凸优化理论与应用

第6章　逼近与拟合

http://shijuanfeng.blogbus.com/

Outline

- 范数逼近：罚函数
- 最小范数问题

- 正则化逼近
- 鲁棒逼近：随机、最坏

- 函数拟合与插值

范数逼近问题

- 问题描述：

$$\text{minimize} \quad \|Ax-b\|$$

$$A \in R^{m\times n}, m \geq n,$$

- 残差向量 $r = Ax - b$

- 范数逼近问题的原型
  - 几何原型：在线性变换象集到某一点的最小距离。
  - 优化设计原型：一个线性系统中与目标最接近的输入变量。

例

- 最小平方逼近：范数 $\|\cdot\|_2$

  最优解满足： $A^T A x = A^T b$

- 切比雪夫逼近：范数 $\|\cdot\|_\infty$，原问题转换为**LP**问题：

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & t \\ \text{subject to} & -t\mathbf{1} \le Ax - b \le t\mathbf{1} \end{array}$$

- 残差绝对值和逼近：范数 $\|\cdot\|_1$ ，原问题转换为**LP**问题：

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \mathbf{1}^T y \\ \text{subject to} & -y \preceq Ax - b \preceq y \end{array}$$

罚函数逼近

- 问题描述：
$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \sum_{i=1}^{n} \phi(r_i) \\ \text{subject to} & r = Ax - b \end{array}$$
- 罚函数 $\phi(r)$表示逼近问题误差的代价，一般为对称、非负且 $\phi(0) = 0$
- 若罚函数为凸函数，则罚函数逼近问题为凸优化问题。

罚函数的例

- $l_p, p \geq 1$范数：

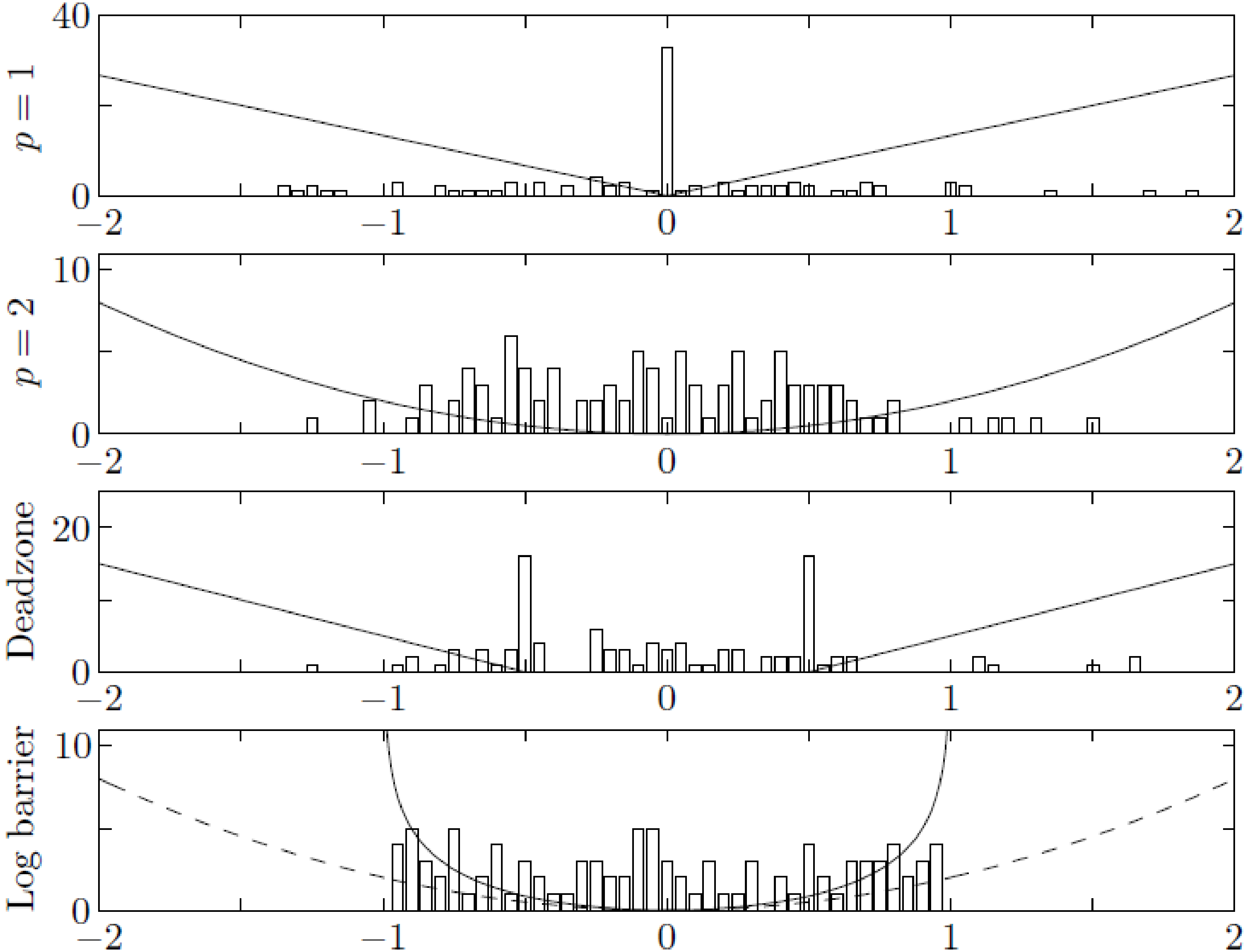
$$\phi(r) = |r|^p$$

- 死区线性罚函数：

$$\phi(r) = \begin{cases} 0 & |r| \leq a \\ |r| - a & |r| > a \end{cases}$$

- 对数门限罚函数

$$\phi(r) = \begin{cases} -a^2 \log(1-(r/a)^2) & |r| < a \\ \infty & |r| \geq a \end{cases}$$



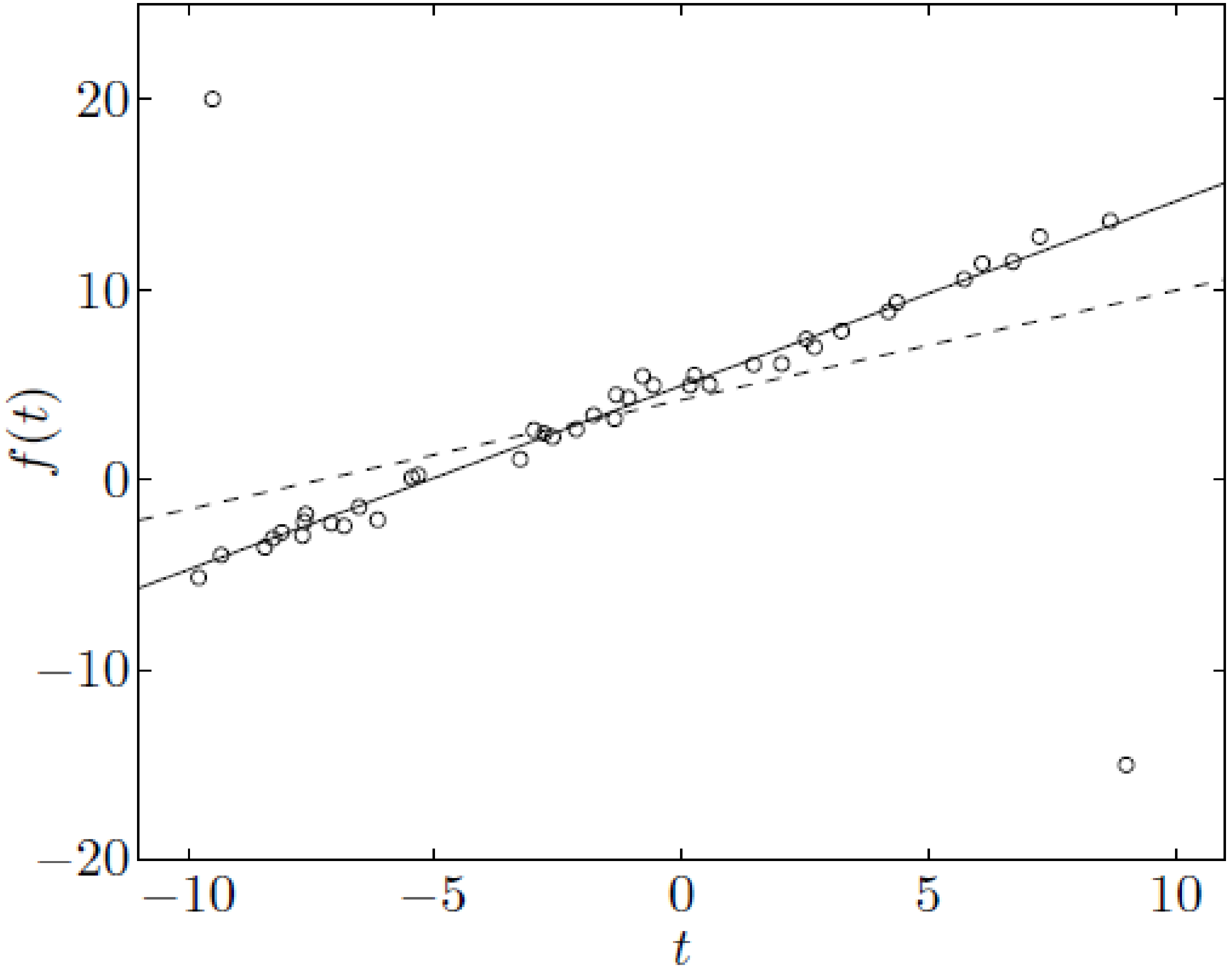
p = 1
p = 2
Deadzone
Log barrier
40
10
20
10
0
−2
−1
0
1
2

鲁棒的罚函数

- 某些异常点导致残差值过大，影响逼近的效果。
- 若 $|r|$ 大到一定程度时，罚函数为 $|r|$ 的线性函数，则称该罚函数为鲁棒的罚函数。
- **Huber罚函数**

$$\phi(r)=\begin{cases} r^2 & |r|\le M \\ M(2|r|-M) & |r|>M \end{cases}$$

鲁棒的罚函数



最小范数问题

- 问题描述：$\text{minimize} \quad \|x\|$

  $$\text{subject to} \quad Ax = b, A \in R^{m\times n}, m < n$$

- 可以消去等式约束将其转换为范数逼近问题：

  $$\text{minimize} \quad \|x_0 + zu\|$$

  其中 $x_0 + zu$为方程组 $Ax = b$的解。

最小范数问题

- 最小平方范数问题：范数 $\|\square\|_2$，最优解满足：

$$2x^* + A^T\nu^* = 0, Ax^* = b$$

- 最小罚问题：

$$\begin{aligned}&\text{minimize} \quad \sum_{i=1}^{n}\phi(x_i)\\&\text{subject to} \quad Ax = b\end{aligned}$$

- 绝对值和最小问题：范数 $\|\square\|_1$，原问题可转换为**LP**问题：

$$\begin{aligned}&\text{minimize} \quad 1^T y\\&\text{subject to} \quad Ax = b, -y \preceq x \preceq y\end{aligned}$$

正则逼近

- 二元矢量优化问题描述：

$$\text{minimize}(\text{w.r.t. } R_+^2) \quad (\|Ax-b\|, \|x\|)$$

- 正则化问题：

$$\text{minimize} \quad \|Ax-b\| + \gamma\|x\|, \gamma > 0$$

最优解描述了两分量的一条折中曲线。

正则逼近

- **Tikhonov**正则化问题：

$$\text{minimize} \quad \|Ax-b\|^2+\delta\|x\|^2, \delta>0$$

为二次优化问题：

$$\text{minimize} \quad x^T(A^TA+\delta I)x-2b^TAx+b^Tb$$

最优解的形式：

$$x=(A^TA+\delta I)^{-1}A^Tb$$

正则逼近

- **Tikhonov光滑正则化问题：**

$$\text{minimize} \quad \|Ax-b\|^2+\delta\|\Delta x\|^2, \delta>0$$

Δx 为二阶差分算子：

$$\Delta x = n^2 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} x$$

信号复原

- 已知加噪信号：

$$x_{cor} = x + v$$

信号复原问题的描述：

$$\text{minimize(w.r.t. } R_+^2) \quad (\|\hat{x} - x_{cor}\|_2, \phi(\hat{x}))$$

函数 $\phi(\hat{x}): R^n \to R$ 为正则函数或光滑函数。

$$\phi_{quad}(\hat{x}) = \sum_{i=1}^{n-1} (\hat{x}_{i+1} - \hat{x}_i)^2 \qquad \phi_{tv}(\hat{x}) = \sum_{i=1}^{n-1} |\hat{x}_{i+1} - \hat{x}_i|$$

鲁棒逼近（随机）

- 问题描述：minimize $\|Ax-b\|, A$不确定
- 随机鲁棒逼近：A 为随机变量，逼近问题转换为最小化期望

$$\text{minimize} \quad \mathrm{E}(\|Ax-b\|)$$

- 例： $$P(A=A_i)=p_i$$

随机鲁棒逼近为：

$$\text{minimize} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i \|A_i x-b\|$$

转换为：

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & p^T t \\ \text{subject to} & \|A_i x-b\| \le t_i, i=1,\ldots,n \end{array}$$

最坏情况鲁棒逼近

- 考虑 $A \in I_A$，最坏情况鲁棒逼近为：

$$\text{minimize} \quad \sup_{A \in I_A} (\|Ax - b\|)$$

函数拟合与插值

- 函数的最小范数拟合
- 最小范数插值
- 稀疏描述与基筛选

Summary

- 范数逼近：罚函数
- 最小范数问题

- 正则化逼近
- 鲁棒逼近：随机、最坏

- 函数拟合与插值