2.3 矩阵求值

- 矩阵的行列式值
- 矩阵的秩
- 矩阵的迹
- 矩阵的范数
- 矩阵的条件数

1．方阵的行列式

- 把一个方阵看作一个行列式，并对其按行列式的规则求值，这个值就称为所对应的行列式的值。
- det(A)：求方阵A所对应的行列式的值。

例1　验证$\det(A^{-1})=1/\det(A)$。

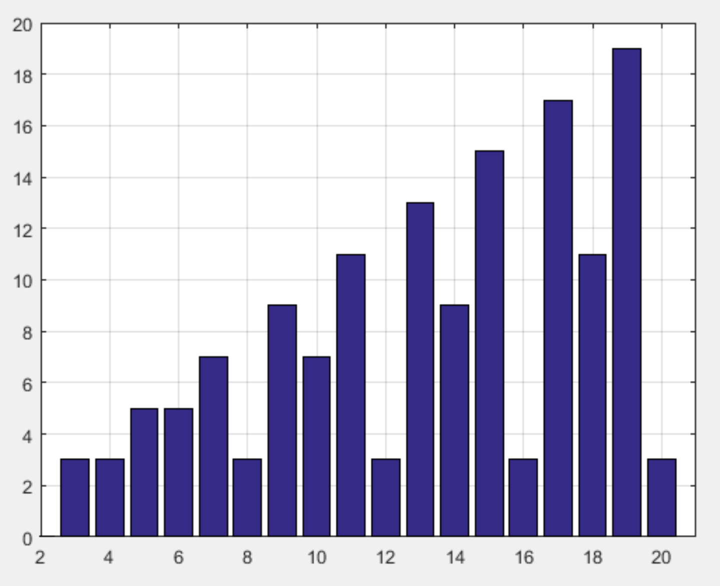
```
>> format rat
>> A=[1,3,2;-3,2,1;4,1,2]
A =
       1              3              2
      -3              2              1
       4              1              2
>> det(inv(A))
ans =
       1/11
>> 1/det(A)
ans =
       1/11
```

2．矩阵的秩

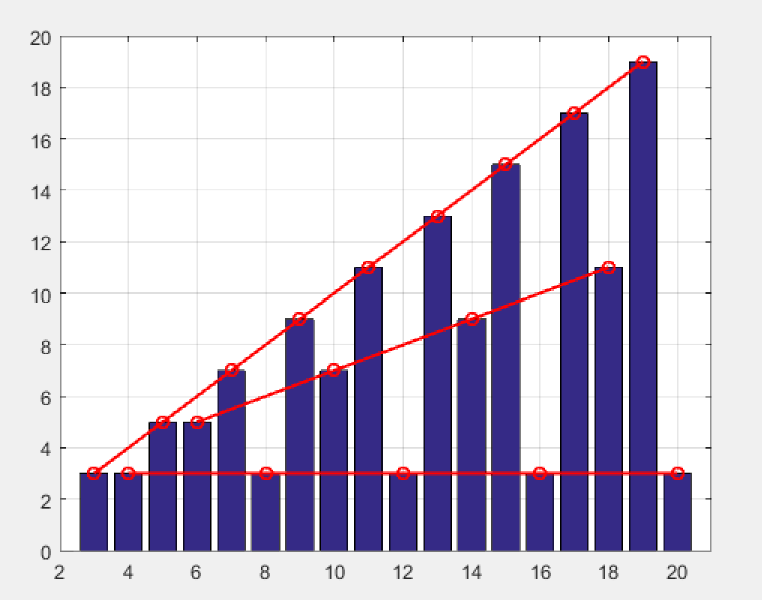
- 矩阵线性无关的行数或列数称为矩阵的秩。
- rank(A)：求矩阵A的秩。

例2　求3~20阶魔方阵的秩。

```
for n=3:20
    r(n)=rank(magic(n));
end
bar(r)
grid on
axis([2,21,0,20])
[3:20;r(3:20)]
```



n=3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
r=3	3	5	5	7	3	9	7	11	3	13	9	15	3	17	11	19	3



- 奇数阶魔方阵秩为n，即奇数阶魔方阵是满秩矩阵。
- 一重偶数阶魔方阵秩为n/2+2（n是2的倍数，但非4的倍数）。
- 双重偶数阶魔方阵秩均为3 （阶数是4的倍数） 。

3．矩阵的迹

- 矩阵的迹等于矩阵的对角线元素之和，也等于矩阵的特征值之和。
- trace(A)：求矩阵A的迹。

```
>> A=[1,3,2;-3,2,1;4,1,2]
A =
     1     3     2
    -3     2     1
     4     1     2
>> b = trace(A)
b =
     5
>> t = sum(diag(A))
t =
     5
```

4．向量和矩阵的范数

矩阵或向量的范数用来度量矩阵或向量在某种意义下的长度。

（1）向量的3种常用范数

- 向量1—范数：向量元素的绝对值之和。

$$\|V\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$$

- 向量2—范数：向量元素绝对值的平方和的平方根。

$$\|V\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2}$$

- 向量∞—范数：所有向量元素绝对值中的最大值。

$$\|V\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \{|v_i|\}$$

在MATLAB中，求向量范数的函数为：

- norm(V)或norm(V,2)：计算向量V的2—范数。
- norm(V,1)：计算向量V的1—范数。
- norm(V,inf)：计算向量V的∞—范数。

（2）矩阵的范数

- 矩阵A的1—范数：所有矩阵列元素绝对值之和的最大值。

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n}\{\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|\}$$

- 矩阵A的2—范数：A’A矩阵的最大特征值的平方根。

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_1}$$

其中λ1为A’A的最大特征值。

- 矩阵A的∞—范数：所有矩阵行元素绝对值之和的最大值。

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m}\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\}$$

MATLAB提供了求3种矩阵范数的函数，其函数调用格式与求向量的范数的函数完全相同。

```
>> x=[2 0 1;-1 1 0;-3 3 0]
x =
     2     0     1
    -1     1     0
    -3     3     0
>> n = norm(x)
n =
    4.7234
>> n = norm(x,1)
n =
     6
```

5．矩阵的条件数

- 矩阵A的条件数等于A的范数与A的逆矩阵的范数的乘积。
- 条件数越接近于1，矩阵的性能越好，反之，矩阵的性能越差。

在MATLAB中，计算矩阵A的3种条件数的函数是：

- cond(A,1)：计算A的1—范数下的条件数。
- cond(A)或cond(A,2)：计算A的2—范数数下的条件数。
- cond(A,inf)：计算A的∞—范数下的条件数。

例3 求2~10阶希尔伯特矩阵的条件数。

```
for n=2:10
    c(n)=cond(hilb(n));
end
format long
c'
```

随着阶数的增加，希尔伯特矩阵的条件数不断增大，矩阵性能变差。

```
  1.0e+13 *

                  0
  0.000000000001928
  0.000000000052406
  0.000000001551374
  0.000000047660725
  0.000001495105864
  0.000047536735631
  0.001525757554777
  0.049315394619572
  1.602490962516758
```