Chapitre 2

Constructions d'ensembles

Ici, nous verrons comment on peut construire des ensembles compliqués à partir d'ensembles plus simples. La notion de produit d'ensembles permet de donner une interprétation mathématique à de nombreuses situations concrètes. D'une certaine façon, elle est le point de départ de l'étude des bases de données.

MOTS-CLÉS : produit - diagramme cartésien - couple - triplet - n-uple - fonction de plusieurs variables - famille d'ensembles - puissances d'un ensemble - paire d'éléments - réunion - union - intersection - ensembles disjoints - somme disjointe.

2.1 PRODUIT D'ENSEMBLES

2.1.1 À partir de deux ensembles A et B, on peut toujours construire un nouvel ensemble qu'on appelle le ***produit*** de A par B ; on le note $A \times B$ et ses éléments sont les ***couples*** (a, b) formés en prenant de toutes les façons possibles un élément a dans A et un élément b dans B.

***Exemple* 2.1 :** Avec $A = \{Z, T\}$ et $B = \{1, 2, 3\}$, les éléments de $A \times B$ sont les 6 couples :

$$(Z,1) \qquad (Z,2) \qquad (Z,3) \qquad (T,1) \qquad (T,2) \qquad (T,3)$$

alors que les éléments de $B \times A$ sont :

$$(1,Z) \qquad (2,Z) \qquad (3,Z) \qquad (1,T) \qquad (2,T) \qquad (3,T)$$

Cet exemple montre comment former la liste des éléments de $A \times B$ quand A et B sont définis en extension. La méthode est générale, le produit de deux ensembles définis en extension peut toujours être défini en extension.

Lorsqu'on fait l'inventaire des couples, on a parfois intérêt à ne pas les disposer à la suite, l'un derrière l'autre. Souvent, il vaut mieux les ranger de façon que deux couples *qui se ressemblent* se retrouvent l'un à côté de l'autre. Pour cela, on représente $A \times B$ au moyen de son ***diagramme cartésien***. Il s'agit d'un rectangle découpé en cases qui correspondent chacune à un couple (*fig. 2.1*). Chaque ligne du rectangle correspond à un élément de A car on y trouve tous les couples ayant cet élément pour première composante, et chaque colonne correspond à un élément de B car on y trouve tous les couples ayant cet élément pour deuxième composante.

***Exemple* 2.2** : Pour les ensembles A et B de l'exemple 2.1, la figure 2.1 représente le diagramme cartésien de $A \times B$ et la figure 2.2 celui de $B \times A$.

$(Z,1)$	$(Z,2)$	$(Z,3)$
$(T,1)$	$(T,2)$	$(T,3)$

Figure 2.1

$(1,Z)$	$(1,T)$
$(2,Z)$	$(2,T)$
$(3,Z)$	$(2,T)$

Figure 2.2

Souvent on se contente d'indiquer autour du rectangle les éléments de A et de B qui correspondent aux lignes et aux colonnes (*fig. 2.3 et 2.4*), ce qui évite d'écrire le nom des couples dans les cases ; c'est d'ailleurs la méthode employée avec les coordonnées cartésiennes, d'où le mot *cartésien*.

	1	2	3
Z			
T			

Figure 2.3

	Z	T
1		
2		
3		

Figure 2.4

Remarque : L'ordre dans lequel on range les éléments de A et de B détermine la position des couples dans le diagramme, si l'on change cet ordre, le diagramme n'est plus le même.

2.1.2 La notion de produit s'étend à un nombre quelconque d'ensembles. En effet, on peut construire le produit $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ de n ensembles $E_1, E_2, \dots, E_n$. Les éléments $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de ce produit s'appellent des ***n-uples***[1]. Ils sont obtenus en prenant de toutes les façons possibles un élément e_1 dans E_1, qui sera la ***première composante*** du n-uple, un élément e_2 dans E_2, qui sera la ***deuxième composante***, et ainsi de suite, jusqu'à e_n, sa n^e composante.

Quand $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, ... , $u_n = v_n$ les deux n-uples $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ et $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ sont *égaux* ; on écrit $u = v$. Par conséquent, écrire l'égalité de deux n-uples est une façon abrégée d'écrire n égalités.

D'un point de vue concret, construire un n-uple c'est choisir un premier objet dans un premier ensemble, un deuxième objet dans un deuxième ensemble, etc., jusqu'au

[1] À la place de 2-uple et 3-uple on préfère dire ***couple*** et ***triplet***.

n^e objet dans le n^e ensemble. C'est une situation très commune et, sans le savoir, on rencontre beaucoup de n-uples dans la vie de tous les jours !

***Exemple* 2.3 :** La figure 2.5 représente la carte proposée, aujourd'hui, au restaurant du CNAM ; composer son menu consiste à choisir une entrée, un plat principal, un légume et un dessert. Si l'on note $\mathcal{E}$ l'ensemble des entrées, $\mathcal{P}$ l'ensemble des plats principaux, $\mathcal{L}$ l'ensemble des légumes, et $\mathcal{D}$ l'ensemble des desserts, chaque menu, par exemple (Carottes râpées, Poisson frit, Épinards, Pomme), est un élément de $\mathcal{E} \times \mathcal{P} \times \mathcal{L} \times \mathcal{D}$.

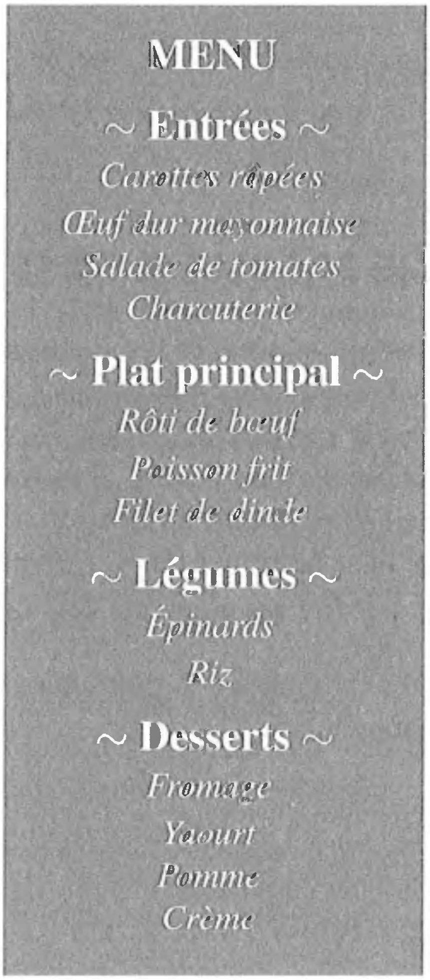

Figure 2.5

2.1.3 On peut se demander si la multiplication des ensembles a des propriétés analogues à celle des nombres.

Dans l'exemple 2.1 chaque élément de $A \times B$ est constitué d'une lettre et d'un chiffre, tandis que chaque élément de $B \times A$ est constitué d'un chiffre et d'une lettre, ce qui n'est pas la même chose. D'une façon générale, quand les ensembles A et B ne sont pas égaux, les deux produits $A \times B$ et $B \times A$ ne le sont pas non plus ; le produit des ensembles n'est donc pas *commutatif.* Cependant les deux produits se ressemblent beaucoup et il est toujours possible de les mettre en correspondance bijective, la bijection la plus naturelle, qu'on appelle la ***bijection canonique*** de $A \times B$ vers $B \times A$, étant celle qui associe le couple (b, a) au couple (a, b).

Après la commutativité on peut s'intéresser à l'*associativité* du produit en se demandant, quand trois ensembles A, B et C sont donnés, si les produits $A \times B \times C$ et $(A \times B) \times C$ sont toujours égaux. Il est clair que cela n'arrive jamais, car un élément de $A \times B \times C$ est un triplet, alors qu'un élément de $(A \times B) \times C$ est un couple, dont la première composante est elle-même un couple, ce qui, formellement, n'est pas pareil. Toutefois il existe toujours des bijections entre $A \times B \times C$ et $(A \times B) \times C$, la plus naturelle étant celle qui associe le couple $\big((a,b),c\big)$ au triplet (a,b,c) ; on l'appelle la ***bijection canonique*** de $A \times B \times C$ vers $(A \times B) \times C$.

2.1.4 Considérons trois ensembles A, B et C. Une fonction $f : B \times C \longrightarrow A$ associe au couple (b,c) un élément a de A ; pour simplifier, on le note $f(b,c)$ au lieu de $f\big((b,c)\big)$. Lorsque b et c varient, a varie lui aussi, et on dit que f est une ***fonction de 2 variables***.

D'une façon générale, si A et $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont des ensembles, un élément f de $A^{E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n}$ s'appelle une ***fonction de n variables***. L'élément de A associé par f au n-uple $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est noté $f(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ au lieu de $f\big((e_1, e_2, \ldots, e_n)\big)$.

2.2 PRODUIT D'UNE FAMILLE D'ENSEMBLES

2.2.1 Jusqu'ici nous n'avions qu'un nombre fini d'ensembles, mais on peut aussi construire des produits infinis ; voici quelques indications sur la marche à suivre.

Considérons un ensemble I appelé ensemble des ***indices***. En associant à chaque élément i de I un ensemble E_i on obtient ce qu'on appelle une ***famille*** d'ensembles indexée par I ; on note $(E_i)_{i \in I}$ cette famille.

À partir de $(E_i)_{i \in I}$ on peut fabriquer un nouvel ensemble qu'on appelle le ***produit*** de la famille. On le note $\prod_{i \in I} E_i$; ses éléments sont la généralisation des n-uples, ils sont formés de composantes ; il y en a une pour chaque valeur de l'indice i, choisie dans l'ensemble E_i correspondant.

***Exemple* 2.4 :**
En associant à chaque entier naturel $n \geqslant 1$ l'ensemble $\mathbb{B}^n$ des mots binaires de longueur n on construit une famille d'ensembles indexée par $\mathbb{N}^{\times}$. Le produit de cette famille a pour éléments les suites infinies constituées d'un mot de longueur 1, un mot de longueur 2, etc., par exemple : $(1, 01, 110, 1101, 00111, \ldots)$.

La notion de produit d'une famille d'ensembles généralise celle de produit de n ensembles. En effet, si $I = \mathbb{N}_n^{\times}$, une famille indexée par I c'est n ensembles $E_1, \ldots$, E_n et le produit de la famille est bien le produit de ces n ensembles. Elle sert aussi à construire le produit de plusieurs ensembles qui n'ont pas été numérotés mais qui sont indexés au moyen d'un ensemble particulier d'indices.

***Exemple* 2.5 :** Dans un jeu de 52 cartes examinons en quoi consiste la donnée d'un cœur, d'un pique, d'un trèfle ou d'un carreau. Prenons comme ensemble d'indices $\{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit\}$ et associons à chaque indice l'ensemble des cartes de la couleur correspondante[1]. Alors se donner une carte de chaque couleur c'est se donner un élément du produit des ensembles de la famille.

Enfin, quand $I = \mathbb{N}^{\times}$, comme dans l'exemple 2.4, ou plus généralement quand I est infini, la notion de produit d'une famille d'ensembles permet de construire le produit d'une infinité d'ensembles.

[1] Dans les jeux de cartes, contrairement à ce qu'on pourrait penser, le mot *couleur* ne désigne pas *rouge* ou *noir*, mais ***cœur***, ***pique***, ***trèfle*** ou ***carreau***.

2.2.2 Lorsqu'on veut faire le produit de n ensembles, et que l'un d'eux est vide, il devient impossible de construire des n-uples. On voit donc qu'un produit fini d'ensembles est vide dès qu'un de ces ensembles est vide. Cette remarque a même une portée beaucoup plus générale : le produit des ensembles d'une famille quelconque est vide dès qu'un des ensembles de la famille est vide. Toutefois, ce qui est important, c'est que la réciproque est vraie ; on l'énonce de la façon suivante.

Axiome du choix
Un produit d'ensembles non vides est non vide.

Le mot *choix*, dans le nom donné à cette propriété, mérite une explication. Si l'on a une famille d'ensembles non vides, choisir l'un après l'autre un élément dans chacun d'eux c'est la même chose que construire un élément de leur produit. Alors, plutôt que de choisir ces éléments un par un sans savoir si l'on arrivera au bout, l'axiome du choix nous dit qu'on a la possibilité de les choisir tous d'un seul coup, en choisissant un élément du produit dont on prendra ensuite les composantes.

***Exemple* 2.6 :** Nous allons appliquer l'axiome du choix pour montrer que s'il existe une surjection $f : A \longrightarrow B$ alors il existe une injection $g : B \longrightarrow A$.
À tout élément b de B on associe $A_b = \{a \in A \mid f(a) = b\}$. Puisque ces ensembles ne sont pas vides, parce que f est surjective, l'axiome du choix dit que $\prod\limits_{b \in B} A_b$ n'est pas vide. On peut donc choisir un élément dans chaque A_b qu'on note $g(b)$, ce qui donne une application $g : B \longrightarrow A$; on vérifie facilement que g est injective.

L'idée contenue dans l'axiome du choix, qui paraît évidente quand on n'a qu'un nombre fini d'ensembles, est loin de l'être quand il y en a une infinité. En effet il n'est pas clair qu'en choisissant une à une les composantes d'un élément du produit on puisse aller jusqu'au bout, et les choisir toutes. On a cherché en vain une démonstration de cette propriété mais on a seulement démontré qu'elle est équivalente à d'autres propriétés d'apparence bien différente. On a démontré aussi qu'on pourrait tout aussi bien admettre son contraire, sans pour autant se heurter à des contradictions. C'est pourquoi on la qualifie d'*axiome*, c'est-à-dire de vérité admise.

2.3 PUISSANCES D'UN ENSEMBLE

2.3.1 Quand les ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont tous égaux à un même ensemble E, au lieu de noter $E \times E \times \cdots \times E$ leur produit, on préfère écrire E^n, comme on le ferait si E était un nombre ; d'ailleurs E^n s'appelle la ***puissance n^e*** de E.

***Exemple* 2.7 :** La notation $\mathbb{N}^2$ désigne l'ensemble des couples (m, n), où m et n sont deux entiers naturels quelconques.

Parce que le produit des ensembles n'est pas associatif, on ne peut pas écrire l'égalité $E^n \times E^m = E^{n+m}$. Toutefois les ensembles $E^n \times E^m$ et E^{n+m} se ressemblent car il existe entre eux une bijection canonique qu'on laisse, au lecteur, le soin de définir.
Mise en garde : Il ne faut pas confondre le couple (a, b), qui est un élément de E^2, avec la partie $\{a, b\} \subset E$, qui possède pour éléments a et b. Dans la partie $\{a, b\}$ les éléments a et b sont *en vrac*, dans le couple (a, b) ils sont *rangés* dans un ordre

bien précis : a est le premier élément, b le second ; d'ailleurs si a est différent de b, le couple (a, b) n'est pas égal au couple (b, a) alors que les parties $\{a, b\}$ et $\{b, a\}$ sont les mêmes. Pour désigner un paquet de deux éléments qui ne sont pas rangés, on emploie le mot ***paire*** ; on dira donc « la paire $\{a, b\}$ » et « le couple (a, b) ». Finalement, un couple c'est une paire ordonnée.

Cette mise en garde s'applique aux n-uples de n'importe quelle taille : un n-uple c'est n éléments distincts ou non, rangés dans un certain ordre, alors qu'une partie ce sont des éléments en vrac.

2.3.2 Si nous avons annoncé, au paragraphe 1.4.5, que $E^{\mathbb{N}_n^\times}$, l'ensemble des suites de longueur n d'éléments de E, est noté E^n, comme la puissance n^e de E, c'est parce qu'un n-uple $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ peut s'interpréter comme une suite d'éléments de E de longueur n.

Plus généralement, considérons à présent une famille $(E_i)_{i\in I}$ dont tous les ensembles E_i sont égaux à un même ensemble E. Dans ces conditions, un élément e du produit $\prod_{i\in I} E_i$ n'est rien d'autre qu'une collection d'éléments e_i, indexés par I, et qui sont tous dans E. Si l'on fixe e, il lui correspond une application $f_e : I \longrightarrow E$ qui associe à chaque $i \in I$ la composante e_i de e. Réciproquement, si l'on a une application de I vers E qui associe à chaque $i \in I$ un certain élément e_i de E, nous pouvons interpréter les e_i comme les composantes d'un élément du produit.

En conclusion, si l'on a une famille $(E_i)_{i\in I}$ dont tous les ensembles E_i sont égaux à un même ensemble E, le produit $\prod_{i\in I} E_i$ peut être identifié à E^I, l'ensemble des applications de I vers E.

2.4 RÉUNION, INTERSECTION, SOMME DISJOINTE

2.4.1 Quand on a n ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$ on peut construire leur ***réunion*** (on dit aussi leur ***union***) qu'on note $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n$. Cet ensemble a pour éléments les éléments qui sont dans un, au moins, des E_i. Autrement dit, $x \in E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n$ si et seulement si il existe i tel que $x \in E_i$.

***Exemple* 2.8 :** Si $E_i = \mathbb{B}^i$, alors $E_0 \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3$ est l'ensemble des mots binaires de longueur inférieure ou égale à 3.

La réunion est une opération *commutative* :

$$A \cup B = B \cup A \tag{2.1}$$

elle est *associative* :

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C \tag{2.2}$$

$\varnothing$ est son *élément neutre* :

$$A \cup \varnothing = A \tag{2.3}$$

elle est *idempotente* :

$$A \cup A = A \tag{2.4}$$

Il faut aussi remarquer que $A \subset B$ si et seulement si $A \cup B = B$.

On peut généraliser la notion de réunion à une famille quelconque d'ensembles. Nous admettrons qu'à toute famille $(E_i)_{i\in I}$ est associé un ensemble, qu'on note $\bigcup_{i\in I} E_i$ et qu'on appelle la ***réunion*** (ou l'***union***) des E_i ; ses éléments sont tous les éléments qui figurent dans un, au moins, des E_i ; autrement dit $x \in \bigcup_{i\in I} E_i$ si et seulement si il existe $i \in I$ tel que $x \in E_i$. Chaque E_i est une partie de la réunion.

***Exemple* 2.9 :** Comme dans l'exemple précédent, on définit une famille d'ensembles indexés par $\mathbb{N}$ en posant $E_i = \mathbb{B}^i$. Alors la réunion des E_i est l'ensemble de tous les mots binaires sans distinction de taille ; on le note traditionnellement $\mathbb{B}^*$.

2.4.2 Quand on a des ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$ on peut construire leur ***intersection*** qu'on note $E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n$. C'est l'ensemble qui a pour éléments les éléments qui appartiennent à tous les E_i. Autrement dit $x \in E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n$ si et seulement si $x \in E_i$ quel que soit i.

***Exemple* 2.10 :** Si E_1 est l'ensemble des entiers naturels pairs, et E_2 l'ensembles des entiers naturels multiples de 3, alors $E_1 \cap E_2$ est l'ensemble des entiers naturels multiples de 6.

L'intersection est une opération *commutative* :

$$A \cap B = B \cap A \tag{2.5}$$

elle est *associative* :

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C \tag{2.6}$$

$\varnothing$ est son élément *absorbant* :

$$A \cap \varnothing = \varnothing \tag{2.7}$$

elle est *idempotente* :

$$A \cap A = A \tag{2.8}$$

Il faut aussi remarquer que $A \subset B$ si et seulement si $A \cap B = A$.
On peut généraliser la notion d'intersection à une famille quelconque d'ensembles. Nous admettrons donc qu'à toute famille $(E_i)_{i\in I}$ on peut associer un ensemble, qu'on note $\bigcap_{i\in I} E_i$ et qu'on appelle l'***intersection*** des E_i ; ses éléments sont tous les éléments communs aux E_i ; autrement dit $x \in \bigcap_{i\in I} E_i$ si et seulement si $x \in E_i$ quel que soit $i \in I$. L'intersection est une partie de chacun des E_i.

***Exemple* 2.11 :** Définissons une famille d'ensembles indexée par $\mathbb{N}^\times$ en notant E_i le sous-ensemble de $\mathbb{N}$ formé des multiples de i. Alors l'intersection des E_i contient 0 pour seul élément.

On dit que deux ensembles sont ***disjoints*** quand leur intersection est l'ensemble vide. On dit que n ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont ***disjoints 2 à 2*** quand $E_i \cap E_j = \varnothing$ quels que soient i et j avec $i \neq j$.

2.4.3 Quand on fait la réunion de deux ensembles E_1 et E_2, il arrive qu'on ait besoin de ne pas mélanger leurs éléments, autrement dit de compter deux fois les éléments communs à E_1 et E_2.

***Exemple* 2.12 :** Si $E_1 = \{1,2,3\}$ et $E_2 = \{3,4,5\}$ on a $E_1 \cup E_2 = \{1,2,3,4,5\}$ mais on voudrait un ensemble du type $\{1,2,\mathbf{3},3,4,5\}$, avec deux éléments 3 différents.

Un tel ensemble, une sorte de réunion qui ne mélange pas les éléments de E_1 et E_2, existe ; il s'appelle la ***somme disjointe*** de E_1 et E_2 et on le note $E_1 \coprod E_2$.
Il y a plusieurs façons de le construire ; les ensembles obtenus dépendent du mode de construction, mais sont tous en bijection. L'idée est toujours la même : on fabrique un ensemble F_1 en bijection avec E_1 et un ensemble F_2 en bijection avec E_2 de sorte que F_1 et F_2 soient disjoints, après quoi, on prend pour $E_1 \coprod E_2$ leur réunion. En suivant cette idée, on peut par exemple décider que $E_1 \coprod E_2$ est la partie de $\mathbb{B} \times (E_1 \cup E_2)$, réunion de F_1, l'ensemble des couples $(0, e_1)$, avec e_1 quelconque dans E_1, et de F_2, l'ensemble des couples $(1, e_2)$, avec e_2 quelconque dans E_2.

***Exemple* 2.13 :** Si l'on reprend les ensembles de l'exemple 2.12, ce qui vient d'être dit donne pour F_1 l'ensemble des couples $\{(0,1),(0,2),(0,3)\}$ et pour F_2 l'ensemble de couples $\{(1,3),(1,4),(1,5)\}$; par conséquent $E_1 \coprod E_2$ apparaît comme l'ensemble de couples $\{(0,1),(0,2),(0,3),(1,3),(1,4),(1,5)\}$.

En remplaçant $\mathbb{B}$ par un ensemble plus gros, cette méthode permet de construire la somme disjointe d'un nombre quelconque d'ensembles et plus généralement d'une famille d'ensembles.

2.5 EXERCICES SUR LE CHAPITRE 2

[2.1] Donner des exemples de produit d'ensembles dans l'esprit de l'exemple 2.3.

[2.2] Dans chacun des cas suivants faire la *réunion* des ensembles A et B.

1. $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ impair}\}$ $\quad B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ pas divisible par } 3\}$
2. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 3\}$ $\quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leqslant 1\}$
3. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leqslant 2\}$ $\quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < 3x - y\}$

[2.3] Dans chacun des cas suivants faire l'*intersection* des ensembles A et B.

1. $A =$ l'ensemble des rectangles $\quad B =$ l'ensemble des losanges
2. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 3\}$ $\quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leqslant 1\}$
3. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leqslant 1\}$ $\quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < 3x - y\}$

[2.4] On se donne 3 ensembles A, B, C tels que $A \cap B \cap C = \varnothing$. Sont-ils obligatoirement disjoints 2 à 2 ? Donner des exemples.

[2.5] À tout nombre réel a on associe $E_a = \{x \in \mathbb{R} \mid (1 - a^2) \leqslant x \leqslant (1 + a^2)\}$, ce qui donne une famille d'ensembles indexée par $\mathbb{R}$. Déterminer la réunion et l'intersection des ensembles de la famille.

[2.6] Dans chacun des cas suivants dire s'il existe une injection d'un ensemble dans l'autre (★ on pourra s'aider par des exemples ★).

1. $A = \wp(E \times F)$ $\quad B = \wp(E) \times \wp(F)$

2. $A = \wp\left(\prod_{i\in I} E_i\right)$ $\quad B = \prod_{i\in I} \wp(E_i)$
3. $A = \wp(E \cup F)$ $\quad B = \wp(E) \cup \wp(F)$
4. $A = \wp\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right)$ $\quad B = \bigcup_{i\in I} \wp(E_i)$
5. $A = \wp(E \cap F)$ $\quad B = \wp(E) \cap \wp(F)$
6. $A = \wp\left(\bigcap_{i\in I} E_i\right)$ $\quad B = \bigcap_{i\in I} \wp(E_i)$

[2.7] On se donne 3 ensembles E, F, G. Dans chacun des cas suivants déterminer si les ensembles A et B sont égaux (★ on pourra s'aider par des exemples ★).

1. $A = E \times (F \cup G)$ $\quad B = (E \times F) \cup (E \times G)$
2. $A = E \times \left(\bigcup_{i\in I} E_i\right)$ $\quad B = \bigcup_{i\in I} (E \times E_i)$
3. $A = E \times (F \cap G)$ $\quad B = (E \times F) \cap (E \times G)$
4. $A = E \times \left(\bigcap_{i\in I} E_i\right)$ $\quad B = \bigcap_{i\in I} (E \times E_i)$
5. $A = E \cap (F \cup G)$ $\quad B = (E \cap F) \cup (E \cap G)$
6. $A = E \cap \left(\bigcup_{i\in I} E_i\right)$ $\quad B = \bigcup_{i\in I} (E \cap E_i)$
7. $A = E \cup (F \cap G)$ $\quad B = (E \cup F) \cap (E \cup G)$
8. $A = E \cup \left(\bigcap_{i\in I} E_i\right)$ $\quad B = \bigcap_{i\in I} (E \cup E_i)$
9. $A = E \cap (F \times G)$ $\quad B = (E \cap F) \times (E \cap G)$
10. $A = E \cap \left(\prod_{i\in I} E_i\right)$ $\quad B = \prod_{i\in I} (E \cap E_i)$
11. $A = E \cup (F \times G)$ $\quad B = (E \cup F) \times (E \cup G)$
12. $A = E \cup \left(\prod_{i\in I} E_i\right)$ $\quad B = \prod_{i\in I} (E \cup E_i)$

[2.8] Les lettres E, F, G désignent trois ensembles. Chaque fois que c'est possible, fabriquer une bijection entre les ensembles A et B.

1. $A = F^E \times G^E$ $\quad B = (F \times G)^E$
2. $A = E^F \times E^G$ $\quad B = E^{(F \coprod G)}$
3. $A = E \times (F \coprod G)$ $\quad B = (E \times F) \coprod (E \times G)$
4. $A = \wp(E \coprod F)$ $\quad B = \wp(E) \times \wp(F)$

[2.9] Les lettres E, F, G désignent 3 ensembles. Un élément de $E^{F\times G}$ est une application f qui associe à tout couple (x, y) de $F \times G$ un élément z de E. On garde y fixé et on associe $f(x, y)$ à x, ce qui donne une application $f_y : F \to E$. Enfin on note $\varphi : G \to E^F$ l'application qui associe f_y à y.

1. Montrer que φ est injective si f est injective. La réciproque est-elle vraie ?
2. Est-ce que φ est surjective si f est surjective ?
3. On note $\lambda : E^{F\times G} \to (E^F)^G$ l'application qui associe φ à f. Démontrer que λ est bijective.

[2.10] Soient E un ensemble et $\mathcal{U}$ une partie non vide fixée de E. À toute partie A de E on associe $A \cap \mathcal{U}$, ce qui définit une application $f : \wp(E) \to \wp(\mathcal{U})$.

1. L'application f est-elle surjective ?
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit injective.

[2.11] Soit E un ensemble. On considère $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux parties non vides fixées de E. À toute partie A de E on associe le couple $(A \cap \mathcal{U}, A \cap \mathcal{V})$, ce qui définit une application $f : \wp(E) \to \wp(\mathcal{U}) \times \wp(\mathcal{V})$.

1. L'application f est-elle surjective ?
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit injective.
3. Quand f est bijective quelle est son application réciproque ?