http://shijuanfeng.blogbus.com/
转发请注明出处
From 我的同学兼同事kxb

等式约束优化

2014.01.06

KongXiangbin

等式约束优化

- 等式约束优化问题的解析方法
- 等式约束的Newton方法
- 等式约束不可行初始点的Newton方法

等式约束优化解析方法

问题描述：

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad f(x) \\ &\text{subject to} \quad Ax = b \end{aligned}$$

$f(x)$**为凸函数，且二次连续可微，且**

$$A \in R^{p \times n}, p < n, \operatorname{rank} A = p$$

等式约束优化解析方法

- 例子
- Minimize $f(x) = \|x\|_2^{\,2} = x_1^{\,2} + x_2^{\,2}$
- Subject to $A = (1,1), b = 1$

$$Ax = b \Rightarrow x_1 + x_2 = 1$$

- **消除法**

- **KKT方程**

消除法

方程组 $Ax=b$ 的解集：

$$\{x \mid Ax=b\}=\{Fz+\tilde{x} \mid z\in R^{n-p}\}$$

$\tilde{x}$ 为方程组的一个特解， F 为 A 的零空间任何矩阵。

无约束优化形式：

$$\text{minimize} \quad f(Fz+\tilde{x}), z\in R^{n-p}$$

若 z^*为最优解，则有

$$x^*=Fz^*+\tilde{x} \qquad \nu^*=-(A^TA)^{-1}A\nabla f(x^*)$$

消除法

$$\min f(x) = x_1^2 + x_2^2$$

$$s.t \quad x_1 + x_2 = 1$$

$$F = (-1,1) \qquad \tilde{x} = (0,1)$$

根据消除法，消除等式约束简化为

Min

$$f(Fz + \tilde{x}) = f(-z, z + 1) = 2z^2 + 2z + 1$$

$$z^* = -\frac{1}{2} \Rightarrow x^* = Fz^* + \tilde{x} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

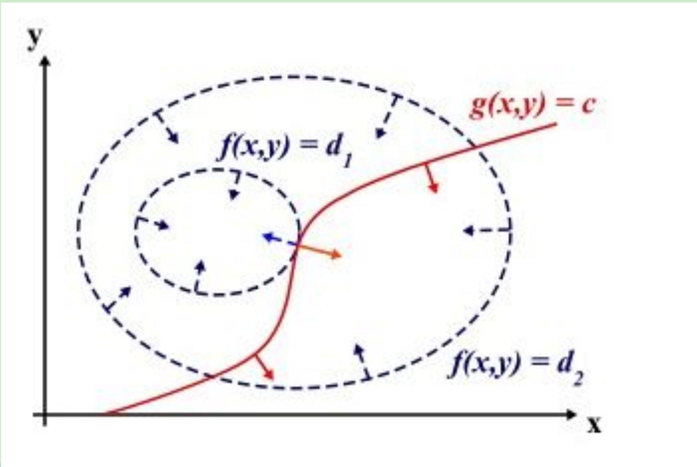
KKT方程

假设最优值 p^***存在，则** x^***为最优解当且仅当存在** ν^***，满足（KKT条件）：**

$$\nabla f(x^*) + A^T\nu^* = 0, Ax^* = b$$

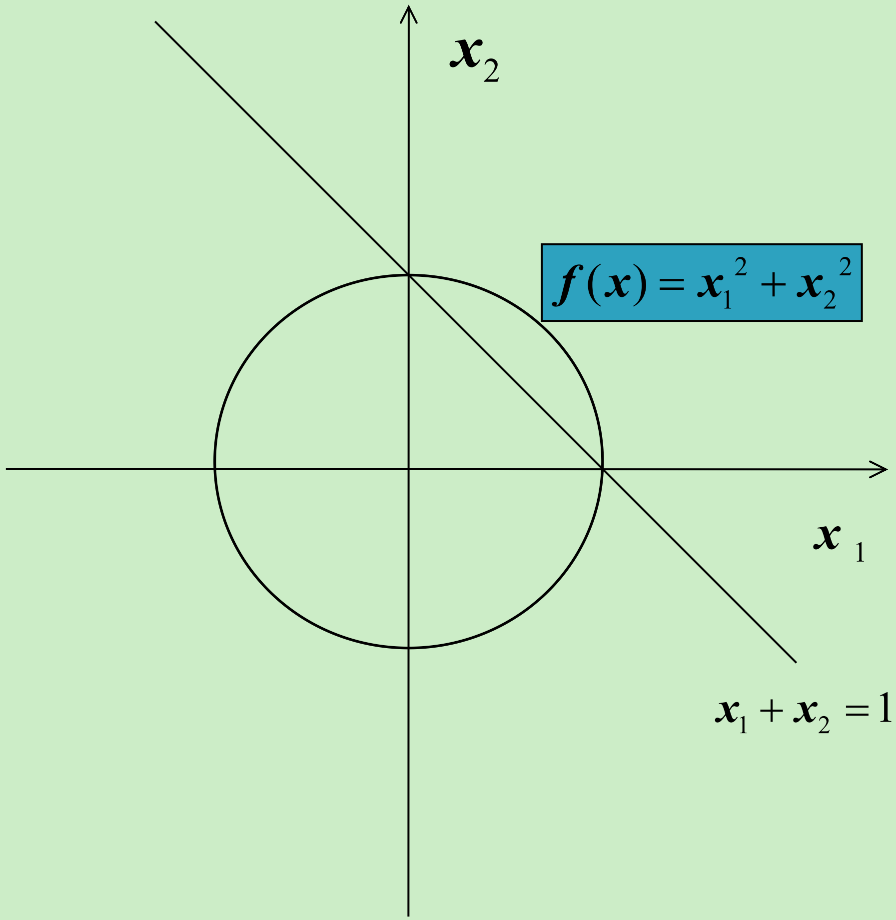
理解：对于

$$\min \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$
$$\text{s.t} \quad \mathrm{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}$$



KKT方程

$$\min f(x) = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2}$$
$$s.t \quad x_1 + x_2 = 1$$



二次优化： minimize $\frac{1}{2}x^T Px + q^T x + r, P \in S_+^n$

subject to $Ax = b$

KKT系统：

$$\begin{bmatrix} P & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ \nu^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q \\ b \end{bmatrix}$$

KKT系统可解，则二次优化问题存在最优解。

系数矩阵称为KKT矩阵。KKT矩阵非奇异当且仅当：

$$Ax = 0, x \neq 0 \Rightarrow x^T Px > 0$$

牛顿法

x 为等式约束优化的可行解，则在 x 附近原问题的二次近似为：

$$\begin{aligned}&\text{minimize} \quad \hat{f}(x+v) = f(x) + \nabla f(x)^T v + \frac{1}{2} v^T \nabla^2 f(x) v \\ &\text{subject to} \quad A(x+v) = b\end{aligned}$$

设 Δx_{nt} 和 ω 分别为该问题和对偶问题的最优解，则满足：

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 f(x) & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_{nt} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla f(x) \\ 0 \end{bmatrix}$$

牛顿减量

$$\lambda(x) = (\Delta x_{nt}^T \nabla^2 f(x)^{-1} \Delta x_{nt})^{1/2}$$

牛顿减量

牛顿减量 $$\lambda(x) = (\Delta x_{nt}^T \nabla^2 f(x)^{-1} \Delta x_{nt})^{1/2}$$

牛顿减量的性质：

$$f(x) - \inf\{\widehat{f}(x+v) \mid A(x+v) = b\} = \frac{1}{2}\lambda(x)^2$$

性质2：牛顿减量具有仿射不变性。

等式约束的牛顿方法

初始化：给定初始解 $x \in \mathrm{dom} f$ **满足** $Ax = b$**，以及** $\varepsilon > 0$

LOOP：

计算 Δx_{nt} **及** λ^2**；**

若 $\lambda^2 / 2 < \varepsilon$ **则终止退出；**

一维线性搜索：计算步长因子 t**；**

迭代： $x = x + t\Delta x_{nt}$

可行下降方向

可行下降方向：设 x 满足方程组 $Ax=b$ 。若 v满足方程组 $Av=0$ ，则 $A(x+tv)=b$ 。v称为可行方向。若对于较小的 $t>0$，有 $f(x+tv)<f(x)$ ，则v 为可行下降方向。

非可行解为初始点的牛顿法

x 为等式约束优化的非可行解，则增量 Δx 应尽可能使满足KKT条件，即：$x+\Delta x$

$$A(x+\Delta x)=b \qquad \nabla f(x+\Delta x)+A^T\omega=0$$

函数 $f(x)$ 二阶连续可微，因此有

$$\nabla f(x+\Delta x)\approx\nabla f(x)+\nabla^2 f(x)\Delta x$$

设 Δx_{nt}和 ω 为KKT条件的解，即有：

$$\begin{bmatrix}\nabla^2 f(x) & A^T \\ A & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x_{nt} \\ \omega\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\nabla f(x) \\ Ax-b\end{bmatrix}$$

非可行解为初始点的牛顿法

- 由于在不可行点处计算得到的牛顿方向不一定是f的下降方向，因此，牛顿减量衡量迭代终止不适用，定义残差:

$$r(x,v)=(r_{dual}(x,v),r_{pri}(x,v))$$

$$r_{dual}(x,v)=\nabla f(x)+Av$$

$$r_{pri}(x,v)=Ax-b$$

在沿着牛顿方向上 $\|r\|_2$ 一定是下降的。

非可行解为初始点的牛顿法

初始化：给定初始解 $x \in \mathrm{dom} f$ **及** v **，以及** $\varepsilon > 0$

LOOP：

计算 Δx_{nt} **和** Δv_{nt} **；**

回溯一维线性搜索：

令 $t = 1$ **；**

While $\|r(x + t\Delta x_{nt}, v + t\Delta v_{nt})\|_2 \geq (1 - \alpha t)\|r(x, v)\|_2$

$$t = \beta t$$

迭代： $x = x + t\Delta x_{nt}$ $\quad v = v + t\Delta v_{nt}$

当 $Ax = b$ **且** $\|r(y)\|_2 < \varepsilon$ **时，终止迭代。**

谢谢