

# Basi di Dati - Appunti

Cristian Di Pietrantonio

1 novembre 2014

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
1.1	Le basi di dati . . . . .	3
1.1.1	Integrità . . . . .	3
1.1.2	Sicurezza . . . . .	3
1.2	Transazione . . . . .	3
1.3	Ripristino . . . . .	4
1.4	Compiti del DBA . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Il modello relazionale</b>	<b>5</b>
2.1	Relazioni e tabelle . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Algebra relazionale</b>	<b>6</b>
3.1	Proiezione . . . . .	6
3.2	Selezione . . . . .	6
3.3	Unione . . . . .	7
3.4	Differenza . . . . .	7
3.5	Intersezione . . . . .	7
3.6	Prodotto cartesiano . . . . .	7
3.7	Join naturale . . . . .	8
3.8	Theta Join . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Progettazione di una base di dati</b>	<b>9</b>
4.1	Anomalie . . . . .	9
4.2	La Terza Forma Normale . . . . .	9
4.3	Decomposizione di schemi di relazione . . . . .	11
4.4	Chiusura di un insieme di dipendenze funzionali . . . . .	12
4.4.1	L'insieme $F^A$ . . . . .	12
4.4.2	Chiusura di un insieme di attributi . . . . .	13
4.4.3	Uguaglianza tra $F^A$ e $F^+$ . . . . .	14
4.4.4	Algoritmo per calcolare $X^+$ . . . . .	15
4.5	Decomposizioni che preservano le dipendenze funzionali . . . . .	16
4.5.1	Equivalenza tra due insiemi di dipendenze funzionali . . . . .	16
4.5.2	Algoritmo per verificare l'equivalenza tra F e G . . . . .	16

# 1 Introduzione

I sistemi di gestione di basi di dati (DBMS) sono strumenti software per la gestione di grandi masse di dati. Prima dell'avvento dei database, ogni programma aveva il suo file privato, organizzato *sequenzialmente* e la gestione dei dati era affidata al filesystem. Ciò causava problemi di:

- **ridondanza**: diversi files venivano replicati, dovendo essere condivisi con più applicazioni;
- **inconsistenza**: se un'informazione veniva aggiornata, tale aggiornamento poteva riguardare solo una copia del dato;
- **dipendenza dei dati**: i dati venivano strutturati dalle applicazioni, in base al loro utilizzo.

Per ovviare a questi problemi si iniziò a progettare le **basi di dati**, le quali videro una grande svolta quando alcuni ingegneri dell'IBM introdussero negli anni '70 il *modello relazionale*.

## 1.1 Le basi di dati

Le caratteristiche di una base di dati sono:

- **multiuso e integrazione**: la stessa base di dati può essere utilizzata da diverse applicazioni con diversi scopi;
- **indipendenza e controllo centralizzato**: i dati non sono gestiti dalle applicazioni ma da un software dedicato, il quale ne gestisce anche le regole di accesso.

I vantaggi che ne derivano sono la minima ridondanza, integrità dei dati e sicurezza.

### 1.1.1 Integrità

I dati devono rispettare dei vincoli che esistono nella realtà di interesse. Consideriamo ad esempio il database di InfoStud della Sapienza:

- uno studente risiede in *una sola* città (**dipendenze funzionali**);
- la matricola *identifica univocamente* uno studente (**vincoli di chiave**);
- un voto è un intero positivo tra 18 e 30 (**vincoli di dominio**).

### 1.1.2 Sicurezza

I dati devono essere protetti da accessi non autorizzati. Il **DBA** (*Database Administrator*) deve considerare:

- valore corrente per *accessi autorizzati*;
- valore corrente per *accessi non autorizzati*;
- *chi* può accedere *a quali* dati e in *quale* modalità;
- definire regole di accesso ed effetti relativi a una violazione.

## 1.2 Transazione

### Definizione 1.1

Si definisce **transazione** una sequenza di operazioni che costituiscono un'unica operazione logica.

### Esempio 1.1

“Trasferire €1000 da  $c/c1$  al  $c/c2$ ”

1. cerca  $c/c1$ ;
2. modifica *saldo* in *saldo* – 1000;
3. cerca  $c/c2$ ;

4. modifica *saldo* in *saldo* + 1000;

Una transazione deve essere eseguita completamente (*committed*) o non deve essere eseguita affatto (*rolled back*).

### 1.3 Ripristino

Può capitare che, a causa di un malfunzionamento del sistema (ad esempio sbalzi di tensione), la base di dati si trovi con delle informazioni corrotte. In questi casi, per ripristinare il valore corretto dei dati, si hanno due possibili modi di agire:

- sfruttare il **transaction log**, che contiene i dettagli di tutte le transazioni, tra cui valori precedenti e successivi alla modifica;
- ripristinare l'ultimo **dump** effettuato. Il dump è una copia periodica del database.

### 1.4 Compiti del DBA

Il Database Administrator ha vari compiti, tra i quali ricadono le scelte di progettazione della base di dati. Esse implicano la definizione di:

- schema logico
- schema fisico
- sottoschema o viste

inoltre al DBA spetta l'onere di mantenere il sistema.

## 2 Il modello relazionale

Il modello attualmente più diffuso e con il quale si organizzano i database è chiamato **modello relazionale**. Tale nome è dovuto al fatto che esso è basato sul concetto matematico di *relazione*.

### Definizione 2.1

Dati  $n$  domini  $D_1, D_2, \dots, D_n$  non necessariamente distinti, una relazione  $r$  su  $D_1, D_2, \dots, D_n$  è un sottoinsieme del prodotto cartesiano  $D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n$ .

Ogni elemento di  $r$  è una  $n$ -pla  $(d_1, d_2, \dots, d_n) \forall d_i \in D_i$

### 2.1 Relazioni e tabelle

Una relazione  $r$  può essere rappresentata mediante una tabella: le righe corrispondono agli elementi della relazione ( $n$ -ple), le colonne corrispondono ai domini  $D_1 \dots D_n$ .

### Esempio 2.1

La seguente tabella rappresenta una relazione con due 4-ple sui domini *String*, *String*, *Int* e *Real*.

String	String	Int	Real
Paolo	Rossi	2	26,5
Mario	Biachi	10	28,7

A questo punto è poco chiaro cosa rappresenti tale relazione. Bisogna stabilire metodo per fornire un'interpretazione standard che rispecchi la realtà di interesse a cui essa si riferisce: a questo fine diamo nomi alle colonne e alla tabella stessa. La precedente tabella diverrà quindi:

Nome	Cognome	Esami	Media
Paolo	Rossi	2	26,5
Mario	Biachi	10	28,7

Ora risulta più evidente che la realtà di interesse sono gli studenti di una data università. Daremo quindi il nome *Studenti* a tale tabella.

Il nome dato ad ogni colonna viene chiamato **attributo**.

### Definizione 2.2

Uno *schema di relazione* è un insieme di attributi.

### Definizione 2.3

Uno *schema di base di dati relazionale* è un insieme  $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$  di schemi di relazione.

### Definizione 2.4

Una *base di dati relazionale* con schema  $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$  è un insieme  $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$  dove  $r_i$  è un'istanza di relazione con schema  $R_i$ .

### 3 Algebra relazionale

Data una base di dati, dobbiamo essere in grado di *interrogarla*. Interrogare una base di dati significa accedere a determinate informazioni tramite uno specifico linguaggio di interrogazione. Le specifiche essenziali di tale linguaggio sono formalizzate nell'**algebra relazionale**; essa consiste di un insieme di *operatori* che possono essere applicati a una (operatore unario) o due (operatore binario) istanze di relazione e *restituiscono* un'istanza di relazione. L'algebra relazionale è un **linguaggio procedurale**: l'interrogazione consiste in un'espressione in cui compaiono *operatori* e *istanze di relazione* della base di dati.

#### 3.1 Proiezione

La *proiezione* è un operatore che consente di effettuare un “taglio verticale” su una relazione, cioè di selezionare solo alcune colonne (attributi). Viene indicata con il simbolo:

$$\pi_{A_1, A_2, \dots, A_k}(r)$$

e seleziona le colonne di  $r$  che corrispondono agli attributi  $A_1, A_2, \dots, A_k$ .

##### Esempio 3.1

Si consideri la seguente relazione *Cliente*:

Nome	C#	Città
Rossi	C1	Roma
Rossi	C2	Milano
Bianchi	C3	Roma
Verdi	C4	Roma

Interrogiamo la base di dati con l'operatore di proiezione nel seguente modo:  $\pi_{Nome}(Cliente)$ . Verrà restituita la seguente istanza:

Nome
Rossi
Bianchi
Verdi

Da notare come siano stati eliminati i valori doppi poiché viene restituito un *insieme*.

#### 3.2 Selezione

L'operatore di *selezione* consente di effettuare un “taglio orizzontale” su una relazione, cioè di selezionare solo le righe (tuple) che soddisfano una data condizione. Si denota con il simbolo

$$\sigma_C(r)$$

dove  $C$  è detta condizione di selezione.

La *condizione di selezione* è un'espressione booleana in cui i termini semplici sono del tipo

$$\begin{aligned} &A \Theta B \\ &\text{oppure} \\ &A \Theta 'a' \end{aligned}$$

dove:

- $\Theta$  è un operatore di confronto  $\Theta \in \{<, =, >, \leq, \geq\}$ ;
- $A$  e  $B$  sono due attributi con lo stesso dominio,  $dom(A) = dom(B)$ ;
- $a \in dom(A)$

##### Esempio 3.2

Si riprenda in considerazione la seguente tabella:

Nome	C#	Città
Rossi	C1	Roma
Rossi	C2	Milano
Bianchi	C3	Roma
Verdi	C4	Roma

Vogliamo ottenere i dati dei clienti che risiedono a Roma. La *query* si traduce in:  
 $\sigma_{Città='Roma'}(Cliente)$ . L'istanza di relazione che ci viene restituita è la seguente:

Nome	C#	Città
Rossi	C1	Roma
Bianchi	C3	Roma
Verdi	C4	Roma

### Esempio 3.3

Facendo riferimento alla tabella dell'esempio precedente, vogliamo ottenere i dati dei clienti che si chiamano "Rossi" e risiedono a Roma. La *query* si traduce in:

$\sigma_{Città='Roma' \wedge Nome='Rossi'}(Cliente)$ . L'istanza di relazione che ci viene restituita è la seguente:

Nome	C#	Città
Rossi	C1	Roma

## 3.3 Unione

L'operatore di *unione* consente di costruire una relazione contenente tutte le tuple che appartengono ad almeno uno dei due operandi. Si denota con  $r_1 \cup r_2$ . L'operazione di unione può essere applicata solo ad operandi **union compatibili**, cioè tali che:

- hanno lo stesso numero di attributi;
- gli attributi corrispondenti sono definiti sullo stesso dominio.

## 3.4 Differenza

L'operatore di *differenza* consente di costruire una relazione contenente tutte le tuple del primo operando che non appartengono al secondo operando. L'operatore è applicabile solo a operandi *union compatibili*.

## 3.5 Intersezione

L'operatore di *intersezione* consente di costruire una relazione contenente tutte le tuple che appartengono ad entrambi gli operandi. Si denota con  $r_1 \cap r_2 = (r_1 - (r_1 - r_2))$ .

## 3.6 Prodotto cartesiano

L'operatore *prodotto cartesiano* consente di costruire una relazione contenente tutte le tuple che si ottengono concatenando una tupla del primo operando con una tupla del secondo operando. Si denota con  $r_1 \times r_2$ .

### Esempio 3.4

Consideriamo le seguenti relazioni *Cliente* e *Ordine*:

Nome	C#	Città	C#	A#	Num
Rossi	C1	Roma	C1	A1	100
Rossi	C2	Milano	C2	A2	200
			C1	A2	200

Il prodotto cartesiano tra queste due relazioni dà come risultato la relazione che chiameremo per convenienza *Risultato*:

Nome	C#	Città	C#	A#	Num
Rossi	C1	Roma	C1	A2	100
Rossi	C1	Roma	C2	A2	200
Rossi	C1	Roma	C1	A2	200
Rossi	C2	Milano	C1	A1	100
Rossi	C2	Milano	C2	A2	200
Rossi	C2	Milano	C1	A2	200

### Esempio 3.5

Riprendendo la relazione *Risultato* dall'esempio precedente, vogliamo effettuare una query che richieda i “dati dei clienti e dei loro ordini”:

$$\pi_{Nome, Cliente.C\#, Città, A\#, Num}(\sigma_{Cliente.C\# = Ordine.C\#}(Cliente \times Ordine))$$

La query viene eseguita in quest'ordine:

1. Viene effettuato il prodotto cartesiano  $Cliente \times Ordine$ ;
2. dal prodotto cartesiano vengono selezionate le tuple dove i corrispondenti attributi  $C\#$  hanno lo stesso valore;
3. sulla relazione ricavata dalla selezione (punto 2) viene operata una proiezione per prendere le colonne volute, che andranno a formare la relazione che sarà il risultato finale della query.

Nome	C#	Città	A#	Num
Rossi	C1	Roma	A2	100
Rossi	C1	Roma	A2	200
Rossi	C2	Milano	A2	200

## 3.7 Join naturale

L'operatore *join naturale* consente di selezionare le tuple del prodotto cartesiano dei due operandi che soddisfano la condizione

$$(R_1.A_1 = R_2.A_1) \wedge (R_1.A_2 = R_2.A_2) \wedge \dots \wedge (R_1.A_k = R_2.A_k)$$

Dove  $R_1$  e  $R_2$  sono i nomi delle due relazioni operando e  $A_1 \dots A_k$  sono gli attributi comuni. Il join naturale è definito come

$$r_1 \bowtie r_2 = \pi_{XY}(\sigma_C(r_1 \times r_2))$$

dove

- $C = (R_1.A_1 = R_2.A_1) \wedge (R_1.A_2 = R_2.A_2) \wedge \dots \wedge (R_1.A_k = R_2.A_k)$ ;
- $X$  sono gli attributi di  $r_1$ ;
- $Y$  sono gli attributi di  $r_2$  che non sono in  $r_1$ ;

## 3.8 Theta Join

Il  $\Theta$ -Join consente di selezionare le tuple del prodotto cartesiano di due operandi che soddisfano una condizione del tipo  $A \Theta B$ , dove:

- $\Theta$  è un operatore di confronto  $\Theta \in \{<, =, >, \leq, \geq\}$ ;
- $A$  è un attributo dello schema del primo operando e  $B$  uno del secondo;
- $dom(A) = dom(B)$ ;



## 4 Progettazione di una base di dati

### 4.1 Anomalie

Si immagini di dover progettare una base di dati relazionale contenente i dati degli studenti e dei corsi di un'Università. La soluzione più immediata è di creare un'unica relazione

$$Università(Matr, Nome, Città, Prov, C\#, Titolo, Docente, C\_laurea, Data, Voto)$$

in cui una tupla  $(m, n, c, p, C, t, D, l, d, v)$  rappresenta il fatto che uno studente con matricola  $m$  e nome  $n$ , residente nella città  $c$  che si trova in provincia di  $p$ , ha sostenuto l'esame del corso, con codice  $C$  e titolo  $t$ , tenuto dal docente  $D$ , del corso di laurea  $l$  in data  $d$  riportando il voto  $v$ .

Adottando questa soluzione si avrebbero un certo numero di inconvenienti che vanno sotto il nome di **anomalia**. Un'anomalia è essenzialmente un comportamento *inaspettato e indesiderato* da parte della base di dati, generato in risposta ad un'operazione. Le anomalie più comuni (spiegate relativamente all'esempio) sono:

- **anomalie di inserimento**: non si possono inserire i dati di uno studente se non ha sostenuto almeno un esame;
- **anomalie di cancellazione**: se si cancellano i dati di un corso (perché il corso è stato disattivato) e c'è uno studente che ha sostenuto solo l'esame relativo a quel corso, perdo le informazioni sullo studente;
- **anomalie di aggiornamento**: se devo modificare il docente di un corso devo farlo per ogni tupla in cui compare il corso;
- **ridondanza** dei dati: le informazioni anagrafiche di uno studente sono ripetute per ogni esame sostenuto dallo studente.

Queste anomalie sono dovute al fatto che si sono rappresentati in un'unica relazione più *concetti*: il concetto "Studente", "Corso" ed "Esame". Rappresentando i tre concetti in tre relazioni distinte

$$\begin{aligned} &Studente(Matr, Nome, Città, Prov) \\ &Corso(C\#, Titolo, Docente, C\_laurea) \\ &Esame(Matr, C\#, Data, Voto) \end{aligned}$$

tali anomalie vengono eliminate. Tuttavia è possibile riscontrare il permanere di simili anomalie concernenti le città: per eliminare queste ultime anomalie che hanno la stessa origine di quelle viste precedentemente, posso utilizzare lo *schema* seguente:

$$\begin{aligned} &Studente(Matr, Nome, Città) \\ &Comune(Città, Prov) \\ &Corso(C\#, Titolo, Docente, C\_laurea) \\ &Esame(Matr, C\#, Data, Voto) \end{aligned}$$

### 4.2 La Terza Forma Normale

Si è constatato che ci sono schemi migliori di altri. Esistono dunque *regole e proprietà formali* che ci permettono di costruire un *buono* schema?

Se si analizzano le anomalie nella relazione *Università* si nota che sono legate al fatto che

- *Voto* e *Data* sono *determinati univocamente* da *Matr* e *C#*;
- i dati di uno studente sono *determinati univocamente* da *Matr*;
- i dati di un corso sono *determinati univocamente* da *C#*.

Il concetto di "determina univocamente" è colto dal concetto formale di **dipendenza funzionale**.

#### Definizione 4.1

Dato uno schema di relazione  $R$ , una *dipendenza funzionale* su  $R$  è una coppia ordinata di sottoinsiemi non vuoti  $X, Y \in R$  e viene denotata come  $X \rightarrow Y$ .

**Proposizione 4.1**

Un'istanza  $r$  di  $R$  *soddisfa* la dipendenza funzionale  $X \rightarrow Y$  se per ogni coppia di tuple  $t_1, t_2 \in r$  si ha che se  $t_1[X] = t_2[X] \Rightarrow t_1[Y] = t_2[Y]$ .

In simboli:

$$(\forall (t_1, t_2) \in r \text{ t.c. } t_1[X] = t_2[X] \Rightarrow t_1[Y] = t_2[Y]) \Rightarrow (X \rightarrow Y \text{ soddisfa } r).$$

Sia  $F$  un insieme di dipendenze funzionali su  $R$  ed  $r$  un'istanza di  $R$ . Se  $r$  soddisfa tutte le dipendenze in  $F$ , diciamo che  $r$  è un'istanza *legale* di  $R$ .

**Definizione 4.2**

La *chiusura* di  $F$ , denotata con  $F^+$ , è l'insieme di dipendenze funzionali che sono soddisfatte da ogni istanza legale di  $R$ .

Banalmente si ha che  $F \subseteq F^+$ .

**Definizione 4.3**

Dato uno schema di relazione  $R$ , un insieme di dipendenze funzionali  $F$  su  $R$  e un sottoinsieme  $K$  di  $R$ , diciamo che  $K$  è una **chiave** per  $R$  se:

- $K \rightarrow R \in F^+$
- $\forall K' \subset K, K' \rightarrow R \notin F^+$ .

In pratica una chiave è il minimo sottoinsieme di  $R$  che determina univocamente il valore dei restanti attributi di  $R$  (banalmente la chiave determina se stessa e i suoi sottoinsiemi) tale che, se prendessimo un suo sottoinsieme, esso non sarebbe chiave.

In futuro denoteremo con  $A_1, A_2, \dots, A_n$  un insieme di attributi, con  $X$  e  $Y$  sottoinsiemi di  $R$ , con  $XY$  l'insieme  $X \cup Y$ .

**Esempio 4.1**

Considerando il precedente schema *Università*, possiamo osservare che un'istanza di *Università* per rispecchiare la realtà di interesse deve soddisfare le seguenti dipendenze funzionali:

- $Matr, C\# \rightarrow Nome, Città, Prov, Titolo, Docente, C\_laurea, Data, Voto;$
- $C\# \rightarrow Titolo, Docente, C\_laurea$
- $Matr \rightarrow Nome, Città, Prov$
- $Città \rightarrow Prov$

Quindi  $\{Matr, C\#\}$  costituisce una *chiave* per *Università*.

Ci sono attributi che **dipendono parzialmente** dalla chiave. Nell'Esempio 4.1  $\{Titolo, Docente, C\_laurea\}$  dipendono funzionalmente da  $C\#$ ; altri attributi invece **dipendono transitivamente** dalla chiave, ad esempio  $Prov$  dipende funzionalmente da  $Matr$  in quanto  $Matr \rightarrow Città \rightarrow Prov$ .

Prendendo lo schema finale, vediamo che in nessuno schema di relazione ci sono attributi che dipendono parzialmente né transitivamente dalla chiave.

**Proposizione 4.2**

Uno schema di relazione in cui non ci sono attributi che dipendono parzialmente né transitivamente dalla chiave è detto in **Terza Forma Normale** (3NF).

Formalizziamo i concetti appena introdotti:

**Definizione 4.4**

Dati uno schema di relazione  $R$  e un insieme di dipendenze funzionali  $F$  su  $R$  diciamo che:

- un attributo  $A \in R$  è **primo** se appartiene ad una chiave di  $R$ ;
- un sottoinsieme  $X \subset R$  è una **superchiave** se contiene una chiave di  $R$ .

Nell'Esempio 4.1, considerando la relazione *Università*, *Matr* è primo mentre  $\{Matr, C\#, Nome\}$  è una superchiave.

**Definizione 4.5**

Siano  $R$  uno schema di relazione ed  $F$  un insieme di dipendenze funzionali su  $R$ .

- $X \rightarrow A \in F^+$  è una dipendenza parziale su  $R$  se  $A$  non è primo e  $X$  è contenuto propriamente in una chiave di  $R$ .
- $X \rightarrow A \in F^+$  è una dipendenza transitiva su  $R$  se  $A$  non è primo e  $\forall K \subset R$  si ha che  $X$  non è contenuto propriamente in  $K$  e  $K - X \neq \emptyset$ .

**Proposizione 4.3**

Siano  $R$  uno schema di relazione ed  $F$  un insieme di dipendenze funzionali su  $R$ .  $R$  è in 3NF se,  $\forall (X \rightarrow A) \in F^+$  t.c.  $A \notin X$ , si ha che  $A$  è primo oppure  $X$  è una superchiave.

**Teorema 4.1**

Siano  $R$  uno schema di relazione e  $F$  un insieme di dipendenze funzionali su  $R$ . Uno schema  $R$  è in 3NF se e solo se non esistono né dipendenze parziali né dipendenze transitive in  $R$ .

**Dimostrazione.** La parte *solo se* deriva banalmente dalla definizione [4.5].

Parte *se*. Supponiamo per assurdo che  $R$  non sia in 3NF nonostante non ci siano dipendenze parziali o transitive; in tal caso esiste una dipendenza funzionale  $X \rightarrow A \in F^+$  t.c.  $A$  non è primo e  $X$  non è una superchiave. Poiché  $X$  non è una superchiave due casi (mutuamente esclusivi) sono possibili:

- o per ogni chiave  $K$  di  $R$ ,  $X$  non è contenuto propriamente in  $K$  e  $K - X \neq \emptyset$ ; in tal caso  $X \rightarrow A$  è una dipendenza transitiva su  $R$  (contraddizione)
- oppure esiste una chiave  $K$  di  $R$  t.c.  $X \subset K$ ; in tal caso  $X \rightarrow A$  è una dipendenza parziale su  $R$  (contraddizione).  $\square$

Un obiettivo da tenere presente quando si progetta una base di dati è quello di produrre uno schema in cui ogni relazione sia in 3NF. Nella fase di progettazione concettuale si individuano i concetti che devono essere rappresentati nella base di dati. Se questo lavoro di individuazione è fatto accuratamente lo schema relazionale che può essere derivato in modo automatico con opportune regole, è in 3NF. Se tuttavia dopo tale processo ci trovassimo a produrre uno schema che non è in 3NF dovremmo procedere ad una fase di decomposizione.

**4.3 Decomposizione di schemi di relazione**

Uno schema che non è in 3NF può essere decomposto in più modi in un insieme di schemi in 3NF. Sia  $R = ABC$  con l'insieme di dipendenze funzionali  $F = \{A \rightarrow B, B \rightarrow C\}$ .  $R$  non è in 3NF per la presenza in  $F^+$  della dipendenza transitiva  $B \rightarrow C$ , ma può essere decomposto in:

$$\begin{aligned} R_1 &= AB \text{ con } F_1 = \{A \rightarrow B\} \\ R_2 &= BC \text{ con } F_2 = \{B \rightarrow C\} \\ &\text{oppure} \\ R_1 &= AB \text{ con } F_1 = \{A \rightarrow B\} \\ R_2 &= AC \text{ con } F_2 = \{A \rightarrow C\} \end{aligned}$$

Entrambi gli schemi sono in 3NF, tuttavia la seconda soluzione non è soddisfacente. Infatti, si consideri l'istanza della *base di dati* costituita dalle due istanze legali di  $R_1$  e  $R_2$ :

A	B	A	C
$a_1$	$b_1$	$a_1$	$c_1$
$a_2$	$b_1$	$a_2$	$c_2$

L'istanza di  $R$  che si può ricostruire da questa tramite *join naturale* è

A	B	C
$a_1$	$b_1$	$c_1$
$a_2$	$b_1$	$c_2$

non è un'istanza legale di  $R$ , in quanto non soddisfa la dipendenza funzionale  $B \rightarrow C$ .

#### Esempio 4.2

Si consideri la relazione  $Studente = \{Matr, Com, Prov\}$ , con  $F = \{Matr \rightarrow Com, Matr \rightarrow Prov, Com \rightarrow Prov\}$ ; essa è in 3FN. Una decomposizione possibile è la seguente:

$$R_1 = \{Matr, Com\} \text{ con } F_1 = \{Matr \rightarrow Com\}$$

$$R_2 = \{Matr, Prov\} \text{ con } F_2 = \{Matr \rightarrow Prov\}$$

entrambe sono in 3FN; si considerino le seguenti istanze di  $R_1$  e  $R_2$

Matr	Com	Matr	Prov
$O_1$	Marino	$O_1$	Parma
$O_2$	Marino	$O_2$	Latina

e si provi a fare il join naturale per riottenere lo schema di partenza. Ecco il risultato:

Matr	Com	Prov
$O_1$	Marino	Parma
$O_2$	Marino	Latina

chiaramente si perde la dipendenza funzionale  $Com \rightarrow Prov$ .

Una istanza di una relazione contiene i dati di una certa realtà che lo schema della base di dati intende rappresentare e si assumono come riferimenti veritieri. Pertanto quando si decompone uno schema si vuole che ogni sua istanza sia ricostruibile da un'istanza dello schema ottenuto dalla decomposizione.

#### Proposizione 4.4

Una decomposizione di uno schema di relazione deve avere i seguenti requisiti:

- deve preservare le dipendenze funzionali che valgono su ogni istanza legale dello schema originario;
- deve permettere di ricostruire mediante join naturale ogni istanza legale dello schema originario.

### 4.4 Chiusura di un insieme di dipendenze funzionali

Quando si decompone uno schema di relazione in  $R$  su cui è definito un insieme di dipendenze funzionali  $F$ , le dipendenze funzionali che si vogliono preservare sono tutte quelle che sono soddisfatte da ogni istanza legale di  $R$ , cioè le dipendenze funzionali in  $F^+$ ; sarà quindi necessario calcolare tale insieme.

#### 4.4.1 L'insieme $F^A$

##### Definizione 4.6

Sia  $R$  uno schema di relazione e  $F$  un insieme di dipendenze funzionali. Sia  $F^A$  l'insieme di dipendenze funzionali definito nel modo seguente:

- $f \in F \Rightarrow f \in F^A$ ;
- $Y \subseteq X \subseteq R \Rightarrow X \rightarrow Y \in F^A$  (**assioma della riflessività**);
- $X \rightarrow Y \in F^A \Rightarrow XZ \rightarrow YZ \in F^A, \forall Z \subseteq R$  (**assioma dell'aumento**);
- $X \rightarrow Y \in F^A, Y \rightarrow Z \in F^A \Rightarrow X \rightarrow Z \in F^A$  (**assioma della transitività**).

Dimostreremo che  $F^+ = F^A$ , cioè che la chiusura di un insieme di dipendenze funzionali  $F$  può essere ottenuta a partire da  $F$  applicando ricorsivamente gli assiomi della riflessività, dell'aumento e della transitività, conosciuti come **assiomi di Armstrong**.

#### Teorema 4.2

Sia  $F$  un insieme di dipendenze funzionali. Valgono le seguenti implicazioni:

- **regola dell'unione:**  $X \rightarrow Y \in F^A$  e  $X \rightarrow Z \in F^A \Rightarrow X \rightarrow YZ \in F^A$
- **regola della decomposizione:**  $X \rightarrow Y \in F^A$  e  $Z \subseteq Y \Rightarrow X \rightarrow Z \in F^A$
- **regola della pseudotransitività:**  $X \rightarrow Y \in F^A$  e  $WY \rightarrow Z \in F^A \Rightarrow WX \rightarrow Z \in F^A$ .

#### Dimostrazione.

- *Regola dell'unione.* Se  $X \rightarrow Y \in F^A$ , per l'assioma dell'aumento si ha  $X \rightarrow XY \in F^A$ . Analogamente, se  $X \rightarrow Z \in F^A$ , sempre per l'assioma dell'aumento si ha  $XY \rightarrow YZ \in F^A$ . Quindi, poiché  $X \rightarrow XY \in F^A$  e  $XY \rightarrow YZ \in F^A$ , per l'assioma della transitività si ha  $X \rightarrow YZ \in F^A$ .
- *Regola della decomposizione.* Se  $Z \subseteq Y$  allora, per l'assioma della riflessività, si ha  $Y \rightarrow Z \in F^A$ . Quindi, poiché  $X \rightarrow Y \in F^A$  e  $Y \rightarrow Z \in F^A$ , per l'assioma della transitività si ha  $X \rightarrow Z \in F^A$ .
- *Regola della pseudotransitività.* Se  $X \rightarrow Y \in F^A$ , per l'assioma dell'aumento si ha  $WX \rightarrow WY \in F^A$ . Quindi, poiché  $WX \rightarrow WY \in F^A$  e  $WY \rightarrow Z \in F^A$ , per l'assioma della transitività si ha  $WX \rightarrow Z \in F^A$ .  $\square$

Si osservi che, per la regola dell'unione, se  $X \rightarrow A_i \in F^A, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ , allora  $X \rightarrow A_1, A_2, \dots, A_n \in F^A$  e che, per la regola della decomposizione, se  $X \rightarrow A_1, A_2, \dots, A_n \in F^A$  allora  $X \rightarrow A_i \in F^A, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ ; cioè:

$$X \rightarrow A_1, A_2, \dots, A_n \in F^A \Leftrightarrow X \rightarrow A_i \in F^A, \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Pertanto, possiamo limitarci, quando necessario, a considerare solo dipendenze funzionali in cui il membro destro sia un *singleton* (ovvero un solo attributo).

#### 4.4.2 Chiusura di un insieme di attributi

Allo scopo di dimostrare che  $F^+ = F^A$ , introduciamo il concetto di *chiusura* di un insieme di attributi rispetto ad un insieme di dipendenze funzionali.

##### Definizione 4.7

Siano  $R$  uno schema di relazione,  $F$  un insieme di dipendenze funzionali su  $R$  e  $X$  un sottoinsieme di  $R$ . La chiusura di  $X$  rispetto ad  $F$ , denotata con  $X_F^+$  (o semplicemente  $X^+$ , se non sorgono ambiguità) è definita nel modo seguente:  $X_F^+ = \{A \text{ t.c. } X \rightarrow A \in F^A\}$ .

In parole povere, la chiusura di un insieme di attributi  $X$  è l'insieme di tutti gli attributi determinati da  $X$  tramite dipendenze funzionali in  $F^A$ .

##### Lemma 4.1

Siano  $R$  uno schema di relazione ed  $F$  un insieme di dipendenze funzionali su  $R$ . Si ha che:  $Y \subseteq X^+ \Leftrightarrow X \rightarrow Y \in F^A$ .

**Dimostrazione.** Sia  $Y = A_1, A_2, \dots, A_n$ .

*Parte se.* Poiché  $Y \subseteq X^+$ , si ha che  $X \rightarrow A_i \in F^A, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ . Pertanto, per la regola dell'unione,  $X \rightarrow Y \in F^A$ .

*Parte solo se.* Poiché  $X \rightarrow Y \in F^A$ , per la regola della decomposizione si ha che,  $X \rightarrow A_i \in F^A, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ , cioè  $A_i \in X^+, \forall i \in \{1, \dots, n\}$  e, quindi,  $Y \subseteq X^+$ .  $\square$

#### 4.4.3 Uguaglianza tra $F^A$ e $F^+$

Con le conoscenze acquisite finora siamo in grado di dimostrare che  $F^+ = F^A$ .

##### Teorema 4.3

Siano  $R$  uno schema di relazione ed  $F$  un insieme di dipendenze funzionali su  $R$ . Si ha che  $F^+ = F^A$ .

**Dimostrazione.** Mostriamo che  $F^+ \subseteq F^A$  e contemporaneamente  $F^+ \supseteq F^A$ , equivalente a dire che i due insiemi sono uguali.

**$F^+ \subseteq F^A$ .** Sia  $X \rightarrow Y$  una dipendenza funzionale in  $F^A$ . Dimostriamo che  $X \rightarrow Y \in F^+$  per induzione sul numero  $i$  di applicazioni di uno degli assiomi di Armstrong.

*Base dell'induzione:*  $i = 0$ . In tal caso  $X \rightarrow Y \in F$  e quindi, banalmente,  $X \rightarrow Y \in F^+$ .

*Ipotesi induttiva:* Ogni dipendenza funzionale ottenuta a partire da  $F$  applicando gli assiomi di Armstrong un numero di volte minore o uguale a  $i-1$ , con  $i > 0$ , è in  $F^+$ .

*Passo induttivo:* all' $i$ -esimo passo si ha  $X \rightarrow Y$ , che è il risultato di uno dei seguenti tre casi:

- $X \rightarrow Y$  è stata ottenuta mediante l'assioma della riflessività, in tal caso  $Y \subseteq X$ . Sia  $r$  un'istanza di  $R$  e siano  $t_1$  e  $t_2$  due tuple di  $r$  tali che  $t_1[X] = t_2[X]$ ; banalmente si ha  $t_1[Y] = t_2[Y]$ .  $X \rightarrow Y$  è dunque una dipendenza funzionale *soddisfatta* da ogni istanza legale di  $R$ , e per definizione fa parte di  $F^+$ .
- $X \rightarrow Y$  è stata ottenuta applicando l'assioma dell'aumento ad una dipendenza funzionale  $V \rightarrow W \in F^A$ , quest'ultima già inclusa per ipotesi induttiva in  $F^+$ , in uno dei passaggi precedenti all'attuale  $i$ -esimo; si ha quindi che  $X = VZ$  e  $Y = WZ$ , per qualche  $Z \subseteq R$ . Sia  $r$  un'istanza legale di  $R$  e siano  $t_1$  e  $t_2$  due tuple di  $r$  tali che:
  1.  $t_1[X] = t_2[X]$ ; banalmente si ha che  $t_1[V] = t_2[V]$  e  $t_1[Z] = t_2[Z]$
  2. per l'ipotesi induttiva da  $t_1[V] = t_2[V]$  segue  $t_1[W] = t_2[W]$
  3. da  $t_1[W] = t_2[W]$  e  $t_1[Z] = t_2[Z]$  segue  $t_1[Y] = t_2[Y]$
- $X \rightarrow Y$  è stata ottenuta applicando l'assioma della transitività a due dipendenze funzionali  $X \rightarrow Z$  e  $Z \rightarrow Y \in F^A$ , ottenute applicando ricorsivamente gli assiomi di Armstrong un numero di volte minore o uguale a  $i-1$ . Sia  $r$  un'istanza legale di  $R$  e siano  $t_1$  e  $t_2$  due tuple di  $r$  tali che  $t_1[X] = t_2[X]$ . Per l'ipotesi induttiva da  $t_1[X] = t_2[X]$  segue  $t_1[Z] = t_2[Z]$ ; da  $t_1[Z] = t_2[Z]$ , ancora per l'ipotesi induttiva, segue  $t_1[Y] = t_2[Y]$ .

**$F^A \subseteq F^+$ .** Si supponga per assurdo che esista una dipendenza funzionale  $X \rightarrow Y \in F^+$  tale che  $X \rightarrow Y \notin F^A$ . Si mostrerà che esiste un'istanza legale di  $R$  che non soddisfa  $X \rightarrow Y$  (contraddicendo allora il fatto che  $X \rightarrow Y \in F^+$ ).

Consideriamo la seguente istanza  $r$  di  $R$ :

$X^+$				$R - X^+$			
1	1	..	1	1	1	..	1
1	1	..	1	0	0	..	0

Mostriamo che:

- $r$  è un'istanza legale di  $R$ . Sia  $V \rightarrow W$  una dipendenza funzionale in  $F$  e supponiamo per assurdo che non sia soddisfatta da  $r$ . In tal caso le due tuple di  $r$  devono avere gli stessi valori per  $V$  e differenti valori per  $W$ ; ciò implica che  $V \subseteq X^+$  e  $W \cap (R - X^+) \neq \emptyset$ . Poiché  $V \subseteq X^+$ , per il [LEMMA 4.1](#), si ha che  $X \rightarrow V \in F^A$ ; pertanto, per l'assioma della transitività,  $X \rightarrow W \in F^A$  e, quindi, per il [Lemma 4.1](#),  $W \subseteq X^+$  (che contraddice  $W \cap (R - X^+) \neq \emptyset$ ).

- $r$  non soddisfa  $X \rightarrow Y$ . Supponiamo per assurdo che  $r$  soddisfi  $X \rightarrow Y$ . Poiché  $X \subseteq X^+$  (per l'assioma della riflessività), le due tuple di  $r$  coincidono sugli attributi  $X$  e quindi, poiché  $r$  soddisfa  $X \rightarrow Y$ , devono coincidere anche sugli attributi  $Y$ . Questo implica che  $Y \subseteq X^+$  e quindi, per il Lemma 4.1, che  $X \rightarrow Y \in F^A$ .  $\square$

#### 4.4.4 Algoritmo per calcolare $X^+$

Per stabilire se una decomposizione preserva  $F^+$ , quest'ultimo va calcolato. Tale operazione potrebbe tuttavia richiedere tempo esponenziale dipendente da  $|F|$ ; se  $F = \{A \rightarrow B_1, A \rightarrow B_2, \dots, A \rightarrow B_n\}$ , con  $|F| = n$ , per le regole della decomposizione e dell'unione si ha che  $F^+ \supseteq \{A \rightarrow Z \text{ t.c. } Z \subseteq B_1 B_2 \dots B_n\}$  e quindi  $|F^+| = 2^n - 1$ . D'altra parte, per sapere se una decomposizione preserva le dipendenze, è sufficiente poter decidere se una dipendenza funzionale  $X \rightarrow Y \in F^+$ ; ciò può essere fatto calcolando  $X^+$  e verificando se  $Y \subseteq X^+$ . Il calcolo di  $X^+$  può essere fatto mediante il seguente algoritmo polinomiale.

##### Algoritmo 4.1

INPUT: uno schema di relazione  $R$ , un insieme  $F$  di dipendenze funzionali su  $R$ , un sottoinsieme  $X$  di  $R$ .

OUTPUT:  $X_F^+$  nella variabile  $Z$

```

BEGIN
  Z := X;
  S := {A t.c. Y → V ∈ F ∧ A ∈ V ∧ Y ⊆ Z};
  WHILE S ⊄ Z
    BEGIN
      Z := Z ∪ S;
      S := {A t.c. Y → V ∈ F ∧ A ∈ V ∧ Y ⊆ Z};
    END
  END

```

##### Teorema 4.4

L'Algoritmo 4.1 calcola correttamente la chiusura di un insieme di attributi  $X$  rispetto ad un insieme  $F$  di dipendenze funzionali.

**Dimostrazione.** Si indichi con  $Z^{(0)}$  il valore iniziale di  $Z$  (ovvero  $Z^{(0)} = X$ ) e con  $Z^{(i)}$  ed  $S^{(i)}$ ,  $i \geq 1$ , i valori di  $Z$  ed  $S$  dopo l' $i$ -esima esecuzione del corpo del ciclo; è facile vedere che  $Z^{(i)} \subseteq Z^{(i+1)}$ ,  $\forall i$ . Sia  $j$  tale che  $S^{(j)} \subseteq Z^{(j)}$  (cioè  $Z^{(j)}$  è il valore di  $Z$  quando l'algoritmo termina); si proverà che:

$$A \in X^+ \Leftrightarrow A \in Z^{(j)}$$

**Parte solo se.** Verrà dimostrato per induzione su  $i$  che  $Z^{(i)} \subseteq X^+$ ,  $\forall i$ , e quindi, in particolare  $Z^{(j)} \subseteq X^+$ .

*Base dell'induzione:*  $i = 0$ . Poiché  $Z^{(0)} = X$  e  $X \subseteq X^+$ , si ha  $Z^{(0)} \subseteq X^+$ .

*Induzione:*  $i > 0$ . Per l'ipotesi induttiva  $Z^{(i-1)} \subseteq X^+$ . Sia  $A$  un attributo in  $Z^{(i)} - Z^{(i-1)}$ ; deve esistere una dipendenza  $Y \rightarrow V \in F$  tale che  $Y \subseteq Z^{(i-1)}$  e  $A \in V$ . Poiché  $Y \subseteq Z^{(i-1)}$ , per l'ipotesi induttiva si ha che  $Y \subseteq X^+$ ; pertanto, per il [LEMMA 4.1](#),  $X \rightarrow Y \in F^A$ . Poiché  $X \rightarrow Y \in F^A$  e  $Y \rightarrow V \in F$ , per l'assioma della transitività si ha  $X \rightarrow V \in F^A$  e quindi, per il Lemma 4.1,  $V \subseteq X^+$ . Pertanto,  $\forall A \in Z^{(i)} - Z^{(i-1)}$  si ha  $A \in X^+$ . Da ciò segue, per l'ipotesi induttiva, che  $Z^{(i)} \subseteq X^+$ .

**Parte se.** Sia  $A$  un attributo in  $X^+$ . Mostreremo che  $A \in Z^{(j)}$ . Poiché  $A \in X^+$ , si ha  $X \rightarrow A \in F^+$  (per il [TEOREMA 4.3](#)); pertanto  $X \rightarrow A$  deve essere soddisfatta da ogni istanza legale di  $R$ . Si consideri la seguente istanza  $r$  di  $R$ :

$Z^{(0)}$				$R - Z^{(0)}$			
1	1	..	1	1	1	..	1
1	1	..	1	0	0	..	0

Mostriamo che  $r$  è un'istanza legale di  $R$ . Infatti, se, per assurdo, esistesse in  $F$  una dipendenza funzionale  $V \rightarrow W$  non soddisfatta da  $r$ , si dovrebbe avere  $V \subseteq Z^{(j)}$  e  $W \cap (R - Z^{(j)}) \neq \emptyset$ ; ma, in tal caso, si avrebbe  $S^{(j)} \not\subseteq Z^{(j)}$  (contraddizione). Poiché  $r$  è un'istanza legale di  $R$  deve soddisfare  $X \rightarrow A$ ; ma, allora, poiché  $X = Z^{(0)} \subseteq Z^{(j)}$ ,  $A$  deve essere in  $Z^{(j)}$ .  $\square$

## 4.5 Decomposizioni che preservano le dipendenze funzionali

Si vuole ora formalizzare il concetto di decomposizione che “preserva un insieme di dipendenze funzionali”. A tal fine, cominciamo con l'introdurre i concetti di *decomposizione* di uno schema di relazione ed *equivalenza* tra due insiemi di dipendenze funzionali.

### Definizione 4.8

Sia  $R$  uno schema di relazione. Una decomposizione di  $R$  è una *famiglia*  $\rho = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$  di sottoinsiemi di  $R$  che *ricopre*  $R$  ( $\bigcup_{i=1}^k R_i = R$ ).

### 4.5.1 Equivalenza tra due insiemi di dipendenze funzionali

#### Definizione 4.9

Siano  $F$  e  $G$  due insiemi di dipendenze funzionali.  $F$  e  $G$  sono *equivalenti*, in simboli  $F \equiv G$ , se  $F^+ = G^+$ .

Verificare l'equivalenza di due insiemi  $F$  e  $G$  di dipendenze funzionali richiede dunque che venga verificata l'uguaglianza di  $F^+$  e  $G^+$ , cioè che  $F^+ \subseteq G^+$  e contemporaneamente  $F^+ \supseteq G^+$ . Come detto in precedenza, calcolare la chiusura di un insieme di dipendenze funzionali può richiedere tempo esponenziale. Il seguente lemma ci permette tuttavia di verificare l'equivalenza dei due insiemi di dipendenze funzionali in tempo polinomiale.

#### Lemma 4.2

Siano  $F$  e  $G$  due insiemi di dipendenze funzionali.  $F \subseteq G^+ \Rightarrow F^+ \subseteq G^+$ .

**Dimostrazione.** Sia  $f \in (F^+ - F)$ . Poiché, per il [TEOREMA 4.3](#),  $f$  è derivabile da  $F$  mediante gli assiomi di Armstrong e ogni dipendenza funzionale in  $F$  è derivabile da  $G$  mediante gli assiomi di Armstrong,  $f$  è derivabile da  $G$  mediante gli assiomi di Armstrong.  $\square$

#### Definizione 4.10

Sia  $R$  uno schema di relazione,  $F$  un insieme di dipendenze funzionali su  $R$  e  $\rho = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$  una decomposizione di  $R$ . Diciamo che  $\rho$  *preserva*  $F$  se  $F \equiv \bigcup_{i=1}^k \pi_{R_i}(F)$ , dove  $\pi_{R_i}(F) = \{X \rightarrow Y \text{ t.c. } X \rightarrow Y \in F^+ \wedge XY \subseteq R_i\}$ .

### 4.5.2 Algoritmo per verificare l'equivalenza tra $F$ e $G$

Verificare se una decomposizione preserva un insieme di dipendenze funzionali  $F$  richiede, dunque, che venga verificata l'equivalenza dei due insiemi di dipendenze funzionali  $F$  e  $G = \bigcup_{i=1}^k \pi_{R_i}(F)$ ; poiché, per definizione,  $F^+ \supseteq G$ , per il [Lemma 2](#) è sufficiente verificare che  $F \subseteq G^+$ ; ciò può essere fatto con il seguente algoritmo (la cui correttezza è una banale conseguenza del [Lemma 4.1](#) e del [Teorema 3](#)).

#### Algoritmo 4.2

```

INPUT: due insiemi  $F$  e  $G$  di dipendenze funzionali su  $R$ ;
OUTPUT: la variabile successo che avrà valore TRUE se  $F \subseteq G^+$ , FALSE altrimenti;
BEGIN
  successo := true;
  FOR EACH  $X \rightarrow Y \in F$ 
    BEGIN
      calcola  $X_G^+$ ;
      IF  $Y \not\subseteq X_G^+$  THEN successo = false;
    END

```



END

L'Algoritmo 2 richiede che venga calcolato  $X_G^+$ ; se si volesse utilizzare a tale scopo l'Algoritmo 1 si dovrebbe prima calcolare  $G$ , ma, per la definizione di  $G$ , ciò richiederebbe il calcolo di  $F^+$  che richiede tempo esponenziale. Il seguente algoritmo permette di calcolare  $X_G^+$  a partire da  $F$ .

#### Algoritmo 4.3

INPUT: uno schema di relazione  $R$ , un insieme  $F$  di dipendenze funzionali su  $R$ , una decomposizione  $\rho = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$  di  $R$ , un sottoinsieme  $X$  di  $R$ ;

OUTPUT: la chiusura di  $X$  rispetto a  $G = \bigcup_{j=1}^k \pi_{R_j}(F)$ , (nella variabile  $Z$ );

```

BEGIN  $Z := X$ ;
 $S := \emptyset$ ;
FOR  $j := 1$  TO  $k$ 
   $S := S \cup (Z \cap R_j)_F^+ \cap R_j$ ;
WHILE  $S \not\subseteq Z$ 
  BEGIN
     $Z := Z \cup S$ ;
    FOR  $j := 1$  TO  $k$ 
       $S := S \cup (Z \cap R_j)_F^+ \cap R_j$ ;
    END
  END
END

```

#### Teorema 4.5

Sia  $R$  uno schema di relazione,  $F$  un insieme di dipendenze funzionali su  $R$ ,  $\rho = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$  una decomposizione di  $R$  e  $X$  un sottoinsieme di  $R$ . L'Algoritmo 4.3 calcola correttamente  $X_G^+$ , dove  $G = \bigcup_{j=1}^k \pi_{R_j}(F)$ .

**Dimostrazione.** Indichiamo con  $Z^{(0)}$  il valore iniziale di  $Z$  ( $Z^{(0)} = X$ ) e con  $Z^{(i)}$ ,  $i \geq 1$ , il valore di  $Z$  dopo l' $i$ -esima esecuzione dell'assegnazione  $Z := Z \cup S$ ; è facile vedere che  $Z^{(i)} \subseteq Z^{(i+1)}$ ,  $\forall i$ . Sia  $Z^{(f)}$  il valore di  $Z$  quando l'algoritmo termina; proveremo che:

$$A \in X_G^+ \Leftrightarrow A \in Z^{(f)}$$

**Parte solo se.** Mostriamo per induzione su  $i$  che  $Z^{(i)} \subseteq X_G^+$ ,  $\forall i$ .

*Base dell'induzione:*  $i = 0$ . Poiché  $Z^{(0)} = X$  e  $X \subseteq X^+$ , si ha  $Z^{(0)} \subseteq X_G^+$ .

*Induzione:*  $i > 0$ . Per l'ipotesi induttiva  $Z^{(i-1)} \subseteq X_G^+$ . Sia  $A$  un attributo in  $Z^{(i)} - Z^{(i-1)}$ ; in tal caso deve esistere un indice  $j$  tale che  $A \in (Z^{(i-1)} \cap R_j)_F^+ \cap R_j$ . Poiché  $A \in (Z^{(i-1)} \cap R_j)_F^+$  si ha  $(Z^{(i-1)} \cap R_j) \rightarrow A \in F^+$  (per il Teorema 4.3).

Poiché  $(Z^{(i-1)} \cap R_j) \rightarrow A \in F^+$ ,  $A \in R_j$  e  $Z^{(i-1)} \cap R_j \subseteq R_j$  si ha, per la definizione di  $G$ , che  $(Z^{(i-1)} \cap R_j) \rightarrow A \in G$ . Poiché per l'ipotesi induttiva si ha che  $X \rightarrow Z^{(i-1)} \in G^+$ , per la regola di decomposizione si ha anche che  $X \rightarrow (Z^{(i-1)} \cap R_j) \in G^+$  e, quindi, per l'assioma della transitività, che  $X \rightarrow A \in G^+$ , cioè  $A \in X_G^+$ . Quindi  $Z^{(i)} \subseteq X_G^+$ .

**Parte se.** Mostriamo che  $X_G^+ \subseteq Z^{(f)}$  tenendo conto anche della seguente proposizione:

#### Proposizione 4.5

Presi comunque due insiemi di attributi  $X$  ed  $Y$  e un insieme di dipendenze funzionali  $F$  si ha, per la definizione di chiusura di un insieme di attributi,  $X \subseteq Y \Rightarrow X_F^+ \subseteq Y_F^+$ .

Poichè  $X = Z^{(0)} \subseteq Z^{(f)}$ , dalla Proposizione 4.5 segue che  $X_G^+ \subseteq (Z^{(f)})_G^+$ . Mostriamo che  $Z^{(f)} = (Z^{(f)})_G^+$  da cui segue  $X_G^+ \subseteq Z^{(f)}$ .

Supponiamo per assurdo che  $Z^{(f)} \neq (Z^{(f)})_G^+$ . Consideriamo l'Algoritmo 4.1 che, per evitare ambiguità, riscriviamo sostituendo la variabile  $W$  alla variabile  $Z$  e la variabile  $U$  alla variabile  $S$ :

INPUT: uno schema di relazione  $R$ , un insieme  $F$  di dipendenze funzionali su  $R$ , un sottoinsieme  $X$  di  $R$ .

OUTPUT:  $X_F^+$  nella variabile  $W$

```

BEGIN
 $W := X;$ 
 $U := \{A \text{ t.c. } Y \rightarrow V \in F \wedge A \in V \wedge Y \subseteq W\};$ 
WHILE  $U \not\subseteq W$ 
  BEGIN
     $W := W \cup U;$ 
     $U := \{A \text{ t.c. } Y \rightarrow V \in F \wedge A \in V \wedge Y \subseteq W\};$ 
  END
END

```

Se eseguiamo tale algoritmo fornendo in input l'insieme di attributi  $Z^{(f)}$  e l'insieme di dipendenze funzionali  $G$ , al termine la variabile  $W$  conterrà  $(Z^{(f)})_G^+$ . Se, come abbiamo supposto per assurdo,  $Z^{(f)} \neq (Z^{(f)})_G^+$ , deve esistere un attributo  $B$  che appartiene a  $U^{(0)}$  e non appartiene a  $W^{(0)} = Z^{(f)}$  (altrimenti si avrebbe  $Z^{(f)} = (Z^{(f)})_G^+$ ). D'altra parte si ha:

$$U^{(0)} = \{A \text{ t.c. } Y \rightarrow V \in G \wedge A \in V \wedge Y \subseteq W^{(0)}\}$$

e quindi, per la definizione di  $G$ , deve esistere  $j$  tale che:

$$B \in \{A \text{ t.c. } Y \rightarrow V \in F^+ \wedge A \in V \wedge Y \subseteq W^{(0)} \wedge YV \subseteq R_j\}$$

Da  $Y \subseteq W^{(0)} \wedge YV \subseteq R_j$  segue che:

$$[a] \ Y \subseteq W^{(0)} \cap R_j = Z^{(f)} \cap R_j$$

Inoltre dal fatto che  $Y \rightarrow V \in F^+$  segue, per il [LEMMA 4.1](#), che  $V \subseteq Y_F^+$  e, quindi, per la [a] e per la Proposizione 4.5 si ha che  $V \subseteq (Z^{(f)} \cap R_j)_F^+$ . Infine poichè  $YV \subseteq R_j$  si ha:

$$V \subseteq (Z^{(f)} \cap R_j)_F^+ \cap R_j$$

Poichè  $B \in V$  si ha che  $B \in (Z^{(f)} \cap R_j)_F^+ \cap R_j$  e quindi  $B \in S^{(f)}$ . Poichè  $B$  non appartiene a  $Z^{(f)}$  (per l'ipotesi per assurdo),  $Z^{(f)}$  non può essere il valore finale di  $Z$  (contraddizione).  $\square$