תרגיל בית ראשון- מבוא ללמידה ממוכנת

1. <u>נתונים:</u>

הסתברויות:

$$Pr(good) = 0.3, Pr(fair) = 0.5, Pr(bad) = 0.2$$

$$Pr(\, good \mid sharp\,) = 0.9, Pr(\, fair \mid sharp\,) = 0.5, Pr(\, bad \mid sharp\,) = 0.2$$

$$Pr(\, good \mid diminished\,) = 0.1, Pr(\, fair \mid diminished\,) = 0.5,$$

$$Pr(\, bad \mid diminished\,) = 0.2$$

פונקציית הפסד:

$$\lambda(\, buy \mid good\,) = 0, \lambda(\, buy \mid fair\,) = 5, \lambda(\, buy \mid bad\,) = 20$$

$$\lambda(\, don't\ buy \mid good\,) = 10, \lambda(\, don't\ buy \mid fair\,) = 5, \lambda(\, don't\ buy \mid bad\,) = 0$$

מטרה:
לחשב את ההחלטה האופטימלית, הסיכון המותנה עם החלטה שלנו ואת הסיכון הכולל.

נרצה לחשב את:

$$R(\, buy \mid sharp\,), R(\, buy \mid diminished\,), R(\, don't\ buy \mid sharp\,), R(\, don't\ buy \mid diminished\,)$$

בעזרת הנוסחה:

$$R(\, \alpha \mid x\,) = \sum_{j=1}^{m} Pr\big(\, c_j \mid x\,\big) \cdot \lambda\big(\, \alpha \mid c_j\,\big)$$

נתונות לנו פונקציות ההפסד אבל אנחנו צריכים למצוא את ה$posteriors$ (כלומר את $Pr\big(\, c_j \mid x\,\big)$).
נחשב אותם בעזרת נוסחת $bayes$:

$$Pr\big(\, c_j \mid x\,\big) = \frac{Pr\big(\, x \mid c_j\,\big) Pr\big(c_j\big)}{Pr\ (x)}$$

נתונים לנו ה$priors, likelihoods$ ונצטרך למצוא את ה$marginals$, כלומר $Pr\ (x)$, שהם למעשה $Pr(sharp)\ , Pr(diminished)$. ונשים לב שמתקיים:

$$Pr(sharp) + Pr(diminished) = 1$$

נמצא את $Pr(sharp)$ בעזרת נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(sharp) = Pr(\, sharp \mid good\,) \cdot Pr(good) + Pr(\, sharp \mid fair\,) \cdot Pr(fair) + Pr(\, sharp \mid bad\,) \cdot Pr(bad) = 0.9 \cdot 0.3 + 0.5 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.2 = 0.56$$

ולכן מתקיים גם:

$$Pr(diminished) = 1 - P(sharp) = 1 - 0.56 = 0.44$$

עכשיו נחשב את ה$posteriors$ (בעזרת $bayes$):

$$Pr(\,good \mid sharp\,) = \frac{0.9 \cdot 0.3}{0.56} = \frac{27}{56}$$

$$Pr(\,fair \mid sharp\,) = \frac{0.5 \cdot 0.5}{0.56} = \frac{25}{56}$$

$$Pr(\,bad \mid sharp\,) = \frac{0.2 \cdot 0.2}{0.56} = \frac{1}{14}$$

$$Pr(\,good \mid diminished\,) = \frac{0.1 \cdot 0.3}{0.44} = \frac{3}{44}$$

$$Pr(\,fair \mid diminished\,) = \frac{0.5 \cdot 0.5}{0.44} = \frac{25}{44}$$

$$Pr(\,bad \mid diminished\,) = \frac{0.8 \cdot 0.2}{0.44} = \frac{4}{11}$$

ועכשיו נחשב את ה$risks$:

$$R(\,buy \mid sharp\,) = Pr(\,good \mid sharp\,) \cdot \lambda(\,buy \mid good\,) +$$
$$Pr(\,fair \mid sharp\,) \cdot \lambda(\,buy \mid fair\,) + Pr(\,bad \mid sharp\,) \cdot \lambda(\,buy \mid bad\,)$$
$$= \frac{27}{56} \cdot 0 + \frac{25}{56} \cdot 5 + \frac{1}{14} \cdot 20 = \frac{205}{56} = 3.66$$

$$R(\,don't\ buy \mid sharp\,) = Pr(\,good \mid sharp\,) \cdot \lambda(\,don't\ buy \mid good\,) +$$
$$Pr(\,fair \mid sharp\,) \cdot \lambda(\,don't\ buy \mid fair\,) + Pr(\,bad \mid sharp\,) \cdot \lambda(\,don't\ buy \mid bad\,)$$
$$= \frac{27}{56} \cdot 10 + \frac{25}{56} \cdot 5 + \frac{1}{14} \cdot 0 = \frac{395}{56} = 7.05$$

$$R(\,buy \mid diminished\,) = Pr(\,good \mid diminished\,) \cdot \lambda(\,buy \mid good\,) +$$
$$Pr(\,fair \mid diminished\,) \cdot \lambda(\,buy \mid fair\,) + Pr(\,bad \mid diminished\,) \cdot \lambda(\,buy \mid bad\,)$$
$$= \frac{3}{44} \cdot 0 + \frac{25}{44} \cdot 5 + \frac{4}{11} \cdot 20 = \frac{445}{44} = 10.11$$

$$R(\,don't\ buy \mid diminished\,) = Pr(\,good \mid diminished\,) \cdot \lambda(\,don't\ buy \mid good\,) +$$
$$Pr(\,fair \mid diminished\,) \cdot \lambda(\,don't\ buy \mid fair\,) + Pr(\,bad \mid diminished\,) \cdot \lambda(\,don't\ buy \mid bad\,)$$
$$= \frac{3}{44} \cdot 10 + \frac{25}{44} \cdot 5 + \frac{4}{11} \cdot 0 = \frac{155}{44} = 3.52$$

ההחלטה האופטימלית, תהיה לקנות טלוויזיה שהיא $sharp$, כיוון שמתקיים:

$$R(\,don't\ buy \mid diminished\,) < R(\,buy \mid diminished\,)$$

$$R(\,buy \mid sharp\,) < R(\,don't\,buy \mid sharp\,)$$

לכן ה$total\ risk$ הוא:

$$total\_risk = Pr(sharp)\cdot R(\,buy \mid sharp\,) + Pr(diminished)\cdot R(\,buy \mid diminished\,)$$
$$= 0.56\cdot\frac{205}{56} + 0.44\cdot\frac{155}{44} = \frac{18}{5} = \mathbf{3.6}$$

2. פתרון:

א. נגדיר שני מאורעות:

A- חולה.

B- תוצאה חיובית.

נתון כי:

$$P(A) = 0.001$$
$$P(\bar{B}|A) = 0$$
$$P(B|\bar{A}) = 0.01$$

לכן:

$$P(\bar{A}) = 0.999$$
$$P(\bar{B}|\bar{A}) = 0.99$$
$$P(B|A) = 1$$

נרצה לחשב את $P(A|B)$:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B)} = \frac{1\cdot 0.001}{P(B|A)\cdot P(A) + P(B|\bar{A})\cdot P(\bar{A})} = \frac{0.001}{1\cdot 0.001 + 0.01\cdot 0.999}$$
$$= \mathbf{0.09}$$

תשובה סופית: ההסתברות שבהינתן תוצאת בדיקה חיובית האדם באמת חולה היא 0.09.

ב. נרצה למצוא את ההסתברות לחלות ולא לחלות בהינתן בדיקה חיובית, ואת ההסתברות לחלות ולא לחלות בהינתן בדיקה שלילית:

<u>בהינתן בדיקה חיובית:</u>

$$P(A|B) = 0.09 = 9\%$$
$$P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B) = 0.91 = 91\%$$

<u>בהינתן בדיקה שלילית:</u>

$$P(A|\bar{B}) = \frac{P(\bar{B}|A)\cdot P(A)}{P(\bar{B})} = \frac{0\cdot P(A)}{P(\bar{B})} = 0 = 0\%$$

$$P(\bar{A}|\bar{B}) = 1 - P(A|\bar{B}) = 1 = 100\%$$

קיבלנו שההסתברות לחלות גבוהה מההסתברות לא לחלות גם בהינתן בדיקה חיובית, וגם בהינתן בדיקה שלילית.

תשובה סופית: תחת תנאי השאלה, יותר סביר שאני לא אחלה במחלה.

ג. אם היינו משתמשים ב$maximum\ likelihood$ היינו מקבלים ש:

$$P(A|B) = 1$$

$$P(A|\bar{B}) = 0$$

3. נתון שמתקיים:

אנחנו מטילים כל קובייה 40 פעם, ואלו התוצאות שיוצאות:

Dice 1, [Nr, Frequency]: [1,5], [2,3], [3,10], [4,1], [5,10], [6,11]
Dice 2, [Nr, Frequency]: [1,10], [2,11], [3,4], [4,10], [5,3], [6,2]

סעיף א:

נסמן את ההסתברות של לקבל את המספר j בעזרת הקובייה הi כ$P_i(j)$ (מתקיים $i \in \{1,2\}$, $j \in \{1,\cdots,6\}$).

בעזרת MLE נחשב את ה$priors$ $P_i(j)$ עבור כל זוג i,j.

נסמן $\#rounds = 40$, ונסמן את מספר הפעמים שיצא המספר הj עבור הקובייה הi בתור $app_i(j)$.

לכן נשים לב שמתקיים:

$$P_i(j) = \frac{app_i(j)}{\#rounds} = \frac{app_i(j)}{40}$$

עכשיו נחשב את כל ה$priors$:

$$P_1(1) = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$

$$P_1(2) = \frac{3}{40}$$

$$P_1(3) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

$$P_1(4) = \frac{1}{40}$$

$$P_1(5) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

$$P_1(6) = \frac{11}{40}$$

$$P_2(1) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

$$P_2(2) = \frac{11}{40}$$

$$P_2(3) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$$

$$P_2(4) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

$$P_2(5) = \frac{3}{40}$$

$$P_2(6) = \frac{2}{40} = \frac{1}{20}$$

סעיף ב:

אחרי זמן מה, אחת מהקוביות נעלמה. ואנחנו עשינו את הניסוי מחדש עבור הקובייה הנותרת (עוד פעם זרקנו אותה 40 פעם).ויצאו לנו את תוצאות הבאות:

[1,8], [2,12], [3,6], [4,9], [5,4], [6,1]

נשתמש ב$bayes$ למצוא את הזהות של הקובייה האחרונה.

נקרא לקובייה הנותרת $i \in \{1,2\}$, ונחשב את ה$priors$:

$$P_i(1) = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$$

$$P_{12}(2) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$$

$$P_i(3) = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$$

$$P_i(4) = \frac{9}{40}$$

$$P_i(5) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$$

$$P_2(6) = \frac{1}{40} = \frac{1}{40}$$

ננסה לחשב את $Pr(\ dice_1 \mid results\ )$ ואת $Pr(\ dice_2 \mid results\ )$.

$$P(\ dice_1 \mid results\ ) = \frac{Pr(results \mid dice_1)\, Pr(dice_1)}{Pr(results)}$$

$$P(\,dice_2 \mid results\,) = \frac{Pr(results \mid dice_2)\,Pr(dice_2)}{Pr(results)}$$

כיוון שאנחנו לא יודעים איזה קובייה אז מתקיים $Pr(dice_1) = Pr(dice_2) = 0.5$.

ועכשיו נחשב את ה$likelihoods$:

$$Pr(results \mid dice_1) = \prod_j P_1(j)^{app_i(j)} = 1.88 \cdot 10^{-42}$$

$$Pr(results \mid dice_2) = \prod_j P_2(j)^{app_i(j)} = 1.72 \cdot 10^{-29}$$

נשים לב שמתקיים:

$$P(\,dice_1 \mid results\,) = \frac{Pr(results \mid dice_1)\,Pr(dice_1)}{Pr(results)} = \frac{1.88 \cdot 10^{-42} \cdot 0.5}{Pr(results)}$$

$$P(\,dice_2 \mid results\,) = \frac{Pr(results \mid dice_2)\,Pr(dice_2)}{Pr(results)} = \frac{1.72 \cdot 10^{-29} \cdot 0.5}{Pr(results)}$$

לכן מתקיים:

$$P(\,dice_2 \mid results\,) > P(\,dice_1 \mid results\,)$$

ולכן הקובייה המסתורית שנשארה היא כנראה הקובייה ה2.

4. פתרון:

```
0.9643672910004568

Process finished with exit code 0
```

5. הוכחה:

נבחין כי תחת ה$loss\ function$ שהוגדרה, נקבל ש:

$$R(\alpha_i|x) \;=\; E[\lambda(\alpha_i, c_j)|x] \;=\; P(a_i \neq c_j|x) \;+\; (1 - P(a_i = c_j|x))$$

מהגדרת ה$loss\ function$ נובע שה$decision$ שממזער את ה$risk$ הוא זה שממקסם את ה$posterior\ probability$: $\alpha_i = argmax\ P(c_j|x)$. זהו כלל ההחלטה של ה$MAP$.

נסתכל על ה$Bayesian\ decision\ rule$:

$$\alpha_i = argmin\, R(\alpha_i|x) = \; argmin\, P\big(a_i \neq c_j\big|x\big) + \Big(1 - P\big(a_i = c_j\big|x\big)\Big)$$

$$= \; argmin\, P\big(a_i \neq c_j\big|x\big) - \; P\big(a_i = c_j\big|x\big)$$

לכן, תחת פונקציית ההפסד של 0-1, כלל ההחלטה הבייסיאני שווה ערך לסיווג MAP, כנדרש.