Convex Optimization

Chapter 3 凸函数

shijuanfeng

2013-09-01

Outline

- 凸函数：定义（一阶、二阶）、例子、Jensen不等式
- 保凸运算：5个
- 共轭函数：定义、例子、5条性质

- 拟凸函数：定义、例子、3个性质、保拟凸运算
- 对数凹函数&对数凸函数：定义、例子、定理、性质

- 广义不等式的凸性：单调性定义、凸性定义、定理

凸函数定义

严格凸
凹
严格凹

函数 $f:\mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$，满足

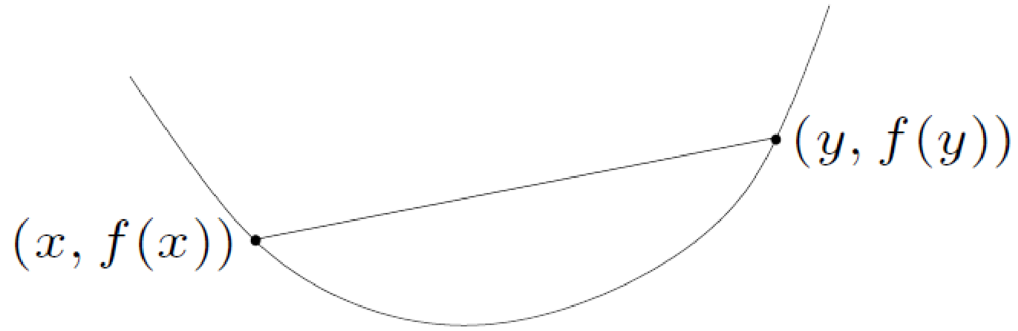
1. 定义域 $\mathrm{dom}\, f$ 为凸集；

2. $\forall x, y \in \mathrm{dom}\, f, 0 \le \theta \le 1$，有

$$f(\theta x + (1-\theta) y) \le \theta f(x) + (1-\theta) f(y).$$

扩展定义

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \mathrm{dom} f \\ \infty & x \notin \mathrm{dom} f \end{cases}$$



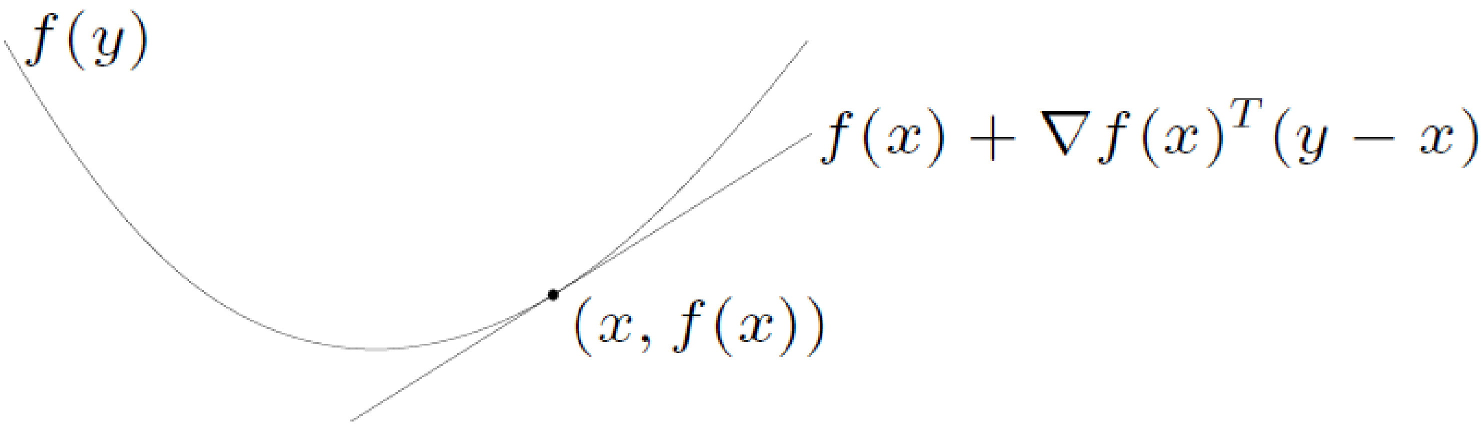
$$< \quad \to \quad \prec$$

$$> \quad \to \quad \succ$$

凸函数的一阶微分条件

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x)$$

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)$$



凸函数的二阶微分条件

$$\nabla^2 f(x) \succ= 0.$$

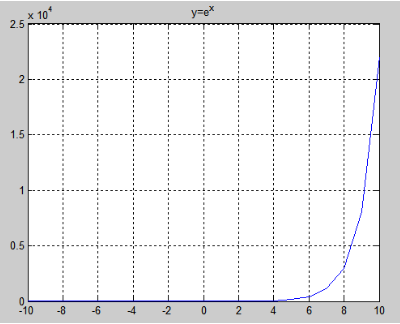
$$\nabla^2 f(x)_{ij} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$$

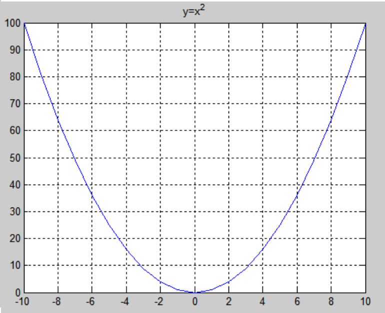
扩展不等式，不是广义不等式！

正的曲率

Examples

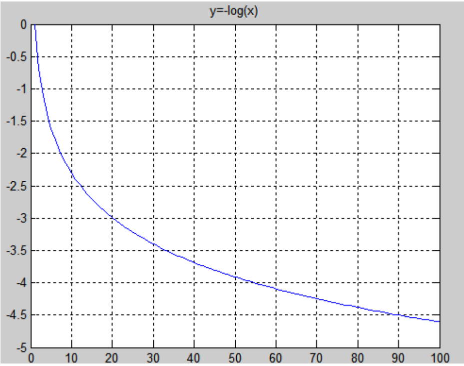
指数函数 e^{ax}

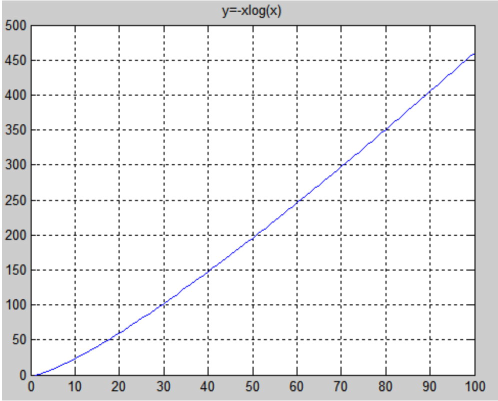




幂函数 $x^a, x \in \mathcal{R}_{++}, a \geq 1 \text{ or } a \leq 0.$

负对数函数 $-\log x$



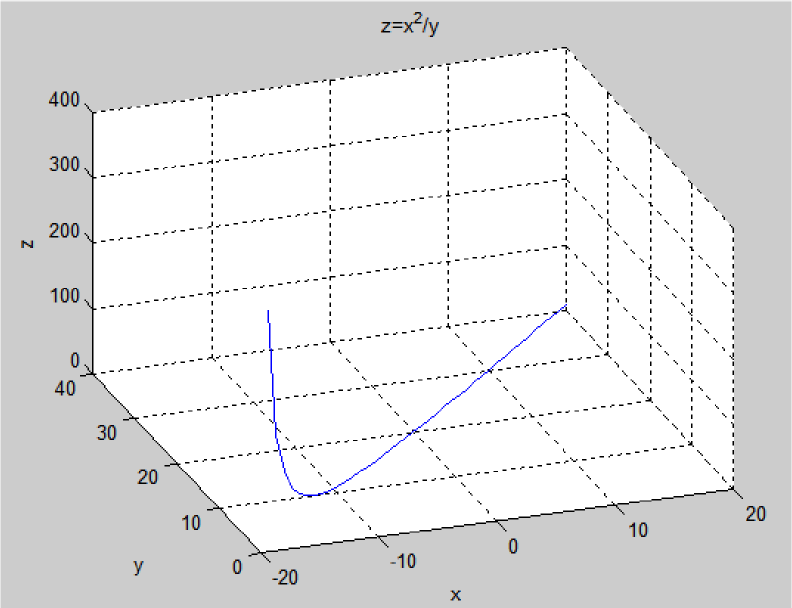


负熵函数 $x \log x$

范数函数 $\|x\|_p$

Examples

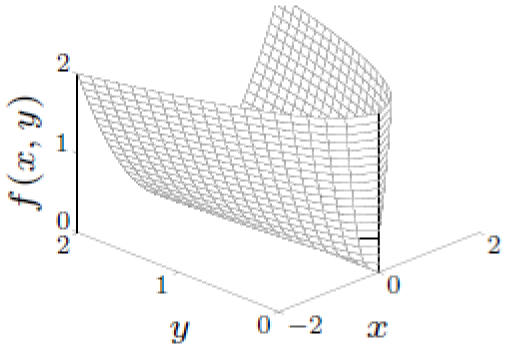
$$f(x) = \max(x_1, \dots, x_n)$$



$$f(x) = x^2 / y$$

$$f(x) = \log(e^{x_1} + \dots + e^{x_n})$$

$$f(x) = (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{1/n}, \mathrm{dom} f = \mathcal{R}_{++}^{n}$$



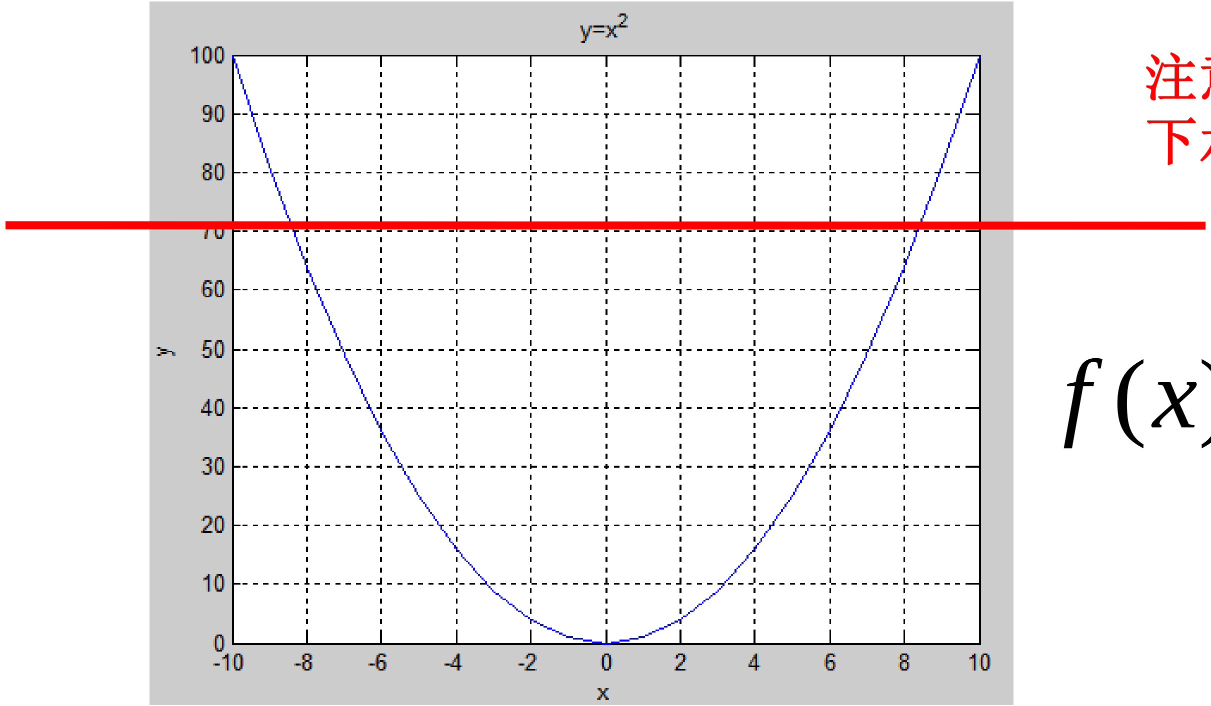
$$f(X) = \log(\det X), \mathrm{dom} f = S_{++}^{n}$$

Example—下水平集(sublevel set)

$$C_\alpha = \{x \in \mathrm{dom} f \mid f(x) \le \alpha\}$$

定理：凸函数的任一下水平集均为凸集。

任一下水平集均为凸集的函数不一定为凸函数。



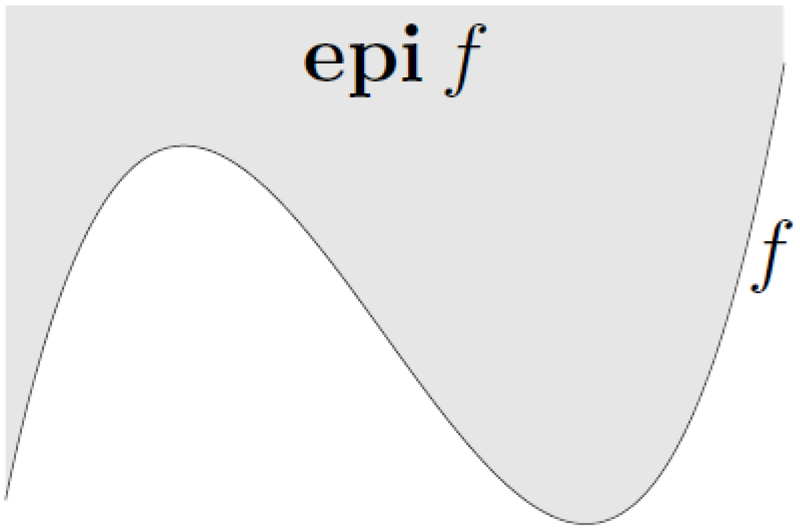
注意：
下水平集是定义域！！！

$$f(x) = \alpha$$

http://shijuanfeng.blogbus.com/

Example——上境图(epigraph)

$$\mathrm{epi} f = \{(x,t) \mid x \in \mathrm{dom} f,\ f(x) \le t\}$$



Jensen不等式

f 为凸函数，则有：

$$f(\theta_1 x_1 + \ldots + \theta_n x_n) \le \theta_1 f(x_1) + \ldots + \theta_n f(x_n)$$

其中， $0 \le \theta_i \le 1, \theta_1 + \ldots + \theta_n = 1.$

Jensen不等式的另外形式：

$$f(\int_S p(x) x dx) \le \int_S p(x) f(x) dx.$$

$$f(\mathbf{E}\, z) \le \mathbf{E}\, f(z)$$

应用：EM算法

保凸运算

凸函数的非负加权和	$f(x)=\omega_1 f_1(x)+\ldots+\omega_n f_n(x)$
凸函数与仿射变换的复合	$g(x)=f(Ax+b)$
逐点最大、最小值	$f(x)=\max(f_1(x),\ldots,f_n(x))$ $g(x)=\inf\limits_{y\in C} f(x,y)$
透视变换	$g(x,t)=tf(x/t)$
复合运算(标量、矢量)	$f(x)=h(g(x))$

共轭函数

上界

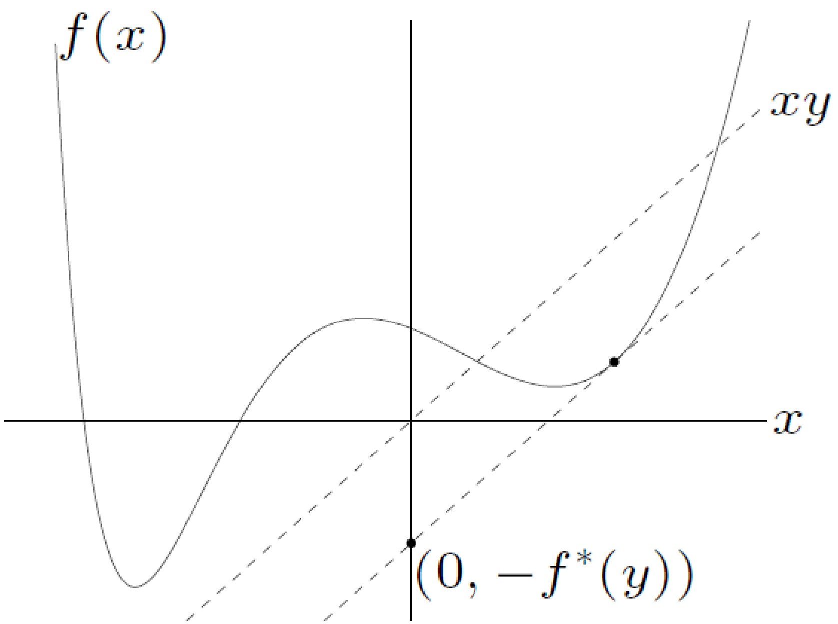
$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathrm{dom} f} \left(y^T x - f(x)\right).$$

凸

将在第五章对偶问题中用到

a±bi

?



f*(y)是线性函数yx和f(x)之间最大的差值

共轭函数 Example

$$f(x) = -\log x$$

$$\begin{aligned} f^*(y) &= \sup_{x>0}(xy + \log x) \\ &= \begin{cases} -1 - \log(-y) & y < 0 \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

这种函数如何求导？

x = -1/y 时，函数有最大值

共轭函数的性质

- **Fenchel's inequality**

$$f(x)+f^*(y)\geq y^T x.$$

- 共轭的共轭=原函数
- 可微函数：共轭函数=Legendre变换
- 伸缩变换和复合仿射变换

$a>0, b\in R, g(x)=af(x)+b$的共轭函数为$g^*(y)=af^*(y/a)+b$

- **若f(u,v)独立，f1,f2是凸函数，那么**

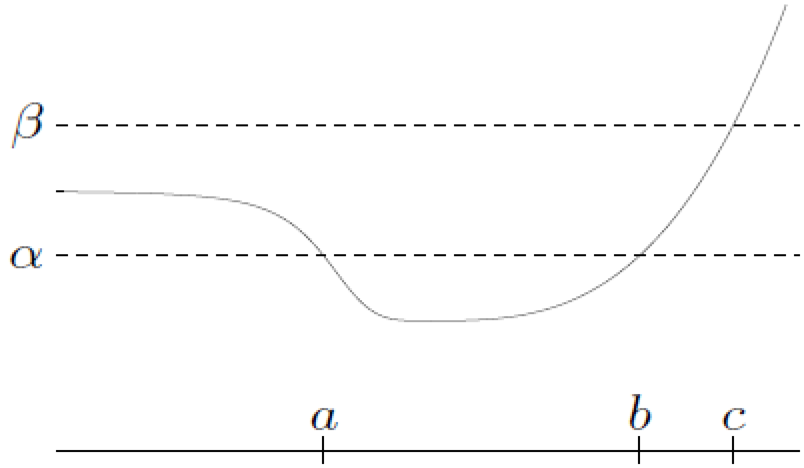
$$f(u,v)=f_1(u)+f_2(v),$$

$$f^*(w,z)=f_1^*(w)+f_2^*(z).$$

拟/准 凸函数(quasiconvex function)

定义：函数的定义域和任意下水平集为凸集

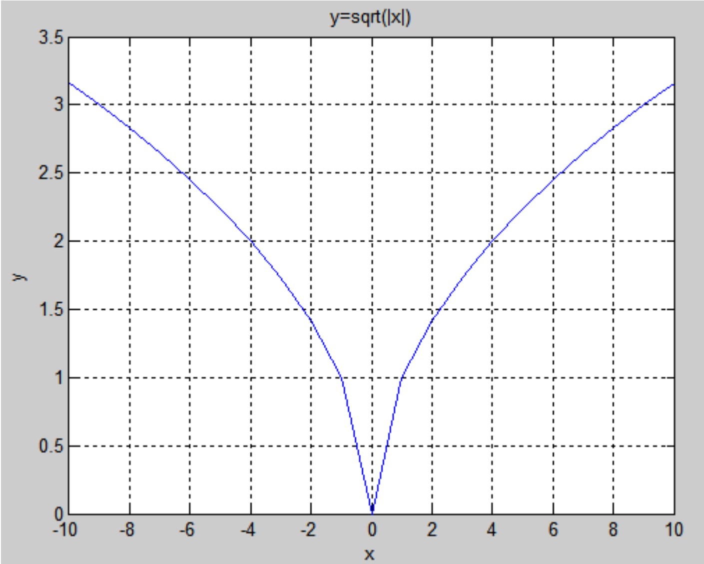
$$S_\alpha = \{x \in \mathbf{dom}\, f \mid f(x) \le \alpha\}$$



交点>2,必然不是拟凸

拟凸函数 Examples

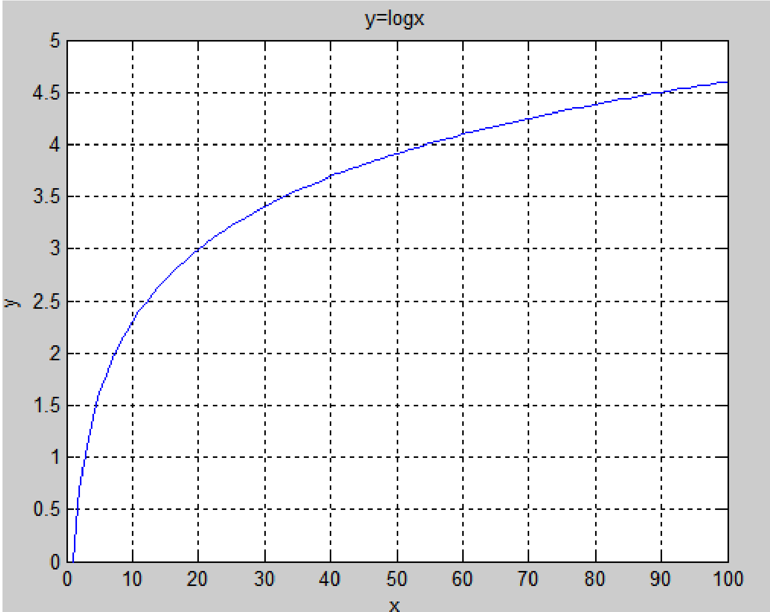
$$\sqrt{|x|}$$



拟凸

-f拟凸，
f就拟凹

$$\log x$$



拟凸+拟凹
= 拟线性

拟/准 凸函数 的基本性质

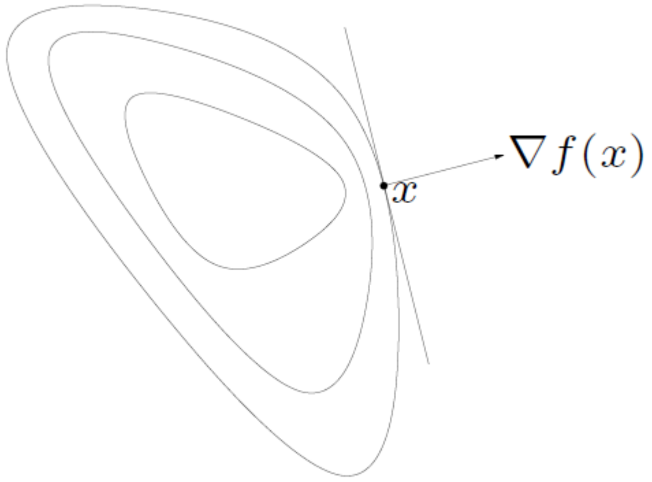
- **Jensen不等式**

$$0 \le \theta \le 1 \quad \Longrightarrow \quad f(\theta x + (1-\theta)y) \le \max\{f(x), f(y)\}$$

- 一阶

$$f(y) \le f(x) \quad \Longrightarrow \quad \nabla f(x)^T(y-x) \le 0$$

不一定是极小点



- 二阶

$$f'(x) = 0 \Rightarrow f''(x) \ge 0$$

$$y^T \nabla f(x) = 0 \Rightarrow y^T \nabla^2 f(x) y \ge 0$$

保拟凸运算

- 非负权值函数的最大值函数
- 复合函数
- 最小值函数

对数凸函数

拟凸函数

定义：函数 $f(x)$称为对数凸函数，若函数 $f(x)$ 满足：

1.dom$f$ 为凸集

2.$f(x)>0$

3.$\log f(x)$ 为凸函数。

定理：

$$\forall x, y \in \mathrm{dom} f, 0 \le \theta \le 1 \quad f(\theta x+(1-\theta)y) \le f(x)^{\theta} f(y)^{1-\theta}$$

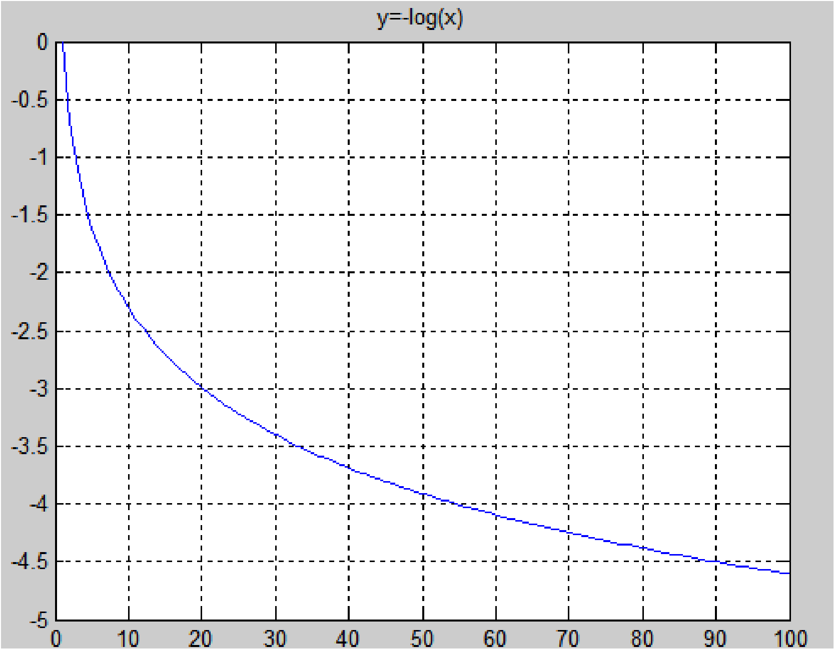
对数凸/凹函数 Examples

$x^a, x \in \mathcal{R}_{++}, a \le 0,$ 是对数-凸函数

$a \ge 0,$ 是对数-凹函数

推导：

$$\log(x^a) = a \log x$$



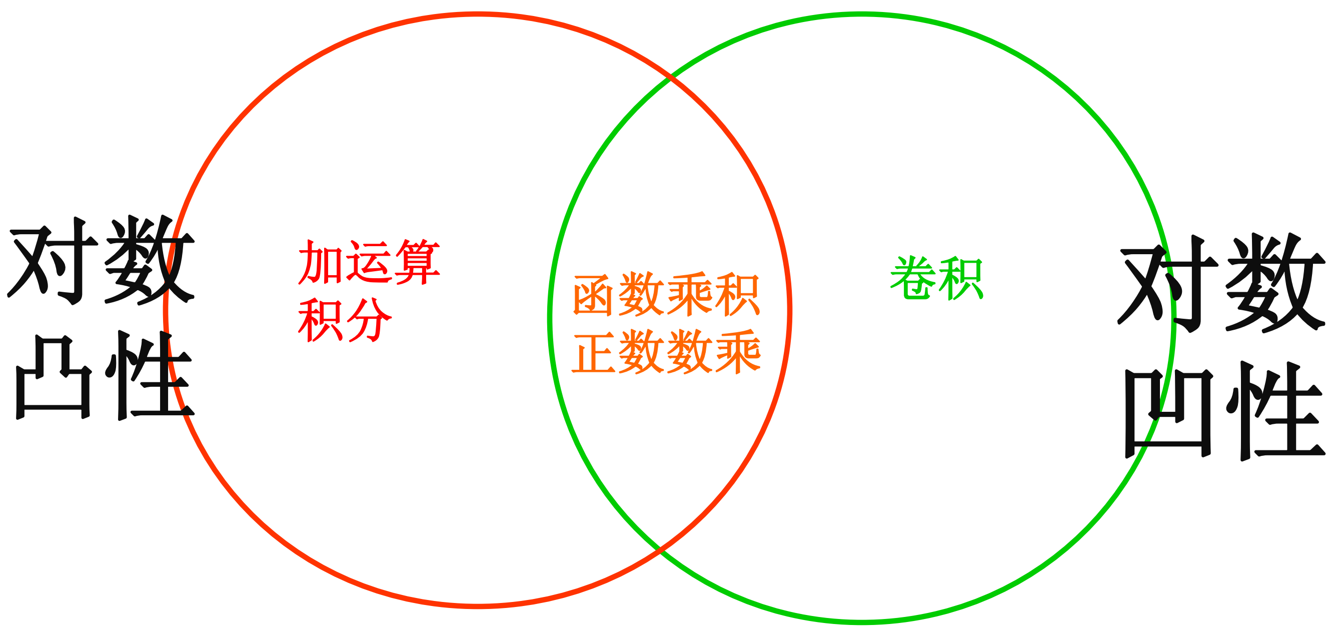
回顾： $x^a, x \in \mathcal{R}_{++}, a \ge 1 \text{ or } a \le 0,$ 凸函数

对数凸函数和凹函数的性质

定理： 函数 $f(x)$ 二阶可微，则 $f(x)$ 为对数凸函数当且仅当

$$f(x)\nabla^2 f(x) \succeq \nabla f(x)\nabla f(x)^T$$

性质：



广义不等式的凸性

- 广义单调性　　**K-单调增**

$K \subseteq \mathcal{R}^n$ 是真锥　　$x \preceq_K y \Rightarrow f(x) \le f(y)$

定义

$y - x \in K$

- 广义凸函数　　**K-凸**

$K \subseteq \mathcal{R}^n$ 是真锥　　$\forall x, y \in \mathrm{dom} f, 0 \le \theta \le 1$

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \preceq_K \theta f(x) + (1-\theta) f(y).$$

- **定理(对偶等价):**

函数 $f(x)$ 为 $K-$ 凸函数，当且仅当对所有 $w \succeq_{K^*} 0, w^T f(x)$ 为凸函数。

Summary

- 凸函数：定义（一阶、二阶）、例子、Jensen不等式
- 保凸运算：5个
- 共轭函数：定义、例子、5条性质

- 拟凸函数：定义、例子、3个性质、保拟凸运算
- 对数凹函数&对数凸函数：定义、例子、定理、性质

- 广义不等式的凸性：单调性定义、凸性定义、定理

Thanks!