     0    21     0     0    22     0
     0     0    31     0     0    32
    41     0     0    42     0     0
     0    51     0     0    52     0
>> [B,d]=spdiags(A)
B =
     0    11    12
     0    21    22
     0    31    32
    41    42     0
    51    52     0
d =
    -3
     0
     3
```

利用带状稀疏矩阵非零对角线元素组成的矩阵B，以及对角线位置组成的向量d，命令执行后产生一个稀疏存储矩阵A。

```
>> A=spdiags(B,d,5,6)
A =
   (1,1)        11
   (4,1)        41
   (2,2)        21
   (5,2)        51
   (3,3)        31
   (1,4)        12
   (4,4)        42
   (2,5)        22
   (5,5)        52
   (3,6)        32
```

总　结

用spdiags函数产生带状稀疏矩阵的稀疏存储A：

A=spdiags(B,d,m,n)

其中，m、n为原带状矩阵的行数与列数。B为r×p矩阵，这里r=min(m,n)，p为原带状矩阵所有非零对角线的条数，矩阵B的第i列即为原带状矩阵的第i条非零对角线。取值方法是：若非零对角线上元素个数等于r，则取全部元素；若非零对角线上元素个数小于r，则应该用零补足到r个元素。补零的原则是：若m<n（行数<列数），则d<0时（主对角线以下）在前面补0，d>0时（主对角线以上）在后面补0；当m≥n（行数≥列数），则d<0时在后面补0；d>0时在前面补0。

（4）单位矩阵的稀疏存储

speye(m,n)返回一个m×n的稀疏存储单位矩阵。

```
>> speye(3)
ans =
   (1,1)        1
   (2,2)        1
   (3,3)        1
```

3．稀疏矩阵应用举例

求下列三对角线性方程组的解。

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & 1 & 6 & 4 & \\ & & 2 & 6 & 2 \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

```
>> kf1=[1;1;2;1;0];
>> k0=[2;4;6;6;1];
>> k1=[0;3;1;4;2];
>> B=[kf1,k0,k1];
>> d=[-1;0;1];
>> A=spdiags(B,d,5,5);
>> f=[0;3;2;1;5];
>> x=A\f
x =
   -0.1667
    0.1111
    2.7222
   -3.6111
    8.6111
```