

I. SKÁLAINVARIANCIA ÉS UNIVERZALITÁSOK

Skálainvariancia a világ jelenségei között gyakran megfigyelhető, nemcsak a fizikában, hanem más természettudományokban, sőt a társadalmi jelenségeknél is. Erre egyszerű példa az emlős állatok fajlagos teljesítmény leadásának testtömegtől való $1/4$ hatványkitevős függése, amely 5 nagyságrenden keresztül teljesül (ábra 1). Ezt egyszerű geometriai átskálázással nem lehet megmagyarázni. Feltéve ugyanis, hogy a testfelszín (amely a disszipált energiával arányos) a mérettel L^2 -esen, a tömeg pedig $M \sim L^3$ módon növekszik, a fajlagos disszipált teljesítménynek $M^{2/3}/M = M^{-1/3}$, egyharmados kitevőjű skálázást kellene követnie. Azonban az élőlények nem struktúra nélküli szabályos geometriai alakzatok, így az $M^{1/4}$ -es skálafüggvényt az önhasonló, elágazó, fraktál jellegű belső keringési rendszerekkel lehet megmagyarázni. Megjegyezzük, hogy önhasonló (skálamentes) hálózatokat sok más helyen fedeztek fel az utóbbi években és ezáltal nemtriviális hatványfüggvény viselkedések leírása valósulhatott meg (például az internetes adatforgalomban).

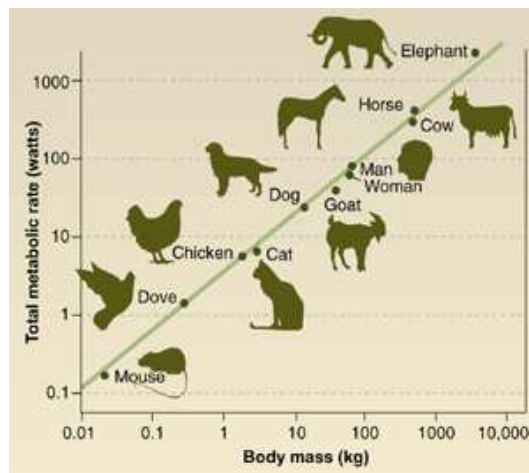


FIG. 1: Az emlős állatok megfigyelt teljesítmény kibocsátása a testtömeg függvényében nemtriviális, "egyedegyed" skálátörvénnyel írható le.

Az átskálázási invariancia természetes módon jelenik meg másodrendű fázisátalakulásoknál, mert ilyenkor a korrelációs hossz divergenciája miatt a mikroszkópikus részletek (kölsönhatások) nem tudják befolyásolni a globális viselkedést. Ilyenkor a vizsgált anyag ugyanazt a tulajdonságot mutatja különböző skálákon (nagyításokon) ¹. Ezért a skálainvarianciát először az egyensúlyi rendszerek kritikus pontjai környékén sikerült jól leírni a statisztikus fizika módszereivel, elsősorban a renormalizációs csoport elmélettel. Az átskálázási invariancia esetén a sok szabadságfokú egyensúlyi rendszerek (illetve az ezeket leíró modellek) pusztán a kollektív viselkedés alapján univerzálitási osztályokba sorolhatóak. Az osztályok jellemezhetőek (vagy definiálhatóak) pl. a skálafüggvények exponensei által, amelyek között a szimmetriák bizonyos skálátörvényeket rögzítenek. Ezáltal a skálázó mennyiségek exponenseinek egy jelentős része nem független ².

Mitöbb, a 2 dimenziós átskálázható modellek egy része még általánosabb, lokális skálainvarianciát is mutat; a komplex analitikus függvények konformális leképezése szerint. Ez annyira erős szimmetria, hogy a konform invariáns modellek összes n -pont korrelációs függvényét rögzíti. A sikereken felbuzdulva remény volt ezen elvek nemegyensúlyra

¹ legalábbis egy bizonyos skála tartományban, a mikroszkópikus egység (pl. rácscellák) és a rendszerméret között

² Egyszerű egyensúlyi modellek esetében 2 független kritikus exponens rendelhető egy univerzálitási osztályhoz. A nemegyensúlyi modelleknel az időtükrözési szimmetria (1) sértése miatt ennél többre van szükség.

való kiterjesztésére, azonban hamar kiderült, hogy itt más tényezők is fontos szerephez jutnak. Ennek illusztrálására néhány olyan példát említek, amelynek kutatásában személyesen is részt vettem.

II. NEMEGYENSÚLYI RENDSZEREK

Az egyensúlyi rendszerek statisztikus fizikájában megtanultuk, hogy az univerzalitási osztályokat olyan globális tulajdonságok határozzák meg, mint a térbeli dimenziók vagy a szimmetriák. A való élet jelenségei azonban többnyire nemegyensúlyiak, ugyanakkor skálaviselkedéseket gyakran mutatnak. Ezért felmerült a renormalizációs csoport és univerzalitások elméletének kiterjesztése. Kezdetben egyensúlyból kibillentett egyszerű modellek dinamikáit vizsgálták. Ilyen például az egyensúlyi Ising modell, melyben a fel (\uparrow) vagy le (\downarrow) állapotot felvevő klasszikus 'spin' változók legközelebbi szomszéd vonzó kölcsönhatással bírnak. Ez egy erősen anizotróp mágneset ír le, melyben a hőmérsékletet változtatva folytonos fázisátmenet jön létre egy rendezetlen (paramágneses) és egy rendezett (ferromágneses) állapot között. A modell különböző dinamikákkal való kiterjesztései az ún kinetikus Ising modellek.

Később külső terekkel hajtott, teljesen nemegyensúlyi modelleket kezdtek el kutatni. Ilyen rendszerekben áramlások jönnek létre, és még egy stacionárius állapot sem biztosított. Az egy-dimenziós modellek mint pl. az ún anizotróp kizárási folyamat (ASEP), melyben részecskék (A), anizotróp diffúziós mozgást végeznek úgy, hogy egy helyen legfeljebb egy lehet ($A\emptyset \rightarrow \emptyset A$) gyakran analitikusan is kezelhetőek. Ezzel szemben több térbeli dimenzió esetén, mint pl. az ún. hajtott rácsvezetőkben, napjainkig sem tisztázott problémák merültek fel. Ezek a modellek a spin-cserés ($\uparrow\downarrow \leftrightarrow \downarrow\uparrow$) kinetikus Ising modell olyan anizotróp változatai, amelyekben egy külső (pl.) elektromos tér (spin) áramokat és nemegyensúlyi viselkedést generál. Az alapvető probléma abból ered, hogy a tér-idő anizotrópiája mellett a tér különböző irányai is másként skálázódnak (anizotrópák) ilyen modellekben.

Valamivel egyszerűbb és jobban megértett az ún. "abszorbeáló" rendezett állapottal rendelkező nemegyensúlyi rendszerek viselkedése. Ilyen pl. a kontakt folyamat, amely az immunizáció nélküli betegség terjedés legegyszerűbb modellje. Kémia jelöléssel leírva ez a következő. Egy beteg egyed (A) σ valószínűséggel meg tudja fertőzni a szomszédját: $A \xrightarrow{\sigma} 2A$, aki viszont spontán meg tud gyógyulni: $A \rightarrow \emptyset$. Ha σ nagy, akkor a beteg egyedek koncentrációja (c_A) véges ('aktív' állapot). Ellenkező esetben $c_A = 0$ és az összes beteg el is tud tűnni a rendszerből ("abszorbeáló" állapot). Az aktív és abszorbeáló állapotok fázisátmeneti határán σ -t csökkentve c_A folytonosan tűnik el, a korrelációs hossz divergál, és kritikus, ún. irányított perkolációs univerzalitású skálaviselkedést tapasztalhatunk.

Áltános esetben az abszorbeáló állapotban a lehetséges fluktuációk annyira gyengék, hogy innen a rendszer véletlenszerűen nem tud átmenni egy rendezetlen, aktív állapotba. Ilyen rendszerek a $p(\alpha)$, $p(\beta)$ valószínűségű állapotok közötti részletes egyensúlyt

$$w_{\alpha \rightarrow \beta} p(\alpha) = w_{\beta \rightarrow \alpha} p(\beta) \quad (1)$$

sértő ($w_{\alpha \rightarrow \beta}$) átmeneti valószínűségekkel vannak definiálva. Ha fenti időtükrözési invariancia teljesül, akkor a rendszer egyensúlyi valószínűség eloszlással is rendelkezik és termodinamikai potenciálokkal jellemezhető. A nemegyensúlyi rendszerek esetében (mint például a hajtott, vagy az abszorbeáló állapotoknál) azonban általában nem lehetséges a hagyományos szabadenergia definíciója. Térelméleti leíráshoz egy nem kommutáló ún. "válaszfüggvény térre" is szükség van, amely a rendparaméter térhez konjugált külső perturbációra adott nemtriviális reakciót írja le. Azonban a mester egyenletből

$$\frac{dp(\alpha; t)}{dt} = \sum_{\beta} w_{\beta \rightarrow \alpha} p(\beta; t) - \sum_{\beta} w_{\alpha \rightarrow \beta} p(\alpha; t) , \quad (2)$$

levezethető időfejllesztő operátor (H), amely a részecske betöltöttségek Fock terén definiált ($\Psi(t) = \sum_{\alpha} p(n_1, n_2, \dots; t) c_1^{n_1} c_2^{n_2} \dots |0 \rangle$) állapotokra hat

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = -H\Psi(t) \quad (3)$$

nem lesz önadjungált, mint egyensúly esetén (itt $|0 \rangle$ az abszorbeáló állapotot, c_i részecske keltő operátort, $p(n_1, n_2, \dots; t)$ betöltöttség számot jelöl). Például egy annihiláló, véletlen bolyongás (ARW) esetén ($2A \rightarrow \emptyset$, $A\emptyset \xrightarrow{D} \emptyset A$ ez egy diffúziós és egy reakciós tagból áll

$$H = H_D + H_R = D \sum_{ij} (c_i - c_j)(a_i - a_j) - \lambda \sum_j (a_j^2 - c_j^2 a_j^2) , \quad (4)$$

ahol a_i az i helyen részecskét eltüntető operátor. Kontinuum limeszben ez

$$H = \int d^d x [D(\nabla\psi)(\nabla\phi) - \lambda(\phi^2 - \psi^2\phi^2)] , \quad (5)$$

a folytonos $\phi(x,t)$ terekkel, és $\psi(x,t)$ válasz terekkel leírt térelméletet definiálja. A nemegyensúlyi térelmélet megoldása nehezebb, mint az egyensúly esetén és a renormalizációs csoport analízis gyakran súlyos problémákba ütközik.

A fázisátalakuláskor, a hosszútávú korrelációk miatt a fluktuációk is fel tudnak erősödni és alacsonyabb dimenziókban, relevánssá tudnak válni. Ez azt jelenti, hogy egy átlagtér jellegű, hagyományos differenciálegyenlet nem tudja leírni az ilyen rendszer viselkedését. Azt a küszöbdimenziót, ami felett a fluktuációk már nem tudják befolyásolni a skálaviselkedést felső kritikus dimenzióknak (d_c) nevezzük. Míg az átlagtér megoldás általában egzaktul megadható, a d_c alatti rendszerek skálaviselkedése dimenziófüggő és sokkal változatosabb. Ugyanakkor a d_c alatti rendszerek analitikus megoldása sokkal nehezebb, gyakran csak valamilyen numerikus közelítés, vagy szimulációs eredmény ismert. Az ilyen numerikus problémák a számítógépeknek is kihívást jelentenek, mert a relaxációs idő (a korrelációs hosszhoz hasonlóan) hatványfüggvényyszerűen divergál a kritikus pont környékén. Ezekhez a problémákhoz kiterjedt processzor klasztereket, illetve nemzeteken is átnyúló ún. GRID hálózatokat is igénybevesznek a kutatók (lásd. pl. Klasztergrid (<http://www.clustergrid.niif.hu>), Hungrid (www.grid.kfki.hu/hungrid), Desktopgrid (<http://szdg.lpsd.sztaki.hu/szdg/>) ...).

III. ÚJ UNIVERZALITÁSI ELVEK

Tekintsük az ún. diffúzív pár kontakt folyamat (PCPD) problémáját. Ez egy olyan modell, amelyben a reakciókhoz legalább 2 részecske találkozása szükséges. Ilyenkor ezek vagy új részecskét hoznak létre ($2A \xrightarrow{\sigma} 3A$), vagy részecskék tűnhetnek el ($2A \rightarrow \emptyset$). A reakciós valószínűségeket változtatva a rendszerben vagy (aktív) véges c_A koncentrációjú állapot alakul ki, vagy teljesen el is tűnhet az összes részecske (abszorbeáló állapot). Egy diszkrét, véges rácpont betöltöttségű modellben ezen állapotok között olyan fázisátalakulás van, amelynél a c_A koncentráció folytonosan tűnik el, ha σ -t csökkentjük. Ha a részecskék önmagukban még mozdogni (diffundálni) sem tudnak, akkor tekinthetjük a párokat mint önálló entitásokat ($B = 2A$) és ezek: $B \rightarrow 2B$, $B \rightarrow \emptyset$ (pár)kontakt folyamatot (PCP) valósítanak meg. Ha azonban a magányos részecskék spontán diffúziós mozgása megengedett ($A\emptyset \leftrightarrow \emptyset A$), akkor egy másfajta folytonos fázisátalakulást figyeltek meg. Miután a diffúzív és a nem diffúzív rendszer között semmilyen szimmetriabeli különbséget nem találunk ez a modell évek óta sok fejtörést és számos egymásnak ellentmondó publikációs eredményt generált.

A PCPD modell tér-idő fejlődési képe is más mint a PCP-é. A magányos részecskék vándorlása mellett időnként kompakt klaszterek tűnnek fel, vagy semmisülnek meg (ábra 2). A (pár)kontakt folyamatnál az ilyen (tetszőleges

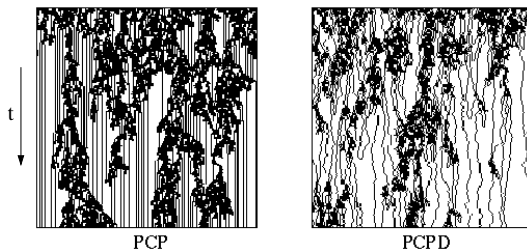


FIG. 2: Részecskék (fekete pöttyök) tér-idő fejlődése az 1 + 1 dimenziós pár kontakt folyamat és a diffúziós pár kontakt folyamat (PCPD) esetén.

nagyra megnőhető) spontán kialakuló kompakt klaszterek nem fordulnak elő. Ráadásul a PCPD univerzalitási osztály a részecske paritás szimmetriára is érzéketlen, ellentétben a kontakt folyamattal.

Ezen és más univerzalitási osztályok értelmezésének céljából nemrég felvetődött, az egyszerű szimmetriák helyett az ún. topológikus fázisdiagramokkal lehet az egyszerű nemegyensúlyi modelleket klasszifikálni (lásd. [1]). Ez a módszer egy két paraméteres (p, q) (ϕ, ψ tereknek megfelelő) fázistérben a $H_R(p, q)$ reakciós operátorok (lásd. (4) nulla várható értékű megoldásait tekintve). Viszonylag gyenge fluktuációs zaj esetén a térelmélet kvázi klasszikus limeszében a $\bar{H}_R(p, q)$ -k egy Hamiltoni rendszert definiálnak. A kialakuló "térkép" (ábra 3) nemcsak a terek belső szimmetriáit mutatja, hanem a reakciós valószínűségeket hangolva létrejövő fázisátalakulásokat leképezi a térképvonalakra, és a numerikus eredményekkel összhangban levő univerzalitási osztályokba rendezi az egy-komponensű modelleket.

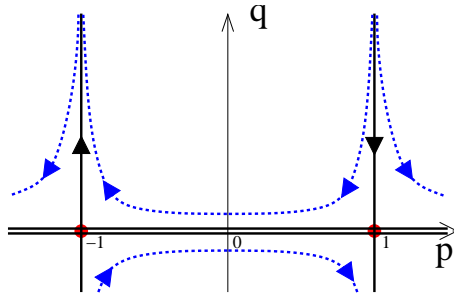


FIG. 3: A $2A \rightarrow \emptyset$ modell fázisportréja. A Hamilton operátor várható értékének reakciót leíró része: $\bar{H}_R(p, q) = \frac{\lambda}{2}(1 - p^2)q^2$. A folytonos vonalak a nulla-energiás trajektóriák: generikus vonalak $p = 1$ (átlagtér limesz), $q = 0$ a duplán degenerált $q = 0$ abszorbeáló állapot, és az $p = -1$ nemtriviális megoldás. A szaggatott vonalak a véges energiás trajektóriákat jelölik.

A. Topológikus effektusok

Létezik egy másik küszöb, az un. alsó kritikus dimenzió (d^-) is, ami alatt már nem tud fázisátalakulás (és kritikus jelenség) létrejönni. Egyensúlyi, rövid kölcsönhatáshosszú rendszerekben ez: $d^- = 2$ diszkrét, illetve $d^- = 3$ folytonos szimmetriájú modellek esetén. Nemgyensúlyi rendszerekben a részletes egyensúly hiányában a $p(\alpha)$ eloszlás kevésbé van megszorítva és már 2-nél alacsonyabb térbeli dimenzióban is lehetséges a fázisátalakulás.

Ilyen alacsony dimenziók esetén azonban a tér topológiája további befolyásoló tényező lehet. Kiderült például, hogy a több-komponensű, keménymag kölcsönhatások esetén a skálaviselkedéseket (és a fázisátmenet tulajdonságát) nem azok a szimmetriák határozzák meg, amelyeket a folytonos, bozonikus térelméleti leírás alapján várnánk, hanem a részecske kizárási, blokkolási effektusok válnak releváns tényezőkké. Ennek legegyszerűbb példája az egy-dimenziós $AB \rightarrow \emptyset$ modell, melynek a (bozonikus) térelméleti leírása teljes kudarcot vallott. Ebben a modellben a megegyező típusú részecskék felhalmozódása akadályozza a reakciókat (amely csak különbözők között lehetséges) és így a koncentráció sokkal lassabb hatványfüggvény szerint csökken, mint amit a bozonikus térelmélet jósol.

Ha a több-komponensű rendszerben keltési reakciók is lehetnek, akkor ezek valószínűségét növelve véges koncentrációjú, állandósult állapotok is létrejöhetnek folytonos fázisátalakulással. Az ilyen átalakulás körüli skálaviselkedések arra lesznek érzékenyek, hogy reakció által keltett részecskék tudnak-e újra reagálni, vagy elválasztódnak egymástól (pl.: $A \rightarrow ABA$ vagy $A \rightarrow AAB$). Ez az érzékenység felülírja a globális megmaradásokat is. Más szóval ezen rendszerek kritikus univerzalitási osztályait a mikroszkópikus kölcsönhatások szimmetriái és nem a globális szimmetriák/megmaradások határozzák meg.

IV. ALKALMAZÁSOK

Mint a bevezetőben említettem a nemgyensúlyi rendszerek igen gyakoriak a természetben, így a fent emített egyszerű modelleken alapuló bonyolultabb rendszerek felünése és az ezekhez kapcsolódó univerzális skálaviselkedések megfigyelése várható lenne. Valójában kiderült, hogy a legrobosztusabbnak vélt irányított perkolációs skálázást eddig csak helyel-közzel sikerült kísérletileg kimutatni. Helyette mindenféle más skálaviselkedéseket találtak. Ennek alapvető oka, hogy ezek a rendszerek rendezetlenségre igen érzékenyek lehetnek. A rendezetlenséget teljesen eltüntetni pedig igen nehéz, még laboratóriumi körülmények között is. Kivétel talán a 2-részecske annihiláló típusú egyszerű rendszerek osztálya ($2A \rightarrow \emptyset$), amelyet kémiai reakciókban meg lehetett figyelni. Hasonló esélyes lehet még a részecske paritásörző modellek ($2A \rightarrow \emptyset$, $A \rightarrow 3A$) fázisátalakulási univerzalitása is, amelyre a szimulációk (időben rögzített) rendezetlenség érzéketlenséget mutattak ki [2].

Mindazonáltal egyáltalán nem haszontalan az alapvető modellek tulajdonságainak felderítése még akkor sem, ha közvetlen alkalmazást egyelőre nem lehet látni. Ha lemondanánk ezek megértéséről, az olyasmi lenne, mintha a múlt századokban lemondtunk volna az atomok kutatásáról és a hétköznapi életben előforduló anyagok viselkedését anélkül próbálnánk megérteni, hogy ismernénk ezek nehezen megfigyelhető alkotórészeit. Az ilyen modellek szinte áttekinthetetlenül elszaporodtak az irodalomban, ezért róluk, illetve az alapvető, nemgyensúlyi univerzalitási osztályokról egy hosszú cikkben és egy könyvben [3, 4] foglaltam össze ismereteinket.

Az alapmodellek univerzalitási osztályainak megfigyelésével kapcsolatos negatív tapasztalatok ellenére az utóbbi évtizedekben hódított a skálaviselkedések kísérleti, fenomenológikus leírása. A földrengés erősség statisztikáktól kezdődően, a biológiai rendszereken át a közgazdaságtanban, vagy a pénzügyi statisztikákban is megfigyelték ezeket. A 80'-as években megszületett az önszerveződő kritikus rendszerek elmélete. Ennek célja azt volt, hogy megmagyarázzák,

hogy miért fordulnak elő a természetben olyan gyakran hatványfüggvény eloszlású mennyiségek, statisztikák, szemben a fázisátalakulási kritikussághoz szükséges finomhangolásokkal. Ezek generikus leírására a homokdomb modelleket [5] vezették be, amelyekben a hatványfüggvény eloszlású lavinajelenségek automatikusan jelennek meg. Később kiderült, hogy ezek a modellek nem függetlenek a hagyományos abszorbeáló fázisátalakulási jelenségektől, csak egy önhangoló mechanizmus mindig a kritikus pont körül tartja őket (pl. a homokdomb esetén a lassú homok csepegtetés és a gyors aktivitás redisztribúció). Ezért aztán az önszerveződő kritikus rendszerek skálaviselkedései is leírhatóak az alapmodellek kritikus univerzalitási osztályaival.

Az új évezred a hálózati kutatások felvirágzásával indult a statisztikus fizikában. A hálózatkutatási eredmények egy része hamar a köztudatba került, és újabban skálamentes hálózatokon definiált skálamentes viselkedést generáló modellek sokaságát kutatják. Ezeknél azonban az univerzalitási osztályok nem annyira tipikusak, a hosszú kölcsönhatási hosszal eredményező kapcsolatok topológiai alapvetően befolyásolják a skálatulajdonságokat.

A. Szociofizika

A nemegyensúlyi rendszerek a skálaviselkedések mellett más érdekes tulajdonságokat is mutatnak. Ezek interdiszciplináris alkalmazásokban merültek fel, mint pl. az ún. szociofizikában, amely a statisztikus fizikai módszerek újszerű alkalmazása a társadalom tudományokban (lásd. pl. Szabó György megjelenés alatt álló Fizikai Szemle cikke). Ennek demonstrálására az alábbi, napjainkban igen aktuális példát említem. Az emberi szegregáció földrajzi eloszlásait figyelve megállapították, hogy az etnikai összecsapásoknak ott van nagyobb valószínűsége, ahol a különböző régiókat elválasztó határfelület elmosódott, fraktál jellegű. Ezt figyelembe véve meg lehet jósolni, hogy hol várható a legnagyobb valószínűséggel konfliktus kirobbanás. A volt Jugoszlávia, illetve India/Pakisztán területén ez egybe is esik a tapasztalatokkal (<http://www.sciencenews.org/view/generic/id/8930>). Ezek alapján pl. egy határozott fallal való elválasztás konfliktus megelőzőnek tűnhet, de ez nem mindig járható út (pl. egy országon belül) és a probléma konzerválásához is vezet. Nemegyensúlyi modellek fázishatárait vizsgálva azonban más megoldások is eszünkbe juthatnak. Az emberi szegregáció Ising-Schelling modelljében (amelyben a két különböző csoport egyedeit spin fel/le állapotokkal egyszerűsítünk) hasonló fraktálszerű fázishatárok jelennek meg, ha az emberi toleranciát lokális, változó hőmérséklettel modellezzük. Egy második, erős külső hőmérsékleti tér hozzáadásával, (amely mondjuk az emberek lakásváltozási tu-

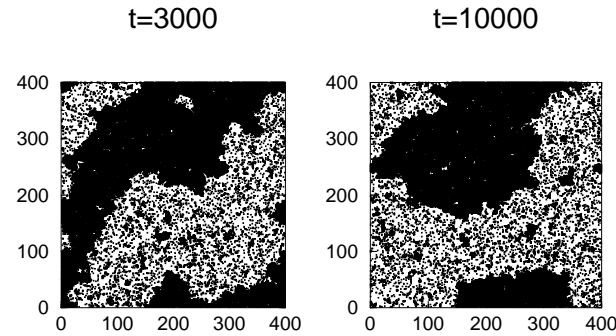


FIG. 4: Klaszterhatárok egy két-hőmérsékletű önszerveződő hőmérsékletű Ising-Schelling modellben. A fekete pöttyök az egyik, fehér a másik csoport egyedeit reprezentálják egy 400x400-as rácson. A szimulációban a klaszterek túlélnek a második kis külső hőmérsékletű "zajt" $t = 10000$ időlépés után ([6]).

lajdonságát írja le) vagy áramlások bevezetésével a fraktális határvonalak amelyek, az erős fluktuációk miatt vannak jelen az ilyen modellekben, elmoshatóak (lásd. [6] és az ottani hivatkozásokat).

B. Mintázatképződés

Egy másik fontos kérdés, hogy komplex rendszerekben miért alakulnak ki mintázatok. Egy viszonylag homogén légkörben mitől jelennek meg felhő fodrok, vagy a sivatagi homok mitől hullámos. Ezek elméleti megértése mellett a mikro/nano technológiákban a felületi mintázatképződés egyszerű kontrollálása nagy gyakorlati jelentőséggel bírna. Ezt jelenleg több nagy projekt tűzte ki célul. Egyszerű felületnövekedési modelleknél a részletes egyensúlyt sértő reakcióknál találtak ilyen barázdált állapotokat legelőször [7]. Különböző erősségű simító és durvító reakciók versengése esetén láthatunk ilyen felületi pötty vagy fodor növekedést (ábra 5). Ezek a felületi mintázatok metastabil, kvantum pöttyök vagy nanovezetékek növesztésére nyitnak a litográfiához képest alternatív lehetőségeket. Miután a bizonyos

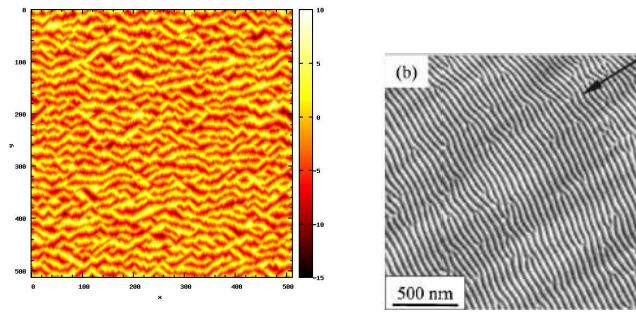


FIG. 5: Szimulált felületi hullámok magasság konturjai versengő durvító anizotróp felületi diffúzió és simító depozíciós reakciók esetén. Ezt a mintázatot kinetikus Ising szerű hajtott rácsgáz modellel generáltuk [8]. (b) Kíséreti fodrozódási minta szilíciumban kripton ion-sugár bombázás hatására ($E_{ion} = 1200$ eV, szög= 15° , fluxus = $2.24 \cdot 10^{18}/cm^2$.)

felületek rácsgáz modellekre is leképezhetőek, az ezeknél leírt rendeződési, fázisátalakulási kutatási eredmények is segítenek a fenti célok elérésében.

-
- [1] V. Elgart and A. Kamenev, Phys. Rev. E **74**, 041101 (2006).
 - [2] N. Menyhárd and G. Ódor, Phys. Rev. E **73**, 036130 (2006).
 - [3] G. Ódor, Rev. Mod. Phys **76**, 663 (2004).
 - [4] G. Ódor, *Universality In Nonequilibrium Lattice Systems* (World Scientific, 2008).
 - [5] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, Phys. Rev. Lett. **59**, 381 (1987).
 - [6] G. Ódor, Int. J. of Mod. Phys. C **19**, 393 (2008).
 - [7] Z. Rácz, M. Siegert, D. Liu, and M. Plischke, Phys. Rev. A **43**, 5275 (1991).
 - [8] G. Ódor, B. Liedke, and K.-H. Heinig, Phys. Rev. E **79**, 021125 (2009).