http://shijuanfeng.blogbus.com/

Convex Optimization

shijuanfeng

2014-01-23

Chapter 1 引言

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & f_0(x) \\
\text{subject to} & f_i(x) \le b_i, \quad i = 1, \dots, m \\
x \in \mathcal{R}^n &
\end{array}
$$

- 理论：Ch2-5 凸集，凸函数，凸优化问题，对偶
- 应用：Ch6-8 拟合，统计估计，几何问题
- 算法：Ch9-11 无约束优化，等式优化，内点法
- 附录：数学知识
- 软件包：LOQO、MOSEK、AMPL、GAMS

Chapter 2 凸集

- 仿射集+凸集→锥
- 重要例子：超平面&半空间；多面体； 3类球； 2类锥
- 保凸运算：交，仿射函数，线性分式&透视函数
- 分离和支撑超平面：定义+定理
- 广义不等式：定义、性质、最小与极小元
- 对偶锥与广义不等式：对偶锥、广义不等式的对偶、最小元、极小元的对偶性

Chapter 3 凸函数

- 凸函数：定义（一阶、二阶）、例子（下水平集、上境图）、Jensen不等式
- 保凸运算：5个
- 共轭函数：定义、例子、5条性质

- 拟凸函数：定义、例子、3个性质、保拟凸运算
  函数的定义域和任意下水平集为凸集
- 对数凹函数&对数凸函数：定义、例子、定理、性质

- 广义不等式的凸性：单调性定义、凸性定义、定理

Chapter 4 凸优化问题

- 优化问题：定义、术语、局部最优、等价形式
- 凸优化问题：定义、局部最优、微分条件、等价形式
- 拟凸优化问题：定义、二分法求解

- 线性规划（LP）：定义、几种形式、举例
- 二次优化（QP）：定义、特例、举例
- 二阶锥规划（SOCP）：定义、举例
- 几何规划（GP）：定义、转化、举例

- 广义不等式下的凸问题：定义、特例、举例
- 向量优化：定义

Chapter 5 对偶

- Lagrange对偶函数：定义、例子、和共轭函数
- Lagrange对偶问题：强对偶，弱对偶

- 最优性条件：互补松弛，KKT
- 扰动与灵敏度分析
- 择一定理：弱择一，强择一

- 广义不等式

对偶函数始终是求极小值、凹函数

原问题：

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f_0(x), \quad x \in \mathcal{R}^n \\ \text{subject to} \quad & f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & h_i(x) = 0, \quad j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

Lagrange 函数：

$$L(x, \lambda, \nu) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) + \sum_{i=1}^{p} \nu_i h_i(x)$$

Lagrange 对偶函数：

$$g(\lambda, \nu) = \inf_{x \in D} L(x, \lambda, \nu) = \inf_{x \in D} \left(f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) + \sum_{i=1}^{p} \nu_i h_i(x) \right)$$

凸优化问题的对偶求解

设原始优化问题与对偶问题具有强对偶性，且 (λ^*, ν^*)为对偶问题的最优解。$L(x, \lambda^*, \nu^*)$存在唯一的最小解，即

$$\text{minimize} \quad f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* f_i(x) + \sum_{i=1}^{p} \nu_i^* h_i(x)$$

存在唯一解x^* 。

若 x^*为原始问题的可行解，则 x^* 即为原始问题的最优解；
若 x^* 不是原始问题的可行解，则原始问题不存在最优解。

原始优化问题与对偶问题不具有强对偶性，
那么对偶问题最优解给出了原问题最优值的下界。**P208**

KKT优化条件

P235

http://shijuanfeng.blogbus.com/

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f_0(x), \quad x \in \mathcal{R}^n \\ \text{subject to} \quad & f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & h_i(x) = 0, \quad j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

$$g(\lambda, \nu) = \inf_{x \in D}\left(f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) + \sum_{i=1}^{p} \nu_i h_i(x)\right)$$

设优化问题中，函数$f_0(x), \dots, f_m(x), h_0(x), \dots, h_p(x)$可微。设 x^*为原始优化问题的最优解，(λ^*, ν^*)为对偶问题的最优解，且两者具有强对偶性，则 (x^*, λ^*, ν^*)满足如下条件：

$1. f_i(x^*) \le 0, i = 1, \dots, m$

$2. h_i(x^*) = 0, i = 1, \dots, p$

原问题的解要满足

互补松弛性 p234

$3. \lambda_i^* \ge 0, i = 1, \dots, m$

$4. \lambda_i^* f_i(x^*) = 0, i = 1, \dots, m$

KKT条件为必要条件！

$$5. \nabla f_0(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla f_i(x^*) + \sum_{i=1}^{p} \nu_i^* \nabla h_i(x^*) = 0$$

对偶问题的解要满足

http://shijuanfeng.blogbus.com/

Chapter 9 无约束优化

$$\text{minimize} \quad f(x)$$

- 梯度下降
  - batch gradient descent
  - stochastic/incremental gradient descent

Matlab Demo——Andrew Ng coursera 学习课程\week2

- 牛顿法

- 比较

http://www.blogbus.com/shijuanfeng-logs/231557216.html

Chapter 10 等式约束优化

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f(x) \\ \text{subject to} \quad & Ax = b \end{aligned}$$

- 解析方法（代入法）
- Newton方法（可行&不可行初始点）

Chapter 11 不等式约束极小化问题

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f_0(x) \\ \text{subject to} \quad & f_i(x) \le 0, i = 1, \ldots, m \\ & Ax = b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} I_-(f_i(x)) \\ \text{subject to} \quad & Ax = b \end{aligned}$$

$$I_-(u) = \begin{cases} 0 & u \le 0 \\ \infty & u > 0 \end{cases}$$

1. 解决不可微：对数近似，精度： m/t

2. 可微后的解决办法：
求解等式约束的方法（梯度下降、Newton法）

其他

- **下一本书 投票**

1. 模式分类
2. Pattern Recognition and Machine Learning
3. The Elements of StatisticalLearning

- One idea: 共同维护一份最新讯息

Thanks!