Convex Optimization

Chapter 4 凸优化问题

只是呈现，没有求解

shijuanfeng

2013-10-14

Outline

- 优化问题：定义、术语、局部最优、等价形式
- 凸优化问题：定义、局部最优、微分条件、等价形式
- 拟凸优化问题：定义、二分法求解

- 线性规划（LP）：定义、几种形式、举例
- 二次优化（QP）：定义、特例、举例
- 二阶锥规划（SOCP）：定义、举例
- 几何规划（GP）：定义、转化、举例

- 广义不等式下的凸问题：定义、特例、举例
- 向量优化：定义

优化问题

标准形式

优化问题的基本描述：

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f_0(x), \quad x \in \mathcal{R}^n \\ \text{subject to} \quad & f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ & h_i(x) = 0, \quad j = 1, \ldots, p \end{aligned}$$

优化变量 $x \in \mathcal{R}^n$

不等式约束 $f_i(x) \le 0$

等式约束 $h_i(x) = 0$

无约束优化 $m = p = 0$

几个概念

优化问题的域 $D=\bigcap_{i=0}^{m}\mathrm{dom} f_i \cap \bigcap_{i=1}^{p}\mathrm{dom} h_i$

可行点(解) **(feasible)** $x\in D$满足约束条件

可行域(可解集) 所有可行点的集合

最优化值

$$p^*=\inf\{f_0(x) \mid f_i(x)\le 0, i=1,\dots,m, h_i(x)=0, i=1,\dots,p\}$$

最优化解 $p^*=f_0(x^*)$

局部最优问题

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & f_0(z), \quad x \in \mathcal{R}^n \\
\text{subject to} \quad & f_i(z) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m \\
& h_i(z) = 0, \quad j = 1, \ldots, p \\
& \|x - z\|_2 \le R, \; R > 0
\end{aligned}
$$

优化问题的等价形式 等价≠相同

1. 变量变换
2. 目标函数和约束函数的变换
3. **松弛变量** 不等式约束→等式约束+非负约束
4. **消除等式约束**
5. 消除线性等式约束
6. **引入等式约束**
7. 优化部分变量
8. **上境图问题形式**
9. 隐式与显式约束

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & t \\ \text{subject to} & f_0(x) - t \le 0 \\ & f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & h_i(x) = 0, \quad j = 1, \dots, p \end{array}$$

凸优化问题

凸优化问题的基本描述：

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & f_0(x), \quad x \in \mathcal{R}^n \\
\text{subject to} \quad & f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m \\
& h_i(x) = 0, \quad j = 1, \ldots, p
\end{aligned}
$$

$f_i(x)$为凸函数

$h_i(x)$为仿射函数

性质：凸优化问题的可行域是凸集。

凸优化问题的局部最优解

定理：凸优化问题的局部最优解均是全局最优解

凸优化问题最优解的微分条件

定理：设 X 为凸优化问题的可行域, $f_0(x)$ 可微。则 x 为最优解当且仅当 $\nabla f_0(x)^T(y-x)\geq 0, y\in X$ 成立。

定理：非约束凸优化问题中，若 $f_0(x)$ 可微。则 x 为最优解当且仅当 $\nabla f_0(x)=0$ 成立。

凸优化问题的等价形式

1. 消除等式约束
2. 引入等式约束
3. 松弛变量
4. 上境图问题形式
5. 极小化部分变量

拟凸优化问题

拟凸优化问题的基本描述

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x), \quad x \in \mathcal{R}^n \\ \text{subject to} & f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ & h_i(x) = 0, \quad j = 1, \ldots, p \end{array}$$

$f_0(x)$为拟凸函数，$f_1(x), \ldots, f_m(x)$为凸函数。

注：拟凸优化问题的局部最优解不一定是全局最优解。

拟凸优化问题二分法求解

给定一个足够小的 l 和足够大的 u，使得区间 $[l,u]$ 能包含最优解 p^*。给定 $\varepsilon > 0$

LOOP：

令 $t = (l+u)/2$

求解可行解问题；

若可解，则令 $u = t$，否则令 $l = t$

若 $|u-l| < \varepsilon$，则结束，否则**goto LOOP**。

线性规划（ linear program,LP ）

LP问题的一般描述

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & c^T x + d \\ \text{subject to} & Gx \prec= h \\ & Ax = b \end{array}$$

$$G \in \mathcal{R}^{m\times n}, A \in \mathcal{R}^{p\times n}$$

LP问题的几种形式

标准LP问题

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^T x \\ \text{subject to} \quad & Ax = b \\ & x \succ= 0 \end{aligned}$$

不等式形式LP问题

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^T x + d \\ \text{subject to} \quad & Ax \prec= b \end{aligned}$$

LP举例

diet problem
Chebyshev center of a polyhedron
Piecewise-linear minimization

- 线性分式规划

$$\text{minimize} \quad f_0(x) = \frac{c^T x + d}{e^T x + f}, \text{dom} f_0 = \{x \mid e^T x + f > 0\}$$

$$\text{subject to} \quad Gx \prec= h$$

$$Ax = b$$

二次规划(quadratic program, QP)

QP问题的基本描述

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & (1/2)x^T P x + q^T x + r \\ \text{subject to} \quad & Gx \prec= h \\ & Ax = b \\ & P \in S_+^n, G \in R^{m\times n}, A \in R^{p\times n} \end{aligned}$$

二次约束二次规划

quadratically constrained quadratic program (QCQP)

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & (1/2)x^T P_0 x + q_0^T x + r_0 \\
\text{subject to} \quad & (1/2)x^T P_i x + q_i^T x + r_i \leq 0 \\
& Ax = b \\
& P_i \in S_+^n, A \in R^{p \times n}
\end{aligned}
$$

QP举例

- Least-squares and regression
- Distance between polyhedra

二阶锥规划(Second-order cone program, SOCP)

SOCP问题的基本描述

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad && f^T x \\ &\text{subject to} \quad && \|A_i x + b\|_2 \le c_i^T x + d_i \\ & && Fx = g \end{aligned}$$

二次锥约束条件

$$\|Ax + b\|_2 \le c^T x + d$$

几何规划(Geometric programming)

几何规划的基本描述

非凸，但可转化为凸优化问题

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f_0(x) \\ \text{subject to} \quad & f_i(x) \le 1, i = 1, \ldots, m \\ & h_i(x) = 1, i = 1, \ldots, p \end{aligned}$$

f_i为多项式，h_i为单项式, $D = R^n_{++}$

单项式与多项式

$$f(x) = c x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{K} c_k x_1^{a_{1k}} \cdots x_n^{a_{nk}}$$

几何规划的凸形式转换

令 $$y_i = \log x_i$$

几何规划的凸形式

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \tilde{f}_0(y) = \log\left(\sum_{k=1}^{K_0} e^{a_{0k}^T y + b_{0k}}\right) \\ \text{subject to} \quad & \tilde{f}_i(y) = \log\left(\sum_{k=1}^{K_i} e^{a_{ik}^T y + b_{ik}}\right) \le 0, i = 1, \ldots, m \\ & \tilde{h}_i(y) = g_i^T y + h_i = 0, i = 1, \ldots, p \end{aligned}$$

GP举例

- Design of cantilever beam
- Minimizing spectral radius of nonnegative matrix

广义不等式约束的优化问题

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & f_0(x) \\
\text{subject to} \quad & f_i(x) \preceq_{K_i} 0, i = 1, \ldots, m \\
& Ax = b
\end{aligned}
$$

锥规划

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^T x \\ \text{subject to} \quad & Fx + g \preceq_K 0 \\ & Ax = b \end{aligned}$$

半定规划

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c^T x \\ \text{subject to} \quad & x_1 F_1 + \ldots + x_n F_n + G \preceq_K 0 \\ & Ax = b \end{aligned}$$

LP and SOCP as SDP

LP and equivalent SDP

LP: minimize $c^T x$
subject to $Ax \preceq b$

SDP: minimize $c^T x$
subject to $\mathbf{diag}(Ax - b) \preceq 0$

(note different interpretation of generalized inequality $\preceq$)

SOCP and equivalent SDP

SOCP: minimize $f^T x$
subject to $\|A_i x + b_i\|_2 \leq c_i^T x + d_i, \quad i = 1, \ldots, m$

SDP: minimize $f^T x$
subject to $\begin{bmatrix} (c_i^T x + d_i)I & A_i x + b_i \\ (A_i x + b_i)^T & c_i^T x + d_i \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, \ldots, m$

广义不等式约束的优化问题举例

- Eigenvalue minimization
- Matrix norm minimization

向量优化

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize (w.r.t. } K\text{)} & f_0(x) & \\
\text{subject to} & f_i(x) \leq 0, & i = 1, \ldots, m \\
 & h_i(x) \leq 0, & i = 1, \ldots, p
\end{array}
$$

vector objective $f_0 : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^q$, minimized w.r.t. proper cone $K \in \mathbf{R}^q$

Summary

- 优化问题：定义、术语、局部最优、等价形式
- 凸优化问题：定义、局部最优、微分条件、等价形式
- 拟凸优化问题：定义、二分法求解

- 线性规划（LP）：定义、几种形式、举例
- 二次优化（QP）：定义、特例、举例
- 二阶锥规划（SOCP）：定义、举例
- 几何规划（GP）：定义、转化、举例

- 广义不等式下的凸问题：定义、特例、举例
- 向量优化：定义

Thanks!