3.5 EXERCICES SUR LE CHAPITRE 3

[3.1] Dans mon club de tennis il y a ceux qui ne changent pas souvent d'adversaires et ceux qui en changent sans arrêt. Démontrer qu'il y a au moins deux membres du club qui ont déjà joué contre le même nombre d'adversaires (différents).

[3.2] *Pour sa dernière exposition de New-York, Caroline D... a présenté 120 tableaux dont 64 étaient à vendre. Les tableaux étaient numérotés de 1 à 120, dans un ordre voulu par l'artiste. Pour je ne sais quelle raison Caroline ne voulait pas que deux tableaux vendables portent des numéros dont la différence est 7.*
Pourquoi ce désir ne fut-il pas satisfait ?

[3.3] Démontrer que si x et y sont deux entiers naturels, il en est de même de :

$$\frac{(x+y)(x+y+1)}{2}$$

Soit A l'ensemble des points du plan dont les deux coordonnées x et y sont des entiers naturels. Démontrer que l'application $f : A \to \mathbb{N}$ définie par :

$$f(x,y) = x + \frac{(x+y)(x+y+1)}{2}$$

est bijective (★ pour x et y petits, on inscrira sur du papier quadrillé la valeur de $f(x, y)$ à côté du point de coordonnées x et y ★).

[3.4] La lettre C désigne un carré de côté 1 et S un segment de longueur 1 (*fig. 3.2*).

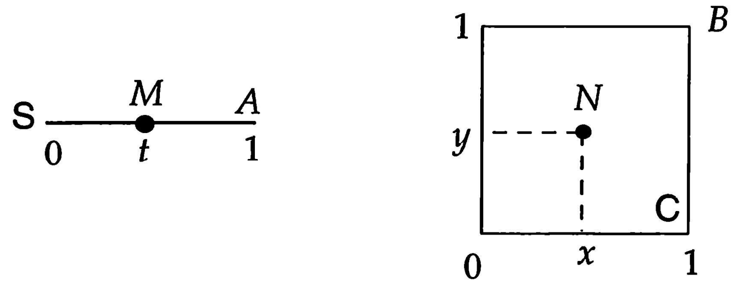

Figure 3.2

Un point M de S est repéré par son abscisse t, et un point N de C par ses coordonnées (x, y). On construit une application f : S $\to$ C de la façon suivante. D'abord on pose $f(A) = B$. Ensuite, si $M \in$ S a pour abscisse $t = 0, a_1a_2a_3\ldots$, on décide que $N = f(M)$ est le point d'abscisse $x = 0, a_1a_3a_5\ldots$ et d'ordonnée $y = 0, a_2a_4a_6\ldots$, étant entendu que, quand on rencontre un développement dont tous les chiffres sont égaux à 9 à partir d'un certain rang, on le modifie comme on a l'habitude de le faire avec les nombres réels (par exemple 0,059999... est transformé en 0,06).

1. Déterminer les images des points ayant pour abscisses :

$$0,1 \qquad 0,12 \qquad \frac{1}{9} \qquad \frac{5}{11} \qquad \frac{19}{99} \qquad \frac{26}{111}$$

2. Démontrer que l'image d'un point M dont l'abscisse t est rationnelle est un point N dont les deux coordonnées x et y sont rationnelles.

3. L'application f est-elle injective ? (★ on cherchera les images des points d'abscisses $\frac{1033}{3300}$ et $\frac{1003}{3300}$ ★).
4. L'application f est-elle surjective ?
5. Démontrer que S et C sont équipotents.

[3.5] Démontrer que l'ensemble des mots binaires est dénombrable.

[3.6] On note $E = \mathbb{B}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des *suites binaires* (les suites infinies de bits).

1. Est-ce que E est dénombrable ? (★ penser à l'argument diagonal de Cantor ★).

Soit A le sous-ensemble de E formé des suites binaires qui deviennent périodiques à partir d'un certain rang (une suite binaire σ devient périodique à partir du rang M s'il existe un entier P, la *période*, tel que $\sigma_{n+P} = \sigma_n$ quel que soit $n \geqslant M$, par exemple, avec $M = 3$, $P = 6$, on a la suite $11\,\underbrace{101000}\,\underbrace{101000}\,\underbrace{101000}\ldots$)

2. Est-ce que A est dénombrable ? (★ penser au développement binaire des nombres rationnels ★).

[3.7] Soient A, A', B, B' des ensembles. On suppose qu'il existe une bijection $f : A' \to A$, une injection $g : A \to B$, une bijection $h : B \to B'$.

1. Montrer qu'il existe alors une injection $k : A' \to B'$.
2. En déduire la deuxième affirmation du théorème 3.6.
3. En utilisant le résultat de l'exemple 1.23 et le résultat précédent, démontrer la première affirmation du théorème 3.6.

[3.8] Sachant que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, démontrer que $\mathbb{N}^n$ est dénombrable quel que soit n.

[3.9] Démontrer que l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.

[3.10] Démontrer que $\mathbb{Q}$, l'ensemble des nombres rationnels, est dénombrable.

[3.11] Démontrer que $E = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 1\}$ n'est pas dénombrable (★ ayant supposé que les éléments de cet ensemble ont été numérotés, on fabriquera un nouvel élément qui ne peut jamais porter le numéro k car il n'a pas le même k^e chiffre après la virgule que celui-ci ★). En déduire que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

[3.12] Démontrer que l'ensemble des parties *finies* de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

[3.13] Démontrer que le produit, la somme directe et la réunion de deux ensembles dénombrables sont dénombrables.

[3.14] On associe à tout couple (x, y) de $\mathbb{N}^2$ l'entier naturel $u = 2^y(2x+1) - 1$.

1. Lorsque $x = 5$ et $y = 3$ écrire x et u en base DEUX.
2. Dans le cas général quelle est l'écriture de u en base DEUX ?
3. En déduire que l'application qui associe u au couple (x, y) est une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$.