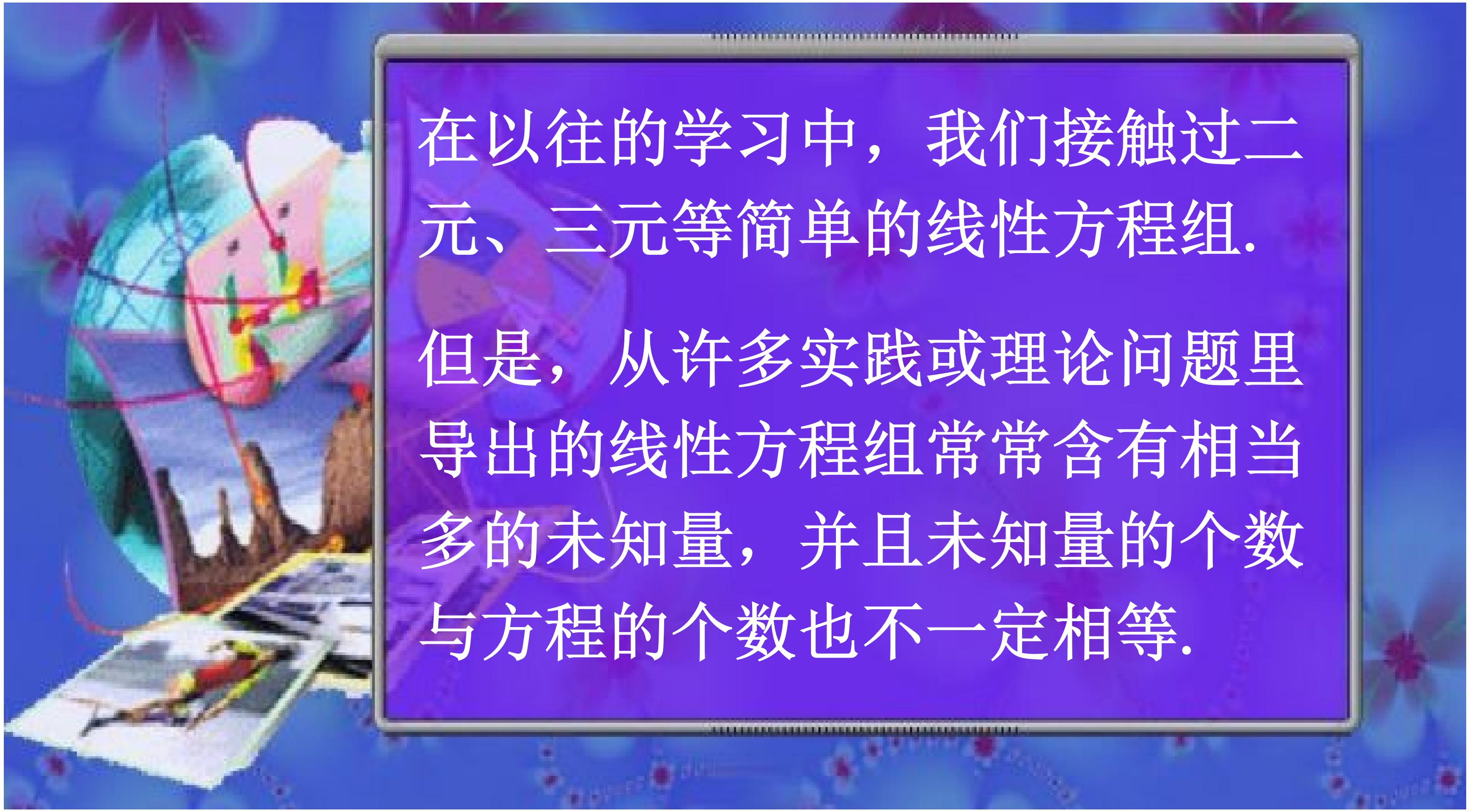
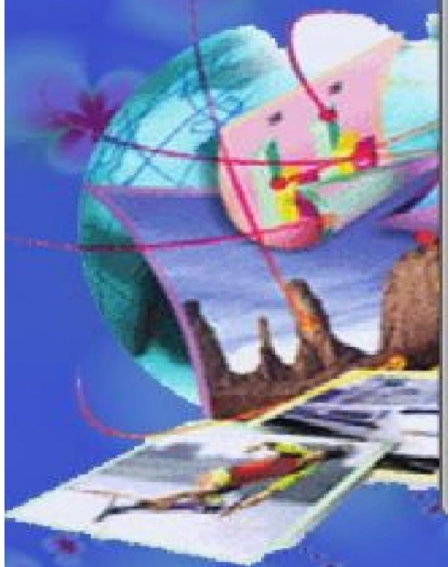
线性代数（第五版）

2013.12.14修改汇总

修改人：**xiaobei93521**


在以往的学习中，我们接触过二元、三元等简单的线性方程组.
但是，从许多实践或理论问题里导出的线性方程组常常含有相当多的未知量，并且未知量的个数与方程的个数也不一定相等.



我们先讨论未知量的个数与方程的个数相等的特殊情形.

在讨论这一类线性方程组时，我们引入行列式这个计算工具.

第一章

•行列式是线性代数的一种工具！
•学习行列式主要就是要能计算行列式的值.

- 内容提要

§1　二阶与三阶行列式
§2　全排列及其逆序数
§3　n 阶行列式的定义

行列式的概念

§4　对换（选学内容）
§5　行列式的性质
§6　行列式按行（列）展开

行列式的性质及计算

§7　克拉默法则 —— 线性方程组的求解

§1　二阶与三阶行列式

我们从最简单的二元线性方程组出发，探求其求解公式，并设法化简此公式.

一、二元线性方程组与二阶行列式

二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$

由消元法，得 $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，该方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

二元线性方程组

$$\begin{cases} \boxed{a_{11}}x_1 + \boxed{a_{12}}x_2 = b_1 \\ \boxed{a_{21}}x_1 + \boxed{a_{22}}x_2 = b_2 \end{cases}$$

求解公式为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{\boxed{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{\boxed{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}} \end{cases}$$

请观察，此公式有何特点？

- 分母相同，由方程组的四个系数确定.
- 分子、分母都是四个数分成两对相乘再相减而得.

我们引进新的符号来表示“四个数分成两对相乘再相减”.

二元线性方程组

$$\begin{cases} \boxed{a_{11}}x_1 + \boxed{a_{12}}x_2 = b_1 \\ \boxed{a_{21}}x_1 + \boxed{a_{22}}x_2 = b_2 \end{cases}$$

其求解公式为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{\boxed{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{\boxed{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}} \end{cases}$$

原则：横行竖列

$\Rightarrow$ 数表 $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$ $\Rightarrow$ 记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

表达式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为由该数表所确定的二阶行列式，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

其中，$a_{ij}(i = 1,2; j = 1,2)$ 称为元素.

i 为行标，表明元素位于第i 行；

j 为列标，表明元素位于第j 列.

二阶行列式的计算 ——对角线法则

主对角线

副对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

即：主对角线上两元素之积－副对角线上两元素之积

二元线性方程组 $\begin{cases} \boxed{a_{11}}x_1 + \boxed{a_{12}}x_2 = b_1 \\ \boxed{a_{21}}x_1 + \boxed{a_{22}}x_2 = b_2 \end{cases}$

若令 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ （方程组的系数行列式）

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

则上述二元线性方程组的解可表示为

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} = \frac{D_1}{D}$$

$$x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} = \frac{D_2}{D}$$

例1　求解二元线性方程组 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$

解　因为 $D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-4) = 7 \neq 0$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 12 - (-2) = 14$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 24 = -21$$

所以 $x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{14}{7} = 2,\qquad x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{-21}{7} = -3$

二、三阶行列式

定义　设有9个数排成3行3列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

原则：横行竖列

引进记号

主对角线

副对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

称为三阶行列式.

二阶行列式的对角线法则并不适用！

三阶行列式的计算 ——对角线法则

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

实线上的三个元素的乘积冠正号，

虚线上的三个元素的乘积冠负号.

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

注意：对角线法则只适用于二阶与三阶行列式.

例2 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

解 按对角线法则，有

$$D = 1\times 2\times(-2) + 2\times 1\times(-3) + (-4)\times(-2)\times 4$$

$$-1\times 1\times 4 - 2\times(-2)\times(-2) - (-4)\times 2\times(-3)$$

$$= -4 - 6 + 32 - 4 - 8 - 24$$

$$= -14.$$

例3　求解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0.$

解　方程左端

$$D = 3x^2 + 4x + 18 - 9x - 2x^2 - 12$$

$$= x^2 - 5x + 6,$$

由 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 得

$x = 2$ 或 $x = 3.$

§2　全排列及其逆序数

引例 用1、2、3三个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数？

解 $\overbrace{\quad\mathbf{1}\qquad\mathbf{2}\qquad\mathbf{3}\quad}$

百位	$\boxed{1}\ \boxed{}\ \boxed{}$	$\boxed{2}\ \boxed{}\ \boxed{}$	$\boxed{3}\ \boxed{}\ \boxed{}$	3种放法
十位	$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{}$	$\boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{}$		2种放法
个位	$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}$			1种放法

共有 $3\times 2\times 1=6$ 种放法.

问题　把 n 个不同的元素排成一列，共有多少种不同的排法？

定义　把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的全排列．n 个不同元素的所有排列的种数，通常用 P_n 表示.

显然　$P_n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$

即 n 个不同的元素一共有 $n!$ 种不同的排法.

3个不同的元素一共有3! =6种不同的排法

123，132，213，231，312，321

所有6种不同的排法中，只有一种排法（123）中的数字是按从小到大的自然顺序排列的，而其他排列中都有大的数排在小的数之前.

因此大部分的排列都不是“顺序”，而是“逆序”.

对于n个不同的元素，可规定各元素之间的标准次序.

n个不同的自然数，规定从小到大为标准次序.

定义　当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就称这两个元素组成一个逆序.

例如　在排列32514中，

逆序

3　2　5　1　4

逆序　　逆序

思考题：还能找到其它逆序吗？

答：**2**和**1**，**3**和**1**也构成逆序.

定义 排列中所有逆序的总数称为此排列的**逆序数**.

排列$i_1 i_2 \cdots i_n$的逆序数通常记为$t(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

奇排列：逆序数为奇数的排列.

偶排列：逆序数为偶数的排列.

思考题：符合标准次序的排列是奇排列还是偶排列？

答：符合标准次序的排列（例如：123）的逆序数等于零，因而是偶排列.

计算排列的逆序数的方法

设 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 是 1, 2, …, n 这 n 个自然数的任一排列，并规定由小到大为标准次序.

先看有多少个比 p_1 大的数排在 p_1 前面，记为 t_1；

再看有多少个比 p_2 大的数排在 p_2 前面，记为 t_2；

……

最后看有多少个比 p_n 大的数排在 p_n 前面，记为 t_n；

则此排列的逆序数为 $t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n$

例1： 求排列 32514 的逆序数.

解： $t(32514)=0+1+0+3+1=5$

练习： 求排列 453162 的逆序数.

解： $t=9$

§3　n 阶行列式的定义

一、概念的引入

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

规律：

1. 三阶行列式共有6项，即3!项.
2. 每一项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积.
3. 每一项可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ （正负号除外），其中$p_1p_2p_3$ 是1、2、3的某个排列.
4. 当$p_1p_2p_3$ 是偶排列时，对应的项取正号；
   当 $p_1p_2p_3$ 是奇排列时，对应的项取负号.

所以，三阶行列式可以写成

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$=\sum_{p_1p_2p_3}(-1)^{t(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

其中 $\sum\limits_{p_1p_2p_3}$ 表示对1、2、3的所有排列求和.

二阶行列式有类似规律. 下面将行列式推广到一般的情形.

二、n 阶行列式的定义

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

简记作 $\det(a_{ij})$ ，

其中 a_{ij} 为行列式 D 的 (i,j) 元

1. n 阶行列式共有 $n!$ 项.
2. 每一项都是位于不同行不同列的 n 个元素的乘积.
3. 每一项可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$（正负号除外），其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 是1, 2, …, n 的某个排列.
4. 当 $p_1p_2\cdots p_n$ 是偶排列时，对应的项取正号；

   当 $p_1p_2\cdots p_n$ 是奇排列时，对应的项取负号.

思考题：$\left|-1\right| = -1$成立吗？

答：符号$\left|-1\right|$可以有两种理解：

✓若理解成绝对值，则$\left|-1\right| = +1$；

✓若理解成一阶行列式，则$\left|-1\right| = -1$.

注意：当$n = 1$时，一阶行列式$|a| = a$，注意不要与绝对值的记号相混淆. 例如：一阶行列式$\left|-1\right| = -1$.

例：写出四阶行列式中含有因子$a_{11}a_{23}$的项.

解：$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 和 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$.

例：计算行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} \qquad D_2=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} \qquad D_4=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

解：

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{t(4321)}a_{14}a_{23}a_{33}a_{41}=a_{14}a_{23}a_{33}a_{41}$$

其中 $t(4321)=0+1+2+3=\dfrac{3\times 4}{2}=6.$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{14}a_{23}a_{33}a_{41}$$

四个结论:

（1）　对角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

（2）

$$D=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=\boxed{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

（3） 上三角形行列式 （主对角线下侧元素都为0）

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

（4） 下三角形行列式 （主对角线上侧元素都为0）

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

思考题：用定义计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

解：用树图分析

$$\begin{array}{llllll}
 & & 3 & \text{——} & -1 & \tau(2134)=1 \\
 & 1 & & & & \\
 & & 1 & \text{——} & -2 & \tau(2143)=2 \\
-1 & & & & & \\
 & & 2 & \text{——} & -2 & \tau(2413)=3 \\
 & 3 & & & & \\
 & & 3 & \text{——} & -1 & \tau(2431)=4
\end{array}$$

故 $D=-3+2-12+9=-4$

思考题

已知 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$，求$x^3$的系数.

解　含 x^3 的项有两项，即

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$$

对应于

$$(-1)^{t(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} \quad +(-1)^{t(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$$

$$(-1)^{t(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = x^3,$$

$$(-1)^{t(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} = -2x^3$$

故 x^3 的系数为 -1.

§4　对换

一、对换的定义

定义　在排列中，将任意两个元素对调，其余的元素不动，这种作出新排列的手续叫做**对换**.

将相邻两个元素对换，叫做**相邻对换**.

例如

$$a_1 \cdots a_l\ a\ b\ b_1 \cdots b_m \qquad a_1 \cdots a_l\ a\ b_1 \cdots b_m\ b\ c_1 \cdots c_n$$

$$\downarrow$$

$$a_1 \cdots a_l\ b\ a\ b_1 \cdots b_m \qquad a_1 \cdots a_l\ b\ b_1 \cdots b_m\ a\ c_1 \cdots c_n$$

备注

1. 相邻对换是对换的特殊情形.

2. 一般的对换可以通过一系列的相邻对换来实现.

3. 如果连续施行两次相同的对换，那么排列就还原了.

$$a_1 \cdots a_l\ a\ b_1 \cdots b_m b\ c_1 \cdots c_n$$

$$\xrightarrow{m\text{ 次相邻对换}} a_1 \cdots a_l\ a\ b\ b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_n$$

$$\xrightarrow{m+1\text{次相邻对换}} a_1 \cdots a_l\ b\ b_1 \cdots b_m a\ c_1 \cdots c_n$$

$$\xrightarrow{m\text{ 次相邻对换}} a_1 \cdots a_l\ b\ a\ b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_n$$

$$\xrightarrow{m+1\text{次相邻对换}} a_1 \cdots a_l\ a\ b_1 \cdots b_m b\ c_1 \cdots c_n$$

二、对换与排列奇偶性的关系

定理1　对换改变排列的奇偶性.

证明　先考虑相邻对换的情形.

$$t = t_{a_1} + \cdots + t_{a_l} + t_a + t_b + t_{b_1} + \cdots + t_{b_m}$$

$$a_1 \cdots a_l \; a \; b \; b_1 \cdots b_m$$

$$\Downarrow$$

$$a_1 \cdots a_l \; b \; a \; b_1 \cdots b_m$$

$$r = t_{a_1} + \cdots + t_{a_l} + r_b + r_a + t_{b_1} + \cdots + t_{b_m}$$

$$t = \boxed{t_{a_1} + \cdots + t_{a_l}} + t_a + t_b + \boxed{t_{b_1} + \cdots + t_{b_m}}$$

$$a_1 \cdots a_l \; a \; b \; b_1 \cdots b_m$$

$$\Downarrow$$

$$a_1 \cdots a_l \; b \; a \; b_1 \cdots b_m$$

$$r = \boxed{t_{a_1} + \cdots + t_{a_l}} + r_b + r_a + \boxed{t_{b_1} + \cdots + t_{b_m}}$$

注意到除 a,b 外，其它元素的逆序数不改变.

$$t = t_{a_1} + \cdots + t_{a_l} + t_a + t_b + t_{b_1} + \cdots + t_{b_m}$$

$$a_1 \cdots a_l \; a \; b \; b_1 \cdots b_m$$

$$\Downarrow$$

$$a_1 \cdots a_l \; b \; a \; b_1 \cdots b_m$$

$$r = t_{a_1} + \cdots + t_{a_l} + r_b + r_a + t_{b_1} + \cdots + t_{b_m}$$

当 $a < b$ 时, $r_a = t_a + 1$ ， $r_b = t_b$ ， $r = t + 1$.

当 $a > b$ 时, $r_a = t_a$ ， $r_b = t_b - 1$ ， $r = t - 1$.

因此相邻对换改变排列的奇偶性.

既然相邻对换改变排列的奇偶性，那么

$$a_1 \cdots a_l \, a \, b_1 \cdots b_m \, b \, c_1 \cdots c_n$$

$$\xrightarrow{2m+1\text{次相邻对换}} a_1 \cdots a_l \, b \, b_1 \cdots b_m \, a \, c_1 \cdots c_n$$

因此，一个排列中的任意两个元素对换，排列的奇偶性改变.

推论　奇排列变成标准排列的对换次数为奇数，

偶排列变成标准排列的对换次数为偶数.

证明　由定理1知，对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而标准排列是偶排列(逆序数为零)，因此可知推论成立.

因为数的乘法是可以交换的，所以 n 个元素相乘的次序是可以任意的，即

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2},\cdots,a_{i_nj_n}=a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$$

每作一次交换，元素的行标与列标所成的排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 都同时作一次对换，即 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 同时改变奇偶性，但是这两个排列的逆序数之和的奇偶性不变.

设对换前行标排列的逆序数为 s，列标排列的逆序数为 t .

设经过一次对换后行标排列的逆序数为 s'

列标排列的逆序数为 t'

因为对换改变排列的奇偶性，$s'-s$是奇数，$t'-t$ 也是奇数.

所以 $(s'-s)+(t'-t)$是偶数，

即$(s'+t')-(s+t)$ 是偶数.

于是$(s'+t')$ 与 $(s+t)$ 同时为奇数或同时为偶数.

因此，交换 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2},\cdots,a_{i_nj_n}$中任意两个元素的位置后，

其行标排列与列标排列的逆序数之和的奇偶性不变.

经过一次对换是如此，经过多次对换还是如此. 所以，在一系列对换之后有

$$(-1)^{t(i_1 i_2 \cdots i_n)+t(j_1 j_2 \cdots j_n)} = (-1)^{t(12 \cdots n)+t(p_1 p_2 \cdots p_n)}$$

$$= (-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)}$$

定理2 n 阶行列式也可定义为

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$$

定理3 n 阶行列式也可定义为

$$D=\sum_{\substack{i_1i_2\cdots i_n\\ j_1j_2\cdots j_n}}(-1)^{t(i_1i_2\cdots i_n)+t(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

例1 试判断$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 和 $-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$ 是否都是六阶行列式中的项.

解 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$下标的逆序数为

$$t(431265) = 0+1+2+2+0+1 = 6$$

所以$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$是六阶行列式中的项.

$-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$行标和列标的逆序数之和

$$t(341526)+t(234156) = 5+3 = 8$$

所以 $-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$不是六阶行列式中的项.

例2 用行列式的定义计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$$

解 $D_n = (-1)^t a_{1,n-1} a_{2,n-2} \cdots a_{n-1,1} a_{nn}$

$= (-1)^t 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$

$= (-1)^t n!$

$t\left[(n-1)(n-2)\cdots 21n\right]$

$= (n-2) + (n-3) + \cdots + 2 + 1$

$= (n-1)(n-2)/2$

$$D_n = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n!$$

三、小结

1. 对换改变排列奇偶性.

2. 行列式的三种表示方法

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$$

$$D=\sum_{\substack{i_1i_2\cdots i_n\\ j_1j_2\cdots j_n}}(-1)^{t(i_1i_2\cdots i_n)+t(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

§5　行列式的性质

一、行列式的性质

记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$, $D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

行列式 D^T 称为行列式 D 的转置行列式.

若记 $D=\det(a_{ij})$, $D^T=\det(b_{ij})$ ，则 $b_{ij}=a_{ji}$.

性质1　行列式与它的转置行列式相等, 即 $D=D^T$.

性质1　行列式与它的转置行列式相等.

证明　若记 $D=\det(a_{ij})$, $D^T=\det(b_{ij})$ ，则

$$b_{ij}=a_{ij}\left(i,j=1,2,\quad ,n\right)$$

根据行列式的定义，有

$$D^T=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}$$

$$=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$$

$$=D$$

行列式中行与列具有同等的地位, 行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立.

性质2　互换行列式的两行（列），行列式变号.

备注： 交换第 i 行（列）和第 j 行（列），记作 $r_i \leftrightarrow r_j (c_i \leftrightarrow c_j)$.

验证

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = -196 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \\ 6 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 196$$

于是

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \\ 6 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

推论　如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式为零.

证明　互换相同的两行，有 $D = -D$，所以 $D = 0$.

性质3 行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一个倍数k，等于用数k乘以此行列式.

备注： 第i行（列）乘以k，记作$r_i \times k(c_i \times k)$.

验证 我们以三阶行列式为例．记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

根据三阶行列式的对角线法则，有

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(ka_{22})a_{33} + a_{12}(ka_{23})a_{31} + a_{13}(ka_{21})a_{32}$$
$$- a_{13}(ka_{22})a_{31} - a_{12}(ka_{21})a_{33} - a_{11}(ka_{23})a_{32}$$

$$= k\begin{pmatrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{pmatrix}$$

$$= kD$$

推论　行列式的某一行（列）中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

备注：第i行（列）提出公因子k，记作$r_i \div k(c_i \div k)$.

性质4　行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式为零.

验证　我们以4阶行列式为例.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & ka_{14} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0$$

性质5　若行列式的某一列（行）的元素都是两数之和，

例如：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

则　$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

验证　我们以三阶行列式为例.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{p_1p_2p_3}(-1)^{t(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}(a_{2p_2}+b_{2p_2})a_{3p_3}$$

$$=\sum_{p_1p_2p_3}(-1)^{t(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}+\sum_{p_1p_2p_3}(-1)^{t(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}b_{2p_2}a_{3p_3}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质6　把行列式的某一列（行）的各元素乘以同一个倍数然后加到另一列(行)对应的元素上去，行列式不变.

备注：以数 k 乘第 j 行（列）加到第 i 行（列）上，记作 $r_i + kr_j (c_i + kc_j)$.

验证　我们以三阶行列式为例．记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + ka_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + ka_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + ka_{33} & a_{33} \end{vmatrix}$$

则 $D = D_1$.

二、应用举例

计算行列式常用方法：利用运算 $r_i + kr_j$ 把行列式化为上三角形行列式，从而算得行列式的值.

例 1

$$D = \begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccccc} \boxed{1 & -1 & 2 & -3 & 1} \\ -3 & 3 & -7 & 9 & -5 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{array} \right| \end{array} \begin{array}{l} \times 3 \\ \oplus \end{array}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} \boxed{1 & -1 & 2 & -3 & 1} \\ -3 & 3 & -7 & 9 & -5 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix} \times 3 \oplus$$

$$\underline{\underline{r_2 + 3r_1}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix}$$

$$
\underline{\underline{r_2 + 3r_1}}
\begin{vmatrix}
\boxed{1 \quad -1 \quad 2 \quad -3 \quad 1} \\
0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\
2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\
3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\
4 & -4 & 10 & -10 & 2
\end{vmatrix}
\begin{array}{l} \times(-2) \\ \oplus \\ \\ \\ \\ \end{array}
$$

$$
\underline{\underline{r_2 - 2r_1}}
\begin{array}{l} (-4)\times \\ \\ \oplus \\ \\ \\ \end{array}
\begin{vmatrix}
\boxed{1 \quad -1 \quad 2 \quad -3 \quad 1} \\
0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\
0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\
3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\
4 & -4 & 10 & -10 & 2
\end{vmatrix}
\begin{array}{l} \times(-3) \\ \\ \oplus \\ \\ \\ \end{array}
$$

$$\xlongequal[r_4-4r_1]{r_3-3r_1}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_4} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3+r_2} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \oplus$$

$$\xlongequal{r_4+r_3} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \times(-2) \\ \oplus \\ \\ \end{matrix}$$

$$\overset{r_5 - 2r_3}{=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-1} & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 \end{vmatrix} \times 4 \oplus$$

$$\overset{r_5 + 4r_4}{=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -(-2)(-1)(-6) = 12.$$

例2　计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & b & \Lambda & b \\ b & a & b & \Lambda & b \\ b & b & a & \Lambda & b \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ b & b & b & \Lambda & a \end{vmatrix}$$

解　将第 $2,3,\Lambda\ ,n$ 列都加到第一列得

$$D=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \Lambda & b \\ a+(n-1)b & a & b & \Lambda & b \\ a+(n-1)b & b & a & \Lambda & b \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ a+(n-1)b & b & b & \Lambda & a \end{vmatrix}$$

$$=\left[a+(n-1)b\right]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=\left[a+(n-1)b\right]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ & a-b & & & \\ & & a-b & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & & a-b \end{vmatrix}=\left[a+(n-1)b\right](a-b)^{n-1}.$$

例3 设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$

$$D_1=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},\ D_2=\det(b_{ij})=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

证明 $D=D_1D_2.$

证明

对 D_1 作运算 $r_i + kr_j$ ，把 D_1 化为下三角形行列式

设为 $$D_1 = \begin{vmatrix} p_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix} = p_{11} \cdots p_{kk};$$

对 D_2 作运算 $c_i + kc_j$，把 D_2 化为下三角形行列式

设为 $$D_2 = \begin{vmatrix} q_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ q_{n1} & \cdots & p_{nk} \end{vmatrix} = q_{11} \cdots q_{nn}.$$

对 D 的前 k 行作运算 $r_i + kr_j$，再对后 n 列作运算 $c_i + kc_j$，把 D 化为下三角形行列式

$$
D = \begin{vmatrix}
p_{11} & & & & & \\
\vdots & \ddots & & & 0 & \\
p_{k1} & \cdots & p_{kk} & & & \\
c_{11} & \cdots & c_{1k} & q_{11} & & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\
c_{n1} & \cdots & c_{nk} & q_{n1} & \cdots & q_{nn}
\end{vmatrix},
$$

故 $D = p_{11} \cdots p_{kk} \cdot q_{11} \cdots q_{nn} = D_1 D_2$.

三、小结

　　行列式的6个性质(行列式中行与列具有同等的地位，凡是对行成立的性质对列也同样成立).

　　计算行列式常用方法：(1)利用定义;(2)利用性质把行列式化为上三角形行列式，从而算得行列式的值.

思考题

计算4阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a^2+\frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2+\frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2+\frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2+\frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix} \qquad (\text{已知 } abcd=1)$$

思考题解答

解

$$D=\begin{vmatrix} a^2 & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2 & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2 & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2 & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ \frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ \frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ \frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= abcd\begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix} + (-1)^3 \begin{vmatrix} a & 1 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ b & 1 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ c & 1 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \\ d & 1 & \frac{1}{d^2} & \frac{1}{d} \end{vmatrix}$$

$$= 0.$$

§6　行列式按行(列)展开

•对角线法则只适用于二阶与三阶行列式.
•本节主要考虑如何用低阶行列式来表示高阶行列式.

一、引言

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) + a_{12}\left(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right)$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

结论　三阶行列式可以用二阶行列式表示.

思考题　任意一个行列式是否都可以用较低阶的行列式表示？

在n阶行列式中，把元素a_{ij}所在的第i行和第j列划后，留下来的$n-1$阶行列式叫做元素a_{ij}的余子式，记作M_{ij}.

把$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$称为元素a_{ij}的代数余子式.

例如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}$$

结论　因为行标和列标可唯一标识行列式的元素，所以行列式中每一个元素都分别对应着一个余子式和一个代数余子式.

引理　一个n阶行列式，如果其中第i行所有元素除a_{ij}外都为零，那么这行列式等于a_{ij}与它的代数余子式的乘积，即$D=a_{ij}A_{ij}$.

例如 $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=a_{33}A_{33}=(-1)^{3+3}a_{33}M_{33}$$

$$=(-1)^{3+3}a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}=a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

分析 当 a_{ij} 位于第1行第1列时,

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

即有 $D=a_{11}M_{11}$.（根据P.14例10的结论）

又 $A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11}$,

从而 $D=a_{11}A_{11}$.

下面再讨论一般情形.

我们以4阶行列式为例.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \overset{r_2 \leftrightarrow r_3}{=} (-1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{=} (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^{(3-1)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

思考题：能否以$r_1 \leftrightarrow r_3$代替上述两次行变换？

思考题：能否以$r_1 \leftrightarrow r_3$代替上述两次行变换？

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \overset{\substack{r_2 \leftrightarrow r_3 \\ r_1 \leftrightarrow r_2}}{=} (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_3}{=} (-1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

答：不能.

$$=(-1)^{(3-1)}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \overset{\substack{c_3\leftrightarrow c_4\\ c_2\leftrightarrow c_3\\ c_1\leftrightarrow c_2}}{=} (-1)^{(3-1)}(-1)^{3}\begin{vmatrix} a_{34} & 0 & 0 & 0 \\ a_{14} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{24} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{44} & a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{(3-1)}(-1)^{(4-1)}\begin{vmatrix} a_{34} & 0 & 0 & 0 \\ a_{14} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{24} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{44} & a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

a_{34} 被调换到第1行，第1列

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{3+4-2}a_{34}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} = (-1)^{3+4}a_{34}M_{34} = a_{34}A_{34}$$

二、行列式按行（列）展开法则

定理3 行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \quad + a_{in}A_{in}\left(i = 1, 2, \quad , n\right)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+0+0 & 0+a_{12}+0 & 0+0+a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

同理可得 $= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$

$$= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$$

例（P.12例7续）

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \overset{c_1+(-2)c_3}{\underset{c_4+c_3}{=\!=}} \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} \overset{r_2+r_1}{=\!=} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 40.$$

例　证明范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \ge i > j \ge 1} (x_i - x_j). \quad (1)$$

证明　用数学归纳法

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{2 \ge i > j \ge 1} (x_i - x_j)$$

所以$n=2$时(1)式成立.

假设(1)对于$n-1$阶范德蒙行列式成立，从第n行开始，后行减去前行的x_1倍：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

按照第1列展开，并提出每列的公因子$(x_i - x_1)$，就有

$$
=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}
$$

$n-1$阶范德蒙德行列式

$$
\therefore \quad D_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\prod_{n\ge i>j\ge 2}(x_i-x_j)
$$

$$
=\prod_{n\ge i>j\ge 1}(x_i-x_j).
$$

推论 行列式任一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \quad + a_{in}A_{jn} = 0, \quad i \neq j.$$

分析 我们以3阶行列式为例.

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

把第1行的元素换成第2行的对应元素，则

$$a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

定理3　行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\quad+a_{in}A_{in}=D\left(i=1,2,\quad,n\right)$$

推论　行列式任一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\quad+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j.$$

综上所述，有

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\quad+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}D, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

同理可得

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\quad+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}D, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

例 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

解 $$D=\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{2+5}\,2\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{2+5} 2 \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3 + r_1]{r_2 + (-2) r_1} -10 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \end{vmatrix} = -10 \cdot (-2) \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 20 \cdot (-42 - 12) = -1080.$$

例　设 $D=\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$，$D$ 的(i,j) 元的余子式和

代数余子式依次记作M_{ij}和A_{ij}，求

$$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14} \text{ 及 } M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}.$$

分析　利用

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

解 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_3-r_1]{r_4+r_3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2+c_1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=4.$$

$$M_{11}+M_{21}+M_{34}+M_{41}=A_{11}-A_{21}+A_{31}-A_{41}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} \overset{r_4+r_3}{=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \overset{r_1-2r_3}{=\!=\!=\!=} -\begin{vmatrix} -1 & 0 & -5 \\ -1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

§7　克拉默法则

二元线性方程组 $\begin{cases} \boxed{a_{11}} x_1 + \boxed{a_{12}} x_2 = b_1 \\ \boxed{a_{21}} x_1 + \boxed{a_{22}} x_2 = b_2 \end{cases}$

若令 $$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$ (方程组的系数行列式)

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

则上述二元线性方程组的解可表示为

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} = \frac{D_1}{D}$$

$$x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} = \frac{D_2}{D}$$

一、克拉默法则

如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

的系数行列式不等于零，即 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$

那么线性方程组(1)有解并且解是唯一的，解可以表示成

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}. \qquad (2)$$

其中D_j是把系数行列式D中第 j 列的元素用方程组右端的常数项代替后所得到的n阶行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理中包含着三个结论：

• 方程组有解；（解的存在性）

• 解是唯一的；（解的唯一性）

• 解可以由公式(2)给出.

这三个结论是有联系的. 应该注意，该定理所讨论的只是系数行列式不为零的方程组，至于系数行列式等于零的情形，将在第三章的一般情形中一并讨论.

关于克拉默法则的等价命题

设
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

定理4　如果线性方程组(1)的系数行列式不等于零，则该线性方程组一定有解，而且解是唯一的．

定理4′　如果线性方程组无解或有两个不同的解，则它的系数行列式必为零.

例 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - r_2]{r_1 - 2r_2} \begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 & 13 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3 + 2c_2]{c_1 + 2c_2} -\begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix} = 27 \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 81 \qquad\qquad = -108$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -27$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 27$$

$$\therefore x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{81}{27} = 3, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-108}{27} = -4,$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-27}{27} = -1, \qquad x_4 = \frac{D_4}{D} = \frac{27}{27} = 1.$$

线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$

常数项全为零的线性方程组称为齐次线性方程组，否则称为非齐次线性方程组.

齐次线性方程组总是有解的，因为(0, 0, …， 0)就是一个解，称为零解. 因此，齐次线性方程组一定有零解，但不一定有非零解.

我们关心的问题是，齐次线性方程组除零解以外是否存在着非零解.

齐次线性方程组的相关定理

定理5　如果齐次线性方程组的系数行列式 $D \neq 0$，则齐次线性方程组只有零解，没有非零解.

定理5′　如果齐次线性方程组有非零解, 则它的系数行列式必为零.

备注

1. 这两个结论说明系数行列式等于零是齐次线性方程组有非零解的必要条件.
2. 在第三章还将证明这个条件也是充分的. 即：

齐次线性方程组有非零解 $\Longleftrightarrow$ 系数行列式等于零

练习题： 问 λ 取何值时，齐次方程组

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0, \end{cases}$$

有非零解？

解

$$D = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 4 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)$$

如果齐次方程组有非零解，则必有 $D = 0$.

所以 $\lambda = 0$、2、3 时齐次方程组有非零解.

思考题

当线性方程组的系数行列式为零时，能否用克拉默法则解方程组？为什么？此时方程组的解为何？

答：当线性方程组的系数行列式为零时，不能用克拉默法则解方程组，因为此时方程组的解为无解或有无穷多解.

三、小结

1. 用克拉默法则解线性方程组的两个条件

(1)方程个数等于未知量个数;

(2)系数行列式不等于零.

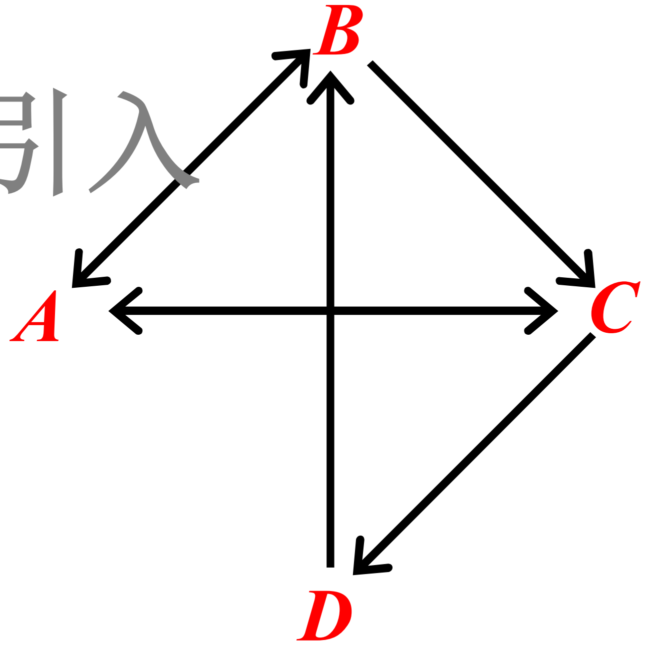
2. 克拉默法则的意义主要在于建立了线性方程组的解和已知的系数以及常数项之间的关系．它主要适用于理论推导.

第二章　矩阵及其运算

§1 矩阵

一、矩阵概念的引入
二、矩阵的定义
三、特殊的矩阵
四、矩阵与线性变换

一、矩阵概念的引入



例　某航空公司在 A、B、C、D 四座城市之间开辟了若干航线，四座城市之间的航班图如图所示，箭头从始发地指向目的地.

城市间的航班图情况常用表格来表示:

目的地

始发地	A	B	C	D
A		√	√	
B	√		√	
C	√			√
D		√		

其中 √ 表示有航班

	A	*B*	*C*	*D*
A		√	√	
B	√		√	
C	√			√
D		√		

为了便于计算，把表中的√改成1，空白地方填上0，就得到一个数表：

0	1	1	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	0	0

这个数表反映了四个城市之间交通联接的情况.

例　某工厂生产四种货物，它向三家商店发送的货物数量可用数表表示为：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{matrix}$$

其中a_{ij}表示工厂向第 i 家商店发送第 j 种货物的数量.

这四种货物的单价及单件重量也可列成数表：

$$\begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{matrix}$$

其中b_{i1}表示第 i 种货物的单价，b_{i2}表示第 i 种货物的单件重量.

二、矩阵的定义

由 $m\times n$ 个数 a_{ij} $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵．记作

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

简记为 $A=A_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}=(a_{ij})$

这 $m\times n$ 个数称为矩阵A的元素，简称为元.

元素是实数的矩阵称为实矩阵,

元素是复数的矩阵称为复矩阵.

行列式	矩阵
$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ $= \sum\limits_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$
■行数等于列数 ■共有n^2个元素	■行数不等于列数 ■共有$m \times n$个元素 ■本质上就是一个数表
$\det(a_{ij})$	$(a_{ij})_{m \times n}$

三、特殊的矩阵

1. 行数与列数都等于 n 的矩阵，称为 n 阶方阵．可记作 A_n .

2. 只有一行的矩阵 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 称为行矩阵(或行向量) .

只有一列的矩阵 $B=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 称为列矩阵(或列向量) .

3. 元素全是零的矩阵称为零距阵．可记作 O . 例如：

$$O_{2\times2}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad O_{1\times4}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. 形如 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ 的方阵称为**对角阵**. 记作

$$A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \quad, \lambda_n)$$

特别的，方阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 称为**单位阵**. 记作 E_n .

同型矩阵与矩阵相等的概念

1. 两个矩阵的行数相等、列数相等时，称为同型矩阵.

$$例如\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}与\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}为同型矩阵.$$

2. 两个矩阵 $A=(a_{ij})$ 与 $B=(b_{ij})$ 为同型矩阵，并且对应元素相等，即 $a_{ij}=b_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$

则称矩阵 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

例如 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

注意：不同型的零矩阵是不相等的.

四、矩阵与线性变换

n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与 m 个变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 之间的关系式

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{cases}$$

表示一个从变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 线性变换，其中 a_{ij} 为常数.

$$
\begin{cases}
y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\
y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n.
\end{cases}
$$

$$\cdots\cdots$$

$$
A = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
$$

系数矩阵

线性变换与矩阵之间存在着一一对应关系.

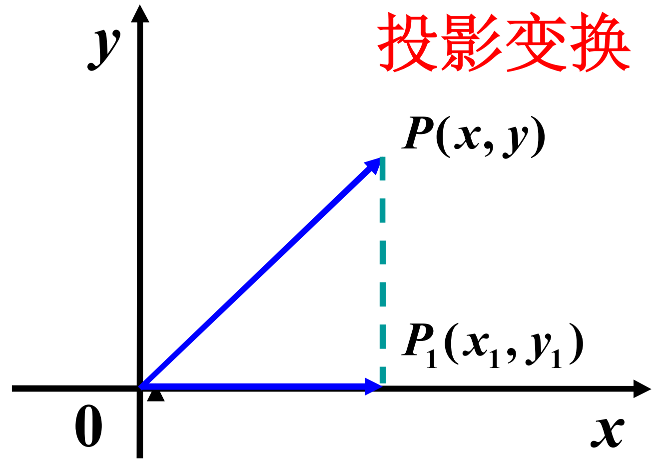
例　线性变换 $\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = x_n \end{cases}$ 称为恒等变换.

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n = x_n \end{cases} = \begin{cases} y_1 = 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \cdots + 0\cdot x_n, \\ y_2 = 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + \cdots + 0\cdot x_n, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots \\ y_n = 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \cdots + 1\cdot x_n \end{cases}$$

$$\xleftrightarrow{\text{对应}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \text{单位阵 } E_n$$

例 2阶方阵

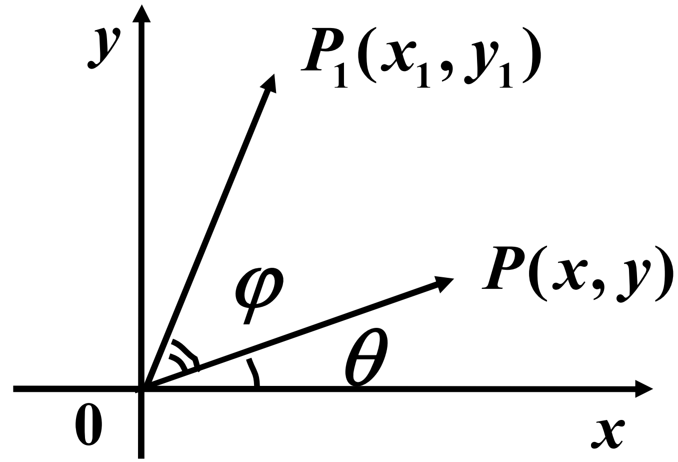
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{对应}} \begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 = 0. \end{cases}$$



例 2阶方阵

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{对应}} \begin{cases} x_1 = \cos\varphi x - \sin\varphi y, \\ y_1 = \sin\varphi x + \cos\varphi y. \end{cases}$$

以原点为中心逆时针旋转φ 角的旋转变换



§2　矩阵的运算

例　某工厂生产四种货物，它在上半年和下半年向三家商店发送货物的数量可用数表表示：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{matrix}$$

其中a_{ij}表示上半年工厂向第i家商店发送第j种货物的数量.

$$\begin{matrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{matrix}$$

其中c_{ij}表示工厂下半年向第i家商店发送第j种货物的数量.

试求：工厂在一年内向各商店发送货物的数量.

解：工厂在一年内向各商店发送货物的数量

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+c_{11} & a_{12}+c_{12} & a_{13}+c_{13} & a_{14}+c_{14} \\ a_{21}+c_{21} & a_{22}+c_{22} & a_{23}+c_{23} & a_{24}+c_{24} \\ a_{31}+c_{31} & a_{32}+c_{32} & a_{33}+c_{33} & a_{34}+c_{34} \end{pmatrix}$$

一、矩阵的加法

定义：设有两个 $m \times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$，那么矩阵 A 与 B 的和记作 $A+B$，规定为

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

说明：只有当两个矩阵是同型矩阵时，才能进行加法运算.

知识点比较

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

矩阵加法的运算规律

	$\forall a,b,c\in R$	设 A、B、C 是同型矩阵
交换律	$a+b=b+a$	$A+B=B+A$
结合律	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(A+B)+C=A+(B+C)$
其他	设矩阵 $A=(a_{ij})$，记 $-A=(-a_{ij})$，称为矩阵 A 的负矩阵. 显然 $$A+(-A)=0,\quad A-B=A+(-B)$$	

例（续）该厂所生产的货物的单价及单件重量可列成数表：

$$\begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{matrix}$$

其中b_{i1}表示第 i 种货物的单价，

b_{i2}表示第 i 种货物的单件重量.

设工厂向某家商店发送四种货物各 λ 件，试求：工厂向该商店发送第 j 种货物的总值及总重量.

解： 工厂向该商店发送第 j 种货物的总值及总重量

$$\lambda \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda b_{11} & \lambda b_{12} \\ \lambda b_{21} & \lambda b_{22} \\ \lambda b_{31} & \lambda b_{32} \\ \lambda b_{41} & \lambda b_{42} \end{pmatrix}$$

其中 b_{i1} 表示第 i 种货物的单价，

b_{i2} 表示第 i 种货物的单件重量.

二、数与矩阵相乘

定义：数 λ 与矩阵 A 的乘积记作 λA 或 $A\lambda$，规定为

$$\lambda A = A\lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

数乘矩阵的运算规律

	$\forall a,b,c\in R$	设 A、B是同型矩阵，λ，μ是数
结合律	$(ab)c=a(bc)$	$(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$
分配律	$(a+b)\cdot c=ac+bc$ $c\cdot(a+b)=ca+cb$	$(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$ $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
备注	矩阵相加与数乘矩阵合起来，统称为矩阵的线性运算.	

知识点比较

$$\lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\lambda\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix}$$

例（续）　某工厂生产四种货物，它向三家商店发送的货物数量可用数表表示为：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{matrix}$$

其中a_{ij}表示工厂向第i家商店发送第j种货物的数量.

这四种货物的单价及单件重量也可列成数表：

$$\begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{matrix}$$

其中b_{i1}表示第i种货物的单价，b_{i2}表示第i种货物的单件重量.

试求：工厂向三家商店所发货物的总值及总重量.

解:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{matrix}$$

其中a_{ij}表示工厂向第 i 家商店发送第 j 种货物的数量.

其中b_{i1}表示第 i 种货物的单价，b_{i2}表示第 i 种货物的单件重量.

以 c_{i1}，c_{i2} 分别表示工厂向第 i 家商店所发货物的总值及总重量，其中 $i=1, 2, 3$． 于是

$$c_{11} = a_{11}\times b_{11} + a_{12}\times b_{21} + a_{13}\times b_{31} + a_{14}\times b_{41} = \sum_{k=1}^{4} a_{1k}b_{k1}$$

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} + a_{14}b_{42} = \sum_{k=1}^{4} a_{1k}b_{k2}$$

一般地，

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+a_{i4}b_{4j}=\sum_{k=1}^{4}a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1,2,3;\ j=1,2)$$

可用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

一、矩阵与矩阵相乘

定义： 设 $A=(a_{ij})_{m\times s}$ ，$B=(b_{ij})_{s\times n}$ ，那么规定矩阵 A 与矩阵 B 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 $C=(c_{ij})$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

并把此乘积记作 $C=AB$.

例：设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

则 $AB=\begin{pmatrix} -5 & 6 & 7 \\ 10 & 2 & -6 \\ -2 & 17 & 10 \end{pmatrix}$

知识点比较

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$ 有意义.

只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$ 没有意义.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

例　P.35例5

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}_{2\times 2} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}_{2\times 2} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

结论：

1. 矩阵乘法不一定满足交换律.

2. 矩阵 $A \neq O,\ B \neq O$ ，却有 $AB = O$ ，

   从而不能由 $AB = O$ 得出 $A = O$ 或 $B = O$ 的结论.

矩阵乘法的运算规律

（1） 乘法结合律　　$(AB)C = A(BC)$

（2） 数乘和乘法的结合律　$\lambda(AB) = (\lambda A)B$（其中 λ 是数）

（3） 乘法对加法的分配律

$$A(B+C) = AB + AC \qquad (B+C)A = BA + CA$$

（4） 单位矩阵在矩阵乘法中的作用类似于数1，即

$$E_m A_{m\times n} = A_{m\times n} E_n = A$$

纯量阵不同于对角阵

推论：矩阵乘法不一定满足交换律，但是纯量阵 λE 与任何同阶方阵都是可交换的.

(5) 矩阵的幂　若 A 是 n 阶方阵，定义

$$A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{k}$$

显然　$A^kA^l = A^{k+l}$，$(A^k)^l = A^{kl}$

思考：下列等式在什么时候成立？

$$\left.\begin{array}{l}(AB)^k = A^kB^k \\ (A+B)^2 = A^2+2AB+B^2 \\ (A+B)(A-B) = A^2-B^2\end{array}\right\} A\text{、}B\text{可交换时成立}$$

四、矩阵的转置

定义：把矩阵 A 的行换成同序数的列得到的新矩阵，叫做的转置矩阵，记作A^{T} .

例

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 4 & 5 & 8\end{pmatrix}, \qquad A^T=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 2 & 8\end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix}18 & 6\end{pmatrix}, \qquad B^T=\begin{pmatrix}18\\ 6\end{pmatrix}.$$

转置矩阵的运算性质

(1) $(A^T)^T = A$;

(2) $(A+B)^T = A^T + B^T$;

(3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;

(4) $(AB)^T = B^T A^T$.

例：已知

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 4 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix},\ \text{求}\left(AB\right)^T.$$

解法1

$$\text{Q}\ AB=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 4 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 14 & -3\\ 17 & 13 & 10\end{pmatrix},\qquad \therefore (AB)^T=\begin{pmatrix}0 & 17\\ 14 & 13\\ -3 & 10\end{pmatrix}.$$

解法2

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}.$$

定义：设 A 为 n 阶方阵，如果满足 $A = A^T$，即

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

那么 A 称为对称阵.

如果满足 $A = -A^T$，那么 A 称为反对称阵.

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 1 \\ 6 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 6 & 0 & 7 \\ -1 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

对称阵　　　　反对称阵

例：设列矩阵 $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 满足 $X^{\mathrm{T}}X=1$，E 为 n 阶单位阵，$H=E-2XX^{\mathrm{T}}$，试证明 H 是对称阵，且 $HH^{\mathrm{T}}=E$.

证明：

$$H^T=(E-2XX^T)^T=E^T+(-2XX^T)^T=E-2(XX^T)^T$$

$$=E-2(X^T)^T X^T=E-2XX^T=H$$

从而 H 是对称阵.

$$HH^T=H^2=(E-2XX^T)^2=E^2-4XX^T+(-2XX^T)^2$$

$$=E-4XX^T+4XX^T XX^T=E-4XX^T+4X(X^T X)X^T$$

$$=E-4XX^T+4XX^T=E$$

五、方阵的行列式

定义：由 n 阶方阵的元素所构成的行列式，叫做方阵 A 的行列式，记作 $|A|$ 或 $\det A$.

运算性质

(1) $\left|A^T\right| = |A|$;　　(2) $|\lambda A| = \lambda^n |A|$;

(3) $|AB| = |A||B|$;　　$\Rightarrow |AB| = |BA|$.

证明：要使得 $|AB| = |A|\,|B|$ 有意义，A、B 必为同阶方阵，

假设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，$B = (b_{ij})_{n\times n}$.

我们以 $n=3$ 为例，构造一个6阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & -1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & -1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = |A|\cdot|B|$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & -1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & -1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \xlongequal[c_6+b_{13}c_1]{\substack{c_4+b_{11}c_1 \\ c_5+b_{12}c_1}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{11}b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{21}b_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31}b_{11} & a_{31}b_{12} & a_{31}b_{13} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & -1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_6+b_{32}c_2]{\substack{c_4+b_{21}c_2 \\ c_5+b_{22}c_2}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23} \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & b_{31} & b_{32} & b_{33}
\end{vmatrix}
\begin{array}{l}
c_4 + b_{31}c_3 \\
c_5 + b_{32}c_3 \\
\hline\hline
c_6 + b_{33}c_3
\end{array}
$$

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{23}b_{33} \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}
$$

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{23}b_{33} \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}
$$

令 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}b_{kj}$， 则 $C=(c_{ij})=AB$.

$$
=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_{31} & c_{32} & c_{33} \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}
\xlongequal[r_3 \leftrightarrow r_6]{\substack{r_1 \leftrightarrow r_4 \\ r_2 \leftrightarrow r_5}}
(-1)^3
\begin{vmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_{31} & c_{32} & c_{33}
\end{vmatrix}
$$

$$-\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = -|-E_3|\cdot|C| = |C| = |AB|$$

从而 $|AB| = |A||B|$.

定义：行列式 $|A|$ 的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 位于第 j 行第 i 列

称为矩阵 A 的伴随矩阵.

性质 $AA^* = A^*A = |A|E.$

性质 $AA^* = A^*A = |A|E.$

证明

$$AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = |A|E$$

六、共轭矩阵

当 $A=(a_{ij})$ 为复矩阵时，用 $\bar{a}_{ij}$ 表示 a_{ij} 的共轭复数，

记 $\overline{A}=(\bar{a}_{ij})$， $\overline{A}$ 称为 A 的共轭矩阵.

运算性质

（设A，B 为复矩阵，λ 为复数，且运算都是可行的）：

$$(1)\ \overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B};$$

$$(2)\ \overline{\lambda A}=\overline{\lambda}\,\overline{A};$$

$$(3)\ \overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B}.$$

§3 逆矩阵

•矩阵与复数相仿，有加、减、乘三种运算.

•矩阵的乘法是否也和复数一样有逆运算呢？

•这就是本节所要讨论的问题.

•这一节所讨论的矩阵，如不特别说明，所指的都是 n 阶方阵.

对于 n 阶单位矩阵 E 以及同阶的方阵 A，都有

$$A_n E_n = E_n A_n = A_n$$

从乘法的角度来看，n 阶单位矩阵 E 在同阶方阵中的地位类似于 1 在复数中的地位. 一个复数 $a \neq 0$的倒数 a^{-1}可以用等式 $a\,a^{-1}=1$ 来刻划. 类似地，我们引入

定义： n 阶方阵 A 称为可逆的，如果有 n 阶方阵 B，使得

$$AB = BA = E$$

这里 E 是 n 阶单位矩阵.

- 根据矩阵的乘法法则，只有方阵才能满足上述等式.
- 对于任意的 n 阶方阵 A，适合上述等式的矩阵 B 是唯一的（如果有的话）.

定义： 如果矩阵 B 满足上述等式，那么 B 就称为 A 的逆矩阵，记作 A^{-1} .

下面要解决的问题是：

- 在什么条件下，方阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的？
- 如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆，怎样求 $\boldsymbol{A}^{-1}$？

结论：$AA^{*}=A^{*}A=|A|E$，其中

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

元素 a_{ij} 的代数余子式A_{ij} 位于第 j 行第 i 列

定理：若$|A|\neq 0$，则方阵A可逆，而且

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}.$$

推论：若$|A|\neq 0$，则 $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$.

例：求二阶矩阵$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$的逆矩阵.

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

例：求3阶方阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&1\\3&1&5\\3&2&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解：$|A|=1$，$M_{11}=-7$，$M_{12}=-6$，$M_{13}=3$，

$M_{21}=4$，$M_{22}=3$，$M_{23}=-2$，

$M_{31}=9$，$M_{32}=7$，$M_{33}=-4$，

则

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}M_{11}&-M_{21}&M_{31}\\-M_{12}&M_{22}&-M_{32}\\M_{13}&-M_{23}&M_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&-4&9\\6&3&-7\\3&2&-4\end{pmatrix}$$

$|A| \neq 0 \rightleftarrows$ 方阵A可逆

此时，称矩阵A为非奇异矩阵

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

定理：若方阵A可逆，则$|A| \neq 0$.

容易看出：对于n 阶方阵A、B，如果

$$AB = E,$$

那么A、B都是可逆矩阵，并且它们互为逆矩阵.

推论： 如果 n 阶方阵A、B可逆，那么 A^{-1}、A^T、$\lambda A(\lambda \neq 0)$ 与AB也可逆，且

$$(A^{-1})^{-1} = A,$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T,$$

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1},$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$$

线性变换 $$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \qquad\qquad\cdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

的系数矩阵是一个n 阶方阵 A ，若记

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

则上述线性变换可记作 $Y = AX$.

例：设线性变换的系数矩阵是一个 3 阶方阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

记 $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$,

则上述线性变换可记作 $Y=AX$.

求变量 y_1, y_2, y_3 到变量 x_1, x_2, x_3的线性变换相当于求方阵 A 的逆矩阵.

已知$A^{-1}=\begin{pmatrix}-7 & -4 & 9\\ 6 & 3 & -7\\ 3 & 2 & -4\end{pmatrix}$，于是$X=A^{-1}Y$，即

$$\begin{cases}x_1=-7y_1-4y_2+9y_3,\\ x_2=\ \ 6y_1+3y_2-7y_3,\\ x_3=\ \ 3y_1+2y_2-4y_3.\end{cases}$$

§4　矩阵分块法

前言

- 由于某些条件的限制，我们经常会遇到大型文件无法上传的情况，如何解决这个问题呢?

- 这时我们可以借助WINRAR把文件分块，依次上传.

- 家具的拆卸与装配

问题　　什么是矩阵分块法?

问题一：什么是矩阵分块法？

定义：用一些横线和竖线将矩阵分成若干个小块，这种操作

称为对矩阵进行分块；

每一个小块称为矩阵的子块；

矩阵分块后，以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵.

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

这是2阶方阵吗？

思考题

❿伴随矩阵是分块矩阵吗？

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

❿答：不是．伴随矩阵的元素是代数余子式（一个数），而不

问题二：为什么提出矩阵分块法？

答：对于行数和列数较高的矩阵 A，运算时采用分块法，

可以使大矩阵的运算化成小矩阵的运算，

体现了化整为零的思想.

分块矩阵的加法

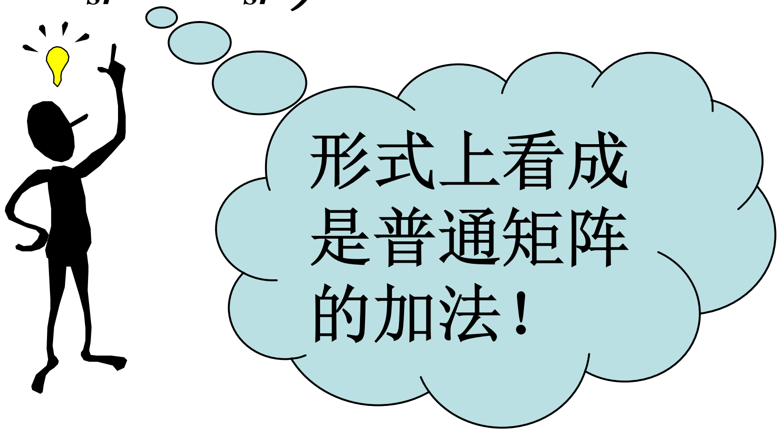
$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},\quad B=\left(\begin{array}{cc|cc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ \hline b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$A+B=\left(\begin{array}{cc|cc} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & a_{14}+b_{14} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & a_{24}+b_{24} \\ \hline a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} & a_{34}+b_{34} \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{pmatrix}$$

若矩阵A、B是同型矩阵，且采用相同的分块法，即

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}$$

则有 $$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & \cdots & A_{1r}+B_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{pmatrix}$$



分块矩阵的数乘

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)$$

$$\lambda A=\left(\begin{array}{cc|cc} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} & \lambda a_{14} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} & \lambda a_{24} \\ \hline \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} & \lambda a_{34} \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{c|c} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} \\ \hline \lambda A_{21} & \lambda A_{22} \end{array}\right)$$

若λ是数，且 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \mathrm{K} & A_{1r} \\ \mathrm{M} & \mathrm{O} & \mathrm{M} \\ A_{s1} & \mathrm{L} & A_{sr} \end{pmatrix}$

则有 $\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \mathrm{K} & \lambda A_{1r} \\ \mathrm{M} & \mathrm{O} & \mathrm{M} \\ \lambda A_{s1} & \mathrm{L} & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}$

分块矩阵的

$$m_1+m_2+\cdots+m_s=m$$

$$l_1+l_2+\cdots+l_t=l$$

$$n_1+n_2+\cdots+n_r=n$$

一般地，设 A为$m\quad l$矩阵，B为$l\quad n$矩阵：

$$A=\begin{array}{c}\\ m_1\\ m_2\\ \vdots\\ m_s\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} l_1 & l_2 & \cdots & l_t\end{array}\\ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st}\end{pmatrix}\end{array},\quad B=\begin{array}{c}\\ l_1\\ l_2\\ \vdots\\ l_t\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_r\end{array}\\ \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r}\\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ B_{t1} & B_{t2} & \cdots & B_{tr}\end{pmatrix}\end{array},$$

$$C=AB=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r}\\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ C_{s1} & C_{s2} & \cdots & C_{sr}\end{pmatrix},\quad C_{ij}=\sum_{k=1}^{t}A_{ik}B_{kj}$$

$$(i=1,\cdots,s;\ j=1,\cdots,r)$$

按行分块以及按列分块

$m\times n$ 矩阵 A 有 m 行

$$\alpha_i^T=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$$

若将第 j 列记作 $\beta_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix},$

则

$$A=\left(\begin{array}{c|c|c|c}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\hline a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\hline \vdots&\vdots&&\vdots\\\hline a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\\alpha_2^T\\\vdots\\\alpha_m^T\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n).$$

于是设 A 为 $m\times s$ 矩阵，B 为 $s\times n$ 矩阵，

若把 A 按行分块，把 B 按列块，则

$$C=(c_{ij})_{m\times n}=AB=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_m^T\end{pmatrix}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\beta_1 & \alpha_1^T\beta_2 & \cdots & \alpha_1^T\beta_n\\ \alpha_2^T\beta_1 & \alpha_2^T\beta_2 & \cdots & \alpha_2^T\beta_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_m^T\beta_1 & \alpha_m^T\beta_2 & \cdots & \alpha_m^T\beta_n\end{pmatrix}$$

$$c_{ij}=\alpha_i^T\beta_j=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{is})\begin{pmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{sj}\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}.$$

分块矩阵的转置

若 $A=\begin{pmatrix}A_{11}&\cdots&A_{1r}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ A_{s1}&\cdots&A_{sr}\end{pmatrix}$，则 $A^T=\begin{pmatrix}A_{11}^T&\cdots&A_{s1}^T\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ A_{1r}^T&\cdots&A_{sr}^T\end{pmatrix}$

例如：

$$A=\left(\begin{array}{c|c|c|c}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\ a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{array}\right)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$$

$$A^T=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\ a_{12}&a_{22}&a_{32}\\ a_{13}&a_{23}&a_{33}\\ a_{14}&a_{24}&a_{34}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \alpha_3^T\\ \alpha_4^T\end{pmatrix}$$

分块矩阵不仅形式上进行转置，而且每一个子块也进行转置.

分块对角矩阵

定义：设 A 是 n 阶矩阵，若

1. A 的分块矩阵只有在对角线上有非零子块，
2. 其余子块都为零矩阵，
3. 对角线上的子块都是方阵

那么称 A 为分块对

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & O & O \\ O & A_2 & O \\ O & O & A_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{pmatrix}$$

例如：

分块对角矩阵的性质

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \mathbf{O} & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$$

- $|A|=|A_1||A_2|\ldots|A_s|$
- 若$|A_s|\neq 0$，则$|A|\neq 0$，并且

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \mathbf{O} & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix}$$

例:设 $A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&1\\0&2&1\end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

解: $A=\left(\begin{array}{c|cc}5&0&0\\ \hline 0&3&1\\0&2&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}$ $\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&O\\O&A_2^{-1}\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1/5&0&0\\0&1&-1\\0&-2&3\end{pmatrix}$$

$$A_1=(5),\ A_1^{-1}=\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$A_2=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix},\ A_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\end{pmatrix}$$

例：往证 $A_{m\times n}=O_{m\times n}$ 的充分必要条件是方阵 $A^TA=O_{n\times n}$.

证明：把 A 按列分块，有 $A=(a_{ij})_{m\times n}=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)$

于是 $$A^TA=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \vdots\\ \alpha_n^T\end{pmatrix}\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\alpha_1 & \alpha_1^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^T\alpha_n\\ \alpha_2^T\alpha_1 & \alpha_2^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^T\alpha_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_n^T\alpha_1 & \alpha_n^T\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^T\alpha_n\end{pmatrix}=O$$

那么

$$\alpha_j^T\alpha_j=\left(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj}\right)\begin{pmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix}=a_{1j}{}^2+a_{2j}{}^2+\cdots+a_{mj}{}^2=0$$

$$a_{1j}=a_{2j}=\cdots=a_{mj}=0$$

即 $A=O$.

第三章　矩阵的初等变换与线性方程组

知识点回顾：克拉默法则

设
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

结论 1　如果线性方程组(1)的系数行列式不等于零，则该线性方程组一定有解, 而且解是唯一的. （**P. 24定理4**）

结论 1′ 如果线性方程组无解或有两个不同的解，则它的系数行列式必为零. （**P.24定理4’**）

用克拉默法则解线性方程组的两个条件：

(1) 方程个数等于未知量个数；

(2) 系数行列式不等于零.

线性方程组的解受哪些因素的影响？

§1　矩阵的初等变换

一、初等变换的概念
二、矩阵之间的等价关系
三、初等变换与矩阵乘法的关系
四、初等变换的应用

一、矩阵的初等变换

引例：求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ① \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ② \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. & ④ \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\boxed{2}x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \quad ①\\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \quad ②\\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, \quad ③\\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. \quad ④\end{array}\right.$$

$$\xrightarrow[③\div 2]{①\longleftrightarrow②}$$

$$\left\{\begin{array}{l}x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \quad ①\\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \quad ②\\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2,\\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9.\end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ② \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. & ④ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\substack{③-2\times① \\ ④-3\times①}]{②-③}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, & \\ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6, & \\ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3. & \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ①\\
\phantom{x_1 +{}} 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, & ②\\
 -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6, & ③\\
\phantom{x_1 +{}} 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3. & ④
\end{cases}
$$

$$
\xrightarrow[\substack{③+5\times② \\ ④-3\times②}]{② \div 2}
$$

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ①\\
x_2 - x_3 + x_4 = 0, & \\
2x_4 = -6, & \\
x_4 = -3. &
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ \phantom{x_1 +{}} x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\ \phantom{x_1 + x_2 - 2x_3 +{}} 2x_4 = -6, & ③ \\ x_4 = -3. & ④ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[④-2\times③]{③\leftrightarrow④}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ \phantom{x_1 +{}} x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\ x_4 = -3, & \\ 0 = 0. & \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\ x_4 = -3, & ③ \\ 0 = 0. & ④ \end{cases}$$

恒等式

取 x_3 为自由变量，则 $\begin{cases} x_1 = x_3 + 4, \\ x_2 = x_3 + 3, \\ x_4 = -3. \end{cases}$

令 $x_3 = c$，则 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+4 \\ c+3 \\ c \\ -3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$

三种变换：

✓交换方程的次序，记作 $i \leftrightarrow j$ ；

✓以非零常数 k 乘某个方程，记作 $i \times k$ ；

✓一个方程加上另一个方程的 k 倍，记作 $i + k\,j$.

其逆变换是：

$i \leftrightarrow j \quad \Rightarrow \quad i \leftrightarrow j$

$i \times k \quad \Rightarrow \quad i \div k$

$i + k\,j \quad \Rightarrow \quad i - k\,j$

结论：

1. 由于对原线性方程组施行的变换是可逆变换，因此变换前后的方程组同解.
2. 在上述变换过程中，实际上只对方程组的系数和常数进行运算，未知数并未参与运算.

定义：下列三种变换称为矩阵的**初等行变换**：

✓对调两行，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$；

✓以非零常数 k 乘某一行的所有元素，记作 $r_i \times k$；

✓某一行加上另一行的 k 倍，记作 $r_i + kr_j$．

其逆变换是：

$$r_i \leftrightarrow r_j \quad \Rightarrow \quad r_i \leftrightarrow r_j;$$

$$r_i \times k \quad \Rightarrow \quad r_i \div k;$$

$$r_i + kr_j \quad \Rightarrow \quad r_i - kr_j.$$

$$\text{初等变换}\begin{cases}\text{初等行变换}\\ \text{初等列变换}\end{cases}$$

把定义中的“行”换成“列”，就得到矩阵的**初等列变换**的定义.

矩阵的初等行变换与初等列变换统称为**初等变换**.

$$\begin{cases} \boxed{2}x_1 \boxed{-\quad} x_2 \boxed{-\quad} x_3 \boxed{+\quad} x_4 = \boxed{2}, \\ \quad x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} = B$$

增广矩阵

结论：

对原线性方程组施行的变换可以转化为对增广矩阵的变换.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ① \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ② \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. & ④ \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} = B$$

$$\xrightarrow[③\div 2]{①\leftrightarrow②} \qquad \underset{r_3 \div 2}{\overset{r_1 \leftrightarrow r_2}{\sim}}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ② \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. & ④ \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} = B_1$$

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\
2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ② \\
2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, & ③ \\
3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. & ④
\end{cases}
\qquad
\begin{pmatrix}
1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\
2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\
2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\
3 & 6 & -9 & 7 & 9
\end{pmatrix} = B_1
$$

$$
\xrightarrow[\substack{③-2\times① \\ ④-3\times①}]{②-③}
\qquad\qquad
\underbrace{}_{\substack{r_3-2r_1 \\ r_4-3r_1}}^{r_2-r_3}
$$

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\
2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, & ② \\
-5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6, & ③ \\
3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3. & ④
\end{cases}
\qquad
\begin{pmatrix}
1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\
0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\
0 & -5 & 5 & -3 & -6 \\
0 & 3 & -3 & 4 & -3
\end{pmatrix} = B_2
$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, & ② \\ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6, & ③ \\ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3. & ④ \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix} = B_2$$

$$\xrightarrow[\substack{③+5\times② \\ ④-3\times②}]{② \div 2} \qquad \underset{\substack{r_3+5r_2 \\ r_4-3r_2}}{\overset{r_2 \div 2}{\sim}}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\ 2x_4 = -6, & ③ \\ x_4 = -3. & ④ \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = B_3$$

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & \text{①} \\
x_2 - x_3 + x_4 = 0, & \text{②} \\
2x_4 = -6, & \text{③} \\
x_4 = -3. & \text{④}
\end{cases}
\qquad
\begin{pmatrix}
1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\
0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -3
\end{pmatrix} = B_3
$$

$$
\xrightarrow[\text{④}-2\times\text{③}]{\text{③}\leftrightarrow\text{④}}
\qquad\qquad
\overset{r_3 \leftrightarrow r_4}{\underset{r_4 - 2r_3}{\sim}}
$$

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & \text{①} \\
x_2 - x_3 + x_4 = 0, & \text{②} \\
x_4 = -3, & \text{③} \\
0 = 0. & \text{④}
\end{cases}
\qquad
\begin{pmatrix}
1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\
0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} = B_4
$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\ x_4 = -3, & ③ \\ 0 = 0. & ④ \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_4$$

$$\xrightarrow[r_2 - r_3]{r_1 - r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_5$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_5$$

B_5 对应方程组为 $\begin{cases} x_1 - x_3 = 4, \\ x_2 - x_3 = 3, \\ x_4 = -3. \end{cases}$

令 $x_3 = c$，则 $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+4 \\ c+3 \\ c \\ -3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$

备注

- 带有运算符的矩阵运算，用“ = ”．例如：
  - 矩阵加法　　＋
  - 数乘矩阵、矩阵乘法　　×
  - 矩阵的转置　　T（上标）
  - 方阵的行列式　　|·|

- 不带运算符的矩阵运算，用“～”．例如：
  - 初等行变换
  - 初等列变换

二、矩阵之间的等价关系

行等价，记作$A\overset{r}{\sim}B$

$$A \xrightarrow[\text{有限次初等列变换}]{\text{有限次初等行变换}} B$$

列等价，记作$A\overset{c}{\sim}B$

矩阵 A 与矩阵 B 等价，记作 $A \sim B$

$$A \underset{}{\overset{\text{有限次初等变换}}{\rightleftarrows}} B$$

矩阵之间的等价关系具有下列性质：

反身性　$A \sim A$；

对称性　若 $A \sim B$，则 $B \sim A$；

传递性　若 $A \sim B$, $B \sim C$，则 $A \sim C$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_4$$

行阶梯形矩阵：

1. 可画出一条阶梯线，线的下方全为零；
2. 每个台阶只有一行；
3. 阶梯线的竖线后面是非零行的第一个非零元素.

$$\underset{r_2 - r_3}{\overset{r_1 - r_2}{\sim}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_5$$

行最简形矩阵：

4. 非零行的第一个非零元为1；
5. 这些非零元所在的列的其它元素都为零.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_5$$

行最简形矩阵：

4. 非零行的第一个非零元为1;

5. 这些非零元所在的列的其它元素都为零.

$$\overset{c_3 \leftrightarrow c_4}{\widetilde{\quad}} \quad \begin{matrix} c_4 + c_1 + c_2 \\ c_5 - 4c_1 - 3c_2 + 3c_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = F$$

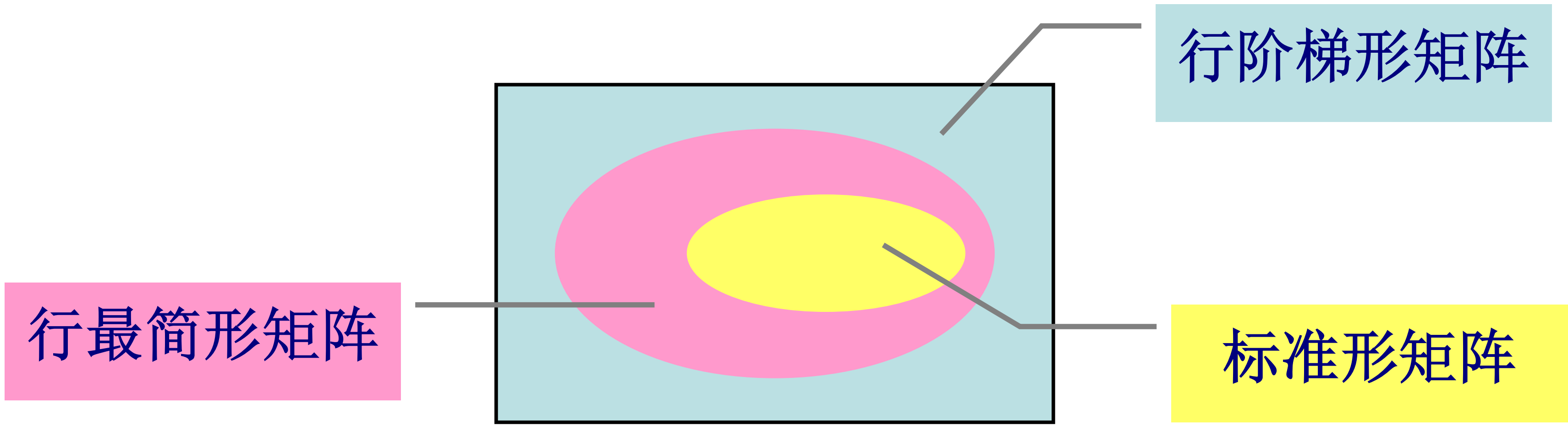
标准形矩阵：

6. 左上角是一个单位矩阵，其它元素全为零.

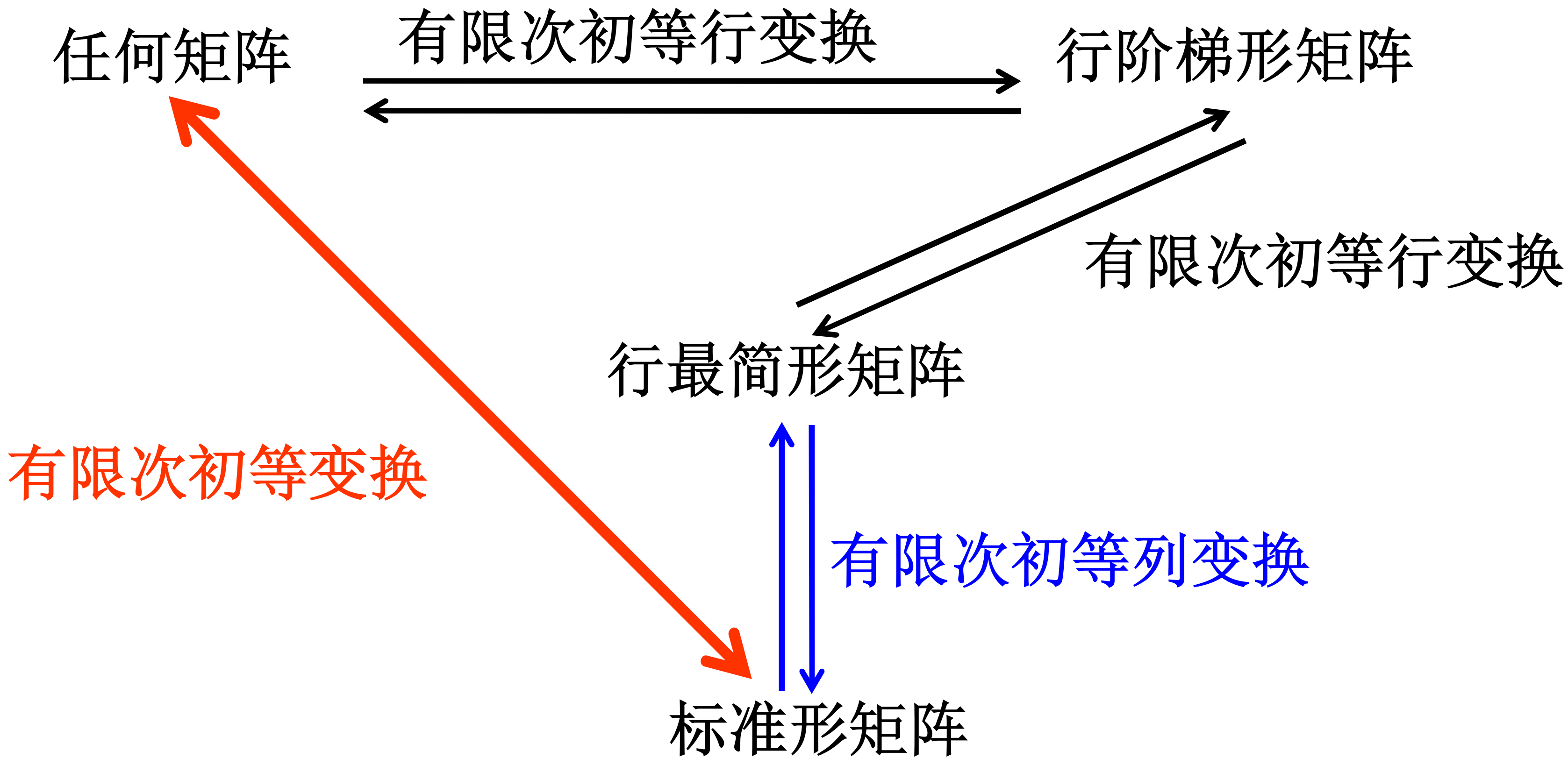
$$F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$$

标准形矩阵由m、n、r三个参数完全确定，其中 r 就是行阶梯形矩阵中非零行的行数.

三者之间的包含关系



结论


任何矩阵
有限次初等行变换
行阶梯形矩阵
有限次初等行变换
行最简形矩阵
有限次初等变换
有限次初等列变换
标准形矩阵

三、初等变换与矩阵乘法的关系

定义： 由单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵称为**初等矩阵**.

三种初等变换对应着三种初等矩阵.

(1) 对调单位阵的两行（列）；

(2) 以常数 $k \neq 0$ 乘单位阵的某一 行（列）；

(3) 以 k 乘单位阵单位阵的某一 行（列）加到另一 行（列） .

（1）对调单位阵的第 i, j 行（列），记作 $E_m(i, j)$.

$$E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{记作 } E_5(3, 5)$$

$$\|$$

$$E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\xrightarrow{c_3 \leftrightarrow c_5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 以常数 $k\neq 0$ 乘单位阵第 i 行（列），记作 $E_m(i(k))$.

$$E_5=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\times k}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&k&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

记作 $E_5(3(5))$

$$\|$$

$$E_5=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{c_3\times k}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&k&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

(3) 以 k 乘单位阵第 j 行加到第 i 行，记作 $E_m(ij(k))$.

两种理解！

$$E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\xrightarrow{r_3 + r_5 \times k}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

记作 $E_5(35(k))$

以 k 乘单位阵第 i 列加到第 j 列.

$$E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\xrightarrow{c_5 + c_3 \times k}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{3\times 4}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \qquad E_3(2,3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_3(2,3)A_{3\times 4}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

$$A_{3\times4}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \qquad E_4(2,3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{3\times4}E_4(2,3)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{23} & a_{34} \end{pmatrix}$$

结论

$E_m(i,j)A_{m\times n}$　把矩阵A的第 i 行与第 j 行对调，即 $r_i \leftrightarrow r_j$.

$A_{m\times n}E_n(i,j)$　把矩阵A的第 i 列与第 j 列对调，即 $c_i \leftrightarrow c_j$.

$E_m(i(k))A_{m\times n}$　以非零常数 k 乘矩阵A的第 i 行，即 $r_i \times k$.

$A_{m\times n}E_n(i(k))$　以非零常数 k 乘矩阵A的第 i 列，即 $c_i \times k$.

$E_m(ij(k))A_{m\times n}$　把矩阵A第 j 行的 k 倍加到第 i 行，即 $r_i + kr_j$.

$A_{m\times n}E_n(ij(k))$　把矩阵A第 i 列的 k 倍加到第 j 列，即 $c_j + kc_i$.

口诀：左行右列.

性质1 设A是一个 $m\times n$ 矩阵，

✓对 A 施行一次初等行变换，相当于在 A 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵；

✓对 A 施行一次初等列变换，相当于在 A 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵.

初等变换 $\longleftrightarrow$ 初等矩阵

初等变换的逆变换 $\longleftrightarrow$ **?**

$$E_5=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_5}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_5}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$E_5=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\times k}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&k&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\div k}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$E_5=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_5\times k}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&k\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_5\times k}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

因为“对于n阶方阵A、B，如果$AB=E$，那么A、B都是可逆矩阵，并且它们互为逆矩阵”，

$$E_5=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\overset{r_3\leftrightarrow r_5}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}\overset{r_3\leftrightarrow r_5}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$E_5(3,5)E_5$$

$$E_5(3,5)E_5(3,5)E_5$$
$$=E_5(3,5)E_5(3,5)$$
$$=E_5$$

所以 $E_5(3,5)^{-1}=E_5(3,5)$.

一般地，$E(i,j)^{-1}=E(i,j)$.

因为“对于n阶方阵A、B，如果$AB=E$，那么A、B都是可逆矩阵，并且它们互为逆矩阵”，

$$E_5=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\times k}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&k&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3 \div k}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$E_5(3(k))E_5$$

$$E_5\left(3\left(\frac{1}{k}\right)\right)E_5(3(k))E_5$$

$$=E_5\left(3\left(\frac{1}{k}\right)\right)E_5(3(k))$$

$$=E_5$$

所以 $E_5(3(k))^{-1}=E_5\left(3\left(\frac{1}{k}\right)\right)$.

一般地，$E(i(k))^{-1}=E\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right)$.

因为“对于n阶方阵A、B，如果$AB=E$，那么A、B都是可逆矩阵，并且它们互为逆矩阵”，

$$E_5=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{c_5+c_3\times k}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&k\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{c_5+c_3?\times(-k)}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$E_5E_5(35(k)) \qquad E_5E_5(35(k))E_5(35(-k))$$

$$=E_5(35(k))E_5(35(-k))$$

$$=E_5$$

所以 $E_5(35(k))^{-1}=E_5(35(-k))$.

一般地，$E(ij(k))^{-1}=E(ij(-k))$.

初等变换 $\longleftrightarrow$ 初等矩阵

初等变换的逆变换 $\longleftrightarrow$ 初等矩阵的逆矩阵?

初等矩阵的逆矩阵是：

$$E(i,j)^{-1}=E(i,j);$$

$$E(i(k))^{-1}=E\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right);$$

$$E(ij(k))^{-1}=E(ij(-k)).$$

性质2 方阵A可逆的充要条件是存在有限个初等矩阵$P_1, P_2, \dots,$ P_l，使 $A = P_1 P_2 \dots, P_l$.

这表明，可逆矩阵的标准形矩阵是单位阵．其实，可逆矩阵的行最简形矩阵也是单位阵．

推论1 方阵 A 可逆的充要条件是 $A \overset{r}{\sim} E$.

推论2 方阵 A 与 B 等价的充要条件是存在 m 阶可逆矩阵 P 及 n 阶可逆矩阵 Q，使 $PAQ = B$.

四、初等变换的应用

当$|A| \neq 0$时，由 $A = P_1 P_2 \Lambda\ P_l$，有

$$P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \Lambda\ P_1^{-1} A = E，\text{及} \qquad P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \Lambda\ P_1^{-1} E = A^{-1},$$

$$\therefore \quad P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \Lambda\ P_1^{-1} \left(A \vdots E \right)$$

$$= \left(P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \Lambda\ P_1^{-1} A \vdots P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \Lambda\ P_1^{-1} E \right)$$

$$= \left(E \vdots A^{-1} \right)$$

即对 $n \times 2n$ 矩阵 $(A \vdots E)$ 施行初等行变换，当把 A 变成 E 时，原来的 E 就变成 A^{-1}.

例 1 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$,求 A^{-1}.

解 $$(A\,\vdots\,E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\underset{r_3-3r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&-2&-6&-3&0&1\end{array}\right)\underset{r_3-r_2}{\overset{r_1+r_2}{\sim}}$$

$$\xrightarrow[r_3 - r_2]{r_1 + r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 - 5r_3]{r_1 - 2r_3}$$

$$\xrightarrow[r_2 - 5r_3]{r_1 - 2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \div (-1)]{r_2 \div (-2)}$$

$$\xrightarrow[r_3 \div (-1)]{r_2 \div (-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

利用初等行变换求逆阵的方法，还可用于求矩阵$A^{-1}B$.

Θ $$A^{-1}(A \,\vdots\, B) = (E \,\vdots\, A^{-1}B)$$

即

$$(A \,\vdots\, B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(E \quad \boxed{A^{-1}B}\right)$$

例2 求矩阵 X,使 $AX=B$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&5\\3&1\\4&3\end{pmatrix}.$$

解 若 A 可逆，则 $X=A^{-1}B.$

$$(A \,\vdots\, B)=\begin{pmatrix}1&2&3&2&5\\2&2&1&3&1\\3&4&3&4&3\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3-3r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3-r_2}{\overset{r_1+r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_2-5r_3}{\overset{r_1-2r_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2 - 5r_3]{r_1 - 2r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 \div (-1)]{r_2 \div (-2)} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right),$$

$$\therefore \qquad X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

如果要求$Y=CA^{-1}$,则可对矩阵$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$作初等列变换，

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列变换}} \begin{pmatrix} E \\ \boxed{CA^{-1}} \end{pmatrix}, \quad \text{即可得 } Y=CA^{-1}.$$

也可改为对(A^T, C^T)作初等行变换，

$$(A^T, C^T) \xrightarrow{\text{行变换}} (E, \boxed{(A^T)^{-1}C^T}),$$

即可得$Y^T=(A^{-1})^{\mathrm{T}}\mathrm{C}^{\mathrm{T}}=(A^T)^{-1}\mathrm{C}^{\mathrm{T}}$,

即可求得Y.

§2 矩阵的秩

一、矩阵的秩的概念

定义：在 $m\times n$ 矩阵 A 中，任取 k 行 k 列($k\leqslant m$，$k\leqslant n$)，位于这些行列交叉处的 k^2 个元素，不改变它们在 A 中所处的位置次序而得的 k 阶行列式，称为矩阵 A 的 k 阶子式.

显然，$m\times n$ 矩阵 A 的 k 阶子式共有 $C_m^k C_n^k$ 个.

概念辨析： k 阶子式、矩阵的子块、余子式、代数余子式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

与元素a_{12}相对应的余子式

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

相应的代数余子式

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

矩阵 A 的一个 2 阶子式

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

矩阵 A 的一个 2 阶子块

$$\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

定义： 设矩阵 A 中有一个不等于零的 r 阶子式 D，且所有 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）全等于零，那么 D 称为矩阵 A 的最高阶非零子式，数 r 称为矩阵 A 的秩，记作 $R(A)$.

规定： 零矩阵的秩等于零.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

矩阵 A 的 2 阶子式

矩阵 A 的一个 3 阶子式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

如果矩阵 A 中所有 2 阶子式都等于零，那么这个 3 阶子式也等于零 .

定义： 设矩阵 A 中有一个不等于零的 r 阶子式 D，且所有 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）全等于零，那么 D 称为矩阵 A 的**最高阶非零子式**，数 r 称为**矩阵 A 的秩**，记作 $R(A)$.

规定： 零矩阵的秩等于零.

- 根据行列式按行（列）展开法则可知，矩阵 A 中任何一个 $r+2$ 阶子式（如果存在的话）都可以用 $r+1$ 阶子式来表示.
- 如果矩阵 A 中所有 $r+1$ 阶子式都等于零，那么所有 $r+2$ 阶子式也都等于零 .
- 事实上，所有高于 $r+1$ 阶的子式（如果存在的话）也都等于零 .

因此矩阵 A 的秩就是 A 中非零子式的最高阶数.

矩阵 A 的秩就是 A 中非零子式的最高阶数.

显然，

- 若矩阵 A 中有某个 s 阶子式不等于零，则 $R(A) \geqslant s$；

  若矩阵 A 中所有 t 阶子式等于零，则 $R(A) < t$.

- 若 A 为 n 阶矩阵，则 A 的 n 阶子式只有一个，即$|A|$.

  当$|A| \neq 0$ 时， $R(A) = n$；

  可逆矩阵（非奇异矩阵）又称为满秩矩阵.

  当$|A| = 0$ 时， $R(A) < n$；

  不可逆矩阵（奇异矩阵）又称为降秩矩阵.

- 若 A 为 $m \times n$ 矩阵，则 $0 \leqslant R(A) \leqslant \min(m, n)$.

- $R(A^{\mathrm{T}}) = R(A)$.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \qquad A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{pmatrix}$$

矩阵 A 的一个 2 阶子式　　　　矩阵 A^{T} 的一个 2 阶子式

$$D = \qquad\qquad = \qquad\qquad D^T =$$

A^{T} 的子式与 A 的子式对应相等，从而 $R(A^{\mathrm{T}}) = R(A)$.

例：求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的秩，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & -5\\ 4 & 7 & 1\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 3 & -2\\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

解：在 $\boldsymbol{A}$ 中，2 阶子式 $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}\neq 0$.

$\boldsymbol{A}$ 的 3 阶子式只有一个，即$|\boldsymbol{A}|$，而且$|\boldsymbol{A}|=0$，因此 $R(\boldsymbol{A})=2$.

例：求矩阵 A 和 B 的秩，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&-5\\4&7&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2&-1&0&3&-2\\0&3&1&-2&5\\0&0&0&4&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

解（续）：B 是一个行阶梯形矩阵，其非零行有 3 行，因此其 4 阶子式全为零.

以非零行的第一个非零元为对角元的 3 阶子式

$$\begin{vmatrix}2&-1&3\\0&3&-2\\0&0&4\end{vmatrix}=24\neq 0，\text{因此 } R(B)=3\,.$$

还存在其它
3 阶非零子
式吗？

例：求矩阵 A 和 B 的秩，其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & -5\\ 4 & 7 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 3 & -2\\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

解（续）：B 还有其它 3 阶非零子式，例如

$$\begin{vmatrix}2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 4\end{vmatrix}=8 \qquad \begin{vmatrix}2 & -1 & -2\\ 0 & 3 & 5\\ 0 & 0 & -3\end{vmatrix}=-18 \qquad \begin{vmatrix}2 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & -3\end{vmatrix}=-6$$

结论：行阶梯形矩阵的秩就等于非零行的行数.

二、矩阵的秩的计算

例：求矩阵 A 的秩，其中 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

分析：在 A 中，2 阶子式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}=12\neq 0$.

A 的 3 阶子式共有 $C_4^3 C_5^3=40$ (个)，

要从40个子式中找出一个非零子式是比较麻烦的.

一般的矩阵，当行数和列数较高时，按定义求秩是很麻烦的 .

行阶梯形矩阵的秩就等于非零行的行数.

一个自然的想法是用初等变换将一般的矩阵化为行阶梯形矩阵.

两个等价的矩阵的秩是否相等？

定理：若 $A \sim B$，则 $R(A) = R(B)$.

证明思路：

1. 证明 A 经过一次初等行变换变为 B，则 $R(A) \leqslant R(B)$.
2. B 也可经由一次初等行变换变为 A，则 $R(B) \leqslant R(A)$，于是 $R(A) = R(B)$.
3. 经过一次初等行变换的矩阵的秩不变，经过有限次初等行变换的矩阵的秩仍然不变.
4. 设 A 经过初等列变换变为 B，则 A^{T} 经过初等行变换变为 B^{T}，从而 $R(A^{\mathrm{T}}) = R(B^{\mathrm{T}})$.

   又 $R(A) = R(A^{\mathrm{T}})$，$R(B) = R(B^{\mathrm{T}})$，因此 $R(A) = R(B)$.

第 1 步： A 经过一次初等行变换变为 B，则$R(A)\leqslant R(B)$.

证明：

设 $R(A)=r$ ，且 A 的某个 r 阶子式 $D\neq 0$.

- 当 $A\overset{r_i\leftrightarrow r_j}{\sim}B$ 或 $A\overset{r_i\times k}{\sim}B$ 时，
  在 B 中总能找到与 D 相对应的 r 阶子式 D_1 .
  由于$D_1=D$ 或 $D_1=-D$ 或 $D_1=kD$，因此 $D_1\neq 0$ ，从而 $R(B)\geqslant r$.

- 当 $A\overset{r_i+kr_j}{\sim}B$ 时，只需考虑 $A\overset{r_1+kr_2}{\sim}B$ 这一特殊情形.

$$r_i+kr_j \Longleftrightarrow r_1\leftrightarrow r_i\ ,\ r_2\leftrightarrow r_j\ ,\ r_1+kr_2\ ,r_1\leftrightarrow r_i\ ,\ r_2\leftrightarrow r_j$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \overset{r_3 \leftrightarrow r_4}{\sim} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = B$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} = -D_1 = \begin{vmatrix} a_{42} & a_{43} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \overset{r_1 \times k}{\sim} \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = B$$

$$kD = \begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} = D_1 = \begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

返回

第 1 步： A 经过一次初等行变换变为 B，则$R(A) \leqslant R(B)$.

证明（续）： 分两种情形讨论：

(1) D 中不包含 r_1 中的元素

这时 D 也是 B 的 r 阶非零子式，故 $R(B) \geqslant r$.

(2) D 中包含 r_1 中的元素

这时 B 中与 D 相对应的 r 阶子式 D_1 为

$$D_1 = \begin{vmatrix} r_1 + kr_2 \\ r_p \\ \vdots \\ r_q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_1 \\ r_p \\ \vdots \\ r_q \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} r_2 \\ r_p \\ \vdots \\ r_q \end{vmatrix} = D + kD_2$$

$$D_1=\begin{vmatrix} r_1+kr_2 \\ r_p \\ \vdots \\ r_q \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} r_1 \\ r_p \\ \vdots \\ r_q \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} r_2 \\ r_p \\ \vdots \\ r_q \end{vmatrix}=D+kD_2$$

- ✓ 若$p=2$，则 $D_2=0$，$D=D_1\neq 0$，从而 $R(B)\geqslant r$ ；
- ✓ 若$p\neq 2$，则 $D_1-kD_2=D\neq 0$，

因为这个等式对任意非零常数 k 都成立，

所以 D_1、D_2 不同时等于零，

于是 B 中存在 r 阶非零子式 D_1 或 D_2, 从而 $R(B)\geqslant r$，

即$R(A)\leqslant R(B)$.

定理：若 $A \sim B$，则 $R(A) = R(B)$.

应用：根据这一定理，为求矩阵的秩，只要用初等行变换把矩阵化成行阶梯形矩阵，行阶梯形矩阵中非零行的行数就是该矩阵的秩.

例：求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ 的秩，并求 A 的一个最高阶非零子式.

解：第一步先用初等行变换把矩阵化成行阶梯形矩阵.

$$A=\begin{pmatrix}3&2&0&5&0\\3&-2&3&6&-1\\2&0&1&5&-3\\1&6&-4&-1&4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&6&-4&-1&4\\0&-4&3&1&-1\\0&0&0&4&-8\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

行阶梯形矩阵有 3 个非零行，故$R(A)=3$.

第二步求 A 的最高阶非零子式．选取行阶梯形矩阵中非零行的第一个非零元所在的列，与之对应的是选取矩阵 A 的第一、二、四列.

$$A_0=\begin{pmatrix}3&2&5\\3&-2&6\\2&0&5\\1&6&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&6&-1\\0&-4&1\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}=B_0$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 6 & -1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_0$$

$R(A_0)=3$，计算 A_0的前 3 行构成的子式

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 6 & 0 & 11 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 6 & 11 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$$

因此这就是 A 的一个最高阶非零子式.

例：设 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & -1\\ 2 & -4 & 8 & 0\\ -2 & 4 & -2 & 3\\ 3 & -6 & 0 & -6\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，求矩阵 A 及矩阵 $B=(A,b)$ 的秩.

分析：对 B 作初等行变换变为行阶梯形矩阵，设 B 的行阶梯形矩阵为 $\tilde{B}=(\tilde{A},\tilde{b})$，则 $\tilde{A}$ 就是 A 的行阶梯形矩阵，因此可从中同时看出 $R(A)$ 及 $R(B)$.

解：
$$B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & -1 & 1\\ 2 & -4 & 8 & 0 & 2\\ -2 & 4 & -2 & 3 & 3\\ 3 & -6 & 0 & -6 & 4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$R(A)=2$$
$$R(B)=3$$

矩阵的秩的性质

① 若 A 为 $m\times n$ 矩阵，则 $0\leqslant R(A)\leqslant \min(m, n)$.

② $R(A^{\mathrm{T}}) = R(A)$.

③ 若 $A \sim B$，则 $R(A) = R(B)$.

④ 若 P、Q 可逆，则 $R(PAQ) = R(B)$.

⑤ $\max\{R(A), R(B)\}\leqslant R(A, B)\leqslant R(A)+R(B)$.

特别地，当 $B = b$ 为非零列向量时，有

$$R(A)\leqslant R(A, b)\leqslant R(A)+1 .$$

⑥ $R(A+B)\leqslant R(A)+R(B)$.

⑦ $R(AB)\leqslant \min\{R(A), R(B)\}$.

⑧ [illegible] . ?

例：设 A 为 n 阶矩阵，证明 $R(A+E)+R(A-E)\geqslant n$.

例：若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=C$，且 $R(A)=n$，则$R(B)=R(C)$.

附注：

- 当一个矩阵的秩等于它的列数时，这样的矩阵称为列满秩矩阵.
- 特别地，当一个矩阵为方阵时，列满秩矩阵就成为满秩矩阵，也就是可逆矩阵.
- 本题中，当 $C=O$，这时结论为：

  设 $AB=O$，若 A 为列满秩矩阵，则 $B=O$.

例：设 A 为 n 阶矩阵， 证明 $R(A+E)+R(A-E)\geqslant n$.

证明：因为 $(A+E)+(E-A)=2E$，

由性质“$R(A+B)\leqslant R(A)+R(B)$”有

$$R(A+E)+R(E-A)\geqslant R(2E)=n\ .$$

又因为$R(E-A)=R(A-E)$，所以

$$R(A+E)+R(A-E)\geqslant n\ .$$

例：若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=C$，且 $R(A)=n$，则$R(B)=R(C)$.

解：因为 $R(A)=n$， 所以 A 的行最简形矩阵为$\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}_{m\times n}$，

设 m 阶可逆矩阵 P，满足 $PA=\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}_{m\times n}$.

于是 $PC=PAB=\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}B=\begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix}$

因为 $R(C)=R(PC)$，而 $R(B)=R\begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix}$，故$R(B)=R(C)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_2 - r_3}{\overset{r_1 - r_2}{\sim}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行阶梯形矩阵：

1. 可画出一条阶梯线，线的下方全为零；
2. 每个台阶只有一行；
3. 阶梯线的竖线后面是非零行的第一个非零元素.

行最简形矩阵：

4. 非零行的第一个非零元为1；
5. 这些非零元所在的列的其它元素都为零.

例：若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=C$，且 $R(A)=n$，则$R(B)\ =R(C)$.

分析：若 $R(A)=n$，则 A 的行最简形矩阵应该

- 有 n 个非零行；
- 每个非零行的第一个非零元为 1 ；
- 每个非零元所在的列的其它元素都为零.

于是 A 的行最简形中应该包含以下 n 个列向量：

$$\begin{array}{r} \text{前 } n \text{ 行}\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ \\ \text{后 } m-n \text{ 行}\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right. \end{array} \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

又因为 A 是 $m\times n$ 矩阵，所以 A 的行最简形矩阵为$\begin{pmatrix}E_n\\O\end{pmatrix}$.

返回

例：若 $A_{m\times n}B_{n\times l}=C$，且 $R(A)=n$，则$R(B)=R(C)$.

附注：

- 当一个矩阵的秩等于它的列数时，这样的矩阵称为列满秩矩阵.
- 特别地，当一个矩阵为方阵时，列满秩矩阵就成为满秩矩阵，也就是可逆矩阵.

  因此，本例的结论当 A 为为方阵时，就是性质④ .
- 本题中，当 $C=O$，这时结论为：

  设 $AB=O$，若 A 为列满秩矩阵，则 $B=O$.

§3 线性方程组的解

一、线性方程组的表达式

1. 一般形式

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

2. 增广矩阵的形式

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

3. 向量方程的形式

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

➉ 方程组可简化为 $AX = b$.

4. 向量组线性组合的形式

$$x_1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

二、线性方程组的解的判定

m、n 不一定相等！

设有 n 个未知数 m 个方程的线性方程

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

定义： 线性方程组如果有解，就称它是**相容的**；如果无解，就称它是**不相容的**.

问题1： 方程组是否有解？

问题2： 若方程组有解，则解是否唯一？

问题3： 若方程组有解且不唯一，则如何掌握解的全体？

定理：n 元线性方程组 $Ax = b$

① 无解的充分必要条件是 $R(A) < R(A, b)$;

② 有唯一解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, b) = n$;

③ 有无限多解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, b) < n$.

分析：只需证明条件的充分性，即

- $R(A) < R(A, b) \Rightarrow$ 无解;
- $R(A) = R(A, b) = n \Rightarrow$ 唯一解;
- $R(A) = R(A, b) < n \Rightarrow$ 无穷多解.

那么

✓ 无解 $\Rightarrow R(A) < R(A, b)$;

✓ 唯一解 $\Rightarrow R(A) = R(A, b) = n$;

✓ 无穷多解 $\Rightarrow R(A) = R(A, b) < n$.

证明：设 $R(A)=r$，为叙述方便，不妨设 $B=(A, b)$ 的行最简形矩阵为

$$
\tilde{B}=\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} & d_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2,n-r} & d_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,1} & \cdots & b_{r,n-r} & d_r \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{pmatrix}_{m\times(n+1)}
$$

前 r 列　　后 $n-r$ 列

$$\boxed{R(A) \leqslant R(A, b) \leqslant R(A)+1}$$

第一步：往证 $R(A) < R(A, b) \Rightarrow$ 无解.

若 $R(A) < R(A, b)$，即 $R(A, b) = R(A)+1$，则 $d_{r+1}=1$.

于是第 $r+1$ 行对应矛盾方程 $0=1$，故原线性方程组无解.

$$
\tilde{B}=\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} & d_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2,n-r} & d_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,1} & \cdots & b_{r,n-r} & d_r \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{pmatrix}_{m\times(n+1)}
$$

前 r 列　　后 $n-r$ 列

$\tilde{B}$ 对应的线性方程组为

$$
\begin{cases}
x_1 = d_1, \\
x_2 = d_2, \\
\cdots\cdots \\
x_n = d_n.
\end{cases}
$$

第二步：往证 $R(A)=R(A,b)=n \;\Rightarrow\;$ 唯一解.

若 $R(A)=R(A,b)=n$， 则 $d_{r+1}=0$ 且 $r=n$，从而 b_{ij} 都不出现.

故原线性方程组有唯一解.

$$\tilde{B}=\left(\begin{array}{cccc|ccc|c}
1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} & d_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2,n-r} & d_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,1} & \cdots & b_{r,n-r} & d_r \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right)_{m\times(n+1)}
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{前 } r \text{ 行} \\
\left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \text{后 } m-n \text{ 行}
\end{array}$$

前 r 列　　后 $n-r$ 列

$$\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & d_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & d_n
\end{array}\right)$$

对应的线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 = d_1, \\ x_2 = d_2, \\ \quad \cdots\cdots \\ x_n = d_n. \end{cases}$$

第二步：往证 $R(A)=R(A,b)=n \Rightarrow$ 唯一解.

若 $R(A)=R(A,b)=n$，即 $r=n$，则 $d_{r+1}=0$ 且 b_{ij} 都不出现.

故原线性方程组有唯一解.

$$\tilde{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2,n-r} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,1} & \cdots & b_{r,n-r} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{m\times(n+1)}$$

前 r 列　　　后 $n-r$ 列

第三步：往证 $R(A)=R(A,b)<n \Rightarrow$ 无穷多解.

若 $R(A)=R(A,b)<n$， 即 $r<n$， 则 $d_{r+1}=0$.

$\tilde{B}$ 对应的线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + b_{11}x_{r+1} + \cdots + b_{1,n-r}x_n = d_1, \\ \quad x_2 \qquad + b_{21}x_{r+1} + \cdots + b_{2,n-r}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad x_r + b_{r1}x_{r+1} + \cdots + b_{r,n-r}x_n = d_r. \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
x_1 \qquad\qquad + b_{11}x_{r+1} + \cdots + b_{1,n-r}x_n = d_1, \\
\quad x_2 \qquad + b_{21}x_{r+1} + \cdots + b_{2,n-r}x_n = d_2, \\
\qquad\qquad \cdots\cdots \\
\qquad\qquad x_r + b_{r1}x_{r+1} + \cdots + b_{r,n-r}x_n = d_r.
\end{cases}
$$

令 $x_{r+1}, \ldots, x_n$ 作自由变量，则

$$
\begin{cases}
x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \cdots - b_{1,n-r}x_n + d_1, \\
x_2 = -b_{21}x_{r+1} - \cdots - b_{2,n-r}x_n + d_2, \\
\qquad\qquad \cdots\cdots \\
x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \cdots - b_{r,n-r}x_n + d_r.
\end{cases}
$$

线性方程组的通解

再令 $x_{r+1} = c_1,$

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
-b_{11}c_1 - \cdots - b_{1,n-r}c_{n-r} + d_1 \\
\vdots \\
-b_{r1}c_1 - \cdots - b_{r,n-r}c_{n-r} + d_r \\
c_1 \\
\ddots \\
c_{n-r}
\end{pmatrix}
= c_1 \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
+ \cdots + c_{n-r} \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}
+ \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
$$

例：求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. \end{cases}$$

解：$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$R(A) = R(A, b) = 3 < 4$，故原线性方程组有无穷多解.

备注：$B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

有无限多解的充分必要条件是 $R(A)=R(A,b)=r<n$， 这时

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2,n-r} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,1} & \cdots & b_{r,n-r} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

还能根据
$R(A)=R(A,b)=r<n$
判断该线性方程组有
无限多解吗？

$$
B \overset{r}{\sim}
\begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \\
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array}
\end{array}
\overset{c_3 \leftrightarrow c_4}{\sim}
\begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & -1 & 4 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \\
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_4 & x_3 & \end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{cases}
x_1 - x_3 = 4, \\
x_2 - x_3 = 3, \\
x_4 = -3.
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
x_1 - x_3 = 4, \\
x_2 - x_3 = 3, \\
x_4 = -3.
\end{cases}
$$

同解

返回

解（续）：$B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

即得与原方程组同解的方程组 $\begin{cases} x_1 - x_3 = 4, \\ x_2 - x_3 = 3, \\ x_4 = -3. \end{cases}$

令 x_3 做自由变量，则 $\begin{cases} x_1 = x_3 + 4, \\ x_2 = x_3 + 3, \\ x_4 = -3. \end{cases}$

方程组的通解可表示为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$

例：求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

解：$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$R(A) = 2$，$R(A, b) = 3$，故原线性方程组无解.

例：求解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+x_4=0, \\ 2x_1+x_2-2x_3-2x_4=0, \\ x_1-x_2-4x_3-3x_4=0. \end{cases}$$

提问：为什么只对系数矩阵 A 进行初等行变换变为行最简形矩阵？

答：因为齐次线性方程组 $AX=0$ 的常数项都等于零，于是必有 $R(A,0)=R(A)$ ，所以可从 $R(A)$ 判断齐次线性方程组的解的情况.

例：设有线性方程组

$$\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3,\\ x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda.\end{cases}$$

问 λ 取何值时，此方程组有(1) 唯一解；(2) 无解；(3) 有无限多个解？并在有无限多解时求其通解.

定理：n 元线性方程组 $AX=b$

① 无解的充分必要条件是 $R(A)<R(A,b)$；

② 有唯一解的充分必要条件是 $R(A)=R(A,b)=n$；

③ 有无限多解的充分必要条件是 $R(A)=R(A,b)<n$.

$$B=\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\end{pmatrix}$$

解法1：对增广矩阵作初等行变换把它变为行阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\end{pmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1+\lambda & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3-(1+\lambda)r_1}{\overset{r_2-r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda\\ 0 & -\lambda & -\lambda(2+\lambda) & -\lambda(1+\lambda)\end{pmatrix}\overset{r_3+r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda\\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & (1-\lambda)(3+\lambda)\end{pmatrix}$$

附注：

- ✓ 对含参数的矩阵作初等变换时，由于 $\lambda+1$， $\lambda+3$ 等因式可能等于零，故不宜进行下列的变换：

$$r_2 - \frac{1}{1+\lambda} r_1 \qquad r_2 \times (1+\lambda) \qquad r_3 \div (\lambda+3)$$

- ✓ 如果作了这样的变换，则需对 $\lambda+1=0$（或 $\lambda+3=0$）的情况另作讨论.

$$B=\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda\\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & (1-\lambda)(3+\lambda)\end{pmatrix}$$

分析：

- 讨论方程组的解的情况，就是讨论参数 λ 取何值时，r_2、r_3 是非零行.
- 在 r_2、r_3 中，有 5 处地方出现了λ，要使这 5 个元素等于零，$\lambda=0$，3，－3，1 .
- 实际上没有必要对这 4 个可能取值逐一进行讨论，先从方程组有唯一解入手.

$$B=\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda\\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & (1-\lambda)(3+\lambda)\end{pmatrix}$$

于是

- 当 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq -3$ 时，$R(A)=R(B)=3$ ，有唯一解.
- 当 $\lambda=0$ 时，$R(A)=1$， $R(B)=2$ ，无解.
- 当 $\lambda=-3$ 时，$R(A)=R(B)=2$ ，有无限多解.

$$B=\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\end{pmatrix}$$

解法2：因为系数矩阵 A 是方阵，所以方程组有唯一解的充分必要条件是 $|A|\neq 0$.

$$|A|=\begin{vmatrix}1+\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1+\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1+\lambda\end{vmatrix}=(3+\lambda)\lambda^2$$

于是当 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq -3$ 时，方程组有唯一解.

当 $\lambda=0$ 时，$B=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&3\\1&1&1&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$R(A)=1$， $R(B)=2$，方程组无解.

当 $\lambda=-3$ 时，$B=\begin{pmatrix}-2&1&1&0\\1&-2&1&3\\1&1&-2&-3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$R(A)=R(B)=2$，方程组有无限多个解，其通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$$

定理：n 元线性方程组 $AX=b$

① 无解的充分必要条件是 $R(A)<R(A,b)$；

② 有唯一解的充分必要条件是 $R(A)=R(A,b)=n$ ；

③ 有无限多解的充分必要条件是 $R(A)=R(A,b)<n$.

分析：因为对于 $AX=0$ 必有 $R(A,0)=R(A)$ ，所以可从 $R(A)$ 判断齐次线性方程组的解的情况.

定理：n 元齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解的充分必要条件是 $R(A)<n$.

定理：线性方程组 $AX=b$ 有解的充分必要条件是

$$R(A)=R(A,b)\ .$$

定理：矩阵方程 $AX=B$ 有解的充分必要条件是

$$R(A)=R(A,B)\ .$$

定理：矩阵方程 $AX = B$ 有解的充分必要条件是

$$R(A) = R(A, B) .$$

证明：设 A 是 $m\times n$ 矩阵， B 是 $m\times l$ 矩阵， X 是 $n\times l$ 矩阵.

把 X 和 B 按列分块，记作

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_l)\ ,\quad B = (b_1, b_2, \dots, b_l)$$

则 $AX = A(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (Ax_1, Ax_2, \cdots, Ax_n) = (b_1, b_2, \cdots, b_n) = B$

即矩阵方程 $AX = B$ 有解 $\Leftrightarrow$ 线性方程组 $Ax_i = b_i$ 有解

$$\Leftrightarrow R(A) = R(A, b_i)$$

设 $R(A)=r$，A 的行最简形矩阵为 $\tilde{A}$，则 $\tilde{A}$ 有 r 个非零行，且 $\tilde{A}$ 的后 $m-r$ 行全是零.

再设 $(A,B)=(A,b_1,b_2,\cdots,b_l)\overset{r}{\sim}(\tilde{A},\tilde{b}_1,\tilde{b}_2,\cdots,\tilde{b}_l)$

从而 $(A,b_i)\overset{r}{\sim}(\tilde{A},\tilde{b}_i)$.

矩阵方程 $AX=B$ 有解 $\Leftrightarrow$ 线性方程组 $Ax_i=b_i$ 有解

$\Leftrightarrow R(A)=R(A,b_i)$

$\Leftrightarrow$ $\tilde{b}_i$ 的后 $m-r$ 个元素全是零

$\Leftrightarrow$ $(\tilde{b}_1,\tilde{b}_2,\cdots,\tilde{b}_l)$ 的后 $m-r$ 行全是零

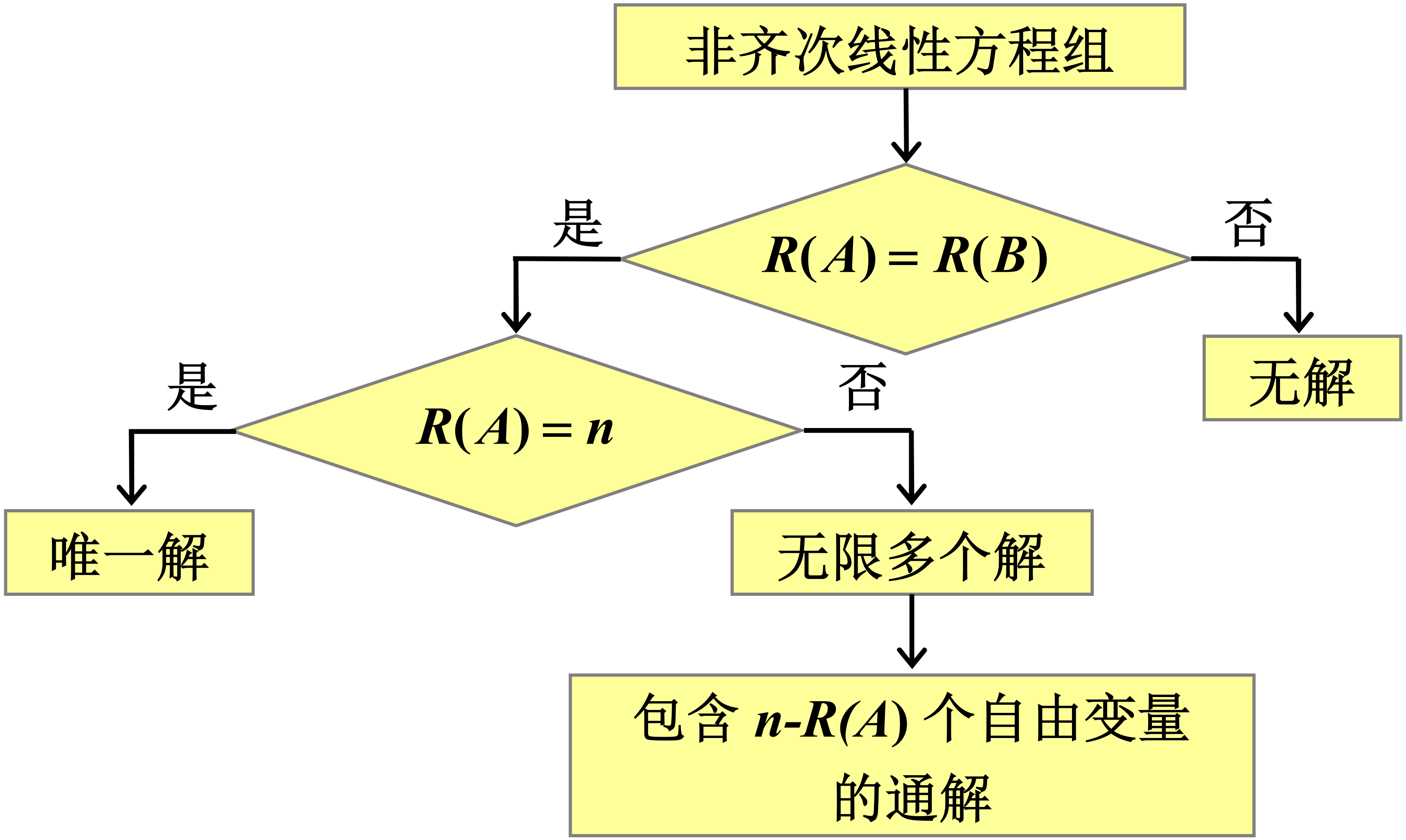
$\Leftrightarrow R(A)=R(A,B)$.

定理：矩阵方程 $AX=B$ 有解的充分必要条件是

$$R(A)=R(A,B).$$

定理：设 $AB=C$，则 $R(C)\leqslant \min\{R(A),R(B)\}$.

证明：因为 $AB=C$，所以矩阵方程 $AX=C$ 有解 $X=B$，
于是 $R(A)=R(A,C)$.
$R(C)\leqslant R(A,C)$，故 $R(C)\leqslant R(A)$.
又 $(AB)^{\mathrm{T}}=C^{\mathrm{T}}$，即 $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=C^{\mathrm{T}}$，所以矩阵方程 $B^{\mathrm{T}}X=C^{\mathrm{T}}$ 有解 $X=A^{\mathrm{T}}$，同理可得，$R(C)\leqslant R(B)$.
综上所述，可知 $R(C)\leqslant \min\{R(A),R(B)\}$.


非齐次线性方程组
$R(A)=R(B)$
是
否
无解
$R(A)=n$
是
否
唯一解
无限多个解
包含 n-$R(A)$ 个自由变量的通解

第四章
向量组的线性相关性

§1　向量组及其线性组合

定义：n 个有次序的数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 所组成的数组称为n 维向量，这 n 个数称为该向量的 n 个分量，第 i 个数 a_i 称为第 i 个分量.

- 分量全为实数的向量称为实向量.
- 分量全为复数的向量称为复向量.

备注：

✓ 本书一般只讨论实向量（特别说明的除外）.

✓ 行向量和列向量总被看作是两个不同的向

定义： 若干个同维数的列向量（行向量）所组成的集合称为**向量组**.

✓ 当$R(A) < n$ 时，齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的全体解组成的向量组含有无穷多个向量.

有限向量组

$$A_{34} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \beta_3^T \end{pmatrix}$$

结论：含有限个向量的有序向量组与矩阵一一对应.

定义：给定向量组 A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$， 对于任何一组实数 $k_1, k_2, \ldots, k_m$， 表达式

$$k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_ma_m$$

称为向量组 A 的一个线性组合.

$k_1, k_2, \ldots, k_m$ 称为这个线性组合的系数.

定义：给定向量组 A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$ 和向量 b，如果存在一组实数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$， 使得

$$b = \lambda_1a_1 + \lambda_2a_2 + \ldots + \lambda_ma_m$$

则向量 b 是向量组 A 的线性组合，这时称向量 b 能由向量组 A 的线性表示.

例：设 $E=(e_1,e_2,e_3)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

e_1, e_2, e_3的线性组合

那么 $b=\begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=2e_1+3e_2+7e_3$

线性组合的系数

一般地，对于任意的 n 维向量b，必有

$$b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\ \vdots\\b_n\end{pmatrix}=b_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}+b_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}+b_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\ \vdots\\0\end{pmatrix}\cdots+b_n\begin{pmatrix}0\\0\\0\\ \vdots\\1\end{pmatrix}$$

$$b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=b_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+b_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+b_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}\cdots+b_n\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

$$E_n=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$

n 阶单位矩阵 E_n 的列向量叫做 n 维单位坐标向量.

回顾：线性方程组的表达式

1. 一般形式

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

2. 增广矩阵的形式

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

3. 向量方程的形式

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. 向量组线性组合的形式

$$x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

方程组有解？ $\Longleftrightarrow$ 向量 $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是否能用 $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 线性表示？

结论：含有限个向量的有序向量组与矩阵一一对应.

$$x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_ma_m=(a_1,a_2,\cdots,a_m)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1m}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{pmatrix}$$

$$b=\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_ma_m \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1m}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nm}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_m\end{pmatrix}=b$$

P.83 定理1 的结论：

向量b能由 向量组 A 线性表示	$\Longleftrightarrow$	线性方程组 $Ax=b$ 有解	$\Longleftrightarrow$	$R(A)=R(A,b)$

定义：设有向量组 A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$ 及 B：$b_1, b_2, \ldots, b_l$， 若向量组 B 中的每个向量都能由向量组 A 线性表示，则称向量组 B 能由向量组 A 线性表示.

若向量组 A 与向量组 B 能互相线性表示，则称这两个向量组等价.

设有向量组 A： $a_1, a_2, \ldots, a_m$ 及 B： $b_1, b_2, \ldots, b_l$， 若向量组 B 能由向量组 A 线性表示，即

$$
\begin{aligned}
b_1 &= k_{11}a_1 + k_{21}a_2 + \cdots + k_{m1}a_m \\
b_2 &= k_{12}a_1 + k_{22}a_2 + \cdots + k_{m2}a_m \\
&\cdots\cdots \\
b_l &= k_{1l}a_1 + k_{2l}a_2 + \cdots + k_{ml}a_m
\end{aligned}
$$

线性表示的系数矩阵

$$
(b_1, b_2, \cdots, b_l) = (a_1, a_2, \cdots, a_m)\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1l} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \cdots & k_{ml} \end{pmatrix}_{m\times l}
$$

设有向量组 A：$a_1, a_2, \dots, a_m$ 及 B：$b_1, b_2, \dots, b_l$， 若向量组 B 能由向量组 A 线性表示，即

- 对于 b_1，存在一组实数 $k_{11}, k_{21}, \dots, k_{m1}$，使得

$$b_1 = k_{11}a_1 + k_{21}a_2 + \dots + k_{m1}a_m \ ;$$

- 对于 b_2，存在一组实数 $k_{12}, k_{22}, \dots, k_{m2}$，使得

$$b_2 = k_{12}a_1 + k_{22}a_2 + \dots + k_{m2}a_m \ ;$$

……

- 对于 b_l，存在一组实数 $k_{1l}, k_{2l}, \dots, k_{ml}$，使得

$$b_l = k_{1l}a_1 + k_{2l}a_2 + \dots + k_{ml}a_m$$

若 $C_{m\times n}=A_{m\times l}B_{l\times n}$，即

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ml} \end{array}\right)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ln} \end{pmatrix}$$

则 $$(c_1,c_2,\cdots,c_n)=(a_1,a_2,\cdots,a_l)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ln} \end{pmatrix}$$

结论：矩阵 C 的列向量组能由矩阵 A 的列向量组线性表示，

B 为这一线性表示的系数矩阵.

若 $C_{m\times n}=A_{m\times l}B_{l\times n}$，即

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ \hline c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ml} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \hline b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ln} \end{pmatrix}$$

则

$$\begin{pmatrix} r_1^T \\ r_2^T \\ \vdots \\ r_m^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ml} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ \vdots \\ b_l^T \end{pmatrix}$$

结论：矩阵 C 的行向量组能由矩阵 B 的行向量组线性表示，

A 为这一线性表示的系数矩阵.

口诀：左行右列

定理：设A是一个 $m\times n$ 矩阵，

✓对 A 施行一次初等行变换，相当于在 A 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵；

✓对 A 施行一次初等列变换，相当于在 A 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵.

结论：若 $C = AB$，那么

- 矩阵 C 的行向量组能由矩阵 B 的行向量组线性表示，A为这一线性表示的系数矩阵.

口诀：左行右列.

$A \overset{c}{\sim} B \iff A$ 经过有限次初等列变换变成 B

$\iff$ 存在有限个初等矩阵$P_1, P_2, \ldots, P_l$，使 $AP_1 P_2 \ldots, P_l = B$

$\iff$ 存在 m 阶可逆矩阵 P，使得 $AP = B$

把 P 看成是线性表示的系数矩阵

$\iff$ 矩阵 B 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价

同理可得

$A \overset{r}{\sim} B \iff$ 矩阵 B 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价

向量组 B：$b_1, b_2, \dots, b_l$ 能由向量组 A：$a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性表示

$\Leftrightarrow$ 存在矩阵 K，使得 $AK = B$

$\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $AX = B$ 有解

$\Rightarrow$ $R(A) = R(A, B)$ （P.84 定理2） 因为 $R(B) \leqslant R(A, B)$

$R(B) \leqslant R(A)$ （P.85 定理3）

推论：向量组 A：$a_1, a_2, \dots, a_m$ 及 B：$b_1, b_2, \dots, b_l$ 等价的充分必要条件是 $R(A) = R(B) = R(A, B)$.

证明：向量组 A 和 B 等价

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{向量组 } B \text{ 能由向量组 } A \text{ 线性表示} \Leftrightarrow R(A) = R(A, B) \\ \text{向量组 } A \text{ 能由向量组 } B \text{ 线性表示} \Leftrightarrow R(B) = R(A, B) \end{cases}$

从而有 $R(A) = R(B) = R(A, B)$.

例：设 $a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}, a_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\4\\0\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\0\\3\\1\end{pmatrix}$

证明向量 b 能由向量组 a_1, a_2, a_3 线性表示，并求出表示式.

解：向量 b 能由 a_1, a_2, a_3 线性表示当且仅当$R(A) = R(A, b)$.

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&0\\2&1&4&3\\2&3&0&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

因为$R(A) = R(A, b) = 2$， 所以向量 b 能由 a_1, a_2, a_3 线性表示.

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&0\\2&1&4&3\\2&3&0&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

行最简形矩阵对应的方程组为 $\begin{cases}x_1 \qquad +3x_3=2\\ \qquad x_2-2x_3=-1\end{cases}$

通解为 $x=c\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3c+2\\2c-1\\c\end{pmatrix}$

所以 $b=(-3c+2)\,a_1+(2c-1)\,a_2+c\,a_3$.

n 阶单位矩阵的列向量叫做 n 维单位坐标向量.

设有$n \times m$ 矩阵 $A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$，试证：$n$ 维单位坐标向量组能由矩阵 A 的列向量组线性表示的充分必要条件是

$$R(A) = n \ .$$

分析：

n 维单位坐标向量组能由矩阵 A 的列向量组线性表示

$\Leftrightarrow$ $R(A) = R(A, E)$

$\Leftrightarrow$ $R(A) = n$.（注意到：$R(A, E) = n$ 一定成立）

小结

向量 b 能由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow$ 线性方程组 $Ax=b$ 有解 $\Leftrightarrow$ $R(A)=R(A,b)$

向量组 B 能由向量组 A 线性表示 $\Leftrightarrow$ 矩阵方程组 $AX=B$ 有解 $\Leftrightarrow$ $R(A)=R(A,B)$ $\Rightarrow$ $R(B)\le R(A)$

向量组 A 与向量组 B 等价 $\Leftrightarrow$ $R(A)=R(B)=R(A,B)$

知识结构图

n维向量

↓

向量组 → 向量组与矩阵的对应

↓

向量组的线性组合

↓

向量组的线性表示 → 判定定理及必要条件

↓

向量组的等价 → 判定定理

§2　向量组的线性相关性

回顾：向量组的线性组合

定义：给定向量组 A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$， 对于任何一组实数 k_1, $k_2, \ldots, k_m$， 表达式

$$k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_ma_m$$

称为向量组 A 的一个线性组合.

$k_1, k_2, \ldots, k_m$ 称为这个线性组合的系数.

定义：给定向量组 A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$ 和向量 b，如果存在一组

实数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$，使得

引言

问题1：给定向量组 A，零向量是否可以由向量组 A 线性表示？

问题2：如果零向量可以由向量组 A 线性表示，线性组合的系数是否不全为零？

P.83 定理1 的结论：

向量b能由向量组 A 线性表示	$\Leftrightarrow$	线性方程组 $Ax = b$ 有解	$\Leftrightarrow$	$R(A) = R(A,b)$

问题1：给定向量组 A，零向量是否可以由向量组 A 线性表示？

问题1′：齐次线性方程组 $Ax = 0$ 是否存在解？

回答：齐次线性方程组 $Ax= 0$ 一定存在解.

事实上，可令$k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$，则

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_m a_m = 0$$（零向量）

问题2：如果零向量可以由向量组 A 线性表示，线性组合的系数是否不全为零？

问题2′：齐次线性方程组 $Ax=0$ 是否存在非零解？

回答：齐次线性方程组不一定有非零解，从而线性组合的系数不一定全等于零.

例：设 $E=(e_1,e_2,e_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

若 $k_1e_1+k_2e_2+k_3e_3=k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

则 $k_1=k_2=k_3=0$.

向量组的线性相关性

定义：给定向量组 A：$a_1, a_2, \dots, a_m$，如果存在不全为零的实数 $k_1, k_2, \dots, k_m$，使得

$$k_1a_1 + k_2a_2 + \dots + k_ma_m = 0$$（零向量）

则称向量组 A 是线性相关的，否则称它是线性无关的.

向量组 $A: a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性相关	$\Leftrightarrow$	m 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解	$\Leftrightarrow$	$R(A) < m$

备注：

- 给定向量组 A，不是线性相关，就是线性无关，两者必居其一.
- 向量组 A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$ 线性相关，通常是指 $m \geq 2$ 的情形.
- 若向量组只包含一个向量：当 a 是零向量时，线性相关；当 a 不是零向量时，线性无关.
- 向量组 A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$ $(m \geq 2)$ 线性相关，也就是向量组 A 中，至少有一个向量能由其余 $m-1$ 个向量线性表示.

  特别地，

  - a_1, a_2 线性相关当且仅当 a_1, a_2 的分量对应成比例，其几何意义是两向量共线.
  - a_1, a_2, a_3 线性相关的几何意义是三个向量共面.

向量组线性相关性的判定（重点、难点）

向量组 A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$ 线性相关

$\Leftrightarrow$ 存在不全为零的实数 $k_1, k_2, \ldots, k_m$，使得

$$k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_ma_m = 0$$（零向量）.

$\Leftrightarrow$ m 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解.

$\Leftrightarrow$ 矩阵$A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ 的秩小于向量的个数 m .

$\Leftrightarrow$ 向量组 A 中至少有一个向量能由其余 $m-1$ 个向量线性表示.

向量组线性无关性的判定（重点、难点）

向量组 A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$ 线性无关

$\Longleftrightarrow$ 如果 $k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_ma_m = 0$（零向量），则必有

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_m = 0 .$$

$\Longleftrightarrow$ m 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 只有零解.

$\Longleftrightarrow$ 矩阵 $A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ 的秩等于向量的个数 m .

$\Longleftrightarrow$ 向量组 A 中任何一个向量都不能由其余 $m-1$ 个向量线性表示.

向量组线性相关性的判定（重点、难点）

向量组 A：$a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性相关

$\Longleftrightarrow$ 存在不全为零的实数 $k_1, k_2, \dots, k_m$，使得

$$k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_ma_m = 0 \text{（零向量）}.$$

$\Longleftrightarrow$ m 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解.

$\Longleftrightarrow$ 矩阵 $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ 的秩小于向量的个数 m.

$\Longleftrightarrow$ 向量组 A 中至少有一个向量能由其余 $m-1$ 个向量线性表示.

例：试讨论 n 维单位坐标向量组的线性相关性.

例：已知 $a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ a_2=\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix},\ a_3=\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix},$

试讨论向量组 a_1, a_2, a_3 及向量组a_1, a_2 的线性相关性.

解：
$$\begin{pmatrix}1&0&2\\1&2&4\\1&5&7\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

可见 $R(a_1, a_2, a_3)=2$，故向量组 a_1, a_2, a_3 线性相关；

同时，$R(a_1, a_2)=2$，故向量组 a_1, a_2 线性无关.

例：已知向量组 a_1, a_2, a_3 线性无关，且

$$b_1 = a_1+a_2,\quad b_2 = a_2+a_3,\quad b_3 = a_3+a_1,$$

试证明向量组 b_1, b_2, b_3 线性无关.

解题思路：

- ✓ 转化为齐次线性方程组的问题；
- ✓ 转化为矩阵的秩的问题.

例： 已知向量组 a_1, a_2, a_3 线性无关，且

$$b_1 = a_1+a_2,\quad b_2 = a_2+a_3,\quad b_3 = a_3+a_1,$$

试证明向量组 b_1, b_2, b_3 线性无关.

解法1： 转化为齐次线性方程组的问题.

已知 $(b_1, b_2, b_3) = (a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，记作 $B = AK$.

设 $Bx = 0$，则$(AK)x = A(Kx) = 0$.

因为向量组 a_1, a_2, a_3 线性无关，所以$Kx = 0$.

又 $|\mathbf{K}| = 2 \neq 0$，那么$Kx = 0$ 只有零解 $x = 0$，

从而向量组 b_1, b_2, b_3 线性无关.

例：已知向量组 a_1, a_2, a_3 线性无关，且

$$b_1 = a_1 + a_2,\quad b_2 = a_2 + a_3,\quad b_3 = a_3 + a_1,$$

试证明向量组 b_1, b_2, b_3 线性无关.

解法2：转化为矩阵的秩的问题.

已知 $(b_1, b_2, b_3) = (a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，记作 $B = AK$.

因为$|K| = 2 \neq 0$，所以K 可逆，$R(A) = R(B)$，

又向量组 a_1, a_2, a_3 线性无关，$R(A) = 3$，

从而$R(B) = 3$，向量组 b_1, b_2, b_3 线性无关.

定理（P.89定理5）

- 若向量组 A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$ 线性相关， 则向量组 B：$a_1, a_2, \ldots, a_m, a_{m+1}$ 也线性相关.

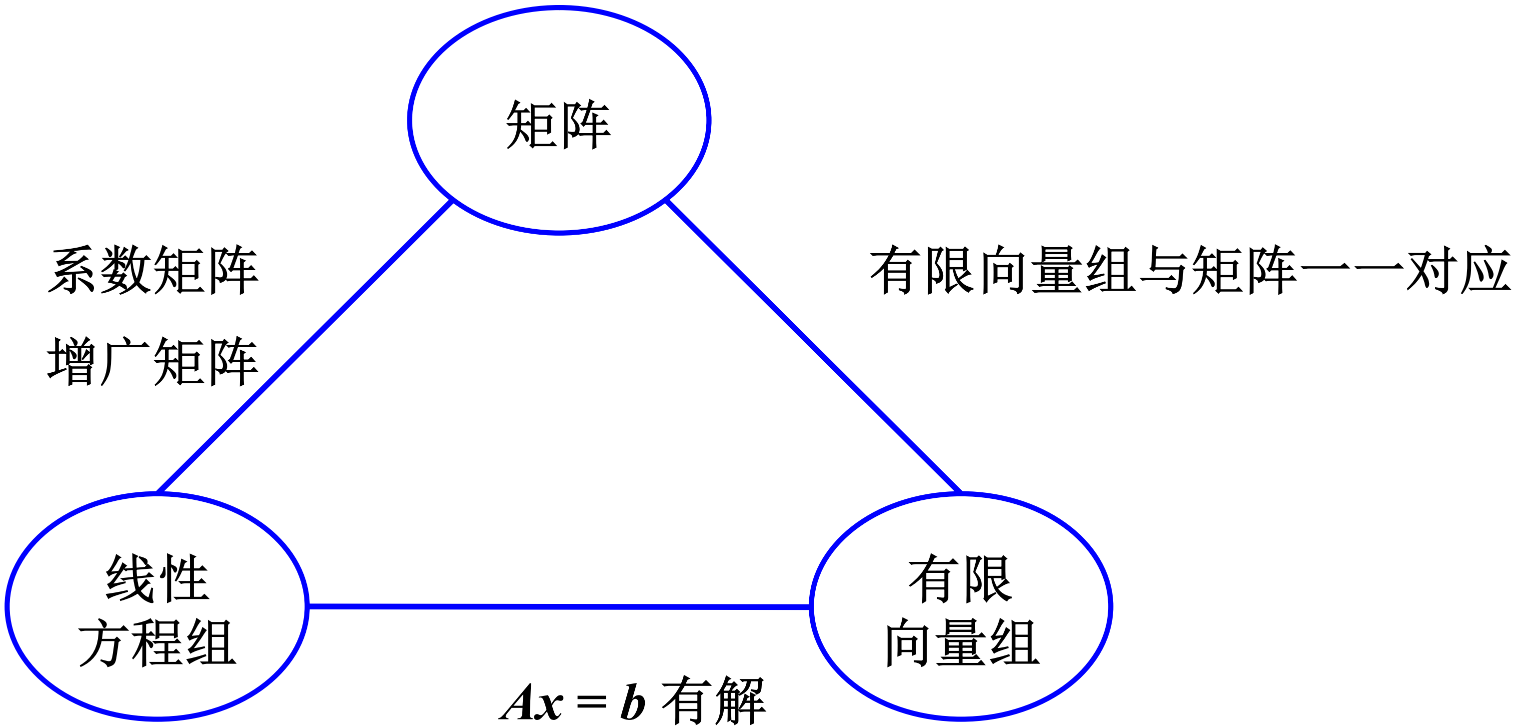
  其逆否命题也成立，即若向量组 B 线性无关，则向量组 A 也线性无关.

- m 个 n 维向量组成的向量组，当维数 n 小于向量个数 m 时，一定线性相关.

  特别地， $n+1$个 n 维向量一定线性相关.

- 设向量组 A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$ 线性无关， 而向量组 B：$a_1, a_2, \ldots, a_m, b$ 线性相关，则向量 b 必能由向量组 A 线性表示，且表示式是唯一的.

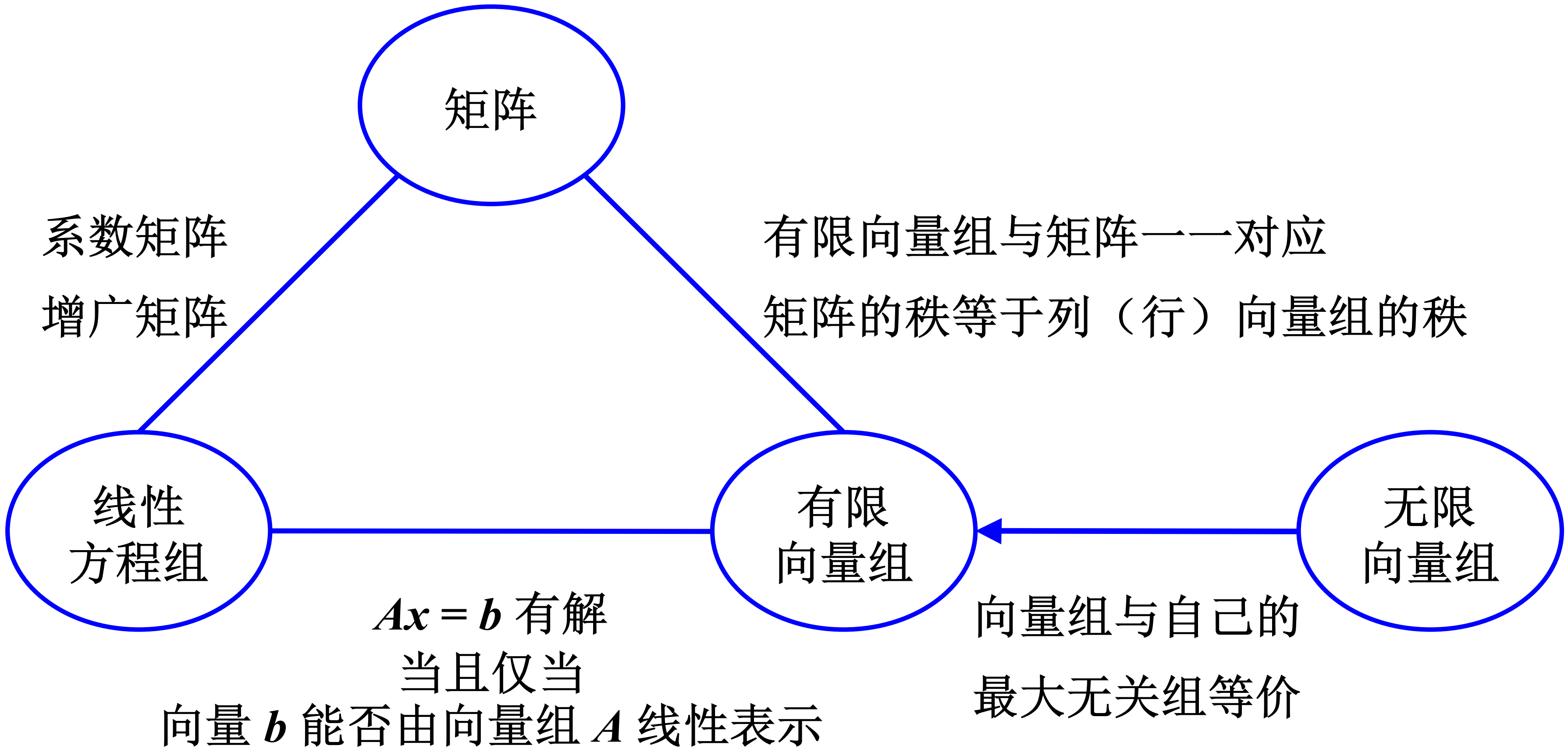
§3　向量组的秩



$Ax = b$ 有解
当且仅当
向量 b 可由矩阵 A的列向量组线性表示

课本P. 88定理4：

- 向量组 A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$ 线性相关的充要条件是矩阵 $A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ 的秩小于向量的个数 m；
- 向量组 A：$a_1, a_2, \ldots, a_m$ 线性无关的充要条件是矩阵 $A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ 的秩等于向量的个数 m .


矩阵
系数矩阵
增广矩阵
有限向量组与矩阵一一对应
矩阵的秩等于列（行）向量组的秩
线性
方程组
有限
向量组
无限
向量组
Ax = b 有解
当且仅当
向量 b 能否由向量组 A 线性表示
向量组与自己的
最大无关组等价

n元线性方程组 $Ax = b$ 其中 A 是 $n\times m$ 矩阵	矩阵 (A, b)	向量组 A: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 及 向量 b
是否存在解？	$R(A) = R(A, b)$ 成立？	向量 b 能否由向量组 A线性表示？
无解	$R(A) < R(A, b)$	NO
有解	$R(A) = R(A, b)$	YES x 的分量是线性组合的系数
唯一解	$R(A) = R(A, b)$ = 未知数个数	表达式唯一
无穷解	$R(A) = R(A, b)$ < 未知数个数	表达式不唯一

回顾：矩阵的秩

定义：在 $m\times n$ 矩阵 A 中，任取 k 行 k 列($k\leqslant m$，$k\leqslant n$)，
位于这些行列交叉处的 k^2 个元素，不改变它们在 A中所处的位置次序而得的 k 阶行列式，称为矩阵 A 的 k 阶子式.

定义：设矩阵 A 中有一个不等于零的 r 阶子式 D，且所有 $r+1$ 阶子式（如果存在的话）全等于零，那么 D 称为矩阵 A 的最高阶非零子式，数 r 称为矩阵 A 的秩，记作 $R(A)$.

规定：零矩阵的秩等于零.

结论：矩阵的秩

＝矩阵中最高阶非零子式的阶数

＝矩阵对应的行阶梯形矩阵的非零行的行数

向量组的秩的概念

定义：设有向量组 A，如果在 A 中能选出 r 个向量$a_1, a_2, \ldots,$

a_r，满足

① 向量组 A_0：$a_1, a_2, \ldots, a_r$线性无关；

② 向量组 A 中任意 $r + 1$个向量（如果 A 中有$r + 1$个向量的话）都线性相关；

那么称向量组 A_0 是向量组 A 的一个最大线性无关向量组，

例：求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ 的秩，并求 A 的一个最高阶非零子式.

解：第一步先用初等行变换把矩阵化成行阶梯形矩阵.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行阶梯形矩阵有 3 个非零行，故$R(A)=3$.

第二步求 A 的最高阶非零子式. 选取行阶梯形矩阵中非零行的第一个非零元所在的列，与之对应的是选取矩阵 A 的第一、二、四列.

$$A_0=(a_1,a_2,a_4)=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & -2 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_0$$

$$A_0=(a_1,a_2,a_4)=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&1&1\\4&-6&-2\\3&6&7\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=B_0$$

$R(A_0)=3$，计算 A_0的前 3 行构成的子式

$$\begin{vmatrix}2&-1&1\\1&1&1\\4&-6&-2\end{vmatrix}=-8\neq 0$$

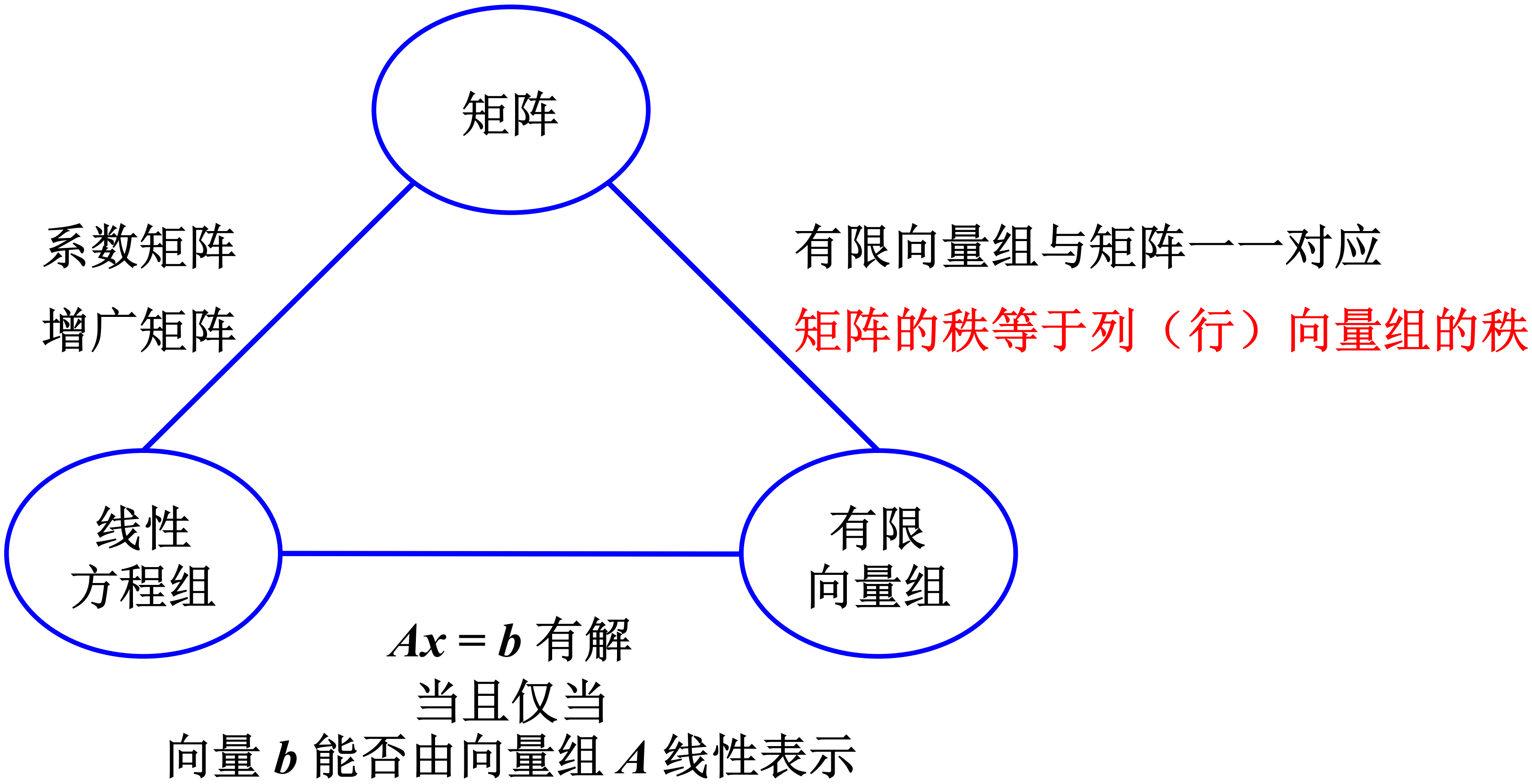
因此这就是 A 的一个最高阶非零子式.

结论：矩阵的最高阶非零子式一般不是唯一的，但矩阵的秩是唯一的.

$$A_0=(a_1,a_2,a_4)=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&1&1\\4&-6&-2\\3&6&7\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=B_0$$

事实上，

- 根据 $R(A_0)=3$ 可知：A_0的 3 个列向量就是矩阵 A 的列向量组的一个线性无关的部分组.
- 在矩阵 A 任取 4 个列向量，根据 $R(A)=3$ 可知：A中所有4 阶子式都等于零，从而这 4 个列向量所对应的矩阵的秩小于 4，即这 4 个列向量线性相关.
- A_0的 3 个列向量就是矩阵 A 的列向量组的一个最大线性无关组.
- 矩阵 A 的列向量组的秩等于 3.
- 同理可证，矩阵 A 的行向量组的秩也等于 3.



一般地，

- 矩阵的秩等于它的列向量组的秩.

  矩阵的秩等于它的行向量组的秩. （**P.90 定理6**）

一般地，

- 矩阵的秩等于它的列向量组的秩.

  矩阵的秩等于它的行向量组的秩. （P.90 定理6）

- 今后，向量组 $a_1, a_2, \ldots, a_m$ 的秩也记作 $R(a_1, a_2, \ldots, a_m)$.

- 若 D_r 是矩阵 A 的一个最高阶非零子式，则 D_r 所在的 r 列是 A 的列向量组的一个最大无关组，D_r 所在的 r 行是 A 的行向量组的一个最大无关组.

- 向量组的最大无关组一般是不唯一的.

例：已知 $a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $a_2=\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}$, $a_3=\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix}$,

试讨论向量组 a_1, a_2, a_3 及向量组a_1, a_2 的线性相关性.

解：

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\1&2&4\\1&5&7\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

可见 $R(a_1, a_2)=2$，故向量组 a_1, a_2 线性无关，

同时，$R(a_1, a_2, a_3)=2$，故向量组 a_1, a_2, a_3 线性相关，

从而 a_1, a_2 是向量组 a_1, a_2, a_3 的一个最大无关组.

事实上，a_1, a_3 和 a_2, a_3 也是最大无关组.

最大无关组的等价定义

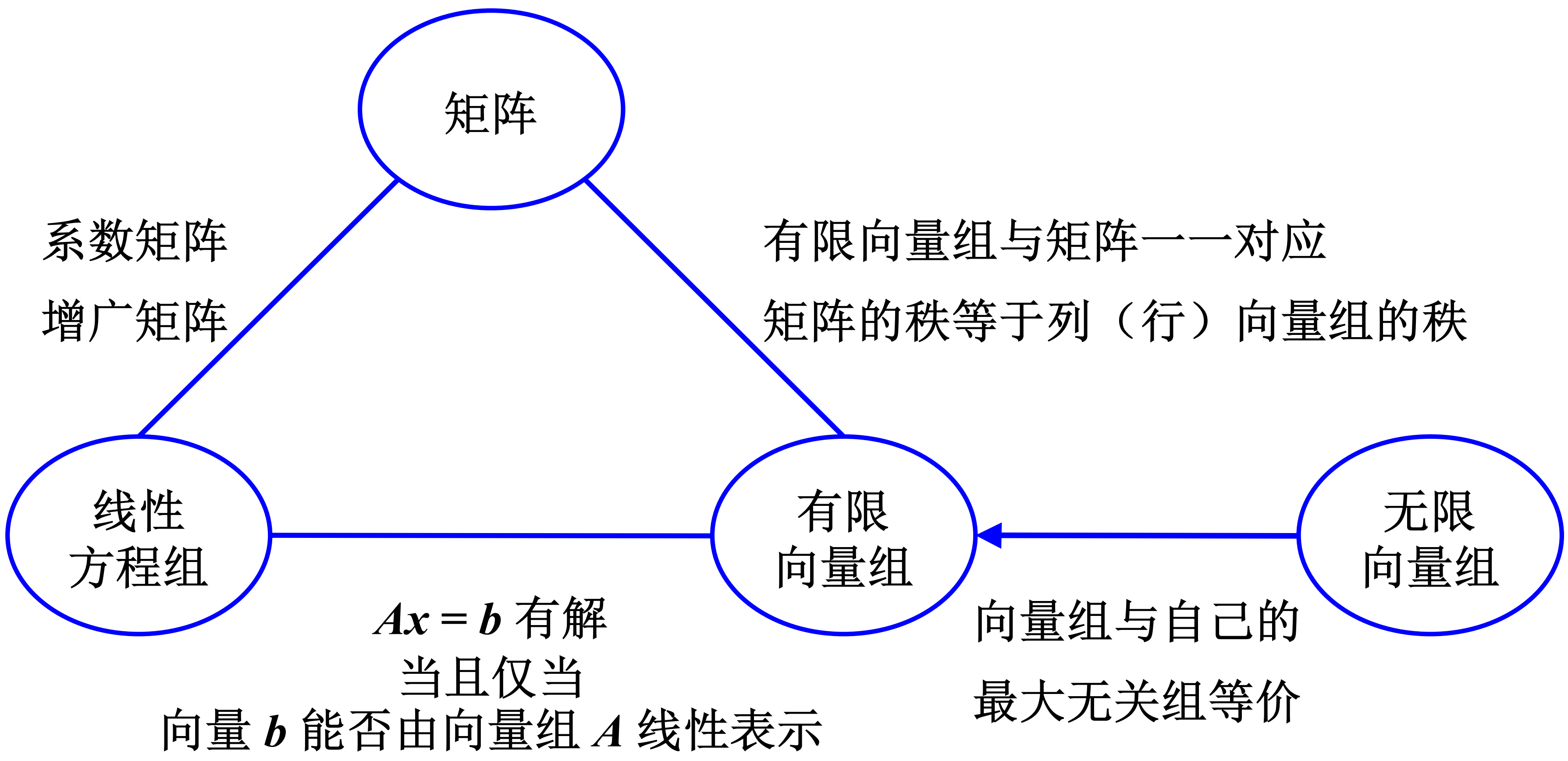
结论：向量组 A 和它自己的最大无关组 A_0 是等价的.

定义：设有向量组 A，如果在 A 中能选出 r 个向量$a_1, a_2, \ldots,$

a_r，满足

① 向量组 A_0：$a_1, a_2, \ldots, a_r$ 线性无关；

② 向量组 A 中任意 $r+1$个向量（如果 A 中有 $r+1$个向量的话）都线性相关；


矩阵
系数矩阵
增广矩阵
有限向量组与矩阵一一对应
矩阵的秩等于列（行）向量组的秩
线性方程组
有限向量组
无限向量组
Ax = b 有解
当且仅当
向量 b 能否由向量组 A 线性表示
向量组与自己的
最大无关组等价

最大无关组的意义

结论：向量组 A 和它自己的最大无关组 A_0 是等价的.

- 用 A_0 来代表 A，掌握了最大无关组，就掌握了向量组的全体.

  特别，当向量组 A 为无限向量组，就能用有限向量组来代表.

- 凡是对有限向量组成立的结论，用最大无关组作过渡，立即可推广到无限向量组的情形中去.

例： 全体 n 维向量构成的向量组记作 R^n，求 R^n 的一个最大无关组及 R^n 的秩.

解： n 阶单位矩阵 $E=\left(e_1,e_2,\cdots,e_n\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 的列向量组是 R^n 的一个最大无关组，R^n 的秩等于n .

思考：上三角形矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 的列向量组是 R^n 的一个最大无关组吗？

例：设齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 \qquad\quad - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$
的通解是

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

试求全体解向量构成的向量组 S 的秩.

例：求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ 的秩，并求 A 的一个最高阶非零子式.

例：设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

求矩阵 A 的列向量组的一个最大无关组，并把不属于最大无关组的列向量用最大无关组线性表示.

解： 第一步先用初等行变换把矩阵化成行阶梯形矩阵.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行阶梯形矩阵有 3 个非零行，故$R(A)=3$.

第二步求 A 的最高阶非零子式．选取行阶梯形矩阵中非零行的第一个非零元所在的列，与之对应的是选取矩阵 A 的第一、二、四列.

$$A_0=(a_1,a_2,a_4)=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & -2 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=B_0$$

$$A_0=(a_1,a_2,a_4)=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&1&1\\4&-6&-2\\3&6&7\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=B_0$$

$R(A_0)=3$，计算 A_0的前 3 行构成的子式

$$\begin{vmatrix}2&-1&1\\1&1&1\\4&-6&-2\end{vmatrix}=-8\neq 0$$

因此这就是 A 的一个最高阶非零子式.

A_0的 3 个列向量就是矩阵 A 的列向量组的一个最大无关组.

$$A=(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}$$

思考：如何把 a_3, a_5 表示成a_1, a_2, a_4 的线性组合？

思路1：利用P.83 定理1 的结论

向量 b 能由向量组 A 线性表示	$\Leftrightarrow$	线性方程组 $Ax=b$ 有解

令 $A_0=(a_1, a_2, a_4)$

求解 $A_0x=a_3$

$A_0x=a_5$

思路2：利用矩阵 A 的行最简形矩阵.

解（续）：为把 a_3, a_5 表示成a_1, a_2, a_4 的线性组合，把矩阵 A 再变成行最简形矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B$$

于是 $Ax=0$ 与 $Bx=0$，即

$$x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3+x_4a_4+x_5a_5=0$$

$$x_1b_1+x_2b_2+x_3b_3+x_4b_4+x_5b_5=0$$

同解.

即矩阵 A 的列向量组与矩阵 B 的列向量组有相同的线性关系

.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

可以看出：

$$b_3 = -b_1 - b_2$$
$$b_5 = 4b_1 + 3b_2 - 3b_4$$

所以

$$a_3 = -a_1 - a_2$$
$$a_5 = 4a_1 + 3a_2 - 3a_4$$

§4　线性方程组的解的结构

回顾：线性方程组的解的判定

1. 包含 n 个未知数的齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解的充分必要条件是系数矩阵的秩 $R(A) < n$.

2. 包含 n 个未知数的非齐次线性方程组 $Ax = b$ 有解的充分必要条件是系数矩阵的秩 $R(A) = R(A, b)$，并且

- 当$R(A) = R(A, b) = n$时，方程组有唯一解；
- 当$R(A) = R(A, b) < n$时，方程组有无限多个解

引言

问题：什么是线性方程组的解的结构？

答：所谓线性方程组的解的结构，就是当线性方程组有无限多个解时，解与解之间的相互关系.

备注：

- 当方程组存在唯一解时，无须讨论解的结构

解向量的定义

定义：设有齐次线性方程组 $Ax = 0$，如果

$$x_1 = \xi_{11}, \quad x_2 = \xi_{21}, \quad \ldots, \quad x_n = \xi_{n1}$$

为该方程组的解，则

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \\ \vdots \\ \xi_{n1} \end{pmatrix}$$

称为方程组的**解向量**.

齐次线性方程组的解的性质

性质1：若 $x = \xi_1$， $x = \xi_2$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解，

则 $x = \xi_1 + \xi_2$ 还是 $Ax = 0$ 的解.

证明： $A(\xi_1 + \xi_2) = A\xi_1 + A\xi_2 = 0 + 0 = 0$.

性质2：若 $x = \xi$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解，k 为实数，

则 $x = k\xi$ 还是 $Ax = 0$ 的解.

证明： $A(k\xi) = k(A\xi) = k0 = 0$.

结论：若 $x=\xi_1, x=\xi_2, \ldots, x=\xi_t$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解， 则 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\ldots+k_t\xi_t$ 还是 $Ax=0$ 的解.

- 已知齐次方程组 $Ax=0$ 的几个解向量，可以通过这些解向量的线性组合给出更多的解.
- 能否通过有限个解向量的线性组合把 $Ax=0$ 的解全部表示出来？
- 把 $Ax=0$ 的全体解组成的集合记作 S，若求得 S 的一个最大无关组S_0：$x=\xi_1, x=\xi_2, \ldots, x=\xi_t$，那么$Ax=0$ 的通解可表示为 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\ldots+k_t\xi_t$.
- 齐次线性方程组的解集的最大无关组称为该齐次线性方程组的基础解系（不唯一）.

回顾：向量组的秩的概念

定义：设有向量组 A，如果在 A 中能选出 r 个向量$a_1, a_2, \ldots,$

a_r，满足

① 向量组 A_0：$a_1, a_2, \ldots, a_r$线性无关；

② 向量组 A 中任意 $r+1$个向量（如果 A 中有$r+1$个向量的　话）都线性相关；

②' 向量组 A 中任意一个向量都能由向量组 A_0 线性表示；

返回

基础解系的概念

定义：齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一组解向量：$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$

如果满足

① ξ_1， ξ_2， …， ξ_r 线性无关；

②方程组中任意一个解都可以表示 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ 的线性组合，

那么称这组解是齐次线性方程组的一个基础解系.

❿ 设 $R(A) = r$，为叙述方便，

❿ 不妨设 A 行最简形矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathrm{L} & 0 & b_{11} & \mathrm{L} & b_{1,n-r} \\ 0 & 1 & \mathrm{L} & 0 & b_{21} & \mathrm{L} & b_{2,n-r} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & & \mathrm{M} & \mathrm{M} & & \mathrm{M} \\ 0 & 0 & \mathrm{L} & 1 & b_{r,1} & \mathrm{L} & b_{r,n-r} \\ 0 & 0 & \mathrm{L} & 0 & 0 & \mathrm{L} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{L} & 0 & 0 & \mathrm{L} & 0 \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & & \mathrm{M} & \mathrm{M} & & \mathrm{M} \\ 0 & 0 & \mathrm{L} & 0 & 0 & \mathrm{L} & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$$

前 r 列　　后 $n-r$ 列

❿ 对应的齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + b_{11}x_{r+1} + \mathrm{L} + b_{1,n-r}x_n = 0, \\ \qquad x_2 \qquad + b_{21}x_{r+1} + \mathrm{L} + b_{2,n-r}x_n = 0, \\ \qquad\qquad \mathrm{L}\ \mathrm{L} \\ \qquad\qquad x_r + b_{r1}x_{r+1} + \mathrm{L} + b_{r,n-r}x_n = 0. \end{cases}$$

❿ 令 $x_{r+1}, \ldots, x_n$ 作自由变量，则

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \mathrm{L} - b_{1,n-r}x_n, \\ x_2 = -b_{21}x_{r+1} - \mathrm{L} - b_{2,n-r}x_n, \\ \qquad \mathrm{L}\ \mathrm{L} \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \mathrm{L} - b_{r,n-r}x_n. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - b_{12}x_{r+2} - \cdots - b_{1,n-r}x_n, \\ x_2 = -b_{21}x_{r+1} - b_{22}x_{r+2} - \cdots - b_{2,n-r}x_n, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - b_{r2}x_{r+2} - \cdots - b_{r,n-r}x_n. \end{cases}$$

齐次线性方程组的通解

令 $x_{r+1} = c_1,\ x_{r+2} = c_2, \ldots, x_n = c_{n-r}$， 则

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11}c_1 - \cdots - b_{1,n-r}c_{n-r} \\ \vdots \\ -b_{r1}c_1 - \cdots - b_{r,n-r}c_{n-r} \\ c_1 \\ \ddots \\ c_{n-r} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + c_{n-r} \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

记作 $x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \ldots + c_{n-r}\xi_{n-r}$.（满足基础解系②）

$$
(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r})=\left(\begin{array}{cccc}
-b_{11} & -b_{12} & \cdots & -b_{1,n-r}\\
-b_{21} & -b_{22} & \cdots & -b_{2,n-r}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
-b_{r,1} & -b_{r,2} & \cdots & -b_{r,n-r}\\
1 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 1 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}\text{前 } r \text{ 行}\\
\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}\text{后 } n-r \text{ 行}
\end{array}
$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{n-r\text{ 列}}$$

故 $R(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r})=n-r$，

即 $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$ 线性无关．（满足基础解系①）

于是 $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$ 就是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系．

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - b_{12}x_{r+2} - \cdots - b_{1,n-r}x_n, \\ x_2 = -b_{21}x_{r+1} - b_{22}x_{r+2} - \cdots - b_{2,n-r}x_n, \\ \qquad \cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - b_{r2}x_{r+2} - \cdots - b_{r,n-r}x_n. \end{cases}$$

线性方程组的通解

令 $x_{r+1} = c_1,\ x_{r+2} = c_2, \ldots, x_n = c_{n-r}$， 则

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11}c_1 - \cdots - b_{1,n-r}c_{n-r} \\ \vdots \\ -b_{r1}c_1 - \cdots - b_{r,n-r}c_{n-r} \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + c_{n-r} \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

记作 $x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \ldots + c_{n-r}\xi_{n-r}$. （满足基础解系②）

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - b_{12}x_{r+2} - \cdots - b_{1,n-r}x_n, \\ x_2 = -b_{21}x_{r+1} - b_{22}x_{r+2} - \cdots - b_{2,n-r}x_n, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - b_{r2}x_{r+2} - \cdots - b_{r,n-r}x_n. \end{cases}$$

令 $\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$， 则 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2, \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ -b_{21} \\ \vdots \\ -b_{r1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b_{12} \\ -b_{22} \\ \vdots \\ -b_{r2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ -b_{2,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \end{pmatrix}$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \xi_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

此即为 $Ax = 0$ 的基础解系.

通解为

$$\xi = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \ldots + c_{n-r}\xi_{n-r}$$

定理：设 $m \times n$ 矩阵的秩 $R(A)=r$，则 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解集 S 的秩 $R_S=n-r$.

基础解系的求解

例：求齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

方法1：先求出通解，再从通解求得基础解系．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -5 & 7 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 = 3x_3 - 4x_4 \\ x_2 = -2x_3 + 3x_4 \end{cases}$$

令$x_3=c_1$， $x_4=c_2$， 得通解表达式

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c_1-4c_2 \\ -2c_1+3c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1\xi_1 + c_2\xi_2$$

因为

✓ 方程组的任意一个解都可以表示为ξ_1, ξ_2的线性组合.

✓ ξ_1, ξ_2的四个分量不成比例，所以 ξ_1, ξ_2线性无关.

所以ξ_1, ξ_2是原方程组的基础解系.

方法2：先求出基础解系，再写出通解.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -2\\ 2 & 3 & 0 & -1\\ 1 & -1 & -5 & 7\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & -3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x_1 \qquad -3x_3+4x_4=0\\ \qquad x_2+2x_3-3x_4=0\end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases}x_1=\ \ 3x_3-4x_4\\ x_2=-2x_3+3x_4\end{cases}$$

令 $\begin{pmatrix}x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$，得 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\ 3\end{pmatrix}$

合起来便得到基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}3\\ -2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}-4\\ 3\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

还能找出其它基础解系吗？

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&-2\\2&3&0&-1\\1&-1&-5&7\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-3&4\\0&1&2&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

问题：是否可以把 x_1 选作自由变量？

答：可以，因为是否把系数矩阵化为行最简形矩阵，其实并不影响方程组的求解．当两个矩阵行等价时，以这两个矩阵为系数矩阵的齐次线性方程组同解．

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&-2\\2&3&0&-1\\1&-1&-5&7\end{pmatrix}\overset{r_3+5r_1}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&1&-2\\2&3&0&-1\\6&9&0&-3\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_3-3r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&1&-2\\2&3&0&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\underset{r_1+2r_2}{\overset{r_2\div(-1)}{\sim}}\begin{pmatrix}-3&-4&1&0\\-2&-3&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&-2\\2&3&0&-1\\1&-1&-5&7\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}-3&-4&1&0\\-2&-3&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}-3x_1-4x_2+x_3\quad\quad=0\\-2x_1-3x_2\quad\quad+x_4=0\end{cases}\quad 即\ \begin{cases}x_3=3x_1+4x_2\\x_4=2x_1+3x_2\end{cases}$$

令 $x_1=c_1$， $x_2=c_2$， 得通解表达式

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\3c_1+4c_2\\2c_1+3c_2\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\0\\3\\2\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\4\\3\end{pmatrix}=c_1\eta_1+c_2\eta_2$$

从而可得另一个基础解系：η_1和 η_2 .

定理：设 $m \times n$ 矩阵的秩 $R(A)=r$，则 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解集 S 的秩 $R_S=n-r$.

例：设 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，证明 $R(A)=R(B)$.

例：设 $A_{m\times n}B_{n\times l}=O$（零矩阵），证明 $R(A)+R(B)\leqslant n$.

例：证明 $R(A^{\mathrm{T}}A)=R(A)$.

非齐次线性方程组的解的性质

性质3：若 $x=\eta_1$， $x=\eta_2$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解，

则 $x=\eta_1-\eta_2$ 是对应的齐次线性方程组 $Ax=0$（导出组）的解.

证明： $A(\eta_1-\eta_2)=A\eta_1-A\eta_2=b-b=0$.

性质4：若 $x=\eta$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解， $x=\xi$ 是

根据性质3 和性质4 可知

- 若 $x=\eta^*$ 是 $Ax=b$ 的解， $x=\xi$ 是 $Ax=0$ 的解，那么 $x=\xi+\eta^*$ 也是 $Ax=b$ 的解.
- 设 $Ax=0$ 的通解为 $\xi=c_1\xi_1+c_2\xi_2+\ldots+c_{n-r}\xi_{n-r}$.

于是 $Ax=b$ 的通解为

$$\eta=c_1\xi_1+c_2\xi_2+\ldots+c_{n-r}\xi_{n-r}+\eta^*$$

例：求线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-2x_4=3 \\ 2x_1+3x_2-x_4=5 \\ x_1-x_2-5x_3+7x_4=0 \end{cases}$ 的通解.

解：容易看出 $\eta^*=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ 是方程组的一个特解．

其对应的齐次线性方程组为 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-2x_4=0 \\ 2x_1+3x_2-x_4=0 \\ x_1-x_2-5x_3+7x_4=0 \end{cases}$

根据前面的结论，导出组的基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}-4\\3\\0\\1\end{pmatrix}$

于是，原方程组的通解为

$$\eta = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \eta^* = c_1\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

小结：关于线性方程组

- 求解线性方程组（第三章，利用矩阵的初等行变换）

- 线性方程组的几何意义（第四章，四种等价形式）

  1. 齐次线性方程组的通解能由它的基础解系来构造.

     ① 基础解系是解集 S 的最大无关组.

     ② 解集 S 是基础解系的所有可能的线性组合.

§5　向量空间

封闭的概念

定义：所谓封闭，是指集合中任意两个元素作某一运算得到

的结果仍属于该集合.

例：试讨论下列数集对四则运算是否封闭？

- 整数集 Z
- 有理数集 Q
- 实数集 R

向量空间的概念

定义：设 V 是 n 维向量的集合，如果

① 集合 V 非空，

② 集合 V 对于向量的加法和乘数两种运算封闭，

具体地说，就是：

✓ 若 $a \in V$， $b \in V$，则$a + b \in V$． （对加法封闭）

✓ 若 $a \in V$， $\lambda \in R$，则 $\lambda a \in V$． （对乘

例：下列哪些向量组构成向量空间？

1. n 维向量的全体R^n

2. 集合 $V_1 = \{ (0, x_2, \ldots, x_n)^T \mid x_2, \ldots, x_n \in R \}$

3. 集合 $V_2 = \{ (1, x_2, \ldots, x_n)^T \mid x_2, \ldots, x_n \in R \}$

4. 齐次线性方程组的解集 $S_1 = \{ x \mid Ax = 0 \}$

5. 非齐次线性方程组的解集 $S_2 = \{ x \mid Ax = b \}$

解：集合 R^n，V_1，S_1 是向量空间，

集合 V_2，S_2 不是向量空间.

定义：齐次线性方程组的解集称为齐次线性方程组的解空间.

例：设 a, b 为两个已知的 n 维向量，集合

$$L = \{\lambda a + \mu b \mid \lambda, \mu \in R\}$$

是一个向量空间吗？

解：设 $x_1, x_2 \in L$， $k \in R$，因为

- $x_1 + x_2 = (\lambda_1 a + \mu_1 b) + (\lambda_2 a + \mu_2 b)$
  $= (\lambda_1 + \lambda_2)\, a + (\mu_1 + \mu_2)\, b \in L$
- $k\, x_1 = k\, (\lambda_1 a + \mu_1 b) = (k\lambda_1)\, a + (k\mu_1)\, b \in L$

所以，L 是一个向量空间.

定义：把集合

$$L = \{\lambda a + \mu b \mid \lambda, \mu \in R\}$$

称为由向量 a, b 所生成的向量空间.

一般地，把集合

$$L = \{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in R\}$$

称为由向量$a_1, a_2, \ldots, a_m$所生成的向量空间.

例：设向量组$a_1, a_2, \ldots, a_m$和 $b_1, b_2, \ldots, b_s$等价，记

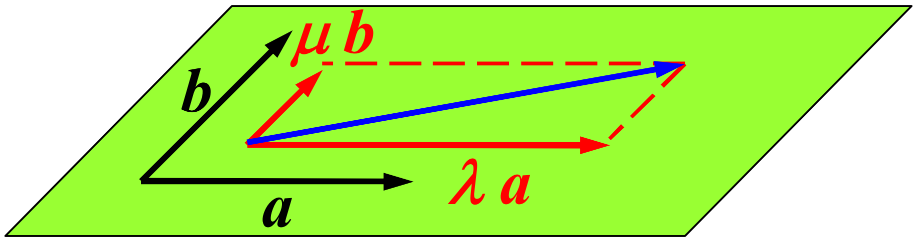
$$L_1 = \{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in R\},$$

$$L_2 = \{\mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \ldots + \mu_s b_s \mid \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s \in R\},$$

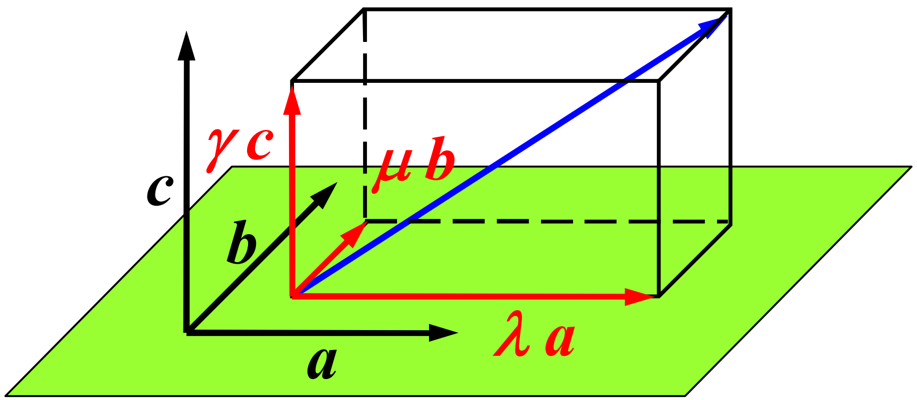
试证 $L_1 = L_2$.

结论：等价的向量组所生成的空间相等.

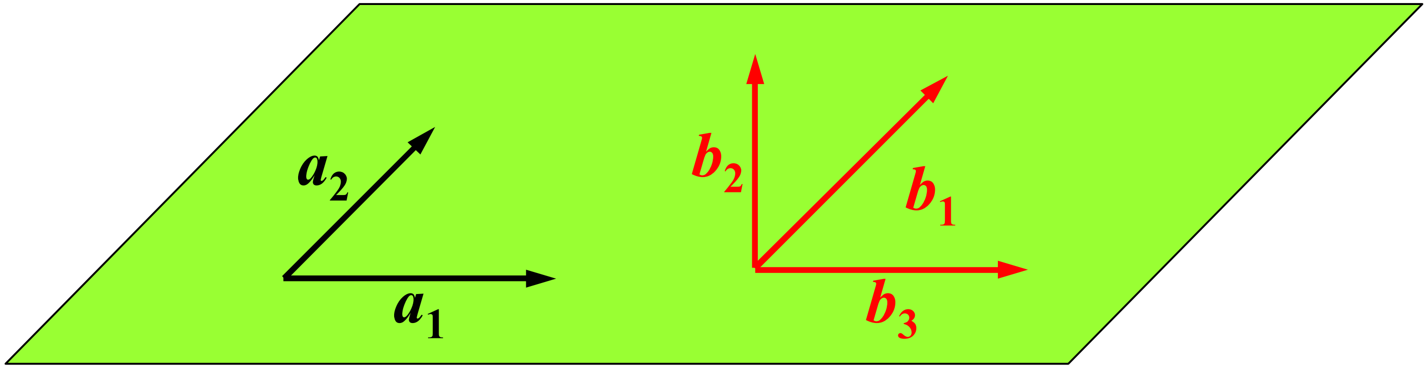
$$L = \{\lambda \boldsymbol{a} \mid \lambda \in \boldsymbol{R}\}$$



$$L = \{\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b} \mid \lambda, \mu \in \boldsymbol{R}\}$$



$$L = \{\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b} + \gamma \boldsymbol{c} \mid \lambda, \mu, \gamma \in \boldsymbol{R}\}$$



$$L_1 = \{ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in R \}$$

$$L_2 = \{ \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 \mid \mu_1, \mu_2 \in R \}$$

则 $L_1 = L_2$

$$L_3 = \{ \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \mu_3 b_3 \mid \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in R \}$$

问题：$L_1 = L_2 = L_3?$

返回

子空间的概念

定义：如果向量空间 V 的非空子集合 V_1 对于 V 中所定义的

加法及乘数两种运算是封闭的，则称 V_1 是 V 的子空间.

例：

1. n 维向量的全体R^n

2. 集合 $V_1 = \{ (0, x_2, \ldots, x_n)^T \mid x_2, \ldots, x_n \in R \}$

3. 集合 $V_2 = \{ (1, x_2, \ldots, x_n)^T \mid x_2, \ldots, x_n \in R \}$

向量空间的基的概念

定义：设有向量空间 V，如果在 V 中能选出 r 个向量$a_1, a_2, \ldots,$ a_r，满足

① $a_1, a_2, \ldots, a_r$线性无关；

② V 中任意一个向量都能由 $a_1, a_2, \ldots, a_r$线性表示；

那么称向量组 $a_1, a_2, \ldots, a_r$ 是向量空间 V 的一个基.

向量空间	→	向量组
向量空间的基	→	向量组的最大无关组
向量空间的维数	→	向量组的秩

1.　n 维向量的全体 R^n

解：E_n 的列向量组是 R^n 的一个基，故R^n 的维数等于 n .

2.　集合 $V_1 = \{ (0, x_2, \dots, x_n)^{\mathrm{T}} \mid x_2, \dots, x_n \in R \}$

解：E_n 的后 $n-1$个列向量是V_1 的一个基，故 V_1 的维数等于 $n-1$.

3.　n 元齐次线性方程组的解集 $S_1 = \{ x \mid Ax = 0 \}$

解：齐次线性方程组的基础解系是 S_1 的一个基，故 S_1 的维数等于 $n-R(A)$.

1. n 维向量的全体 R^n

解：E_n 的列向量组是 R^n 的一个基，故R^n 的维数等于 n .

2. 集合 $V_1 = \{ (0, x_2, \ldots, x_n)^T \mid x_2, \ldots, x_n \in R \}$

解：E_n 的后 $n-1$个列向量是V_1 的一个基，故 V_1 的维数等于 $n-1$.

结论：若V_1 是V 的子空间，则V_1 的维数不超过V 的维数.

3. n 元齐次线性方程组的解集 $S_1 = \{ x \mid Ax = 0 \}$

解：齐次线性方程组的基础解系是 S_1 的一个基，故 S_1 的维数等于 $n-R(A)$.

4. 由$a_1, a_2, ..., a_m$所生成的向量空间

$$L = \{ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m \mid \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m \in R \}$$

- 若 $a_1, a_2, ..., a_m$ 线性无关，则

  $a_1, a_2, ..., a_m$ 是向量空间 L 的一个基.

- 若 $a_1, a_2, ..., a_m$ 线性相关，则

  向量组 A：$a_1, a_2, ..., a_m$

等价于　向量组 A 的最大无关组 A_0：$a_1, a_2, ..., a_r$

从而　$L = L_1 = \{ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_r a_r \mid \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r \in R \}$

故向量组 A_0 就是 L 的一个基， A_0中向量的个数就是 L 的维数

.

4. 由$a_1, a_2, ..., a_m$所生成的向量空间

$$L=\{\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\dots+\lambda_m a_m \mid \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m \in R\}$$

解： $L=\{\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\dots+\lambda_m a_m \mid \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m \in R\}$

向量组 A：$a_1, a_2, ..., a_m$

等价于 向量组 A 的最大无关组 A_0：$a_1, a_2, ..., a_r$

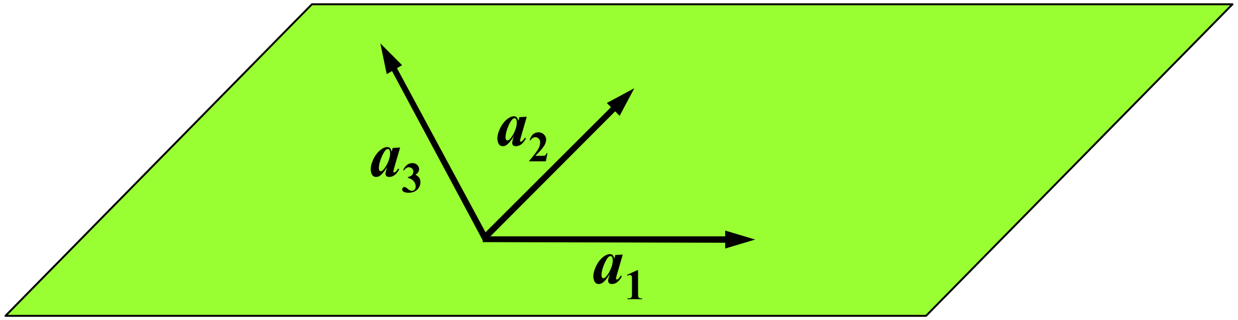
故向量组 A_0 就是 L 的一个基，A_0中向量的个数就是 L 的维数.

一般来说，若 $a_1, a_2, ..., a_m \in V$，则 L 是 V 的子空间.

若向量组 $a_1, a_2, ..., a_m$ 是向量空间V 的一个基，那么

$$V=\{\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\dots+\lambda_m a_m \mid \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m \in R\}$$

结论：等价的向量组所生成的空间相等.



$$L=\{\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\lambda_3 a_3 \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R\}$$

向量组 a_1, a_2, a_3

等价于　　　相应的最大无关组 a_1, a_2

所以 $L=\{\mu_1 a_1+\mu_2 a_2 \mid \mu_1, \mu_2 \in R\}$

从而 a_1, a_2 就是 L 的一个基，L 的维数等于2.

定义：如果在向量空间 V 中取定一个基 $a_1, a_2, \ldots, a_r$，那么 V 中任意一个向量可唯一表示为

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_r a_r$$

数组 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ 称为向量 x 在基 $a_1, a_2, \ldots, a_r$ 中的坐标.

例：$E = (e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的列向量组是 R^3 的一个基，

那么 $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2e_1 + 3e_2 + 7e_3$

b 在基 e_1, e_2, e_3 中的坐标

$$b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + b_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots + b_n\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

n 阶单位矩阵 E_n 的列向量叫做 n 维单位坐标向量.

n 阶单位矩阵 E_n 的列向量组称为 R^n 的自然基.

上三角形矩阵 $A=\left(a_1,a_2,a_3\right)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的列向量组也是 R^3 的一个基，那么

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}=(-3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+(-2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+7\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=-3a_1-2a_2+7a_3$$

结论：同一个向量在不同基中的坐标是不同的.

例：设 $A=(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B=(b_1,b_2)=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

验证a_1, a_2, a_3 是R^3 的一个基，并求 b_1, b_2 在这个基中的坐标.

分析：

- a_1, a_2, a_3 是 R^3 的一个基 $\Leftrightarrow$ $R(a_1, a_2, a_3)=3$
- b_1, b_2 在这个基中的坐标 $\Leftrightarrow$ 用 a_1, a_2, a_3 表示 b_1, b_2
- 当 $A\overset{r}{\sim}B$ 时，A 的列向量组与B 的列向量组有相同的线性关系. （P. 93 例11）

为此，考虑把 $(A, B)=(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2)$ 化为行最简形矩阵.

例：设 $A=(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$， $B=(b_1,b_2)=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

验证a_1, a_2, a_3是R^3的一个基，并求 b_1, b_2在这个基中的坐标.

解：

$$(A,B)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

于是 $b_1=\frac{2}{3}a_1-\frac{2}{3}a_2-a_3$， $b_2=\frac{4}{3}a_1+a_2+\frac{2}{3}a_3$

例：在 $\boldsymbol{R}^3$中取定一个基 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$，再取一个新基 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$，设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$．

① 求用$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 表示 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ 的表示式（基变换公式）；

② 求向量在两个基中的坐标之间的关系式（坐标变换公式）．

分析：

- 求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$.
- 设 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^3$，且 $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$，求解矩阵方程 $\boldsymbol{X}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$．

第五章
相似矩阵及二次型

§1　向量的内积、长度及正交性

向量的内积

定义：设有 n 维向量 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$，

令

$$[x, y] = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n,$$

则称 $[x, y]$ 为向量 x 和 y 的内积.

说明：

向量的内积

定义： 设有 n 维向量 $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$，

令

$$[x,y]=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

$$=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=x^Ty$$

$$[x, y] = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = x^T y.$$

内积具有下列性质（其中 x, y, z 为 n 维向量，λ 为实数）：

- 对称性： $[x, y] = [y, x]$.
- 线性性质： $[\lambda x, y] = \lambda[x, y]$.

  $$[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$$
- 当 $x = 0$（零向量） 时， $[x, x] = 0$；

  当 $x \neq 0$（零向量） 时， $[x, x] > 0$.
- 施瓦兹（Schwarz）不等式

$$[x, y] = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = x^{\mathrm{T}} y.$$

内积具有下列性质（其中 x, y, z 为 n 维向量，λ 为实数）：

- 对称性：

$$[x, y] = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$
$$= y_1 x_1 + y_2 x_2 + \cdots + y_n x_n$$
$$= [y, x]$$

$$[x, y] = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = x^T y.$$

内积具有下列性质（其中 x, y, z 为 n 维向量，λ 为实数）：

- 对称性： $[x, y] = [y, x]$.
- 线性性质： $[\lambda x, y] = \lambda[x, y]$.

$$[\lambda x, y] = (\lambda x)^T \cdot y = \lambda x^T \cdot y = \lambda(x^T y) = \lambda[x, y]$$

$$[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$$

$$[x + y, z] = (x + y)^T \cdot z = (x^T + y^T) \cdot z = (x^T z) + (y^T z) = [x, z] + [y, z]$$

$$[x, y] = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = x^{\mathrm{T}} y.$$

内积具有下列性质（其中 x, y, z 为 n 维向量，λ 为实数）：

- 对称性： $[x, y] = [y, x]$.
- 线性性质： $[\lambda x, y] = \lambda[x, y]$.

  $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$
- 当 $x = 0$（零向量）时， $[x, x] = 0$；

  当 $x \neq 0$（零向量）时， $[x, x] > 0$.

$$[x, y] = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = x^{\mathrm{T}} y.$$

内积具有下列性质（其中 x, y, z 为 n 维向量，λ 为实数）：

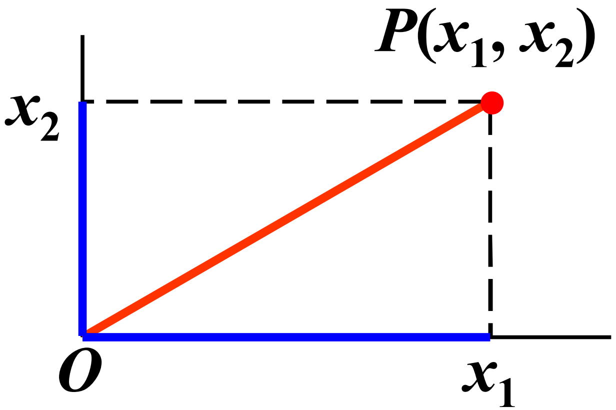
- 对称性： $[x, y] = [y, x]$.
- 线性性质： $[\lambda x, y] = \lambda[x, y]$.

  $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$
- 当 $x = 0$（零向量） 时， $[x, x] = 0$;

  当 $x \neq 0$（零向量） 时， $[x, x] > 0$.
- 施瓦兹（Schwarz）不等式

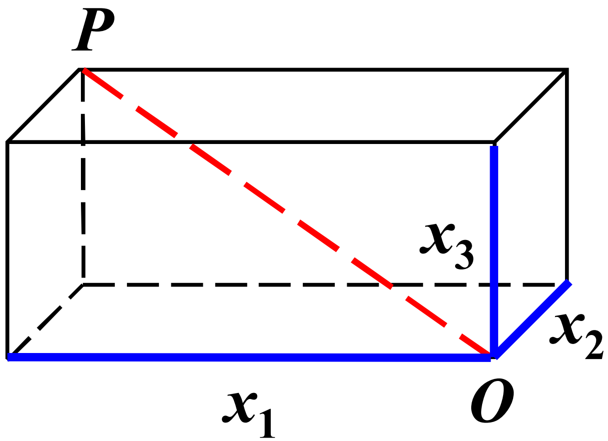
回顾：

$$[x, x] = x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + \dots + x_n^{\,2} \geqslant 0$$



若令 $x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$，则

$$|OP| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{[x, x]}$$



若令 $x = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$，则

$$|OP| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{[x, x]}$$

向量的长度

定义：令 $\| x \| = \sqrt{[x,x]} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \ge 0$

称 || *x* || 为 *n* 维向量 *x* 的长度（或范数）．

当 || *x* || = 1时，称 *x* 为单位向量.

向量的长度具有下列性质：

- 非负性：当 *x* = 0（零向量）时， || *x* || = 0；

$$[\lambda x, \lambda x] = \lambda [x, \lambda x] = \lambda [\lambda x, x] = \lambda^2 [x,x]$$

当 *x* ≠ 0（零向量）时， || *x* || > 0.

$$\| \lambda x \| = \sqrt{[\lambda x, \lambda x]} = \sqrt{\lambda^2 [x,x]} = | \lambda | \sqrt{[x,x]} = | \lambda | \cdot \| x \|$$

向量的长度

定义：令 $\| x \| = \sqrt{[x, x]} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

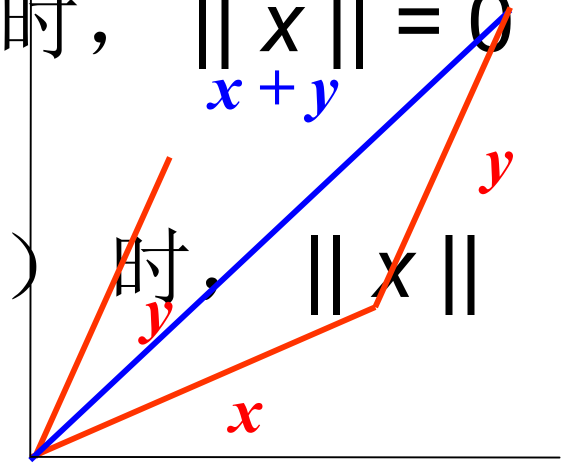
称 $\| x \|$ 为 n 维向量 x 的长度（或范数）．

当 $\| x \| = 1$ 时，称 x 为单位向量.

向量的长度具有下列性质：

- 非负性：当 $x = 0$（零向量）时，$\| x \| = 0$；

  当 $x \neq 0$（零向量）时，$\| x \| > 0$.



向量的正交性

施瓦兹（Schwarz）不等式

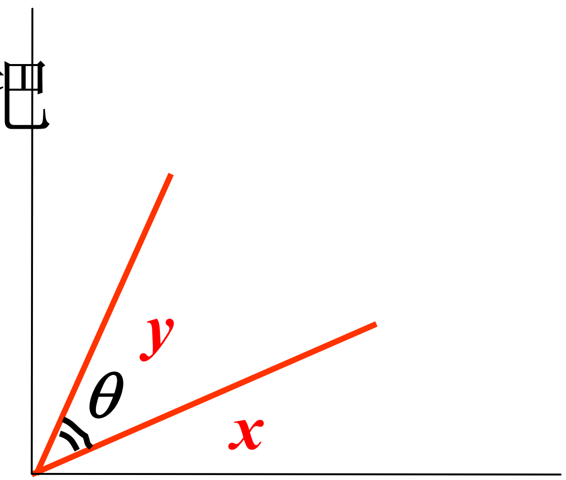
$$[x, y]^2 \leqslant [x, x]\,[y, y] - \|x\| \cdot \|y\|$$

$$\left|\frac{[x, y]}{\|x\| \cdot \|y\|}\right| \leq 1$$

当 $x \neq 0$ 且 $y \neq 0$ 时，

定义：当 $x \neq 0$ 且 $y \neq 0$ 时，把

$$\theta = \arccos \frac{[x, y]}{\|x\| \cdot \|y\|}$$



称为 n 维向量 x 和 y 的夹角.

定义： 两两正交的非零向量组成的向量组成为**正交向量组**.

定理： 若 n 维向量 $a_1, a_2, \ldots, a_r$ 是一组两两正交的非零向量，则 $a_1, a_2, \ldots, a_r$ 线性无关.

证明： 设 $k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_r a_r = 0$（零向量），那么

$$0 = [a_1, 0] = [a_1, k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_r a_r]$$

$$= k_1 [a_1, a_1] + k_2 [a_1, a_2] + \ldots + k_r [a_1, a_r]$$

$$= k_1 [a_1, a_1] + 0 + \ldots + 0$$

$$= k_1 ||a_1||^2$$

从而 $k_1 = 0$.

同理可证，$k_2 = k_3 = \ldots = k_r = 0$.

综上所述，$a_1, a_2, \ldots, a_r$ 线性无关.

例：已知3 维向量空间R^3中两个向量 $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

正交，试求一个非零向量a_3，使a_1, a_2, a_3两两正交.

分析：显然$a_1 \perp a_2$.

解：设$a_3 = (x_1, x_2, x_3)^T$，若$a_1 \perp a_3$， $a_2 \perp a_3$，则

$$[a_1, a_3] = a_1^T a_3 = x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$[a_2, a_3] = a_2^T a_3 = x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

得 $\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

从而有基础解系 $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，令 $a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

定义： n 维向量$e_1, e_2, \ldots, e_r$ 是向量空间 $V \subset R^n$ 中的向量，满足

✓ $e_1, e_2, \ldots, e_r$ 是向量空间 V 中的一个基（最大无关组）；

✓ $e_1, e_2, \ldots, e_r$ 两两正交；

✓ $e_1, e_2, \ldots, e_r$ 都是单位向量，

则称 $e_1, e_2, \ldots, e_r$ 是V 的一个规范正交基.

例： $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

是 R^4 的一个规范正交基.

$$e_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix},e_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

也是 R^4 的一个规范正交基.

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},e_4=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

是 R^4 的一个基，但不是规范正交基.

设 $e_1, e_2, \ldots, e_r$ 是向量空间 V 中的一个正交基，则 V 中任意一个向量可唯一表示为 $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_r e_r$

于是 $$\lambda_i = \frac{[x, e_i]}{[e_i, e_i]} = \frac{[x, e_i]}{\| e_i \|^2}, \quad i = 1, 2, \cdots, r$$

特别地，若 $e_1, e_2, \ldots, e_r$ 是 V 的一个规范正交基，则

$$\lambda_i = [x, e_i], \quad i = 1, 2, \cdots, r$$

问题： 向量空间 V 中的一个基 $a_1, a_2, \ldots, a_r$

$\Downarrow$?

向量空间 V 中的一个规范正交基 $e_1, e_2, \ldots, e_r$

求规范正交基的方法

基 ⇒ 正交基 ⇒ 规范正交基

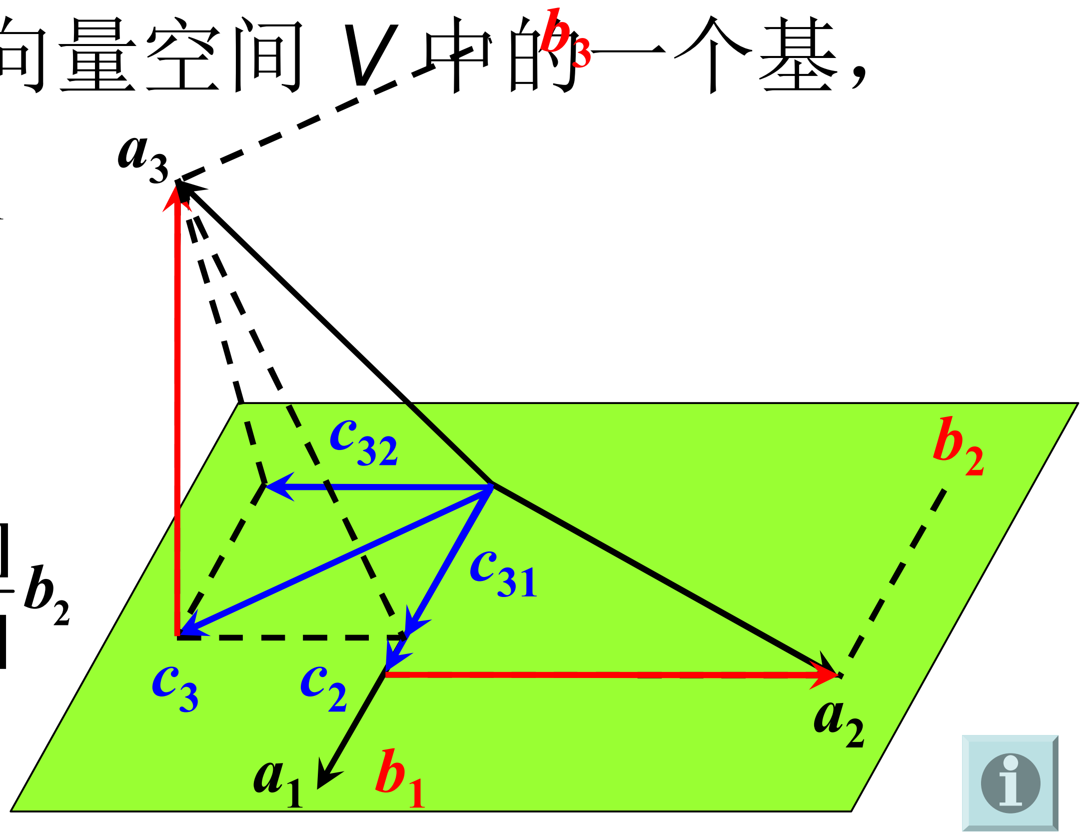
第一步：正交化——施密特（Schimidt）正交化过程

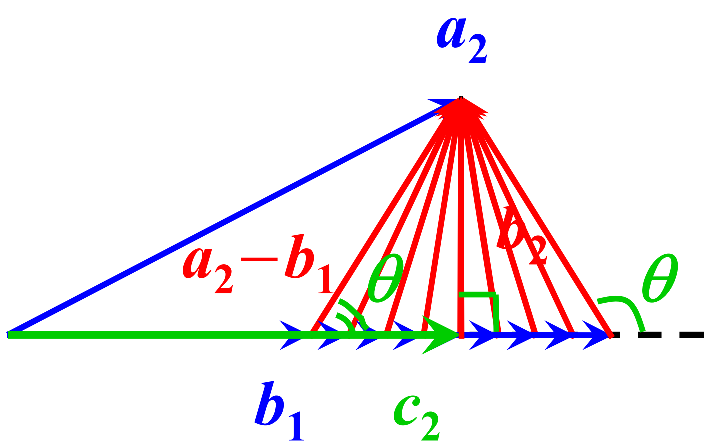
设 $a_1, a_2, \ldots, a_r$ 是向量空间 V 中的一个基，那么令

$$b_1 = a_1$$

$$b_2 = a_2 - c_2 = a_2 - \frac{[b_1, a_2]}{[b_1, b_1]} b_1$$

$$\begin{aligned} b_3 &= a_3 - c_3 \\ &= a_3 - c_{31} - c_{32} \\ &= a_3 - \frac{[b_1, a_3]}{[b_1, b_1]} b_1 - \frac{[b_2, a_3]}{[b_2, b_2]} b_2 \end{aligned}$$





令 c_2 为 a_2 在 b_1 上的投影，则 $c_2=\lambda b_1$，

若令 $b_2=a_2-c_2=a_2-\lambda b_1$，则 $b_1\perp b_2$.

下面确定λ 的值．因为

$$0=[b_2,b_1]=[a_2-\lambda b_1,b_1]=[a_2,b_1]-\lambda[b_1,b_1]$$

所以 $\lambda=\dfrac{[a_2,b_1]}{[b_1,b_1]}$ $\qquad b_2=a_2-c_2=a_2-\lambda b_1=a_2-\dfrac{[b_1,a_2]}{[b_1,b_1]}b_1$

返回

第一步：正交化——施密特（Schimidt）正交化过程

设 $a_1, a_2, \ldots, a_r$ 是向量空间 V 中的一个基，那么令

$$b_1 = a_1$$

$$b_2 = a_2 - c_2 = a_2 - \frac{[b_1, a_2]}{[b_1, b_1]} b_1$$

$$\cdots\cdots$$

$$b_r = a_r - \frac{[b_1, a_r]}{[b_1, b_1]} b_1 - \frac{[b_2, a_r]}{[b_2, b_2]} b_2 - \cdots - \frac{[b_{r-1}, a_r]}{[b_{r-1}, b_{r-1}]} b_{r-1}$$

第二步：单位化

设 $b_1, b_2, \ldots, b_r$ 是向量空间 V 中的一个正交基，那么令

$$e_1 = \frac{1}{\|b_1\|} b_1,\ e_2 = \frac{1}{\|b_2\|} b_2, \cdots,\ e_r = \frac{1}{\|b_r\|} b_r$$

因为

$$[e_1, e_1] = \left[\frac{1}{\|b_1\|} b_1, \frac{1}{\|b_1\|} b_1\right] = \frac{1}{\|b_1\|^2}\left[b_1, b_1\right] = \frac{\|b_1\|^2}{\|b_1\|^2} = 1$$

$$\|e_1\| = \sqrt{[e_1, e_1]} = 1$$

从而 $e_1, e_2, \ldots, e_r$ 是向量空间 V 中的一个规范正交基.

例：设 $a_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}, a_3=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}$ ，试用施密特正交化过程把这组向量规范正交化.

解：第一步正交化，取

$$b_1=a_1$$

$$b_2=a_2-\frac{[b_1,a_2]}{[b_1,b_1]}b_1=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}-\frac{4}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\frac{5}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$b_3=a_3-\frac{[b_1,a_3]}{[b_1,b_1]}b_1-\frac{[b_2,a_3]}{[b_2,b_2]}b_2=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\frac{5}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

例：设 $a_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}, a_3=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}$，试用施密特正交化过程把这组向量规范正交化.

解：第二步单位化，令

$$e_1=\frac{1}{\|b_1\|}b_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$e_2=\frac{1}{\|b_2\|}b_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$e_3=\frac{1}{\|b_3\|}b_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

例： 已知 $a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，试求非零向量 a_2, a_3，使 a_1, a_2, a_3 两两正交.

解： 若 $a_1\perp a_2$， $a_1\perp a_3$，则

$$[a_1, a_2]=a_1^{\mathrm{T}}a_2=x_1+x_2+x_3=0$$

$$[a_1, a_3]=a_1^{\mathrm{T}}a_3=x_1+x_2+x_3=0$$

即 a_2, a_3 应满足方程 $x_1+x_2+x_3=0$.

基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\quad a_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $a_3=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$

把基础解系正交化即为所求.（以保证 $a_2\perp a_3$ 成立）

定义：如果 n 阶矩阵 A 满足 $A^{\mathrm{T}}A=E$，即 $A^{-1}=A^{\mathrm{T}}$，则称矩阵 A 为正交矩阵，简称正交阵.

$$A^T A=\begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix}(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\begin{pmatrix} a_1^Ta_1 & a_1^Ta_2 & \cdots & a_1^Ta_n \\ a_2^Ta_1 & a_2^Ta_2 & \cdots & a_2^Ta_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n^Ta_1 & a_n^Ta_2 & \cdots & a_n^Ta_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

于是
$$[a_i,a_j]=a_i^Ta_j=\begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

从而可得

- 方阵A 为正交阵的充分必要条件是 A 的列向量都是单位向量，且两两正交．即 A 的列向量组构成R^n 的规范正交基.

定义：如果 n 阶矩阵 A 满足 $A^{\mathrm{T}}A=E$，即 $A^{-1}=A^{\mathrm{T}}$，则称矩阵 A 为正交矩阵，简称正交阵.

- 方阵 A 为正交阵的充分必要条件是 A 的列向量都是单位向量，且两两正交．即 A 的列向量组构成 R^n 的规范正交基.

因为 $A^{\mathrm{T}}A=E$ 与 $AA^{\mathrm{T}}=E$ 等价，所以

$$AA^T=\begin{pmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ \vdots \\ b_n^T \end{pmatrix}\left(b_1,b_2,\cdots,b_n\right)=\begin{pmatrix} b_1^Tb_1 & b_1^Tb_2 & \cdots & b_1^Tb_n \\ b_2^Tb_1 & b_2^Tb_2 & \cdots & b_2^Tb_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n^Tb_1 & b_n^Tb_2 & \cdots & b_n^Tb_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$[b_i,b_j]=b_i^Tb_j=\begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

定义：如果 n 阶矩阵A 满足 $A^{\mathrm{T}}A = E$，即 $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$，则称矩阵A 为正交矩阵，简称正交阵.

- 方阵A 为正交阵的充分必要条件是 A 的列向量都是单位向量，且两两正交．即 A 的列向量组构成R^n 的规范正交基.

- 方阵A 为正交阵的充分必要条件是 A 的行向量都是单位向量，且两两正交．即 A 的行向量组构成R^n 的规范正交基.

例：正交矩阵 $P=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

R^4 的一个规范正交基

$$e_1=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, e_4=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

正交矩阵具有下列性质：

- ✓ 若 A 是正交阵，则 A^{-1} 也是正交阵，且$|A|=1$ 或-1.
- ✓ 若 A 和B是正交阵，则 A 和 B 也是正交阵.

定义：若 P 是正交阵，则线性变换 $y=Px$ 称为正交变换.

$$\|y\|=\sqrt{y^T y}=\sqrt{(Px)^T(Px)}=\sqrt{x^T P^T Px}=\sqrt{x^T x}=\|x\|$$

经过正交变换，线段的长度保持不变（从而三角形的形状保持不变），这就是正交变换的优良特性.

n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与 m 个变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 之间的关系式

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{cases}$$

表示一个从变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 线性变换，其中 a_{ij} 为常数.

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{cases}$$

$\cdots\cdots$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

系数矩阵

线性变换与矩阵之间存在着一一对应关系.

返回

§2　方阵的特征值与特征向量

引言

- 纯量阵 λE 与任何同阶矩阵的乘法都满足交换律，即

$$(\lambda E_n)A_n = A_n(\lambda E_n) = \lambda A_n \, .$$

- 矩阵乘法一般不满足交换律，即 $AB \neq BA$.
- 数乘矩阵与矩阵乘法都是可交换的，即

$$\lambda(AB) =$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $Ax = \lambda x$?

一、基本概念

定义：设 A 是 n 阶矩阵，如果数 λ 和 n 维非零向量 x 满足

$$Ax = \lambda x,$$

那么这样的数 λ 称为矩阵 A 的特征值，非零向量 x 称为 A 对应于特征值 λ 的特征向量

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

例：

一、基本概念

定义：设 A 是 n 阶矩阵，如果数 λ 和 n 维非零向量 x 满足

$$Ax = \lambda x,$$

那么这样的数 λ 称为矩阵 A 的特征值，非零向量 x 称为 A 对应于特征值 λ 的特征向量.

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$$Ax = \lambda x = \lambda E x$$

非零向量 x 满足 $(A - \lambda E)x = 0$（零向量）

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

特征多项式

特征方程

- 特征方程 $|A-\lambda E| = 0$
- 特征多项式 $|A-\lambda E|$

二、基本性质

- 在复数范围内 n 阶矩阵 A 有 n 个特征值（重根按重数计算）.
- 设 n 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$，则

✓ $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$

✓ $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n = |A|$

例：求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解：A 的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda & -1\\ -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2-1=8-6\lambda+\lambda^2=(4-\lambda)(2-\lambda)$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=4$.

当 $\lambda_1=2$ 时，对应的特征向量应满足

$$\begin{pmatrix}3-2 & -1\\ -1 & 3-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}，即 \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

解得基础解系 $p_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$. $k\,p_1$（$k\neq 0$）就是对应的特征向量.

例：求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解：A 的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda & -1\\ -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2-1=8-6\lambda+\lambda^2=(4-\lambda)(2-\lambda)$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=4$.

当 $\lambda_2=4$ 时， 对应的特征向量应满足

$$\begin{pmatrix}3-4 & -1\\ -1 & 3-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\text{，即}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

解得基础解系 $p_2=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$. $k\,p_2$（$k\neq 0$）就是对应的特征向量.

例：求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解：$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ -4 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1\\ -4 & 3-\lambda\end{vmatrix}$

$$=(2-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2)=-(\lambda+1)(\lambda-2)^2$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=\lambda_3=2$.

例：求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解（续）：当 $\lambda_1=-1$ 时，因为

$$A-\lambda_1E=A+E=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&3&0\\-4&1&4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

解方程组 $(A+E)x=0$.

解得基础解系 $p_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. $k\,p_1$（$k\neq 0$）就是对应的特征向量.

例：求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解（续）：当 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时，因为

$$A-2E=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -4 & 1 & 1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}-4 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

解方程组 $(A-2E)\,x=0$.

解得基础解系 $p_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 4\end{pmatrix},\ p_3=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}.$

$k_2 p_2+k_3 p_3$ 就是对应的特征向量.

二、基本性质

- 在复数范围内 n 阶矩阵 A 有 n 个特征值（重根按重数计算）.
- 设 n 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$，则

✓ $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$

✓ $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = |A|$

- 若 λ 是 A 的一个特征值，则齐次线性方程组的基础解系

就是对应于特征值为 λ 的全体特征向量的

例：设 λ 是方阵 A 的特征值，证明

(1) λ^2 是 A^2 的特征值；

(2) 当 A 可逆时，$1/\lambda$ 是 A^{-1} 的特征值.

结论：若非零向量 p 是 A 对应于特征值 λ 的特征向量，则

- λ^2 是 A^2 的特征值，对应的特征向量也是 p .
- λ^k 是 A^k 的特征值，对应的特征向量也是 p .
- 当 A 可逆时，$1/\lambda$ 是 A^{-1} 的特征值，对应的特征向量仍然是 p .

二、基本性质

- 在复数范围内 n 阶矩阵 A 有 n 个特征值（重根按重数计算）.
- 设 n 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$，则

✓ $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$

✓ $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n = |A|$

- 若 λ 是 A 的一个特征值，则齐次线性方程组的基础解系

就是对应于特征值为 λ 的全体特征向量的

例：设3 阶方阵 A 的特征值为1, −1, 2，求

$$A^* + 3A - 2E$$

的特征值.

解：$A^* + 3A - 2E = |A|\, A^{-1} + 3A - 2E = -2A^{-1} + 3A - 2E = \varphi(A)$

其中$|A| = 1 \times (-1) \times 2 = -2$.

设 λ 是 A 的一个特征值，p 是对应的特征向量．令

$$\varphi(\lambda) = -\frac{2}{\lambda} + 3\lambda - 2$$

则 $\varphi(A)p = (-2A^{-1} + 3A - 2E)p = -2(A^{-1}p) + 3(Ap) - 2p$

$$= -\frac{2}{\lambda}p + 3\lambda p - 2p = \left(-\frac{2}{\lambda} + 3\lambda - 2\right)p = \varphi(\lambda)p$$

定理： 设 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ 是方阵 A 的特征值， $p_1, p_2, \ldots, p_m$ 依次是与之对应的特征向量，如果$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ 各不相同，则 $p_1, p_2, \ldots, p_m$ 线性无关.

例： 设 λ_1 和 λ_2 是方阵 A 的两个不同的特征值，对应的特征向量依次为 p_1 和 p_2， 证明 $p_1 + p_2$不是 A 的特征向量.

§3 相似矩阵

定义：设 A, B 都是 n 阶矩阵，若有可逆矩阵 P 满足

$$P^{-1}AP = B,$$

则称 B 为矩阵 A 的相似矩阵，或称矩阵A 和 B 相似.

对 A 进行运算 $P^{-1}AP$ 称为对 A 进行相似变换.

称可逆矩阵 P 为把 A 变成 B 的相似变换矩阵.

定理：若 n 阶矩阵 A 和 B 相似，则 A 和 B 的

定理：若 n 阶矩阵 A 和 B 相似，则 A 和 B 的特征多项式相同,

从而 A 和 B 的特征值也相同.

推论：若 n 阶矩阵 A 和 B 相似，则 A 的多项式 $\varphi(A)$ 和 B 的多项式 $\varphi(B)$ 相似.

证明：设存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = B$，则 $P^{-1}A^kP = B^k$.

设 $\varphi(x) = c\,x^m + c\,x^{m-1} + \cdots + c\,x + c$ ，那

定理：设 n 阶矩阵 $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$，则 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 就是 Λ 的 n 个特征值.

证明：

$$|\Lambda - \lambda E| = \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & & & \\ & \lambda_2 - \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n - \lambda \end{pmatrix} \end{vmatrix} = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda)$$

故 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 就是 Λ 的 n 个特征值.

定理：若 n 阶矩阵 A 和 B 相似，则 A 和 B 的特征多项式相同，

从而 A 和 B 的特征值也相同.

推论：若 n 阶矩阵 A 和 B 相似，则 A 的多项式 $\varphi(A)$ 和 B 的多项式 $\varphi(B)$ 相似.

$$\varphi(A) = P^{-1}\varphi(\Lambda)P = P^{-1}\begin{pmatrix} \varphi(\lambda_1) & & & \\ & \varphi(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi(\lambda_n) \end{pmatrix}P$$

若 n 阶矩阵 A 和 n 阶对角阵 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 相似，则

可逆矩阵 P，满足 $P^{-1}AP=\Lambda$ （对角阵）

$$\Big\downarrow\Big\uparrow \;?$$

$$AP=P\Lambda$$

$$\Big\downarrow\Big\uparrow$$

$$Ap_i=\lambda_i\, p_i\ (i=1, 2, \ldots, n)$$

A 的特征值

对应的特征向量

P.123定理4：

n 阶矩阵 A 和对角阵相似

当且仅当

A 有 n 个线性无关的特征向量

推论： 如果 A 有 n 个不同的特征值，则 A 和对角阵相似.

其中

$$A(p_1, p_2, \cdots, p_n)=(p_1, p_2, \cdots, p_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

§4　对称矩阵的对角化

定理：设 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ 是方阵 A 的特征值，$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_m$ 依次是与之对应的特征向量，如果 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ 各不相同，则 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_m$ 线性无关．（**P.120定理2**）

$\boxed{\text{可逆矩阵 } P}$，满足 $P^{-1}AP=\Lambda$（对角阵）

$\Updownarrow$ $\qquad\qquad$ $\Updownarrow$?

矩阵 P 的列向量组线性无关 $\qquad$ $AP=P\Lambda$

$$\Updownarrow$$

$$Ap_i=\lambda_i p_i \ (i=1,2,\ldots,n) \rightleftarrows (A-\lambda_i E)p_i=0$$

A 的特征值

对应的特征向量

其中

$$A(p_1,p_2,\cdots,p_n)=(p_1,p_2,\cdots,p_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

定理： 设 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ 是方阵 A 的特征值， $p_1, p_2, \ldots, p_m$ 依次是与之对应的特征向量，如果 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ 各不相同，则 $p_1, p_2, \ldots, p_m$ 线性无关．（**P.120定理2**）

定理： n 阶矩阵 A 和对角阵相似（即 A 能对角化）的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量．（**P.123定理4**）

推论： 如果 A 有 n 个不同的特征值，则 A 和对角阵相似．

说明： 当 A 的特征方程有重根时，就不一定有 n 个线性无关的特征向量，从而不一定能对角化．（**P.118例6**）

定理： 设 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ 是方阵 A 的特征值， $p_1, p_2, \ldots, p_m$ 依次是与之对应的特征向量，如果 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ 各不相同，则 $p_1, p_2, \ldots, p_m$ 线性无关．（P.120定理2）

定理： 设 λ_1 和 λ_2 是对称阵 A 的特征值， p_1, p_2 是对应的特征向量，如果 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，则 p_1, p_2 正交．（P.124定理6）

证明： $A p_1 = \lambda_1 p_1$， $A p_2 = \lambda_2 p_2$， $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$\lambda_1 p_1^{\mathrm{T}}$

$\lambda_1 p_1^{\mathrm{T}} p_2$

$(\lambda_1 - \lambda_2)\ p_1^{\mathrm{T}} p_2 = 0$

因为$\lambda_1 \neq \lambda_2$，则 $p_1^{\mathrm{T}} p_2 = 0$，

定理：n 阶矩阵 A 和对角阵相似（即 A 能对角化）的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量. （P.123定理4）

推论：如果 A 有 n 个不同的特征值，则 A 和对角阵相似.

说明：当 A 的特征方程有重根时，就不一定有 n 个线性无关的特征向量，从而不一定能对角化.

定理：设 A 为 n 阶对称阵，则必有正交阵 P，使得

$$P^{-1}AP = P^{\mathrm{T}}AP = \Lambda,$$

其中 Λ 是以 A 的 n 个特征值为对角元的对角阵（不唯一）.（P.124定理7）

定理： n 阶矩阵 A 和对角阵相似（即 A 能对角化）的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量．（P.123定理4）

推论： 如果 A 有 n 个不同的特征值，则 A 和对角阵相似．

说明： 当 A 的特征方程有重根时，就不一定有 n 个线性无关的特征向量，从而不一定能对角化．

推论： 设 A 为 n 阶对称阵，λ 是 A 的特征方程的 k 重根，则

- 矩阵 $A-\lambda E$ 的秩等于 $n-k$，
- 恰有 k 个线性无关的特征向量与特征值 λ 对应．

例： 设 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$，求正交阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$ 对角阵.

解： 因为 A 是对称阵，所以 A 可以对角化.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda & -1 & 1\\ -1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

求得 A 的特征值 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$.

当 $\lambda_1=-2$ 时，解方程组 $(A+2E)x=0$.

$$A+2E=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$，得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，解方程组 $(A-E)x=0$.

$$A-E=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$，得 $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

问题：这样的解法对吗？

- 当 $\lambda_1=-2$时，对应的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$;
- 当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，对应的特征向量为$\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$
.

显然，必有$\xi_1\perp\xi_2$， $\xi_1\perp\xi_3$，但$\xi_2\perp\xi_3$ 未必成立.

于是把 ξ_2,ξ_3 正交化：

$$\eta_2=\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \eta_3=\xi_3-\frac{[\xi_3,\eta_2]}{[\eta_2,\eta_2]}\eta_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

此时$\xi_1\perp\eta_2$， $\xi_1\perp\eta_3$， $\eta_2\perp\eta_3$.

单位化：

- 当 $\lambda_1=-2$时，对应的特征向量为 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$；

$$\Rightarrow\quad p_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

- 当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，对应的特征向量为$\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$， $\eta_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow\quad p_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad p_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

- 当 $\lambda_1=-2$时，对应的特征向量为$p_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$；
- 当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，对应的特征向量为

$$p_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad p_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

于是p_1,p_2,p_3 构成正交阵 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

从而 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

把对称阵 A 对角化的步骤为：

1. 求出 A 的所有各不相同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$，它们的重数依次为$k_1, k_2, \ldots, k_s$（$k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n$）.

2. 对每个 k_i 重特征值 λ_i，求方程组 $|A-\lambda_i E| = 0$ 的基础解系，得 k_i 个线性无关的特征向量.

   把这 k_i 个线性无关的特征向量正交化、单位化，得到 k_i 个两两正交的单位特征向量.

   因为$k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n$，总共可得 n 个两两正交的单位特征向量.

3. 这 n 个两两正交的单位特征向量构成正交阵 P，便有

$$P^{-1}AP = \Lambda .$$

Λ 中对角元的排列次序应于中列向量的排列次序相对应.

例：设 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，求 A^n .

分析：

- 数学归纳法

$$A^2=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+3^2 & 1-3^2 \\ 1+3^2 & 1+3^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 & -13 \\ -13 & 14 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+3^3 & 1-3^3 \\ 1+3^3 & 1+3^3 \end{pmatrix}$$

$$A^n=A^{n-1}A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+3^{n-1} & 1-3^{n-1} \\ 1+3^{n-1} & 1+3^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+3^n & 1-3^n \\ 1+3^n & 1+3^n \end{pmatrix}$$

定理：若 n 阶矩阵 A 和 B 相似，则 A 和 B 的特征多项式相同，

从而 A 和 B 的特征值也相同.

推论：若 n 阶矩阵 A 和 B 相似，则 A 的多项式 $\varphi(A)$ 和 B 的

多项式 $\varphi(B)$ 相似

$$\varphi(A) = P^{-1}\varphi(\Lambda)P = P^{-1}\begin{pmatrix} \varphi(\lambda_1) & & & \\ & \varphi(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi(\lambda_n) \end{pmatrix} P$$

若 n 阶矩阵 A 和 n 阶对角阵 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ 相似，则

例：设 $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$，求 A^n .

分析：

- 数学归纳法
- 因为 A 是对称阵，所以 A 可以对角化.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)^2+1=(\lambda-1)(\lambda-3)$$

求得 A 的特征值 $\lambda_1=1$， $\lambda_2=3$.

$$\Lambda=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\qquad \Lambda^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}$$

下面求满足 $P^{-1}AP=\Lambda$ 的可逆矩阵 P .

下面求满足 $P^{-1}AP=\Lambda$ 的可逆矩阵 P.

当 $\lambda_1=1$ 时， 解方程组 $(A-E)x=0$.

$$A-E=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}，\text{得基础解系 } p_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

当 $\lambda_2=3$ 时， 解方程组 $(A-3E)x=0$.

$$A-3E=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}，\text{得基础解系 } p_2=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}.$$

问题：是否需要单位化?

于是 $Ap_1=p_1$， $Ap_2=3p_2$，即 $A(p_1,p_2)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}(p_1,p_2)$.

若 $P=(p_1,p_2)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$． $P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

于是 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\Lambda$ ，即 $A=P\Lambda P^{-1}$

$$A^n=(P\Lambda P^{-1})^n=P\Lambda^n P^{-1}$$

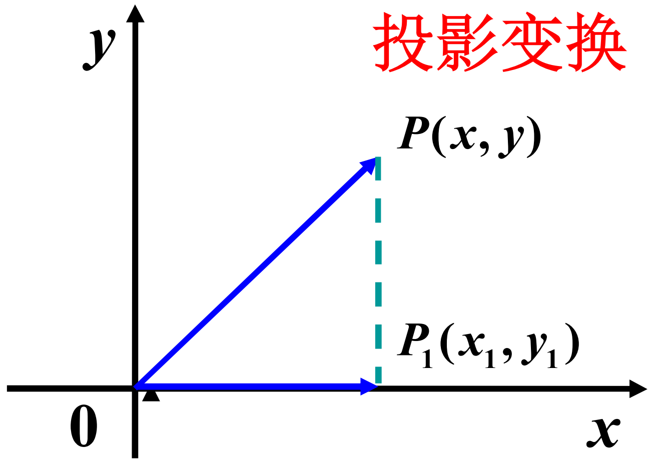
$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+3^n & 1-3^n\\ 1+3^n & 1+3^n\end{pmatrix}$$

§5　二次型及其标准形

例　2阶方阵

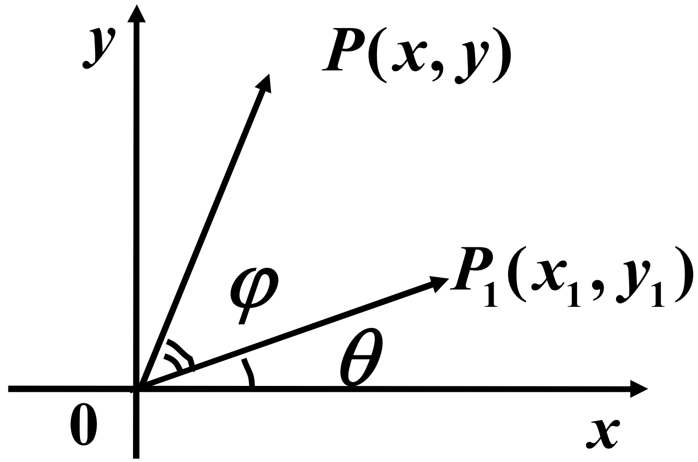
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{对应}} \begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 = 0. \end{cases}$$



例　2阶方阵

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{对应}} \begin{cases} x = x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi, \\ y = x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi. \end{cases}$$

以原点为中心逆时针旋转φ 角的旋转变换



- 解析几何中，二次曲线的一般形式

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0$$

通过选择适当的的旋转变换

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi. \end{cases}$$

使得 $mx'^2 + ny'^2 = 0$.

定义：含有 n 个变量 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的二次齐次函数

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

令 $a_{ij}=a_{ji}$，则 $2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_ix_j$，于是

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\cdots,x_n) &= \boxed{a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2} \\
&\quad \boxed{+2a_{12}x_1x_2}+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \\
&= a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n \\
&\quad +a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n \\
&\quad +\cdots \\
&\quad +a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\cdots,x_n) &= x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) \\
&\quad + x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n) \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + x_n(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n) \\
&= (x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} \\
&= (x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= x^T A x
\end{aligned}
$$

对称阵

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

对称阵的
二次型

二次型
的矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

对称阵 A 的秩也叫做二次型 f 的秩.

线性变换与矩阵之间存在着一一对应关系.

对于二次型，寻找可逆的线性变换

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{m2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n. \end{cases}$$

简记为 $x = Cy$,

于是 $f = x^T A x$

$$= (Cy)^T A (Cy)$$

$$= y^T \boxed{(C^T A C)} y$$

使二次型只含平方项，即

$$f = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \ldots + k_n y_n^2$$

定义：只含平方项的二次型称为二次型的标准形（或法式）.

如果标准形的系数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 只在−1, 0, 1三个数中取值,

即 $$f = k_1 y_1^2 + \ldots + k_p y_p^2 - k_{p+1} y_{p+1}^2 - \ldots - k_r y_r^2$$

则上式称为二次型的规范形.

说明：这里只讨论实二次型，所求线性变换也限于实数范围.

定义：设 A, B 都是 n 阶矩阵，若有可逆矩阵 P 满足

$$P^{-1}AP = B\ ,$$

则称矩阵A 和 B 相似. （P.121定义7）

定义：设 A, B 都是 n 阶矩阵，若有可逆矩阵 C 满足

$$C^{\mathrm{T}}AC = B\ ,$$

则称矩阵A 和 B 合同. （P.129定义9）

显然，

- $B^{\mathrm{T}} = (C^{\mathrm{T}}AC)^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}}AC = B$

  即若 A 为对称阵，则 B 也为对称阵.

- $R(B) = R(A)$.

经过可逆变换后，二次型 f 的矩阵由 A 变为与 A 合同的矩阵 $C^{\mathrm{T}}AC$，且二次型的秩不变.

若二次型 f 经过可逆变换 $x = Cy$ 变为标准形，即

$$
\begin{aligned}
f &= x^T A x \\
&= (Cy)^T A (Cy) \\
&= y^T (C^T A C) y \\
&= k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_n y_n^2 \\
&= (y_1, y_2, \cdots, y_n) \begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

问题：对于对称阵 A，寻找可逆矩阵 C，使 $C^T A C$ 为对角阵,

（把对称阵合同对角化）.

定义：如果 n 阶矩阵A 满足 $A^{\mathrm{T}}A = E$，
则称矩阵A 为正交矩阵，简称正交阵.

定理：设 A 为 n 阶对称阵，则必有正交阵 P，使得

$$P^{-1}AP = \Lambda,$$

其中 Λ 是以 A 的 n 个特征值为对角元的对角阵（不唯一）.
（P.124定理7）

定理：任给二次型 $f(x) = x^T A x$ （其中$A = A^T$），总存在
正交变换 $x = Py$，使 f 化为标准形

$$f(Py) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 是 f 的矩阵 A 的特征值.

推论：任给二次型 $f(x) = x^T A x$ （其中$A = A^T$），总存在
可逆变换 $x = Cz$，使 $f(Cz)$ 为规范形.

推论：任给二次型 $f(x)=x^TAx$（其中 $A=A^T$），总存在可逆变换 $x=Cz$，使 $f(Cz)$ 为规范形.

证明： $$f(Py)=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\ldots+\lambda_n y_n^2$$

若 $R(A)=r$，不妨设 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r$ 不等于零， $\lambda_{r+1}=\ldots=\lambda_n=0$,

令 $$K=\begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{pmatrix},\ \text{其中} k_i=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}}, & i\le r, \\ 1, & i>r. \end{cases}$$

则 K 可逆，变换 $y=Kz$ 把 $f(Py)$ 化为

$$f(PKz)=(PKz)^T A(PKz)=z^TK^TP^TAPKz=z^TK^T\Lambda Kz$$

其中 $$K^T\Lambda K=diag\left(\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|},\frac{\lambda_2}{|\lambda_2|},\cdots,\frac{\lambda_r}{|\lambda_r|},0,\cdots,0\right)$$

例：求一个正交变换 $x = Py$，把二次型

$$f = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

化为标准形.

解：二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

根据P.125例12的结果，有正交阵 $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

使得 $P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

于是正交变换 $x = Py$ 把二次型化为标准形

$$f = -2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

如果要把 f 化为规范形，令

$$\begin{cases}y_1=1/\sqrt{2}z_1\\y_2=z_2\\y_2=z_2\end{cases}\text{，即}\quad K=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

可得 f 的规范形：$f=-z_1^2+z_2^2+z_3^2$