СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ "Св. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"

Точни решения в холографски модели

Предзащита на дисертационен труд за придобиване на ОНС „Доктор“

Иво Николаев Илиев

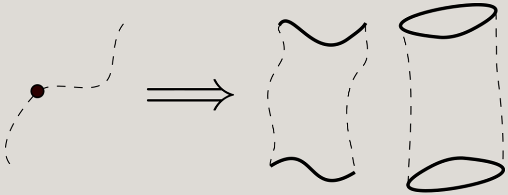
Научен ръководител: проф. дфзн Радослав Христов Рашков

Съдържание

1. Струнна теория и AdS/CFT съответствие

Теория на Струните

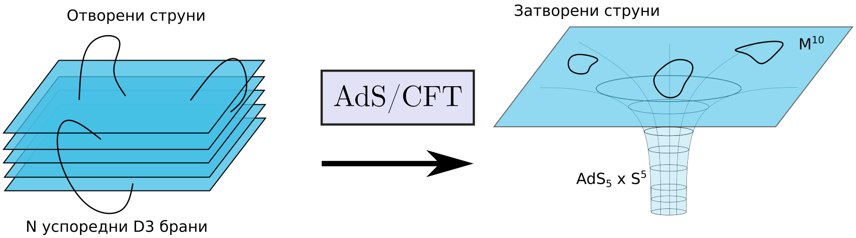
Мирова линия (траектория) $\implies$ мирова повърхнина



$$S \propto \int \underbrace{d\ell}_{\text{дължина}} \qquad \implies \qquad S \propto \int \underbrace{dA}_{\text{площ}}$$

Действие на нелинеен сигма модел

$$S_\sigma = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma d^2\xi \sqrt{h} \left\{ \left(h^{ab} G_{\mu\nu}(X) + \epsilon^{ab} B_{\mu\nu}(X) \right) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu + \alpha' R^{(2)} \Phi(X) \right\}$$



Граница на ’т Хофт и double scaling limit

$$N \to \infty, \quad \lambda = 4\pi g_s N = \text{fixed}$$

Съответствие на параметрите

$$g_s \equiv e^{\Phi} = g_{\rm YM}^2, \quad \ell^4 = \lambda \alpha'^2$$

$$ds^2 = \left(1 + \frac{\ell^4}{r^4}\right)^{-\frac{1}{2}} \eta_{ij} dx^i dx^j + \left(1 + \frac{\ell^4}{r^4}\right)^{\frac{1}{2}} \left(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2\right)$$

$r \gg \ell$ (далеч от набора брани)

$$ds^2 = \eta_{ij} dx^i dx^j + dr^2 + r^2 d\Omega_5^2$$

$r \ll \ell$, $z = \ell^2/r$ (в „гърлото“)

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{z^2}\left(\eta_{ij} dx^i dx^j + dz^2\right) + \ell^2 d\Omega_5^2$$

$$\lambda \to \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \ell^2 \gg \alpha' \to \text{SUGRA}$$

$N \to \infty$ → свободна
$g_s \to 0$ теория

крайно λ ↗ ↘

произв. → теория
N, g_{YM} с взаимодействия

$$\phi(x,z) \to \quad \mathcal{O}(x)$$
$$A_\mu(x,z) \to \quad J^\mu(x)$$
$$g_{\mu\nu} \to \quad T^{\mu\nu}(x)$$

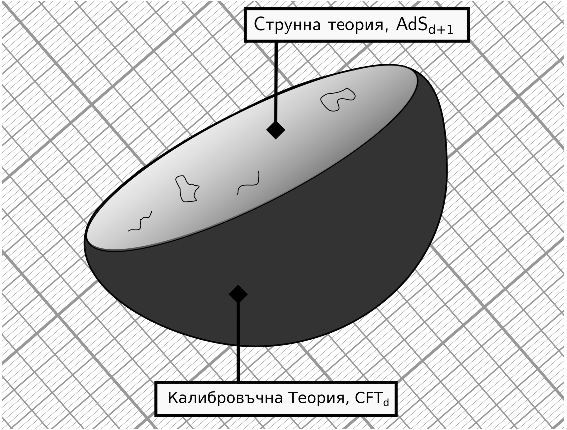
Съответствие

$$Z_{\text{SUGRA}}(\phi_i^0) = \left\langle e^{\int d^4x \phi_i^0 \langle \mathcal{O}_i \rangle} \right\rangle_{\text{CFT}}$$

Скаларно поле в AdS_{d+1}

$$\phi(u,x) = \left(\frac{1}{u}\right)^{4-d} \phi_0(x) + \left(\frac{1}{4}\right)^{\Delta} \langle \mathcal{O}(x) \rangle$$

$$\Delta = \frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^4}{4} + \ell^2 m^2}$$



$AdS_5 \times S^5$ – граница на Пенроуз $\leftrightarrow$ Янг-Милс – BMN граница

Дисперсионни съотношения в BMN границата

$E - J = 0 \implies$

$$\mathcal{O} \sim \sum_q e^{iqp} \left(\ldots ZZZWZZZ \ldots\right)$$

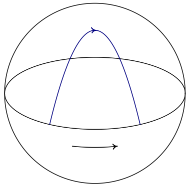
$$J \to \infty, \; \lambda = \text{fixed}, \; p = \text{fixed}$$

$$\uparrow\downarrow$$

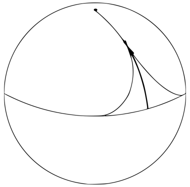
солитонно решение

$\lambda \gg 1$

$$E - J = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \left| \sin\left(\frac{p_{\text{ws}}}{2}\right) \right|$$



Фигура 1: Гигантски магнон



Фигура 2: Шиповидна струна

2. Въведение в проблематиката

$$\boxed{\text{AdS/CFT}} \longrightarrow \boxed{\text{Schrod/dipole-CFT}}$$

Деформация на хиперболичното пространство

$$\overset{\text{AdS}}{\text{Конформна Алгебра}} \xrightarrow{\text{нерелативистка граница*}} \overset{\text{Schrod}}{\text{Алгебра на Шрьодингер}}$$

Деформация на компактното пространство

$$\underbrace{S^5}_{\mathcal{N}=4} \xrightarrow{\text{деформация}} \underbrace{T^{1,1}}_{\mathcal{N}=1}$$

Алгебра на Шрьодингер

$$
\begin{aligned}
&[M_{ij}, N] = [M_{ij}, D] = 0, && [P_i, P_j] = [K_i, K_j] = 0, \\
&[M_{ij}, P_k] = i(\delta_{ik}P_j - \delta_{jk}P_i), && [K_i, P_j] = i\delta_{ij}N, \\
&[M_{ij}, K_k] = i(\delta_{ik}K_j - \delta_{jk}K_i), && [D, K_i] = -iK_i, \\
&[M_{ij}, M_{kl}] = i(\delta_{ij}M_{jk} - \delta_{jk}M_{il} + \delta_{il}M_{kj} - \delta_{jl}M_{ki}), && [D, H] = 2iH,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[H, N] = [H, P_i] = [H, M_{ij}] = 0, \\
&[H, K_i] = -iP_i, \\
&[D, N] = 0.
\end{aligned}
$$

Легенда:

- M_{ij} са генераторите на пространствени въртения.
- P_i са импулсите.
- K_i са бустове на Галилей.
- N е броят частици
- D е операторът на дилатации

Метрика за $Schr_5 \times S^5$

$$\frac{ds^2}{\ell^2} = -\left(1 + \frac{\mu^2}{Z^4} - \frac{X_1^2 + X_2^2}{Z^2}\right) dT^2 + \frac{1}{Z^2}\left(2dTdV + dX_1^2 + dX_2^2 + dZ^2\right) + ds^2_{\mathbb{S}^5},$$

Сферична част

$$ds^2_{\mathbb{S}^5} = d\theta^2 + \cos^2\theta d\psi^2 + \sin^2\theta d\Omega_3^2$$

$$d\Omega_3^2 = d\eta^2 + \sin^2\eta d\varphi_1^2 + \cos^2\eta d\varphi_2^2$$

- TsT трансформация:
  1. T-дуалност по изометрично направление,
  2. транслация (shift) с параметър μ
  3. T-дуалност обратно началното направление.

$$S \supset \mathcal{M} \sim T^2 = (S^1 \times S^1)(\phi_1, \phi_2)$$

TsT за AdS

$$AdS_5 \times S_5 \xrightarrow{\text{TsT}} Schr_5 \times S_5 \ (+\ \ B \text{ поле})$$

Дефиниция (Многообразие на Сасаки)

Нека (S, g) е риманово многообразие и

$$C(S,g) = \mathbb{R}_{>0} \times S, \quad g_C = dr^2 + r^2 g.$$

Тогава (S, g) е Сасаки $\iff C(S, g)$ е келерово многообразие.

Дефиниция (Многообразие на Айнщайн)

(S, g) е многообразие на Айнщайн $\iff g_{ij} = \lambda R_{ij}$.

Примери

$$S^{2n-1} \overset{C(S,g)}{\rightrightarrows} \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$$

$$T^{1,1} \overset{C(S,g)}{\rightrightarrows} \text{конично многообразие (conifold)}$$

$T^{1,1}$

Фактор-пространство

$$\frac{SU(2)\times SU(2)}{U(1)} \implies \text{топология на тор}$$

Метрика

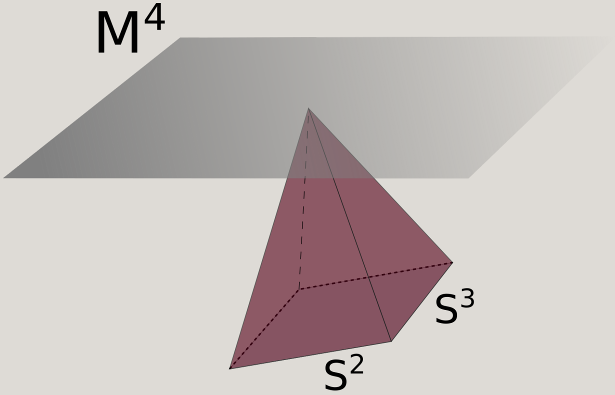
$$ds^2_{T^{1,1}} = \frac{1}{6}\left(d\theta_1^2 + \sin^2\theta_1 d\phi_1^2\right) + \frac{1}{6}\left(d\theta_2^2 + \sin^2\theta_2 d\phi_2^2\right) + \frac{1}{9}(d\psi + \cos\theta_1 d\phi_1 + \cos\theta_2 d\phi_2)^2, \quad (\theta,\phi)\in S^3, \psi \in U(1)$$

Оказва се, че $C(S,g)$ допуска 2 реални килингови спинора - $\mathcal{N}=1$ суперсиметрия

Същина на изследваната геометрична конфигурация

$$\mathbb{M}_4 \times \text{Конифолд} \to \text{Hyp}(\text{AdS}/\text{Schr})_5 \times \text{Сасаки-Айнщайн}^5$$

$$-dt^2 + d\vec{x}^2 + dr^2 + r^2 g_5 \to \frac{1}{r^2}(-dt^2 + dr^2 + d\vec{x}^2) + g_5$$



Мотивация и задачи

- Мотивация: Солитонни решения $\Longleftrightarrow$ оператори (спин верижки).
- Обща задача: Обобщаване на съответствието до нерелативистката му версия - Schrod/dipole-CFT.
- Конкретна задача: Намаляване на симетрията разглеждайки $T^{1,1}$ като компактна част.

Какво следва

- Изследване на нелинеен струнен сигма модел върху $Schr_5 \times T^{1,1}$.
- Налагане на определен струнен анзац; определяне на параметрите задаващи профилите на струнните солитонни решения.
- Определяне на дисперсионните съотношения и сравнения с известни резултати за по-симетрични случаи.

3. Изследване на струнни решения върху $Schr_5 \times T^{1,1}$

Действие

$$S = \int d\tau d\xi L = -\frac{T}{2\alpha} \int d\tau d\xi \left\{ G_{MN} \left[-\partial_\tau X^M \partial_\tau X^N - 2\beta \partial_\tau X^M \partial_\xi X^N + \left(\alpha^2 - \beta^2\right) \partial_\xi X^M \partial_\xi X^N \right] + 2\alpha B_{MN} \partial_\tau X^M \partial_\xi X^N \right\}, \xi = -\alpha\sigma + \beta\tau$$

Метрика и B-поле

$$ds^2_{Schr_5 \times T^{1,1}} = ds^2_{Schr_5} + ds^2_{T^{1,1}}$$

$$ds^2_{T^{1,1}} = \frac{b}{4} \left[\sum_{i=1}^{2} \left(d\theta_i^2 + \sin^2 \theta_i d\phi_i^2 \right) + b \left(d\psi - \sum_{i=1}^{2} \cos\theta_i d\phi_i \right)^2 \right]$$

$$B_{(2)} = \frac{b\mu}{2Z^2} dT \wedge \left(d\psi - \sum_{i=1}^{2} \cos\theta_i d\phi_i \right)$$

Връзки на Вирасоро

$$\mathrm{Vir}_1 : G_{MN}\left(\partial_\tau X^M \partial_\tau X^N + 2\beta \partial_\tau X^M \partial_\xi X^N + \left(\alpha^2+\beta^2\right)\partial_\xi X^M \partial_\xi X^N\right) = 0$$

$$\mathrm{Vir}_2 : G_{MN}\left(\partial_\tau X^M \partial_\xi X^N + \beta \partial_\xi X^M \partial_\xi X^N\right) = 0$$

Анзац за решенията

$$T = \kappa\tau + t(\xi), \kappa > 0, \quad V = \omega_0 \tau + v(\xi), \quad Z = const \neq 0, \quad \vec{X} = \overrightarrow{0}$$

$$\theta_i = \theta_i(\xi), \quad \phi_i = \omega_i \tau + \Phi_i(\xi), \quad i = 1, 2, \quad \psi = \omega_3 \tau + \Psi(\xi),$$

Твърд профил, движещ се по геодезична върху компактното многообразие.
Изометрии - транслации по $T, V, \phi_1, \phi_2, \psi$

Импулси

$$\Pi_T = \frac{\partial L}{\partial \dot{T}}, \quad \Pi_V = \frac{\partial L}{\partial \dot{V}}, \quad \Pi_{\phi_k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi} k}, \quad \Pi_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}},$$

Дефинираме $\mathcal{M} = Schr_5 \times T^{1,1}\Big|_{\theta_2,\phi_2=\text{fixed}} \to$ подсектор на теорията.

Уравнение за движение (θ)

$$\left(\alpha^2-\beta^2\right)^2\theta'^2 = -\sin^2\theta\left\{\left(\alpha^2-\beta^2\right)\omega_1^2 + \left[\frac{4A}{b}\frac{(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta}+\beta\omega_1\right]^2\right\}$$
$$-\left(\alpha^2-\beta^2\right)b\left(\omega_3-\omega_1\cos\theta\right)^2 - b\left[\beta\left(\omega_3-\omega_1\cos\theta\right)+\frac{4}{b^2}\left(A-\frac{\alpha b\mu\kappa}{2Z^2}\right)\right]^2$$
$$-\left(\alpha^2-\beta^2\right)\frac{4}{b}\left(-\left|G_{TT}\right|\kappa^2+\frac{2\omega_0\kappa}{Z^2}\right)$$

Уравнения за движение + връзки на Вирасоро

$$\theta(\xi) \implies v(\xi),\ \Phi(\xi),\ \Psi(\xi). \quad u(\xi) = \cos^2\frac{\theta(\xi)}{2}, u(\xi)\in[0,1]$$

Търсене на $u(\xi)$

$$u(\xi)'^2 = a_4 u^4 + a_3 u^3 + a_2 u^2 + a_1 u^1 + a_0 \equiv P_4(u),$$

$$a_0 = a_1 = 0,$$

$$u(\xi)'^2 = u^2(a_4 u^2 + a_3 u + a_2) \equiv P_4(u) \geq 0 \quad P_4(u) \to U(u).$$

Изразяване чрез константите от анзаца

$$a_4 = -\frac{4(1-b)\alpha^2\omega_1^2}{(\alpha^2-\beta^2)^2} < 0, \quad a_3 = \frac{1}{(\alpha^2-\beta^2)^2}\left(4(1-b)\alpha^2\omega_1^2 + 4\alpha^2\omega_1^2 - 4b\alpha^2\omega_1\left(\omega_1+\omega_3\right) + \frac{8\alpha\beta\mu\kappa\omega_1}{Z^2}\right)$$

$$a_2 = \frac{1}{(\alpha^2-\beta^2)^2}\left(-4\alpha^2\omega_1^2 + 4b\alpha^2\omega_1\left(\omega_1+\omega_3\right) - \frac{8\alpha\beta\mu\kappa\omega_1}{Z^2} - \frac{16A^2}{b^2}\right), \quad a_4 + a_3 + a_2 = -\frac{16A^2}{b^2(\alpha^2-\beta^2)^2}$$

$$u(\xi) = \frac{2a_2}{B\cosh\left(\sqrt{a_2}\xi\right) - a_3}, \quad B = \sqrt{a_3^2 - 4a_4a_2}, \quad a_2 > 0, \quad \frac{|a_3|}{B} < 1$$

Алгебрични връзки за константите

$$Z^2\left(2\left(\beta^2-\alpha^2\right)\omega_0+\frac{4\alpha\mu}{b}A+\alpha\beta b\mu\left(\omega_1+\omega_3\right)\right)=2\beta^2\mu^2\kappa$$

$$\left(\omega_1+\omega_3\right)\left(A-\frac{\alpha b\mu}{2Z^2}\kappa\right)=\beta\left(\frac{2\omega_0}{Z^2}\kappa-\left|G_{TT}\right|\kappa^2\right)$$

Струнни профили

$$\frac{4}{b^2}\left(A-\frac{b\alpha\mu}{2Z^2}\kappa\right)=-\beta\left(\omega_1+\omega_3\right)\quad \text{гигантски магнони}$$

$$\frac{4}{b^2}\left(A-\frac{b\alpha\mu}{2Z^2}\kappa\right)=-\frac{\alpha^2}{\beta}\left(\omega_1+\omega_3\right)\quad \text{единични шиповидни струни}$$

Магнони

$$A_m = \frac{\alpha b}{2}\left[\frac{\omega_0}{\mu} - \frac{\beta b}{2\alpha}(\omega_1 + \omega_3)\right]$$

$$\kappa_m^2 = \frac{\omega_0^2}{\mu^2} + \frac{b^2}{4}(\omega_1 + \omega_3)^2$$

$$Z_m^2 = \frac{\mu^2 \kappa_m}{\omega_0}$$

Шиповидни струни

$$A_s = \frac{\alpha b}{2}\frac{\omega_0}{\mu}$$

$$\kappa_s^2 = \frac{\omega_0^2}{\mu^2}$$

$$Z_s^2 = \frac{2\beta\mu^2\kappa_s}{2\beta\omega_0 + b\mu\alpha(\omega_1 + \omega_3)}$$

Анзац + Уравнения за движение + Връзки на Вирасоро

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Гигантски магнони / (Единични) шиповидни струни върху } Schr_5 \times T^{1,1}}$

Плътности на импулси

$$\frac{2\alpha}{T}\Pi_T = -2\Big(G_{TT}\left(\kappa+\beta t'\right) + G_{TV}\left(\omega_0+\beta v'\right) - \alpha\sum_{i=1}^{2} B_{T\phi_i}\Phi_i' - \alpha B_{T\psi}\Psi'\Big)$$

$$\frac{2\alpha}{T}\Pi_V = 2G_{TV}\left(\kappa+\beta t'\right)$$

$$\frac{2\alpha}{T}\Pi_{\phi_k} = 2\Big(\sum_{i=1}^{2} G_{\phi_k\phi_i}\left(\omega_i+\beta\Phi_i'\right) + G_{\phi_k\psi}\left(\omega_3+\beta\Psi'\right) + \alpha B_{T\phi_k}t'\Big)$$

$$\frac{2\alpha}{T}\Pi_{\psi} = 2\Big(\sum_{i=1}^{2} G_{\phi_i\psi}\left(\omega_i+\beta\Phi_i'\right) + G_{\psi\psi}\left(\omega_3+\beta\Psi'\right) + \alpha B_{T\psi}t'\Big)$$

Сходяща комбинация

$$\Delta \equiv \frac{\Delta\phi+\Delta\psi}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\left(\frac{\Phi'+\Psi'}{2}\right)$$

Израз в явен вид

$$\Delta = \text{``}\frac{1}{(\alpha^2-\beta^2)}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{4}{b^2}\left(A-\frac{b\alpha\mu}{2Z^2}\kappa\right)+\beta\left(\omega_1+\omega_3\right)\right]\right\}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\text{''} + \gamma$$

Трансцендентни уравнения

Дисперсионни съотношения - магнони

$$\frac{\cos\left\{\sqrt{\frac{(1-b)}{b^2}\left[\left(\frac{E}{T}\right)^2-\mu^2\left(\frac{J_V}{T}\right)^2\right]}-\frac{2\sqrt{1-b}}{b^2}\left(\frac{J_\psi}{T}\right)\right\}-\cos\Delta}{\sin\left\{\sqrt{\frac{(1-b)}{b^2}\left[\left(\frac{E}{T}\right)^2-\mu^2\left(\frac{J_V}{T}\right)^2\right]}-\frac{2\sqrt{1-b}}{b^2}\left(\frac{J_\psi}{T}\right)\right\}}=\sqrt{\frac{1}{2(1-b)}\left[\left(\frac{E}{T}\right)^2-\mu^2\left(\frac{J_V}{T}\right)^2\right]}-\frac{1}{b\sqrt{1-b}}\left(\frac{J_\phi}{T}\right)$$

Дисперсионни съотношения - единична шиповидна струна

$$\frac{\cos\left[\frac{2\sqrt{1-b}}{b^2}\left(\frac{J_{ij}}{T}\right)\right]-\cos\left\{\frac{1}{b}\left[\left(\frac{E}{T}\right)-\mu\left(\frac{J_V}{T}\right)\right]-\Delta\right\}}{\sin\left[\frac{2\sqrt{1-b}}{b^2}\left(\frac{J_\psi}{T}\right)\right]}=\frac{1}{b\sqrt{1-b}}\left(\frac{J_\phi}{T}\right)$$

$$b\to 1 \implies Schr_5\times S^5 \text{ (алгебрично)}$$

$$\mu\to 0 \implies AdS_5\times T^{1,1} \text{ (алгебрично)}$$

Научни приноси

- Решена е класическа струнна теория върху $Schr_5 \times T^{1,1}$ на ниво уравнения за движение. Намерени са решения тип „гигантски магнони“ и „шиповидни струни“.
- Получени са явни изрази за дисперсионните съотношения, отговарящи на тези струнни конфигурации. Те са трансцендентни уравнения за аномалната размерност Δ, за разлика от подобни структури върху по-симетрични пространства.
- Силно нетривиалните уравнения за аномалната размерност се нуждаят от аргументация. Тяхната валидност е проверена чрез налагане на съответните гранични преходи за параметрите на деформации. Получени са известните от литературата резултати.

Бъдещи изследвания

1. Разглеждане на информационно-теоретичната страна на нерелативистката версия на холографската дуалност.
2. Изследване на геометрични потоци върху многообразия на Шрьодингер. Интерес представлява геометричното изучаване на TsT трансформацията.
3. Започната е работа по изследване на пространства на Шрьодингер, деформирани посредством оператора на Замолодчиков, $T\overline{T}$.

Публикации

More on Schrödinger holography. J. High Energ. Phys. 2020, 90 (2020).

Pulsating strings in $\mathrm{Schr}_5 \times T^{1,1}$ background. J. Phys. A: Math. Theor. 54 035401 (2020)

Near-Flat Limit of $\mathrm{Schr}_5 \times S^5$, Journal of Physics and Technology, Volume 3 (2019) Number 2

В подготовка

Geometric Flows for Holographic Backgrounds

$T\overline{T}$ deformations and Schrödinger Backgrounds

Участие в конференции

„Суперсиметрична локализация върху повърхности на Хопф“, Национална научна конференция по Физика, Пловдив, 2018 (постер)

„Near-flat Limit of $\text{Schr}_5 \times S^5$, Национална научна конференция по Физика, Пловдив, 2019

„$T\overline{T}$ deformations and applications to non-relativistic holograhy“, CERN-SEENET-MTP School „Computational Methods in Theoretical Physics“, 24-27 Септември 2020, Крайова, Румъния

CERN-SEENET-MTP School ”High Energy and Particle Physics : Theory and Phenomenology”, 3-10 June 2018, Niˇs (Serbia).

CERN-SEENET-MTP School ”High Energy and Particle Physics : Theory and Phenomenology”, 3-9 June 2019, Ioannina (Greece).

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ "Св. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"

Иво Николаев Илиев

Точни решения в холографски модели

Предзащита на дисертационен труд за придобиване на ОНС „Доктор“

Катедра „Теоретична Физика“

Физически Факултет