Лабораторная работа 1

Используя явную и неявную конечно-разностные схемы, а также схему Кранка - Николсона, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. Осуществить реализацию трех вариантов аппроксимации граничных условий, содержащих производные: двухточечная аппроксимация с первым порядком, трехточечная аппроксимация со вторым порядком, двухточечная аппроксимация со вторым порядком. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x,t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров $\tau, h$.

1.

$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $a > 0$,

$u(0,t) = 0$,

$u(1,t) = 0$,

$u(x,0) = \sin(2\pi x)$.

Аналитическое решение: $U(x,t) = \exp(-4\pi^2 at)\sin(2\pi x)$.

2.

$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $a > 0$,

$u(0,t) = 0$,

$u(1,t) = 1$,

$u(x,0) = x + \sin(\pi x)$.

Аналитическое решение: $U(x,t) = x + \exp(-\pi^2 at)\sin(\pi x)$

3.

$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $a > 0$,

$u(0,t) = \exp(-at)$,

$u(\pi,t) = -\exp(-at)$,

$u(x,0) = \cos x$.

Аналитическое решение: $U(x,t) = \exp(-at)\cos x$.

4.

$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $a > 0$,

$u_x(0,t) = \exp(-at)$,

$u_x(\pi,t) = -\exp(-at)$,

$u(x,0) = \sin x$.

Аналитическое решение: $U(x,t) = \exp(-at)\sin x$.

5.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sin(\pi x),$$
$$u(0,t)=0,$$
$$u(1,t)=0,$$
$$u(x,0)=0.$$

Аналитическое решение: $U(x,t)=\frac{1}{\pi^2}(1-\exp(-\pi^2 t))\sin(\pi x)$.

6.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\cos x(\cos t+\sin t),$$
$$u(0,t)=\sin t,$$
$$u_x(\frac{\pi}{2},t)=-\sin t,$$
$$u(x,0)=0,$$

Аналитическое решение: $U(x,t)=\sin t\cos x$ .

7.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+0{,}5\exp(-0{,}5t)\cos x,$$
$$u_x(0,t)=\exp(-0{,}5t),$$
$$u_x(\pi,t)=-\exp(-0{,}5t),$$
$$u(x,0)=\sin x,$$

Аналитическое решение: $U(x,t)=\exp(-0{,}5t)\sin x$ .

8.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+cu,\ \ a>0,\ \ c<0.$$
$$u_x(0,t)=\exp((c-a)t),$$
$$u(\frac{\pi}{2},t)=\exp((c-a)t),$$
$$u(x,0)=\sin x,$$

Аналитическое решение: $U(x,t)=\exp((c-a)t)\sin x$.

9.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial u}{\partial x},\ \ a>0,\ \ b>0.$$
$$u_x(0,t)-u(0,t)=-\exp(-at)(\cos(bt)+\sin(bt)),$$
$$u_x(\pi,t)-u(\pi,t)=\exp(-at)(\cos(bt)+\sin(bt)),$$
$$u(x,0)=\cos x,$$

Аналитическое решение: $U(x,t)=\exp(-at)\cos(x+bt)$ .

10.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial x} + cu,\ \ a > 0,\ \ b > 0,\ \ c < 0.$$

$u_x(0,t) + u(0,t) = \exp((c-a)t)(\cos(bt) + \sin(bt)),$

$u_x(\pi,t) + u(\pi,t) = -\exp((c-a)t)(\cos(bt) + \sin(bt)),$

$u(x,0) = \sin x$ .

Аналитическое решение: $U(x,t) = \exp((c-a)t)\sin(x+bt)$ .