Convex Optimization

Chapter 7 统计估计

shijuanfeng

2013-12-02

Outline

- 参数分布估计：ML，MAP
- 非参数分布估计

  可以参看《模式分类》

- 假设检验
- 最优检测器设计

- Chebyshev界和Chernoff界

- 实验设计

参数分布估计

随机变量的概率密度为 $p_x(\square)$，其中 x 为概率分布的参数，且参数未知。参数估计的目标就是通过一些已知样本估计获得参数的最优近似值。

- **最大似然 ML：参数x是确定的值**
- **最大后验MAP：参数x是服从某种分布的随机变量**

最大似然 ML

$$\text{maximize}(x \in C) \quad \log p_x(y)$$

y为样本观测值；

$$l(x) = \log p_x(y)$$ 为对数似然函数

若似然函数为凹函数，则优化问题为凸优化问题。

一个疑问：P337页

ML举例

高斯白噪声

$$p(r) = N(0, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$$

对数似然函数：

$$l(x) = -\frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(a_i^T x - y_i)^2$$

?

最大后验 MAP

$$\hat{x}_{map} = \arg\max_x p_{x|y}(x, y)$$

$$= \arg\max_x p_{y|x}(x, y)\, p_x(x)$$

$$= \arg\max_x p(x, y)$$

非参数分布估计

概率密度参数形式未知

基于先验信息，可能还要观测值和测量值，估计概率分布

- 概率和期望值的界
- 最大似然
- 最大熵
- 最小散度

假设检验+检测器

随机变量 $X \in \{1,2,...,n\}$，有m种可能（假定）的分布；

假定 j：X 的概率分布为 $p_j = \{p_{1j}, p_{2j},..., p_{nj}\}$

假定测验的目标：由观察值猜测随机变量最有可能服从哪种假定的分布。

- 确定性检测器
- 随机性检测器：√
- 鲁棒检测器

随机检测子：非负元素矩阵 $T \in R^{2\times n}$

$$t_{ik} = prob(\widehat{\theta} = i \mid x = k)$$

检测概率矩阵

检测概率矩阵

$$D=[T_1\ \ T_2]=\begin{bmatrix}1-P_{fp} & P_{fn}\\ P_{fp} & 1-P_{fn}\end{bmatrix}$$

P_{fp} 为当 X 实际服从第**1**种假定分布而猜测为第**2**种假定分布的概率；

P_{fn} 为当 X 实际服从第**2**种假定分布而猜测为第**1**种假定分布的概率；

最优检测器设计

线性规划

尺度优化形式：

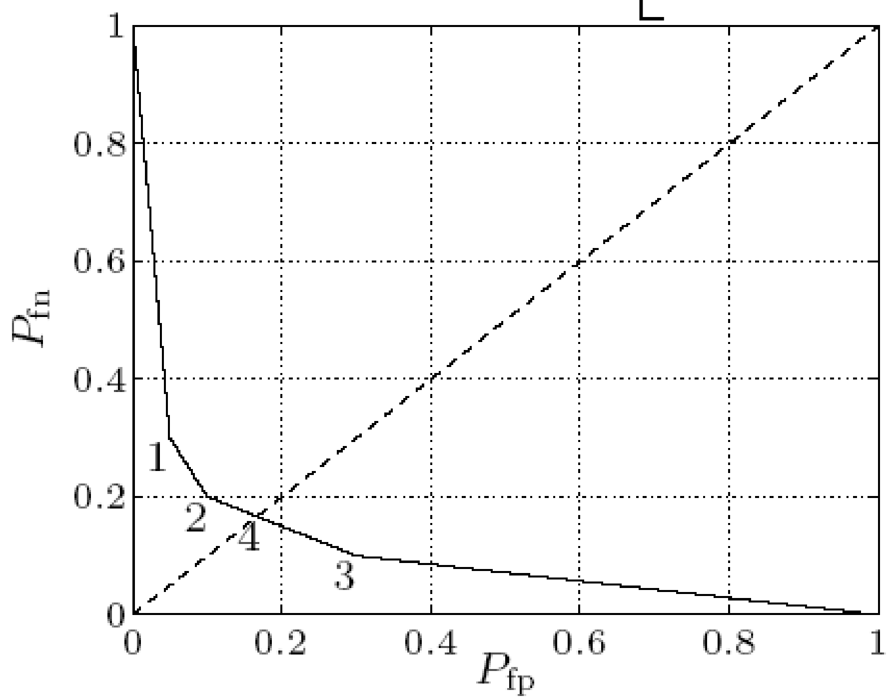
$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & P_{fp} + \lambda P_{fn} \\ \text{subject to} \quad & t_{1k} + t_{2k} = 1, k = 1, \dots, n \\ & t_{1k} \geq 0, t_{2k} \geq 0, k = 1, \dots, n \end{aligned}$$

最小最大值形式

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \max(P_{fp}, P_{fn}) \\ \text{subject to} \quad & t_{1k} + t_{2k} = 1, k = 1, \dots, n \\ & t_{1k} \geq 0, t_{2k} \geq 0, k = 1, \dots, n \end{aligned}$$

例子

X 在两种假设下的概率分布为： $P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 \\ 0.05 & 0.7 \\ 0.05 & 0.1 \end{bmatrix}$



solutions 1, 2, 3 (and endpoints) are deterministic; 4 is minimax detector

界

- Chebyshev界

已知期望值（如均值和方差），给出概率的上界

- Chernoff界

误差上界

实验设计

实验设计的目标：

寻找测量向量，使得误差的协方差方差矩阵最小。

Summary

- 参数分布估计：ML，MAP
- 非参数分布估计

  可以参看《模式分类》

- 假设检验
- 最优检测器设计

- Chebyshev界和Chernoff界

- 实验设计

Thanks!