

# Basi di Dati - Appunti

Cristian Di Pietrantonio

10-12-2014

ATTENZIONE! Questa dispensa è ancora in stesura e potrebbe non contenere gli ultimi argomenti visti a lezione. Qui saranno raccolti i contenuti di tutte le slide e dei vari materiali sparsi sul sito della prof M. Moscarini; a questi materiali saranno aggiunti appunti, esempi ed esercizi mostrati a lezione. I sorgenti LaTeX sono disponibili su GitHub [QUI](#), dove troverete anche la versione più aggiornata di questo documento (main.pdf).

# Contents

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduzione</b>   | <b>3</b>  |
| 1.1      | Le basi di dati . . . . .   | 3         |
| 1.1.1    | Integrità . . . . .   | 3         |
| 1.1.2    | Sicurezza . . . . .   | 3         |
| 1.2      | Transazione . . . . .   | 3         |
| 1.3      | Ripristino . . . . .  | 4         |
| 1.4      | Compiti del DBA . . . . .   | 4         |
| <b>2</b> | <b>Il modello relazionale</b>   | <b>5</b>  |
| 2.1      | Relazioni e tabelle . . . . .   | 5         |
| <b>3</b> | <b>Algebra relazionale</b>  | <b>6</b>  |
| 3.1      | Proiezione . . . . .  | 6         |
| 3.2      | Selezione . . . . .   | 6         |
| 3.3      | Unione . . . . .  | 7         |
| 3.4      | Differenza . . . . .  | 7         |
| 3.5      | Intersezione . . . . .  | 7         |
| 3.6      | Prodotto cartesiano . . . . .   | 7         |
| 3.7      | Join naturale . . . . .   | 8         |
| 3.8      | Theta Join . . . . .  | 8         |
| <b>4</b> | <b>Progettazione di una base di dati</b>  | <b>9</b>  |
| 4.1      | Anomalie . . . . .  | 9         |
| 4.2      | La Terza Forma Normale . . . . .  | 9         |
| 4.3      | Decomposizione di schemi di relazione . . . . .   | 11        |
| 4.4      | Chiusura di un insieme di dipendenze funzionali . . . . .   | 12        |
| 4.4.1    | L'insieme $F^A$ . . . . .   | 12        |
| 4.4.2    | Chiusura di un insieme di attributi . . . . .   | 13        |
| 4.4.3    | Uguaglianza tra $F^A$ e $F^+$ . . . . .   | 14        |
| 4.4.4    | Algoritmo per calcolare $X^+$ . . . . .   | 15        |
| 4.5      | Decomposizioni che preservano le dipendenze funzionali . . . . .                                      | 16        |
| 4.5.1    | Equivalenza tra due insiemi di dipendenze funzionali . . . . .  | 17        |
| 4.5.2    | Algoritmo per verificare l'equivalenza tra F e G . . . . .  | 17        |
| 4.6      | Decomposizioni con Join senza perdita . . . . .   | 19        |
| 4.7      | Decomposizioni in 3NF che conservano la dipendenze funzionali e hanno un join senza perdita . . . . . | 22        |
| 4.8      | La forma normale di Boyce-Codd . . . . .  | 25        |
| <b>5</b> | <b>Organizzazione fisica della base di dati</b>   | <b>27</b> |
| 5.1      | La memoria secondaria . . . . .   | 27        |
| 5.2      | Memorizzare le relazioni . . . . .  | 27        |
| 5.2.1    | Record . . . . .  | 27        |
| 5.2.2    | Blocchi . . . . .   | 28        |
| 5.3      | File . . . . .  | 29        |
| 5.3.1    | Heap . . . . .  | 29        |
| 5.3.2    | File hash . . . . .   | 30        |
| 5.3.3    | File con indice (indice sparso) . . . . .   | 31        |
| 5.3.4    | B-tree . . . . .  | 32        |
| 5.3.5    | File con indice denso . . . . .   | 35        |
| 5.3.6    | Strutture con record nidificati . . . . .   | 35        |
| 5.3.7    | Indici secondari . . . . .  | 36        |
| <b>6</b> | <b>Concorrenza</b>  | <b>37</b> |
| 6.1      | Scheduling di transazioni . . . . .   | 37        |
| 6.2      | Item . . . . .  | 39        |
| 6.3      | Tecniche di locking per il controllo della concorrenza . . . . .                                      | 39        |
| 6.3.1    | Lock binario . . . . .  | 40        |
| 6.3.2    | Lock a tre valori . . . . .   | 43        |

# 1 Introduzione

I sistemi di gestione di basi di dati (DBMS) sono strumenti software per la gestione di grandi masse di dati. Prima dell'avvento dei database, ogni programma aveva il suo file privato, organizzato *sequenzialmente* e la gestione dei dati era affidata al filesystem. Ciò causava problemi di:

- **ridondanza**: diversi files venivano replicati, dovendo essere condivisi con più applicazioni;
- **inconsistenza**: se un'informazione veniva aggiornata, tale aggiornamento poteva riguardare solo una copia del dato;
- **dipendenza dei dati**: i dati venivano strutturati dalle applicazioni, in base al loro utilizzo.

Per ovviare a questi problemi si iniziò a progettare le **basi di dati**, le quali videro una grande svolta quando alcuni ingegneri dell'IBM introdussero negli anni '70 il *modello relazionale*.

## 1.1 Le basi di dati

Le caratteristiche di una base di dati sono:

- **multiuso e integrazione**: la stessa base di dati può essere utilizzata da diverse applicazioni con diversi scopi;
- **indipendenza e controllo centralizzato**: i dati non sono gestiti dalle applicazioni ma da un software dedicato, il quale ne gestisce anche le regole di accesso.

I vantaggi che ne derivano sono la minima ridondanza, integrità dei dati e sicurezza.

### 1.1.1 Integrità

I dati devono rispettare dei vincoli che esistono nella realtà di interesse. Consideriamo ad esempio il database di InfoStud della Sapienza:

- uno studente risiede in *una sola* città (**dipendenze funzionali**);
- la matricola *identifica univocamente* uno studente (**vincoli di chiave**);
- un voto è un intero positivo tra 18 e 30 (**vincoli di dominio**).

### 1.1.2 Sicurezza

I dati devono essere protetti da accessi non autorizzati. Il **DBA** (*Database Administrator*) deve considerare:

- valore corrente per *accessi autorizzati*;
- valore corrente per *accessi non autorizzati*;
- *chi* può accedere *a quali* dati e in *quale* modalità;
- definire regole di accesso ed effetti relativi a una violazione.

## 1.2 Transazione

### Definizione 1.1

Si definisce **transazione** una sequenza di operazioni che costituiscono un'unica operazione logica.

### Esempio 1.1

“Trasferire €1000 da  $c/c1$  al  $c/c2$ ”

1. cerca  $c/c1$ ;
2. modifica *saldo* in *saldo* – 1000;
3. cerca  $c/c2$ ;

4. modifica *saldo* in *saldo* + 1000;

Una transazione deve essere eseguita completamente (*committed*) o non deve essere eseguita affatto (*rolled back*).

### 1.3 Ripristino

Può capitare che, a causa di un malfunzionamento del sistema (ad esempio sbalzi di tensione), la base di dati si trovi con delle informazioni corrotte. In questi casi, per ripristinare il valore corretto dei dati, si hanno due possibili modi di agire:

- sfruttare il **transaction log**, che contiene i dettagli di tutte le transazioni, tra cui valori precedenti e successivi alla modifica;
- ripristinare l'ultimo **dump** effettuato. Il dump è una copia periodica del database.

### 1.4 Compiti del DBA

Il Database Administrator ha vari compiti, tra i quali ricadono le scelte di progettazione della base di dati. Esse implicano la definizione di:

- schema logico
- schema fisico
- sottoschema o viste

inoltre al DBA spetta l'onere di mantenere il sistema.

## 2 Il modello relazionale

Il modello attualmente più diffuso e con il quale si organizzano i database è chiamato **modello relazionale**. Tale nome è dovuto al fatto che esso è basato sul concetto matematico di *relazione*.

### Definizione 2.1

Dati  $n$  domini  $D_1, D_2, \dots, D_n$  non necessariamente distinti, una **relazione**  $r$  su  $D_1, D_2, \dots, D_n$  è un sottoinsieme del prodotto cartesiano  $D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n$ .

Ogni elemento di  $r$  è una  $n$ -pla  $(d_1, d_2, \dots, d_n) \forall d_i \in D_i$

### 2.1 Relazioni e tabelle

Una relazione  $r$  può essere rappresentata mediante una tabella: le righe corrispondono agli elementi della relazione ( $n$ -ple), le colonne corrispondono ai domini  $D_1 \dots D_n$ .

### Esempio 2.1

La seguente tabella rappresenta una relazione con due 4-ple sui domini *String*, *String*, *Int* e *Real*.

| String | String | Int | Real |
|--------|--------|-----|------|
| Paolo  | Rossi  | 2   | 26,5 |
| Mario  | Biachi | 10  | 28,7 |

A questo punto è poco chiaro cosa rappresenti tale relazione. Bisogna stabilire metodo per fornire un'interpretazione standard che rispecchi la realtà di interesse a cui essa si riferisce: a questo fine diamo nomi alle colonne e alla tabella stessa. La precedente tabella diverrà quindi:

| Nome  | Cognome | Esami | Media |
|-------|---------|-------|-------|
| Paolo | Rossi   | 2     | 26,5  |
| Mario | Biachi  | 10    | 28,7  |

Ora risulta più evidente che la realtà di interesse sono gli studenti di una data università. Daremo quindi il nome *Studenti* a tale tabella.

Il nome dato ad ogni colonna viene chiamato **attributo**.

### Definizione 2.2

Uno **schema di relazione** è un insieme di attributi.

### Definizione 2.3

Uno **schema di base di dati** relazionale è un insieme  $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$  di schemi di relazione.

### Definizione 2.4

Una **base di dati relazionale** con schema  $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$  è un insieme  $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$  dove  $r_i$  è un'istanza di relazione con schema  $R_i$ .

### 3 Algebra relazionale

Data una base di dati, dobbiamo essere in grado di *interrogarla*. Interrogare una base di dati significa accedere a determinate informazioni tramite uno specifico linguaggio di interrogazione. Le specifiche essenziali di tale linguaggio sono formalizzate nell'**algebra relazionale**; essa consiste di un insieme di *operatori* che possono essere applicati a una (operatore unario) o due (operatore binario) istanze di relazione e *restituiscono* un'istanza di relazione. L'algebra relazionale è un **linguaggio procedurale**: l'interrogazione consiste in un'espressione in cui compaiono *operatori* e *istanze di relazione* della base di dati.

#### 3.1 Proiezione

La *proiezione* è un operatore che consente di effettuare un “taglio verticale” su una relazione, cioè di selezionare solo alcune colonne (attributi). Viene indicata con il simbolo:

$$\pi_{A_1, A_2, \dots, A_k}(r)$$

e seleziona le colonne di  $r$  che corrispondono agli attributi  $A_1, A_2, \dots, A_k$ .

##### Esempio 3.1

Si consideri la seguente relazione *Cliente*:

| Nome    | C# | Città  |
|---------|----|--------|
| Rossi   | C1 | Roma   |
| Rossi   | C2 | Milano |
| Bianchi | C3 | Roma   |
| Verdi   | C4 | Roma   |

Interrogiamo la base di dati con l'operatore di proiezione nel seguente modo:  $\pi_{Nome}(Cliente)$ . Verrà restituita la seguente istanza:

| Nome    |
|---------|
| Rossi   |
| Bianchi |
| Verdi   |

Da notare come siano stati eliminati i valori doppi poiché viene restituito un *insieme*.

#### 3.2 Selezione

L'operatore di *selezione* consente di effettuare un “taglio orizzontale” su una relazione, cioè di selezionare solo le righe (tuple) che soddisfano una data condizione. Si denota con il simbolo

$$\sigma_C(r)$$

dove  $C$  è detta condizione di selezione.

La *condizione di selezione* è un'espressione booleana in cui i termini semplici sono del tipo

$$\begin{aligned} &A \Theta B \\ &\text{oppure} \\ &A \Theta 'a' \end{aligned}$$

dove:

- $\Theta$  è un operatore di confronto  $\Theta \in \{<, =, >, \leq, \geq\}$ ;
- $A$  e  $B$  sono due attributi con lo stesso dominio,  $dom(A) = dom(B)$ ;
- $a \in dom(A)$

##### Esempio 3.2

Si riprenda in considerazione la seguente tabella:

| Nome    | C# | Città  |
|---------|----|--------|
| Rossi   | C1 | Roma   |
| Rossi   | C2 | Milano |
| Bianchi | C3 | Roma   |
| Verdi   | C4 | Roma   |

Vogliamo ottenere i dati dei clienti che risiedono a Roma. La *query* si traduce in:  
 $\sigma_{Città='Roma'}(Cliente)$ . L'istanza di relazione che ci viene restituita è la seguente:

| Nome    | C# | Città |
|---------|----|-------|
| Rossi   | C1 | Roma  |
| Bianchi | C3 | Roma  |
| Verdi   | C4 | Roma  |

### Esempio 3.3

Facendo riferimento alla tabella dell'esempio precedente, vogliamo ottenere i dati dei clienti che si chiamano "Rossi" e risiedono a Roma. La *query* si traduce in:

$\sigma_{Città='Roma' \wedge Nome='Rossi'}(Cliente)$ . L'istanza di relazione che ci viene restituita è la seguente:

| Nome  | C# | Città |
|-------|----|-------|
| Rossi | C1 | Roma  |

## 3.3 Unione

L'operatore di *unione* consente di costruire una relazione contenente tutte le tuple che appartengono ad almeno uno dei due operandi. Si denota con  $r_1 \cup r_2$ . L'operazione di unione può essere applicata solo ad operandi **union compatibili**, cioè tali che:

- hanno lo stesso numero di attributi;
- gli attributi corrispondenti sono definiti sullo stesso dominio.

## 3.4 Differenza

L'operatore di *differenza* consente di costruire una relazione contenente tutte le tuple del primo operando che non appartengono al secondo operando. L'operatore è applicabile solo a operandi *union compatibili*.

## 3.5 Intersezione

L'operatore di *intersezione* consente di costruire una relazione contenente tutte le tuple che appartengono ad entrambi gli operandi. Si denota con  $r_1 \cap r_2 = (r_1 - (r_1 - r_2))$ .

## 3.6 Prodotto cartesiano

L'operatore *prodotto cartesiano* consente di costruire una relazione contenente tutte le tuple che si ottengono concatenando una tupla del primo operando con una tupla del secondo operando. Si denota con  $r_1 \times r_2$ .

### Esempio 3.4

Consideriamo le seguenti relazioni *Cliente* e *Ordine*:

| Nome  | C# | Città  | C# | A# | Num |
|-------|----|--------|----|----|-----|
| Rossi | C1 | Roma   | C1 | A1 | 100 |
| Rossi | C2 | Milano | C2 | A2 | 200 |
|       |    |        | C1 | A2 | 200 |

Il prodotto cartesiano tra queste due relazioni dà come risultato la relazione che chiameremo per convenienza *Risultato*:

| Nome  | C# | Città  | C# | A# | Num |
|-------|----|--------|----|----|-----|
| Rossi | C1 | Roma   | C1 | A2 | 100 |
| Rossi | C1 | Roma   | C2 | A2 | 200 |
| Rossi | C1 | Roma   | C1 | A2 | 200 |
| Rossi | C2 | Milano | C1 | A1 | 100 |
| Rossi | C2 | Milano | C2 | A2 | 200 |
| Rossi | C2 | Milano | C1 | A2 | 200 |

### Esempio 3.5

Riprendendo la relazione *Risultato* dall'esempio precedente, vogliamo effettuare una query che richieda i “dati dei clienti e dei loro ordini”:

$$\pi_{Nome, Cliente.C\#, Città, A\#, Num}(\sigma_{Cliente.C\# = Ordine.C\#}(Cliente \times Ordine))$$

La query viene eseguita in quest'ordine:

1. Viene effettuato il prodotto cartesiano  $Cliente \times Ordine$ ;
2. dal prodotto cartesiano vengono selezionate le tuple dove i corrispondenti attributi  $C\#$  hanno lo stesso valore;
3. sulla relazione ricavata dalla selezione (punto 2) viene operata una proiezione per prendere le colonne volute, che andranno a formare la relazione che sarà il risultato finale della query.

| Nome  | C# | Città  | A# | Num |
|-------|----|--------|----|-----|
| Rossi | C1 | Roma   | A2 | 100 |
| Rossi | C1 | Roma   | A2 | 200 |
| Rossi | C2 | Milano | A2 | 200 |

## 3.7 Join naturale

L'operatore *join naturale* consente di selezionare le tuple del prodotto cartesiano dei due operandi che soddisfano la condizione

$$(R_1.A_1 = R_2.A_1) \wedge (R_1.A_2 = R_2.A_2) \wedge \dots \wedge (R_1.A_k = R_2.A_k)$$

Dove  $R_1$  e  $R_2$  sono i nomi delle due relazioni operando e  $A_1 \dots A_k$  sono gli attributi comuni. Il join naturale è definito come

$$r_1 \bowtie r_2 = \pi_{XY}(\sigma_C(r_1 \times r_2))$$

dove

- $C = (R_1.A_1 = R_2.A_1) \wedge (R_1.A_2 = R_2.A_2) \wedge \dots \wedge (R_1.A_k = R_2.A_k)$ ;
- $X$  sono gli attributi di  $r_1$ ;
- $Y$  sono gli attributi di  $r_2$  che non sono in  $r_1$ ;

## 3.8 Theta Join

Il  $\Theta$ -Join consente di selezionare le tuple del prodotto cartesiano di due operandi che soddisfano una condizione del tipo  $A \Theta B$ , dove:

- $\Theta$  è un operatore di confronto  $\Theta \in \{<, =, >, \leq, \geq\}$ ;
- $A$  è un attributo dello schema del primo operando e  $B$  uno del secondo;
- $dom(A) = dom(B)$ ;



## 4 Progettazione di una base di dati

### 4.1 Anomalie

Si immagini di dover progettare una base di dati relazionale contenente i dati degli studenti e dei corsi di un'Università. La soluzione più immediata è di creare un'unica relazione

$$Università(Matr, Nome, Città, Prov, C\#, Titolo, Docente, C\_laurea, Data, Voto)$$

in cui una tupla  $(m, n, c, p, C, t, D, l, d, v)$  rappresenta il fatto che uno studente con matricola  $m$  e nome  $n$ , residente nella città  $c$  che si trova in provincia di  $p$ , ha sostenuto l'esame del corso, con codice  $C$  e titolo  $t$ , tenuto dal docente  $D$ , del corso di laurea  $l$  in data  $d$  riportando il voto  $v$ .

Adottando questa soluzione si avrebbero un certo numero di inconvenienti che vanno sotto il nome di **anomalia**. Un'anomalia è essenzialmente un comportamento *inaspettato e indesiderato* da parte della base di dati, generato in risposta ad un'operazione. Le anomalie più comuni (spiegate relativamente all'esempio) sono:

- **anomalie di inserimento**: non si possono inserire i dati di uno studente se non ha sostenuto almeno un esame;
- **anomalie di cancellazione**: se si cancellano i dati di un corso (perché il corso è stato disattivato) e c'è uno studente che ha sostenuto solo l'esame relativo a quel corso, perdo le informazioni sullo studente;
- **anomalie di aggiornamento**: se devo modificare il docente di un corso devo farlo per ogni tupla in cui compare il corso;
- **ridondanza** dei dati: le informazioni anagrafiche di uno studente sono ripetute per ogni esame sostenuto dallo studente.

Queste anomalie sono dovute al fatto che si sono rappresentati in un'unica relazione più *concetti*: il concetto "Studente", "Corso" ed "Esame". Rappresentando i tre concetti in tre relazioni distinte

$$\begin{aligned} &Studente(Matr, Nome, Città, Prov) \\ &Corso(C\#, Titolo, Docente, C\_laurea) \\ &Esame(Matr, C\#, Data, Voto) \end{aligned}$$

tali anomalie vengono eliminate. Tuttavia è possibile riscontrare il permanere di simili anomalie concernenti le città: per eliminare queste ultime anomalie che hanno la stessa origine di quelle viste precedentemente, posso utilizzare lo *schema* seguente:

$$\begin{aligned} &Studente(Matr, Nome, Città) \\ &\quad Comune(Città, Prov) \\ &Corso(C\#, Titolo, Docente, C\_laurea) \\ &Esame(Matr, C\#, Data, Voto) \end{aligned}$$

### 4.2 La Terza Forma Normale

Si è constatato che ci sono schemi migliori di altri. Esistono dunque *regole e proprietà formali* che ci permettono di costruire un *buono* schema?

Se si analizzano le anomalie nella relazione *Università* si nota che sono legate al fatto che

- *Voto* e *Data* sono *determinati univocamente* da *Matr* e *C#*;
- i dati di uno studente sono *determinati univocamente* da *Matr*;
- i dati di un corso sono *determinati univocamente* da *C#*.

Il concetto di "determina univocamente" è colto dal concetto formale di *dipendenza funzionale*.

#### Definizione 4.1

Dato uno schema di relazione  $R$ , una **dipendenza funzionale** su  $R$  è una coppia ordinata di sottoinsiemi non vuoti  $X, Y \in R$  e viene denotata come  $X \rightarrow Y$ .

**Proposizione 4.1**

Un'istanza  $r$  di  $R$  *soddisfa* la dipendenza funzionale  $X \rightarrow Y$  se per ogni coppia di tuple  $t_1, t_2 \in r$  si ha che se  $t_1[X] = t_2[X] \Rightarrow t_1[Y] = t_2[Y]$ .

In simboli:

$$(\forall (t_1, t_2) \in r \text{ t.c. } t_1[X] = t_2[X] \Rightarrow t_1[Y] = t_2[Y]) \Rightarrow (r \text{ soddisfa } X \rightarrow Y).$$

Sia  $F$  un insieme di dipendenze funzionali su  $R$  ed  $r$  un'istanza di  $R$ . Se  $r$  soddisfa tutte le dipendenze in  $F$ , diciamo che  $r$  è un'istanza *legale* di  $R$ .

**Definizione 4.2**

La **chiusura di  $F$** , denotata con  $F^+$ , è l'insieme di dipendenze funzionali che sono soddisfatte da ogni istanza legale di  $R$ .

Banalmente si ha che  $F \subseteq F^+$ .

**Definizione 4.3**

Dato uno schema di relazione  $R$ , un insieme di dipendenze funzionali  $F$  su  $R$  e un sottoinsieme  $K$  di  $R$ , diciamo che  $K$  è una **chiave** per  $R$  se:

- $K \rightarrow R \in F^+$
- $\forall K' \subset K, K' \rightarrow R \notin F^+$ .

In pratica una chiave è il minimo sottoinsieme di  $R$  che determina univocamente il valore dei restanti attributi di  $R$  (banalmente la chiave determina se stessa e i suoi sottoinsiemi) tale che, se prendessimo un suo sottoinsieme, esso non sarebbe chiave.

In futuro denoteremo con  $A_1, A_2, \dots, A_n$  un insieme di attributi, con  $X$  e  $Y$  sottoinsiemi di  $R$ , con  $XY$  l'insieme  $X \cup Y$ .

**Esempio 4.1**

Considerando il precedente schema *Università*, possiamo osservare che un'istanza di *Università* per rispecchiare la realtà di interesse deve soddisfare le seguenti dipendenze funzionali:

- $Matr, C\# \rightarrow Nome, Città, Prov, Titolo, Docente, C\_laurea, Data, Voto;$
- $C\# \rightarrow Titolo, Docente, C\_laurea$
- $Matr \rightarrow Nome, Città, Prov$
- $Città \rightarrow Prov$

Quindi  $\{Matr, C\#\}$  costituisce una *chiave* per *Università*.

Ci sono attributi che **dipendono parzialmente** dalla chiave. Nell'ESEMPIO 4.1  $\{Titolo, Docente, C\_laurea\}$  dipendono funzionalmente da  $C\#$ ; altri attributi invece **dipendono transitivamente** dalla chiave, ad esempio  $Prov$  dipende funzionalmente da  $Matr$  in quanto  $Matr \rightarrow Città \rightarrow Prov$ .

Prendendo lo schema finale, vediamo che in nessuno schema di relazione ci sono attributi che dipendono parzialmente né transitivamente dalla chiave.

**Proposizione 4.2**

Uno schema di relazione in cui non ci sono attributi che dipendono parzialmente né transitivamente dalla chiave è detto in **Terza Forma Normale** (3NF).

Formalizziamo i concetti appena introdotti:

**Definizione 4.4**

Dati uno schema di relazione  $R$  e un insieme di dipendenze funzionali  $F$  su  $R$  diciamo che:

- un attributo  $A \in R$  è **primo** se appartiene ad una chiave di  $R$ ;
- un sottoinsieme  $X \subset R$  è una **superchiave** se contiene una chiave di  $R$ .

Nell'ESEMPIO 4.1, considerando la relazione *Università*, *Matr* è primo mentre  $\{Matr, C\#, Nome\}$  è una superchiave.

**Definizione 4.5**

Siano  $R$  uno schema di relazione ed  $F$  un insieme di dipendenze funzionali su  $R$ .

- $X \rightarrow A \in F^+$  è una **dipendenza parziale** su  $R$  se  $A$  non è primo e  $X$  è contenuto propriamente in una chiave di  $R$ .
- $X \rightarrow A \in F^+$  è una **dipendenza transitiva** su  $R$  se  $A$  non è primo e  $\forall K \subset R$ , dove  $K$  è chiave, si ha che  $X$  non è contenuto propriamente in  $K$  e  $K - X \neq \emptyset$ .

**Definizione 4.6**

Siano  $R$  uno schema di relazione ed  $F$  un insieme di dipendenze funzionali su  $R$ .  $R$  è in 3NF se,  $\forall (X \rightarrow A) \in F^+$  t.c.  $A \notin X$ , si ha che  $A$  è primo oppure  $X$  è una superchiave.

**Teorema 4.1**

Siano  $R$  uno schema di relazione e  $F$  un insieme di dipendenze funzionali su  $R$ . Uno schema  $R$  è in 3NF se e solo se non esistono né dipendenze parziali né dipendenze transitive in  $R$ .

**Dimostrazione.** La parte *solo se* è banale dopo aver visto la parte *se*.

*Parte se.* Supponiamo per assurdo che  $R$  non sia in 3NF nonostante non ci siano dipendenze parziali o transitive; in tal caso esiste una dipendenza funzionale  $X \rightarrow A \in F^+$  t.c.  $A$  non è primo e  $X$  non è una superchiave. Poiché  $X$  non è una superchiave due casi (mutuamente esclusivi) sono possibili:

- o per ogni chiave  $K$  di  $R$ ,  $X$  non è contenuto propriamente in  $K$  e  $K - X \neq \emptyset$ ; in tal caso  $X \rightarrow A$  è una dipendenza transitiva su  $R$  (contraddizione)
- oppure esiste una chiave  $K$  di  $R$  t.c.  $X \subset K$ ; in tal caso  $X \rightarrow A$  è una dipendenza parziale su  $R$  (contraddizione).  $\square$

Un obiettivo da tenere presente quando si progetta una base di dati è quello di produrre uno schema in cui ogni relazione sia in 3NF. Nella fase di progettazione concettuale si individuano i concetti che devono essere rappresentati nella base di dati. Se questo lavoro di individuazione è fatto accuratamente lo schema relazionale che può essere derivato in modo automatico con opportune regole, è in 3NF. Se tuttavia dopo tale processo ci trovassimo a produrre uno schema che non è in 3NF dovremmo procedere ad una fase di decomposizione.

**4.3 Decomposizione di schemi di relazione**

Uno schema che non è in 3NF può essere decomposto in più modi in un insieme di schemi in 3NF. Sia  $R = ABC$  con l'insieme di dipendenze funzionali  $F = \{A \rightarrow B, B \rightarrow C\}$ .  $R$  non è in 3NF per la presenza in  $F^+$  della dipendenza transitiva  $B \rightarrow C$ , ma può essere decomposto in:

$$\begin{aligned} R_1 &= AB \text{ con } F_1 = \{A \rightarrow B\} \\ R_2 &= BC \text{ con } F_2 = \{B \rightarrow C\} \\ &\text{oppure} \\ R_1 &= AB \text{ con } F_1 = \{A \rightarrow B\} \\ R_2 &= AC \text{ con } F_2 = \{A \rightarrow C\} \end{aligned}$$

Entrambi gli schemi sono in 3NF, tuttavia la seconda soluzione non è soddisfacente. Infatti, si consideri l'istanza della *base di dati* costituita dalle due istanze legali di  $R_1$  e  $R_2$ :

| A     | B     | A     | C     |
|-------|-------|-------|-------|
| $a_1$ | $b_1$ | $a_1$ | $c_1$ |
| $a_2$ | $b_1$ | $a_2$ | $c_2$ |

L'istanza di  $R$  che si può ricostruire da questa tramite *join naturale* è

| A     | B     | C     |
|-------|-------|-------|
| $a_1$ | $b_1$ | $c_1$ |
| $a_2$ | $b_1$ | $c_2$ |

non è un'istanza legale di  $R$ , in quanto non soddisfa la dipendenza funzionale  $B \rightarrow C$ .

#### Esempio 4.2

Si consideri la relazione  $Studente = \{Matr, Com, Prov\}$ , con  $F = \{Matr \rightarrow Com, Matr \rightarrow Prov, Com \rightarrow Prov\}$ ; essa è in 3FN. Una decomposizione possibile è la seguente:

$$R_1 = \{Matr, Com\} \text{ con } F_1 = \{Matr \rightarrow Com\}$$

$$R_2 = \{Matr, Prov\} \text{ con } F_2 = \{Matr \rightarrow Prov\}$$

entrambe sono in 3FN; si considerino le seguenti istanze di  $R_1$  e  $R_2$

| Matr  | Com    | Matr  | Prov   |
|-------|--------|-------|--------|
| $O_1$ | Marino | $O_1$ | Parma  |
| $O_2$ | Marino | $O_2$ | Latina |

e si provi a fare il join naturale per riottenere lo schema di partenza. Ecco il risultato:

| Matr  | Com    | Prov   |
|-------|--------|--------|
| $O_1$ | Marino | Parma  |
| $O_2$ | Marino | Latina |

chiaramente si perde la dipendenza funzionale  $Com \rightarrow Prov$ .

Una istanza di una relazione contiene i dati di una certa realtà che lo schema della base di dati intende rappresentare e si assumono come riferimenti veritieri. Pertanto quando si decompone uno schema si vuole che ogni sua istanza sia ricostruibile da un'istanza dello schema ottenuto dalla decomposizione.

#### Proposizione 4.3

Una decomposizione di uno schema di relazione deve avere i seguenti requisiti:

- deve preservare le dipendenze funzionali che valgono su ogni istanza legale dello schema originario;
- deve permettere di ricostruire mediante join naturale ogni istanza legale dello schema originario.

### 4.4 Chiusura di un insieme di dipendenze funzionali

Quando si decompone uno schema di relazione in  $R$  su cui è definito un insieme di dipendenze funzionali  $F$ , le dipendenze funzionali che si vogliono preservare sono tutte quelle che sono soddisfatte da ogni istanza legale di  $R$ , cioè le dipendenze funzionali in  $F^+$ ; sarà quindi necessario calcolare tale insieme.

#### 4.4.1 L'insieme $F^A$

##### Definizione 4.7

Sia  $R$  uno schema di relazione e  $F$  un insieme di dipendenze funzionali. Sia  $\mathbf{F}^A$  l'insieme di dipendenze funzionali definito nel modo seguente:

- $f \in F \Rightarrow f \in F^A$ ;
- $Y \subseteq X \subseteq R \Rightarrow X \rightarrow Y \in F^A$  (**assioma della riflessività**);
- $X \rightarrow Y \in F^A \Rightarrow XZ \rightarrow YZ \in F^A, \forall Z \subseteq R$  (**assioma dell'aumento**);
- $X \rightarrow Y \in F^A, Y \rightarrow Z \in F^A \Rightarrow X \rightarrow Z \in F^A$  (**assioma della transitività**).

Dimostreremo che  $F^+ = F^A$ , cioè che la chiusura di un insieme di dipendenze funzionali  $F$  può essere ottenuta a partire da  $F$  applicando ricorsivamente gli assiomi della riflessività, dell'aumento e della transitività, conosciuti come **assiomi di Armstrong**.

#### Teorema 4.2

Sia  $F$  un insieme di dipendenze funzionali. Valgono le seguenti implicazioni:

- **regola dell'unione:**  $X \rightarrow Y \in F^A$  e  $X \rightarrow Z \in F^A \Rightarrow X \rightarrow YZ \in F^A$
- **regola della decomposizione:**  $X \rightarrow Y \in F^A$  e  $Z \subseteq Y \Rightarrow X \rightarrow Z \in F^A$
- **regola della pseudotransitività:**  $X \rightarrow Y \in F^A$  e  $WY \rightarrow Z \in F^A \Rightarrow WX \rightarrow Z \in F^A$ .

#### Dimostrazione.

- *Regola dell'unione.* Se  $X \rightarrow Y \in F^A$ , per l'assioma dell'aumento si ha  $X \rightarrow XY \in F^A$ . Analogamente, se  $X \rightarrow Z \in F^A$ , sempre per l'assioma dell'aumento si ha  $XY \rightarrow YZ \in F^A$ . Quindi, poiché  $X \rightarrow XY \in F^A$  e  $XY \rightarrow YZ \in F^A$ , per l'assioma della transitività si ha  $X \rightarrow YZ \in F^A$ .
- *Regola della decomposizione.* Se  $Z \subseteq Y$  allora, per l'assioma della riflessività, si ha  $Y \rightarrow Z \in F^A$ . Quindi, poiché  $X \rightarrow Y \in F^A$  e  $Y \rightarrow Z \in F^A$ , per l'assioma della transitività si ha  $X \rightarrow Z \in F^A$ .
- *Regola della pseudotransitività.* Se  $X \rightarrow Y \in F^A$ , per l'assioma dell'aumento si ha  $WX \rightarrow WY \in F^A$ . Quindi, poiché  $WX \rightarrow WY \in F^A$  e  $WY \rightarrow Z \in F^A$ , per l'assioma della transitività si ha  $WX \rightarrow Z \in F^A$ .  $\square$

Si osservi che, per la regola dell'unione, se  $X \rightarrow A_i \in F^A, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ , allora  $X \rightarrow A_1, A_2, \dots, A_n \in F^A$  e che, per la regola della decomposizione, se  $X \rightarrow A_1, A_2, \dots, A_n \in F^A$  allora  $X \rightarrow A_i \in F^A, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ ; cioè:

$$X \rightarrow A_1, A_2, \dots, A_n \in F^A \Leftrightarrow X \rightarrow A_i \in F^A, \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Pertanto, possiamo limitarci, quando necessario, a considerare solo dipendenze funzionali in cui il membro destro sia un *singleton* (ovvero un solo attributo).

#### 4.4.2 Chiusura di un insieme di attributi

Allo scopo di dimostrare che  $F^+ = F^A$ , introduciamo il concetto di *chiusura* di un insieme di attributi rispetto ad un insieme di dipendenze funzionali.

#### Definizione 4.8

Siano  $R$  uno schema di relazione,  $F$  un insieme di dipendenze funzionali su  $R$  e  $X$  un sottoinsieme di  $R$ . La **chiusura di  $X$**  rispetto ad  $F$ , denotata con  $X_F^+$  (o semplicemente  $X^+$ , se non sorgono ambiguità) è definita nel modo seguente:  $X_F^+ = \{A \text{ t.c. } X \rightarrow A \in F^A\}$ .

In parole povere, la chiusura di un insieme di attributi  $X$  è l'insieme di tutti gli attributi determinati da  $X$  tramite dipendenze funzionali in  $F^A$ .

#### Lemma 4.1

Siano  $R$  uno schema di relazione ed  $F$  un insieme di dipendenze funzionali su  $R$ . Si ha che:  $Y \subseteq X^+ \Leftrightarrow X \rightarrow Y \in F^A$ .

**Dimostrazione.** Sia  $Y = A_1, A_2, \dots, A_n$ .

*Parte se.* Poiché  $Y \subseteq X^+$ , si ha che  $X \rightarrow A_i \in F^A, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ . Pertanto, per la regola dell'unione,  $X \rightarrow Y \in F^A$ .

*Parte solo se.* Poiché  $X \rightarrow Y \in F^A$ , per la regola della decomposizione si ha che,  $X \rightarrow A_i \in F^A, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ , cioè  $A_i \in X^+, \forall i \in \{1, \dots, n\}$  e, quindi,  $Y \subseteq X^+$ .  $\square$

#### 4.4.3 Uguaglianza tra $F^A$ e $F^+$

Con le conoscenze acquisite finora siamo in grado di dimostrare che  $F^+ = F^A$ .

##### Teorema 4.3

Siano  $R$  uno schema di relazione ed  $F$  un insieme di dipendenze funzionali su  $R$ . Si ha che  $F^+ = F^A$ .

**Dimostrazione.** Mostriamo che  $F^+ \subseteq F^A$  e contemporaneamente  $F^+ \supseteq F^A$ , equivalente a dire che i due insiemi sono uguali.

$F^+ \supseteq F^A$ . Sia  $X \rightarrow Y$  una dipendenza funzionale in  $F^A$ . Dimostriamo che  $X \rightarrow Y \in F^+$  per induzione sul numero  $i$  di applicazioni di uno degli assiomi di Armstrong.

*Base dell'induzione:*  $i = 0$ . In tal caso  $X \rightarrow Y \in F$  e quindi, banalmente,  $X \rightarrow Y \in F^+$ .

*Ipotesi induttiva:* Ogni dipendenza funzionale ottenuta a partire da  $F$  applicando gli assiomi di Armstrong un numero di volte minore o uguale a  $i-1$ , con  $i > 0$ , è in  $F^+$ .

*Passo induttivo:* all' $i$ -esimo passo si ha  $X \rightarrow Y$ , che è il risultato di uno dei seguenti tre casi:

- $X \rightarrow Y$  è stata ottenuta mediante l'assioma della riflessività, in tal caso  $Y \subseteq X$ . Sia  $r$  un'istanza di  $R$  e siano  $t_1$  e  $t_2$  due tuple di  $r$  tali che  $t_1[X] = t_2[X]$ ; banalmente si ha  $t_1[Y] = t_2[Y]$ .  $X \rightarrow Y$  è dunque una dipendenza funzionale *soddisfatta* da ogni istanza legale di  $R$ , e per definizione fa parte di  $F^+$ .
- $X \rightarrow Y$  è stata ottenuta applicando l'assioma dell'aumento ad una dipendenza funzionale  $V \rightarrow W \in F^A$ , quest'ultima già inclusa per ipotesi induttiva in  $F^+$ , in uno dei passaggi precedenti all'attuale  $i$ -esimo; si ha quindi che  $X = VZ$  e  $Y = WZ$ , per qualche  $Z \subseteq R$ . Sia  $r$  un'istanza legale di  $R$  e siano  $t_1$  e  $t_2$  due tuple di  $r$  tali che:
  1.  $t_1[X] = t_2[X]$ ; banalmente si ha che  $t_1[V] = t_2[V]$  e  $t_1[Z] = t_2[Z]$
  2. per l'ipotesi induttiva da  $t_1[V] = t_2[V]$  segue  $t_1[W] = t_2[W]$
  3. da  $t_1[W] = t_2[W]$  e  $t_1[Z] = t_2[Z]$  segue  $t_1[Y] = t_2[Y]$
- $X \rightarrow Y$  è stata ottenuta applicando l'assioma della transitività a due dipendenze funzionali  $X \rightarrow Z$  e  $Z \rightarrow Y \in F^A$ , ottenute applicando ricorsivamente gli assiomi di Armstrong un numero di volte minore o uguale a  $i-1$ . Sia  $r$  un'istanza legale di  $R$  e siano  $t_1$  e  $t_2$  due tuple di  $r$  tali che  $t_1[X] = t_2[X]$ . Per l'ipotesi induttiva da  $t_1[X] = t_2[X]$  segue  $t_1[Z] = t_2[Z]$ ; da  $t_1[Z] = t_2[Z]$ , ancora per l'ipotesi induttiva, segue  $t_1[Y] = t_2[Y]$ .

$F^+ \subseteq F^A$ . Si supponga per assurdo che esista una dipendenza funzionale  $X \rightarrow Y \in F^+$  tale che  $X \rightarrow Y \notin F^A$ . Si mostrerà che esiste un'istanza legale di  $R$  che non soddisfa  $X \rightarrow Y$  (contraddicendo allora il fatto che  $X \rightarrow Y \in F^+$ ).

Consideriamo la seguente istanza  $r$  di  $R$ :

| X <sup>+</sup> |   |    |   | R-X <sup>+</sup> |   |    |   |
|----------------|---|----|---|------------------|---|----|---|
| 1              | 1 | .. | 1 | 1                | 1 | .. | 1 |
| 1              | 1 | .. | 1 | 0                | 0 | .. | 0 |

Mostriamo che:

- $r$  è un'istanza legale di  $R$ . Sia  $V \rightarrow W$  una dipendenza funzionale in  $F$  e supponiamo per assurdo che non sia soddisfatta da  $r$ . In tal caso le due tuple di  $r$  devono avere gli stessi valori per  $V$  e differenti valori per  $W$ ; ciò implica che  $V \subseteq X^+$  e  $W \cap (R - X^+) \neq \emptyset$ . Poiché  $V \subseteq X^+$ , per il [LEMMA 4.1](#), si ha che  $X \rightarrow V \in F^A$ ; pertanto, per l'assioma della transitività,  $X \rightarrow W \in F^A$  e, quindi, per il Lemma 4.1,  $W \subseteq X^+$  (che contraddice  $W \cap (R - X^+) \neq \emptyset$ ).

- $r$  non soddisfa  $X \rightarrow Y$ . Supponiamo per assurdo che  $r$  soddisfi  $X \rightarrow Y$ . Poiché  $X \subseteq X^+$  (per l'assioma della riflessività), le due tuple di  $r$  coincidono sugli attributi  $X$  e quindi, poiché  $r$  soddisfa  $X \rightarrow Y$ , devono coincidere anche sugli attributi  $Y$ . Questo implica che  $Y \subseteq X^+$  e quindi, per il Lemma 4.1, che  $X \rightarrow Y \in F^A$ .  $\square$

#### 4.4.4 Algoritmo per calcolare $X^+$

Per stabilire se una decomposizione preserva  $F^+$ , quest'ultimo va calcolato. Tale operazione potrebbe tuttavia richiedere tempo esponenziale dipendente da  $|F|$ ; se  $F = \{A \rightarrow B_1, A \rightarrow B_2, \dots, A \rightarrow B_n\}$ , con  $|F| = n$ , per le regole della decomposizione e dell'unione si ha che  $F^+ \supseteq \{A \rightarrow Z \text{ t.c. } Z \subseteq B_1 B_2 \dots B_n\}$  e quindi  $|F^+| = 2^n - 1$ . D'altra parte, per sapere se una decomposizione preserva le dipendenze, è sufficiente poter decidere se una dipendenza funzionale  $X \rightarrow Y \in F^+$ ; ciò può essere fatto calcolando  $X^+$  e verificando se  $Y \subseteq X^+$ . Il calcolo di  $X^+$  può essere fatto mediante il seguente algoritmo polinomiale.

##### Algoritmo 4.1

INPUT: uno schema di relazione  $R$ , un insieme  $F$  di dipendenze funzionali su  $R$ , un sottoinsieme  $X$  di  $R$ .

OUTPUT:  $X_F^+$  nella variabile  $Z$

```

BEGIN
 $Z := X$ ;
 $S := \{A \text{ t.c. } (Y \rightarrow V \in F) \wedge (A \in V) \wedge (Y \subseteq Z)\}$ ;
WHILE  $S \not\subseteq Z$ 
  BEGIN
     $Z := Z \cup S$ ;
     $S := \{A \text{ t.c. } (Y \rightarrow V \in F) \wedge (A \in V) \wedge (Y \subseteq Z)\}$ ;
  END
END

```

##### Esempio 4.3

Ecco un esempio di esecuzione di tale algoritmo. Sia  $R = ABCDEHL$  ed  $F = \{A \rightarrow B, BC \rightarrow D, D \rightarrow HL, E \rightarrow D\}$ .  $X = A$ .

Passo 0:  $Z^{(0)} = A$  e  $S^{(0)} = B$

Passo 1:  $Z^{(1)} = AB$  mentre  $S$  rimane lo stesso.

L'algoritmo termina e  $X^+ = A^+ = AB$ .

##### Teorema 4.4

L'Algoritmo 4.1 calcola correttamente la chiusura di un insieme di attributi  $X$  rispetto ad un insieme  $F$  di dipendenze funzionali.

**Dimostrazione.** Si indichi con  $Z^{(0)}$  il valore iniziale di  $Z$  (ovvero  $Z^{(0)} = X$ ) e con  $Z^{(i)}$  ed  $S^{(i)}$ ,  $i \geq 1$ , i valori di  $Z$  ed  $S$  dopo l' $i$ -esima esecuzione del corpo del ciclo; è facile vedere che  $Z^{(i)} \subseteq Z^{(i+1)}$ ,  $\forall i$ . Sia  $j$  tale che  $S^{(j)} \subseteq Z^{(j)}$  (cioè  $Z^{(j)}$  è il valore di  $Z$  quando l'algoritmo termina); si proverà che:

$$A \in X^+ \Leftrightarrow A \in Z^{(j)}$$

**Parte solo se.** Verrà dimostrato per induzione su  $i$  che  $Z^{(i)} \subseteq X^+$ ,  $\forall i$ , e quindi, in particolare  $Z^{(j)} \subseteq X^+$ .

*Base dell'induzione:*  $i = 0$ . Poiché  $Z^{(0)} = X$  e  $X \subseteq X^+$ , si ha  $Z^{(0)} \subseteq X^+$ .

*Induzione:*  $i > 0$ . Per l'ipotesi induttiva  $Z^{(i-1)} \subseteq X^+$ . Sia  $A$  un attributo in  $Z^{(i)} - Z^{(i-1)}$ ; deve esistere una dipendenza  $Y \rightarrow V \in F$  tale che  $Y \subseteq Z^{(i-1)}$  e  $A \in V$ . Poiché  $Y \subseteq Z^{(i-1)}$ , per l'ipotesi induttiva si ha che  $Y \subseteq X^+$ ; pertanto, per il LEMMA 4.1,  $X \rightarrow Y \in F^A$ . Poiché  $X \rightarrow Y \in F^A$  e  $Y \rightarrow V \in F$ , per l'assioma della transitività si ha  $X \rightarrow V \in F^A$  e quindi, per il Lemma 4.1,  $V \subseteq X^+$ . Pertanto,  $\forall A \in Z^{(i)} - Z^{(i-1)}$  si ha  $A \in X^+$ . Da ciò segue, per l'ipotesi induttiva, che

$Z^{(i)} \subseteq X^+$ .

**Parte se.** Sia  $A$  un attributo in  $X^+$ . Mostriamo che  $A \in Z^{(j)}$ . Poiché  $A \in X^+$ , si ha  $X \rightarrow A \in F^+$  (per il [TEOREMA 4.3](#)); pertanto  $X \rightarrow A$  deve essere soddisfatta da ogni istanza legale di  $R$ . Si consideri la seguente istanza  $r$  di  $R$ :

| $Z^{(0)}$ |   |    |   | $R-Z^{(0)}$ |   |    |   |
|-----------|---|----|---|-------------|---|----|---|
| 1         | 1 | .. | 1 | 1           | 1 | .. | 1 |
| 1         | 1 | .. | 1 | 0           | 0 | .. | 0 |

Mostriamo che  $r$  è un'istanza legale di  $R$ . Infatti, se, per assurdo, esistesse in  $F$  una dipendenza funzionale  $V \rightarrow W$  non soddisfatta da  $r$ , si dovrebbe avere  $V \subseteq Z^{(j)}$  e  $W \cap (R - Z^{(j)}) \neq \emptyset$ ; ma, in tal caso, si avrebbe  $S^{(j)} \not\subseteq Z^{(j)}$  (contraddizione). Poiché  $r$  è un'istanza legale di  $R$  deve soddisfare  $X \rightarrow A$ ; ma, allora, poiché  $X = Z^{(0)} \subseteq Z^{(j)}$ ,  $A$  deve essere in  $Z^{(j)}$ .  $\square$

Tramite l'ALGORITMO 4.1 possiamo verificare se un insieme di attributi è una chiave valida per uno schema di relazione; basta verificare, per la sua [DEFINIZIONE 4.3](#) e per il [LEMMA 4.1](#), che la sua chiusura rispetto ad  $F$  includa o sia uguale alla relazione e che non lo siano le chiusure dei suoi sottoinsiemi. Vediamo un esempio.

#### Esempio 4.4

Sia  $R = ABCDEH$  ed  $F = \{AB \rightarrow CD, C \rightarrow DE, E \rightarrow AC\}$ . Mostrare che:

- $ABH$  è chiave per  $R$ ;
- sapendo che è l'unica chiave di  $R$ , dire perché  $R$  non è in 3NF.

#### Soluzione.

$(ABH)_F^+ = ABCDEH = R$  e inoltre

$(AB)_F^+ = ABCDE \neq R$

$(AH)_F^+ = AH \neq R$

$(HB)_F^+ = HB \neq R$

Ne tantomeno lo saranno le chiusure dei singoli attributi. Quindi abbiamo dimostrato che  $ABH$  è chiave di  $R$ .

La relazione  $R$  non è in 3NF perché contiene dipendenze parziali e transitive:

- $AB \rightarrow CD$  è una dipendenza parziale;
- $C \rightarrow DE, E \rightarrow AC$  sono dipendenze transitive;

e ciò va contro la definizione di schema in Terza Forma Normale.

## 4.5 Decomposizioni che preservano le dipendenze funzionali

Si vuole ora formalizzare il concetto di decomposizione che “preserva un insieme di dipendenze funzionali”. A tal fine, cominciamo con l'introdurre i concetti di *decomposizione* di uno schema di relazione ed *equivalenza* tra due insiemi di dipendenze funzionali.

#### Definizione 4.9

Sia  $R$  uno schema di relazione. Una **decomposizione** di  $R$  è una famiglia  $\rho = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$  di sottoinsiemi di  $R$  che *ricopre*  $R$  ( $\bigcup_{i=1}^k R_i = R$ ).

#### Esempio 4.5

Sia  $R = ABC$ . Le decomposizioni  $\{AB, BC\}$  e  $\{A, BC\}$  sono valide, mentre non lo è  $\{AB, B\}$  poiché manca l'attributo  $C$ .



#### 4.5.1 Equivalenza tra due insiemi di dipendenze funzionali

##### Definizione 4.10

Siano  $F$  e  $G$  due insiemi di dipendenze funzionali.  $F$  e  $G$  sono **equivalenti**, in simboli  $F \equiv G$ , se  $F^+ = G^+$ .

Verificare l'equivalenza di due insiemi  $F$  e  $G$  di dipendenze funzionali richiede dunque che venga verificata l'uguaglianza di  $F^+$  e  $G^+$ , cioè che  $F^+ \subseteq G^+$  e contemporaneamente  $F^+ \supseteq G^+$ . Come detto in precedenza, calcolare la chiusura di un insieme di dipendenze funzionali può richiedere tempo esponenziale. Il seguente lemma ci permette tuttavia di verificare l'equivalenza dei due insiemi di dipendenze funzionali in tempo polinomiale.

##### Lemma 4.2

Siano  $F$  e  $G$  due insiemi di dipendenze funzionali.  $F \subseteq G^+ \Rightarrow F^+ \subseteq G^+$ .

**Dimostrazione.** Sia  $f \in (F^+ - F)$ . Poiché, per il TEOREMA 4.3,  $f$  è derivabile da  $F$  mediante gli assiomi di Armstrong e ogni dipendenza funzionale in  $F$  è derivabile da  $G$  mediante gli assiomi di Armstrong,  $f$  è derivabile da  $G$  mediante gli assiomi di Armstrong.  $\square$

##### Definizione 4.11

Sia  $R$  uno schema di relazione,  $F$  un insieme di dipendenze funzionali su  $R$  e  $\rho = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$  una decomposizione di  $R$ . Diciamo che  $\rho$  *preserva*  $F$  se  $F \equiv \bigcup_{i=1}^k \pi_{R_i}(F)$ , dove  $\pi_{R_i}(F) = \{X \rightarrow Y \text{ t.c. } X \rightarrow Y \in F^+ \wedge XY \subseteq R_i\}$ .

##### Esempio 4.6

Riprendiamo i dati dell'ESEMPIO 4.2: la relazione  $Studiante = \{Matr, Com, Prov\}$ , con  $F = \{Matr \rightarrow Com, Matr \rightarrow Prov, Com \rightarrow Prov\}$ . Due decomposizioni possibili individuate precedentemente sono:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{Matr, Com\} \text{ con } F_1 = \{Matr \rightarrow Com\} \\ R_2 &= \{Matr, Prov\} \text{ con } F_2 = \{Matr \rightarrow Prov\} \end{aligned}$$

Si verifica applicando la definizione 4.10 che la dipendenza  $Com \rightarrow Prov$  non è preservata, perché in  $R_1$  manca  $Prov$  e in  $R_2$  manca  $Com$ . Una decomposizione alternativa per  $R_2$  è  $\{Com, Prov\}$ ; in questo modo tutte le dipendenze funzionali sono preservate. In altre parole abbiamo **proiettato le dipendenze**, ovvero abbiamo preso gli attributi  $X$  e  $Y$  da una dipendenza funzionale  $X \rightarrow Y$  e vedere se essi sono presenti nella relazione esaminata.

#### 4.5.2 Algoritmo per verificare l'equivalenza tra $F$ e $G$

Verificare se una decomposizione preserva un insieme di dipendenze funzionali  $F$  richiede, dunque, che venga verificata l'equivalenza dei due insiemi di dipendenze funzionali  $F$  e  $G = \bigcup_{i=1}^k \pi_{R_i}(F)$ ; poiché, per definizione,  $F^+ \supseteq G$ , per il LEMMA 4.2 è sufficiente verificare che  $F \subseteq G^+$ ; ciò può essere fatto con il seguente algoritmo (la cui correttezza è una banale conseguenza del LEMMA 4.1 e del TEOREMA 4.3).

##### Algoritmo 4.2

```

INPUT: due insiemi  $F$  e  $G$  di dipendenze funzionali su  $R$ ;
OUTPUT: la variabile successo che avrà valore TRUE se  $F \subseteq G^+$ , FALSE altrimenti;
BEGIN
  successo := true;
  FOR EACH  $X \rightarrow Y \in F$ 
    BEGIN
      calcola  $X_G^+$ ;
      IF  $Y \not\subseteq X_G^+$  THEN successo = false;
    END
  END
END

```

L'ALGORITMO 2 richiede che venga calcolato  $X_G^+$ ; se si volesse utilizzare a tale scopo l'ALGORITMO 1 si dovrebbe prima calcolare  $G$ , ma, per la definizione di  $G$ , ciò richiederebbe il calcolo di  $F^+$  che richiede tempo esponenziale. Il seguente algoritmo permette di calcolare  $X_G^+$  a partire da  $F$ .

#### Algoritmo 4.3

INPUT: uno schema di relazione  $R$ , un insieme  $F$  di dipendenze funzionali su  $R$ , una decomposizione  $\rho = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$  di  $R$ , un sottoinsieme  $X$  di  $R$ ;  
 OUTPUT: la chiusura di  $X$  rispetto a  $G = \bigcup_{j=1}^k \pi_{R_j}(F)$ , (nella variabile  $Z$ );

```

BEGIN  $Z := X$ ;
 $S := \emptyset$ ;
FOR  $j := 1$  TO  $k$ 
   $S := S \cup (Z \cap R_j)_F^+ \cap R_j$ ;
WHILE  $S \not\subseteq Z$ 
  BEGIN
     $Z := Z \cup S$ ;
    FOR  $j := 1$  TO  $k$ 
       $S := S \cup (Z \cap R_j)_F^+ \cap R_j$ ;
    END
  END
END

```

#### Esempio 4.7

Dato  $R = ABCDEH$ ,  $F = \{AB \rightarrow CD, E \rightarrow H, CD \rightarrow E, H \rightarrow AB\}$  ed una scomposizione di  $R$ ,  $\rho = \{ABCD, CDEH\}$ .  $\rho$  preserva  $F$ ?

#### Soluzione.

Prendiamo la prima dipendenza funzionale in  $F$ ,  $AB \rightarrow CD$ . Calcoliamo  $(AB)_G^+$ .

$$\begin{aligned}
 Z^{(0)} &= AB; \\
 S^{(0)} &= (AB \cap ABCD)_F^+ \cap ABCD = ABCD; \\
 S^{(1)} &= S^{(0)} \cup (AB \cap CDEH)_F^+ \cap CDEH = S^{(0)} \cup \emptyset;
 \end{aligned}$$

Dato che  $S \subseteq Z$  saltiamo il ciclo WHILE e torniamo all'Algoritmo 1.  $CD \subseteq ABCD$  quindi la variabile *successo* rimane uguale a *true*; per ogni altra dipendenza seguiamo lo stesso procedimento. Troveremo quindi che:

- $AB \rightarrow CD \in G^+$
- $E \rightarrow H \in G^+$
- $CD \rightarrow E \in G^+$
- $H \rightarrow AB \in G^+$

quindi  $\rho$  preserva  $R$ .

#### Teorema 4.5

Sia  $R$  uno schema di relazione,  $F$  un insieme di dipendenze funzionali su  $R$ ,  $\rho = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$  una decomposizione di  $R$  e  $X$  un sottoinsieme di  $R$ . L'Algoritmo 4.3 calcola correttamente  $X_G^+$ , dove  $G = \bigcup_{j=1}^k \pi_{R_j}(F)$ .

**Dimostrazione.** Indichiamo con  $Z^{(0)}$  il valore iniziale di  $Z$  ( $Z^{(0)} = X$ ) e con  $Z^{(i)}$ ,  $i \geq 1$ , il valore di  $Z$  dopo l' $i$ -esima esecuzione dell'assegnazione  $Z := Z \cup S$ ; è facile vedere che  $Z^{(i)} \subseteq Z^{(i+1)}$ ,  $\forall i$ . Sia  $Z^{(f)}$  il valore di  $Z$  quando l'algoritmo termina; proveremo che:

$$A \in X_G^+ \Leftrightarrow A \in Z^{(f)}$$

**Parte solo se.** Mostreremo per induzione su  $i$  che  $Z^{(i)} \subseteq X_G^+$ ,  $\forall i$ .

*Base dell'induzione:*  $i = 0$ . Poiché  $Z^{(0)} = X$  e  $X \subseteq X^+$ , si ha  $Z^{(0)} \subseteq X_G^+$ .

*Induzione:*  $i > 0$ . Per l'ipotesi induttiva  $Z^{(i-1)} \subseteq X_G^+$ . Sia  $A$  un attributo in  $Z^{(i)} - Z^{(i-1)}$ ; in tal caso deve esistere un indice  $j$  tale che  $A \in (Z^{(i-1)} \cap R_j)_F^+ \cap R_j$ . Poiché  $A \in (Z^{(i-1)} \cap R_j)_F^+$  si ha  $(Z^{(i-1)} \cap R_j) \rightarrow A \in F^+$  (per il Teorema 4.3).

Poiché  $(Z^{(i-1)} \cap R_j) \rightarrow A \in F^+$ ,  $A \in R_j$  e  $Z^{(i-1)} \cap R_j \subseteq R_j$  si ha, per la definizione di  $G$ , che  $(Z^{(i-1)} \cap R_j) \rightarrow A \in G$ . Poiché per l'ipotesi induttiva si ha che  $X \rightarrow Z^{(i-1)} \in G^+$ , per la regola di decomposizione si ha anche che  $X \rightarrow (Z^{(i-1)} \cap R_j) \in G^+$  e, quindi, per l'assioma della transitività, che  $X \rightarrow A \in G^+$ , cioè  $A \in X_G^+$ . Quindi  $Z^{(i)} \subseteq X_G^+$ .

**Parte se.** Mostreremo che  $X_G^+ \subseteq Z^{(f)}$  tenendo conto anche della seguente proposizione:

#### Proposizione 4.4

Presi comunque due insiemi di attributi  $X$  ed  $Y$  e un insieme di dipendenze funzionali  $F$  si ha, per la definizione di chiusura di un insieme di attributi,  $X \subseteq Y \Rightarrow X_F^+ \subseteq Y_F^+$ .

Poiché  $X = Z^{(0)} \subseteq Z^{(f)}$ , dalla Proposizione 4.5 segue che  $X_G^+ \subseteq (Z^{(f)})_G^+$ . Mostreremo che  $Z^{(f)} = (Z^{(f)})_G^+$  da cui segue  $X_G^+ \subseteq Z^{(f)}$ .

Supponiamo per assurdo che  $Z^{(f)} \neq (Z^{(f)})_G^+$ . Consideriamo l'ALGORITMO 4.1 che, per evitare ambiguità, riscriviamo sostituendo la variabile  $W$  alla variabile  $Z$  e la variabile  $U$  alla variabile  $S$ :

INPUT: uno schema di relazione  $R$ , un insieme  $F$  di dipendenze funzionali su  $R$ , un sottoinsieme  $X$  di  $R$ .

OUTPUT:  $X_F^+$  nella variabile  $W$

BEGIN

$W := X$ ;

$U := \{A \text{ t.c. } Y \rightarrow V \in F \wedge A \in V \wedge Y \subseteq W\}$ ;

WHILE  $U \not\subseteq W$

BEGIN

$W := W \cup U$ ;

$U := \{A \text{ t.c. } Y \rightarrow V \in F \wedge A \in V \wedge Y \subseteq W\}$ ;

END

END

Se eseguiamo tale algoritmo fornendo in input l'insieme di attributi  $Z^{(f)}$  e l'insieme di dipendenze funzionali  $G$ , al termine la variabile  $W$  conterrà  $(Z^{(f)})_G^+$ . Se, come abbiamo supposto per assurdo,  $Z^{(f)} \neq (Z^{(f)})_G^+$ , deve esistere un attributo  $B$  che appartiene a  $U^{(0)}$  e non appartiene a  $W^{(0)} = Z^{(f)}$  (altrimenti si avrebbe  $Z^{(f)} = (Z^{(f)})_G^+$ ). D'altra parte si ha:

$$U^{(0)} = \{A \text{ t.c. } Y \rightarrow V \in G \wedge A \in V \wedge Y \subseteq W^{(0)}\}$$

e quindi, per la definizione di  $G$ , deve esistere  $j$  tale che:

$$B \in \{A \text{ t.c. } Y \rightarrow V \in F^+ \wedge A \in V \wedge Y \subseteq W^{(0)} \wedge YV \subseteq R_j\}$$

Da  $Y \subseteq W^{(0)} \wedge YV \subseteq R_j$  segue che:

$$[a] Y \subseteq W^{(0)} \cap R_j = Z^{(f)} \cap R_j$$

Inoltre dal fatto che  $Y \rightarrow V \in F^+$  segue, per il LEMMA 4.1, che  $V \subseteq Y_F^+$  e, quindi, per la [a] e per la Proposizione 4.5 si ha che  $V \subseteq (Z^{(f)} \cap R_j)_F^+$ . Infine poiché  $YV \subseteq R_j$  si ha:

$$V \subseteq (Z^{(f)} \cap R_j)_F^+ \cap R_j$$

Poiché  $B \in V$  si ha che  $B \in (Z^{(f)} \cap R_j)_F^+ \cap R_j$  e quindi  $B \in S^{(f)}$ . Poiché  $B$  non appartiene a  $Z^{(f)}$  (per l'ipotesi per assurdo),  $Z^{(f)}$  non può essere il valore finale di  $Z$  (contraddizione).  $\square$

## 4.6 Decomposizioni con Join senza perdita

Come è stato ribadito nel paragrafo 4.3, se si decompone uno schema di relazione  $R$  che non è in 3NF si vuole che la decomposizione  $\{R_1, R_2, \dots, R_k\}$  ottenuta sia tale che ogni istanza legale  $r$  di  $R$  sia ricostruibile mediante join naturale (il cui simbolo ricordiamo essere  $\bowtie$ ) da un istanza legale  $\{r_1, r_2, \dots, r_k\}$  dello schema decomposto  $\{R_1, R_2, \dots, R_k\}$ . Poiché per ricostruire una tupla  $t$  di  $r$  è necessario che  $t[R_i] \in R_i$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ , si deve avere  $r_i = \pi_{R_i}(r)$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ .

**Definizione 4.12**

Sia  $R$  uno schema di relazione. Una decomposizione  $\rho = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$  di  $R$  ha un *join senza perdita* se per ogni istanza legale  $r$  di  $R$  si ha  $r = \pi_{R_1}(r) \bowtie \pi_{R_2}(r) \bowtie \dots \bowtie \pi_{R_k}(r)$ .

**Teorema 4.6**

Sia  $R$  uno schema di relazione e  $\rho = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$  una decomposizione di  $R$ . Per ogni istanza legale  $r$  di  $R$ , indicato con  $m_\rho(r) = \pi_{R_1}(r) \bowtie \pi_{R_2}(r) \bowtie \dots \bowtie \pi_{R_k}(r)$ , si ha:

1.  $r \subseteq m_\rho(r)$
2.  $\pi_{R_i}(m_\rho(r)) = \pi_{R_i}(r)$
3.  $m_\rho(m_\rho(r)) = m_\rho(r)$

**Dimostrazione.**

*Prova di [1].* Sia  $t$  una tupla di  $r$ .  $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $t[R_i] \in \pi_{R_i}(r)$  e quindi  $t \in m_\rho(r)$ .

*Prova di [2].* Per il punto [1] si ha  $r \subseteq m_\rho(r)$  e, quindi,  $\pi_{R_i}(r) \subseteq \pi_{R_i}(m_\rho(r))$ . E' sufficiente, pertanto, mostrare che  $\pi_{R_i}(r) \supseteq \pi_{R_i}(m_\rho(r))$ . Banalmente, per ogni tupla  $t \in m_\rho(r)$  e per ogni  $i \in \{1, \dots, k\}$ , deve esistere una tupla  $t' \in r$  t.c.  $t[R_i] = t'[R_i]$ .

*Prova di [3].* Per il punto [2] si ha  $\pi_{R_i}(m_\rho(r)) = \pi_{R_i}(r)$ . Pertanto

$$m_\rho(m_\rho(r)) = \pi_{R_1}(m_\rho(r)) \bowtie \dots \bowtie \pi_{R_k}(m_\rho(r)) = \pi_{R_1}(r) \bowtie \dots \bowtie \pi_{R_k}(r) = m_\rho(r).$$

□

Il seguente algoritmo permette di decidere in tempo polinomiale se una decomposizione di uno schema di relazione ha un join senza perdita.

**Algoritmo 4.4**

INPUT: uno schema di relazione  $R$ , un insieme  $F$  di dipendenze funzionali su  $R$ , una decomposizione  $\rho = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$  di  $R$ ;

OUTPUT: decide se  $\rho$  ha un join senza perdita;

BEGIN

Costruisci una tabella  $r$  nel modo seguente:

- $r$  ha  $|R|$  colonne e  $|\rho|$  righe
- all'incrocio dell' $i$ -esima riga e della  $j$ -esima colonna si metta:
  - il simbolo  $a_j$  se l'attributo  $A_j \in R_i$ ;
  - il simbolo  $b_{i,j}$  altrimenti;

REPEAT

FOR EACH  $X \rightarrow Y \in F$

DO

IF  $\exists \{t_1, t_2\} \in r$  t.c.  $t_1[X] = t_2[X] \wedge t_1[Y] \neq t_2[Y]$  THEN

FOR EACH  $A_j \in Y$

IF  $t_1[A_j] = 'a_j'$  THEN  $t_2[A_j] := t_1[A_j]$ ;

ELSE  $t_1[A_j] := t_2[A_j]$ ;

UNTIL  $r$  ha una riga con tutte 'a' OR  $r$  non è cambiato;

IF  $r$  ha una riga con tutte 'a' THEN

$\rho$  ha un join senza perdita;

ELSE

$\rho$  non ha un join senza perdita;

END

Il seguente esempio mostra come tale algoritmo viene applicato.

### Esempio 4.8

Sia  $R = ABCDE$  uno schema di relazione,  $F = \{C \rightarrow D, DH \rightarrow C, D \rightarrow H, A \rightarrow BC\}$  un insieme di dipendenze funzionali su  $R$  e  $\rho = \{AE, ABDH, CDE\}$  una scomposizione di  $R$ . Quello che vogliamo sapere è:  $\rho$  ha un join senza perdita?

Come indicato dall'Algoritmo 4.4, si costruisca una tabella che ha come colonne gli attributi di  $R$  e come righe le varie relazioni in  $\rho$ , inserendo poi in ogni cella uno dei due simboli indicati nell'algoritmo, secondo il criterio specificato. Nella cella individuata dalla prima colonna e dalla prima riga, ad esempio, va messo il simbolo  $a_1$  visto che l'attributo  $A$  rappresentante la prima colonna è presente nella relazione rappresentante la prima riga; nella seconda colonna, prima riga, la cella contiene  $b_{1,2}$  poiché  $B$  non è presente in  $AE$ .

|      | A         | B         | C         | D         | E         | H         |
|------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| AE   | $a_1$     | $b_{1,2}$ | $b_{1,3}$ | $b_{1,4}$ | $a_5$     | $b_{1,6}$ |
| ABDH | $a_1$     | $a_2$     | $b_{2,3}$ | $a_4$     | $b_{2,5}$ | $a_6$     |
| CDE  | $b_{3,1}$ | $b_{3,2}$ | $a_3$     | $a_4$     | $a_5$     | $b_{3,6}$ |

Ora, per ogni dipendenza funzionale  $A \rightarrow Y \in F$ , controlliamo se ci sono due righe (tuple)  $t_1$  e  $t_2$  tali che  $t_1[X] = t_2[X]$  e  $t_1[Y] \neq t_2[Y]$ . In questo caso abbiamo le dipendenze funzionali  $D \rightarrow H$  e  $A \rightarrow BC$  verifica tale condizione; per convenienza conviene segnare, ad ogni iterazione dell'algoritmo, quali dipendenze funzionali verifichino la suddetta condizione. Usiamo la seguente tabella dove le colonne sono le iterazioni, e le righe rappresentano le dipendenze funzionali. Inseriremo una “✓” quando una dipendenza funzionale verifica la condizione; “.” altrimenti:

|                    | $I_1$ |
|--------------------|-------|
| $C \rightarrow D$  | .     |
| $DH \rightarrow C$ | .     |
| $D \rightarrow H$  | ✓     |
| $A \rightarrow BC$ | ✓     |

Tornando alla tabella precedente, visto che l'ultima dipendenza funzionale verifica la condizione cercata nelle righe 1 e 2, andiamo a modificare i valori di ogni attributo  $Y$ , in questo caso  $Y = BC$ ; dato che  $t_1[B] \neq a_j$  abbiamo che il valore della cella diviene uguale a  $t_2[B]$ , mentre  $t_1[C] := t_2[C]$ . Dopo queste modifiche, al termine della **prima iterazione** si ha la seguente situazione:

|      | A         | B                       | C                           | D         | E         | H                       |
|------|-----------|-------------------------|-----------------------------|-----------|-----------|-------------------------|
| AE   | $a_1$     | <b><math>a_2</math></b> | <b><math>b_{2,3}</math></b> | $b_{1,4}$ | $a_5$     | $b_{1,6}$               |
| ABDH | $a_1$     | $a_2$                   | $b_{2,3}$                   | $a_4$     | $b_{2,5}$ | $a_6$                   |
| CDE  | $b_{3,1}$ | $b_{3,2}$               | $a_3$                       | $a_4$     | $a_5$     | <b><math>a_6</math></b> |

|                    | $I_1$ |
|--------------------|-------|
| $C \rightarrow D$  | .     |
| $DH \rightarrow C$ | .     |
| $D \rightarrow H$  | ✓     |
| $A \rightarrow BC$ | ✓     |

L'algoritmo non ha terminato la sua esecuzione perché non ha riscontrato una condizione di uscita (una riga con tutte “a” o l'ultima iterazione eseguita non ha apportato nessun cambiamento). Procediamo quindi con le successive iterazioni.

### Iterazione 2

|      | A         | B         | C                       | D                       | E         | H         |
|------|-----------|-----------|-------------------------|-------------------------|-----------|-----------|
| AE   | $a_1$     | $a_2$     | $b_{2,3}$               | <b><math>a_4</math></b> | $a_5$     | $b_{1,6}$ |
| ABDH | $a_1$     | $a_2$     | <b><math>a_3</math></b> | $a_4$                   | $b_{2,5}$ | $a_6$     |
| CDE  | $b_{3,1}$ | $b_{3,2}$ | $a_3$                   | $a_4$                   | $a_5$     | $a_6$     |

|                    | $I_1$ | $I_2$ |
|--------------------|-------|-------|
| $C \rightarrow D$  | .     | ✓     |
| $DH \rightarrow C$ | .     | ✓     |
| $D \rightarrow H$  | ✓     | .     |
| $A \rightarrow BC$ | ✓     | .     |

### Iterazione 3

|             | A         | B         | C              | D     | E         | H              |                    | $I_1$ | $I_2$ | $I_3$ |
|-------------|-----------|-----------|----------------|-------|-----------|----------------|--------------------|-------|-------|-------|
| <b>AE</b>   | $a_1$     | $a_2$     | $\mathbf{a_3}$ | $a_4$ | $a_5$     | $\mathbf{a_6}$ | $C \rightarrow D$  | .     | ✓     | .     |
| <b>ABDH</b> | $a_1$     | $a_2$     | $a_3$          | $a_4$ | $b_{2,5}$ | $a_6$          | $DH \rightarrow C$ | .     | ✓     | .     |
| <b>CDE</b>  | $b_{3,1}$ | $b_{3,2}$ | $a_3$          | $a_4$ | $a_5$     | $a_6$          | $D \rightarrow H$  | ✓     | .     | ✓     |
|             |           |           |                |       |           |                | $A \rightarrow BC$ | ✓     | .     | ✓     |

Alla fine della terza iterazione ci accorgiamo che la prima riga è composta da soli elementi  $a_j$ , quindi l'algoritmo termina indicando che  $\rho$  ha un join senza perdita.

#### Teorema 4.7

Sia  $R$  uno schema di relazione,  $F$  un insieme di dipendenze funzionali su  $R$  e  $\rho = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$  una decomposizione di  $R$ . L'Algoritmo 4.4 decide correttamente se  $\rho$  ha un join senza perdita.

**Dimostrazione.** Occorre dimostrare che: quando l'algoritmo termina la tabella  $r$  ha una tupla con tutte 'a'  $\Leftrightarrow \rho$  ha un join senza perdita. Verrà dimostrata solo la parte "solo se" (per uno sketch della prova della parte "se" consultare il testo di Ullman).

*Parte solo se.* Supponiamo per assurdo  $\rho$  abbia un join senza perdita e che quando l'algoritmo termina la tabella  $r$  non abbia una tupla con tutte 'a'. La tabella  $r$  può essere interpretata come un'istanza legale di  $R$  (basta sostituire ai simboli 'a' e 'b' valori presi dai domini dei corrispondenti attributi in modo tale che ad uno stesso simbolo venga sostituito lo stesso valore) in quanto l'algoritmo termina quando non ci sono più violazioni delle dipendenze in  $F$ . Poiché nessun simbolo 'a' che compare nella tabella costruita inizialmente viene mai modificato dall'algoritmo, per ogni  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $\pi_{R_i}(r)$  contiene una tupla con tutte 'a'; pertanto  $m_\rho(r)$  contiene una tupla con tutte 'a' e, quindi,  $m_\rho(r) \neq r$  (contraddizione).

#### Corollario 4.1

Sia  $R$  uno schema di relazione,  $F$  un insieme di dipendenze funzionali su  $R$  e  $\rho = \{R_1, R_2\}$  una decomposizione di  $R$ .

$$(R_1 \cap R_2) \rightarrow (R_1 - R_2) \vee (R_1 \cap R_2) \rightarrow (R_2 - R_1) \Rightarrow \rho \text{ ha un join senza perdita.}$$

## 4.7 Decomposizioni in 3NF che conservano la dipendenze funzionali e hanno un join senza perdita

In questo paragrafo mostreremo che:

#### Proposizione 4.5

Dato uno schema di relazione  $R$  e un insieme di dipendenze funzionali  $F$  su  $R$  esiste sempre una decomposizione  $\rho = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$  di  $R$  tale che:

- $\forall i, i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $R_i$  è in 3NF;
- preserva  $F$ ;
- $\rho$  ha un join senza perdita

e che una tale decomposizione può essere calcolata in tempo polinomiale.

A tal fine abbiamo bisogno di introdurre il concetto di copertura minimale di un insieme di dipendenze funzionali.

#### Definizione 4.13

Sia  $F$  un insieme di dipendenze funzionali. Una **copertura minimale** di  $F$  è un insieme  $G$  di dipendenze funzionali equivalente ad  $F$  tale che:

1. per ogni dipendenza funzionale in  $G$  la parte destra è un singleton, cioè è costituita da un unico attributo (ogni attributo nella parte destra è non ridondante);
2.  $\nexists X \rightarrow A \in G \text{ t.c. } \exists X' \subseteq X \text{ t.c. } G \equiv G - \{X \rightarrow A\} \cup \{X' \rightarrow A\}$  (ogni attributo nella

parte sinistra è non ridondante);

3.  $\nexists X \rightarrow A \in G$  t.c.  $G \equiv G - \{X \rightarrow A\}$  (ogni dipendenza è non ridondante).

Per ogni insieme di dipendenze funzionali  $F$  esiste una copertura minimale che può essere ottenuta in tempo polinomiale a partire dall'insieme  $G$  equivalente ad  $F$  in cui per ogni dipendenza funzionale la parte destra è un singleton ( $G$  esiste sempre per la regola della decomposizione)

- prima sostituendo ricorsivamente ogni dipendenza funzionale  $A_1, \dots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \dots, A_n \rightarrow A$  tale che  $G \equiv G - \{A_1, \dots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \dots, A_n \rightarrow A\} \cup \{A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n \rightarrow A\}$  con la dipendenza funzionale  $\{A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n \rightarrow A\}$
- e successivamente eliminando ricorsivamente ogni dipendenza funzionale  $X \rightarrow A$  t.c.  $G \equiv G - \{X \rightarrow A\}$ .

Vediamo ora un'applicazione dell'algoritmo per trovare la copertura minimale di un insieme di dipendenze funzionali.

#### Esempio 4.9

Sia dato  $F = \{AB \rightarrow CD, A \rightarrow CH, H \rightarrow D\}$ . Vogliamo trovare la copertura minimale, chiamiamola  $G$ , di  $F$ .

**Primo passo:** partiamo col trasformare ogni dipendenza che ha più di un attributo a destra in più dipendenze con un solo attributo a destra. È possibile “sdoppiare” una dipendenza funzionale grazie alla regola della *decomposizione*; così facendo modifichiamo l'insieme di partenza ottenendone uno nuovo,  $G$ , il quale vogliamo che sia equivalente ad  $F$ . Per convenienza, scriviamo in colonna tutte le dipendenze funzionali in  $G$ .

| $G$                |
|--------------------|
| $AB \rightarrow C$ |
| $AB \rightarrow D$ |
| $A \rightarrow C$  |
| $A \rightarrow H$  |
| $H \rightarrow D$  |

| $G$                | $G'$                       |
|--------------------|----------------------------|
| $AB \rightarrow C$ | $\mathbf{B} \rightarrow C$ |
| ...                | ...                        |

Primo tentativo

| $G$                | $G'$                       |
|--------------------|----------------------------|
| $AB \rightarrow C$ | $\mathbf{A} \rightarrow C$ |
| ...                | ...                        |

Secondo tentativo

**Secondo passo:** bisogna ora ridurre al minimo numero gli attributi nella parte sinistra tale che ogni dipendenza rimanga valida. Procediamo a tentativi eliminando ogni attributo finché ciò è possibile, partendo da  $AB \rightarrow C$ . Proviamo ad eliminare prima  $A$ , rimanendo così con  $B \rightarrow C$ ; dopo questa operazione modifichiamo l'insieme di partenza ottenendone uno nuovo,  $G'$ , il quale vogliamo che sia equivalente ad  $G$  (che a sua volta è equivalente ad  $F$  “per costruzione”).

Perché si verifichi ciò deve valere la condizione  $B \rightarrow C \in F^+$ , che è verificata se e solo se  $C \in B_F^+$ . Calcoliamo quindi  $B_F^+$  (che è uguale a  $B$ ):  $C$  non è presente nella chiusura, quindi l'eliminazione di  $A$  non è lecita. Tentiamo allora di eliminare  $A$ :  $A_F^+ = ACHD$ , nella quale è presente  $C$ . L'eliminazione è lecita e ripetiamo lo stesso procedimento per ogni dipendenza funzionale in  $G$ ; al termine dell'operazione si eliminano eventuali dipendenze duplicate.

| $G'$              |
|-------------------|
| $A \rightarrow C$ |
| $A \rightarrow D$ |
| $A \rightarrow H$ |
| $H \rightarrow D$ |

Passo 2 completo

| $G''$             |
|-------------------|
| $A \rightarrow C$ |
| $A \rightarrow H$ |
| $H \rightarrow D$ |

Passo 3 completo

**Terzo passo:** ci concentriamo ora sull'eliminare le dipendenze ridondanti, ovvero ridurre al minimo il numero delle dipendenze nell'insieme  $G'$ , finquando quest'ultimo rimane equivalente ad  $F$ ; anche qui procediamo a tentativi. Per poter eliminare  $A \rightarrow C \in G'$ , deve risultare che  $C \in A_{(G' - \{A \rightarrow C\})}^+$ : ciò non è vero, quindi tale dipendenza non può essere eliminata. Continuiamo con  $A \rightarrow D \in G'$ : in questo caso  $D \in A_{(G' - \{A \rightarrow D\})}^+$  quindi tale dipendenza può

essere eliminata. Fatta questa operazione per ogni dipendenza in  $G'$  otteniamo  $G''$ , che è la copertura minimale di  $F$  cercata.

Il seguente algoritmo, dato uno schema di relazione  $R$  e un insieme di dipendenze funzionali  $F$  su  $R$ , che è una copertura minimale, permette di calcolare in tempo polinomiale una decomposizione  $\rho = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$  di  $R$  tale che:

- $\forall i \in \{1, \dots, k\}, R_i$  è in 3NF;
- $\rho$  preserva  $F$ .

#### Algoritmo 4.5

INPUT: uno schema di relazione  $R$  e un insieme  $F$  di dipendenze funzionali su  $R$ , che è una copertura minimale;

OUTPUT: una decomposizione  $\rho$  di  $R$  che preserva  $F$  e tale che per ogni schema di relazione in è in 3NF;

```
BEGIN
S := ∅;
FOR EACH A ∈ R tale che A non è coinvolto in nessuna dipendenza funzionale in F DO
    S := S ∪ {A};
IF S ≠ ∅ THEN
    BEGIN
        R := R − S;
        ρ := ρ ∪ {S};
    END
IF esiste una dipendenza funzionale in F che coinvolge tutti gli attributi in R THEN
    ρ := ρ ∪ {R};
ELSE
    FOR EACH X → A ∈ F DO ρ := ρ ∪ {XA}
END
```

#### Teorema 4.8

Sia  $R$  uno schema di relazione ed  $F$  un insieme di dipendenze funzionali su  $R$ , che è una copertura minimale. L'Algoritmo 4.5 permette di calcolare in tempo polinomiale una decomposizione  $\rho$  di  $R$  tale che:

1. ogni schema di relazione in  $\rho$  è in 3NF
2. preserva  $F$ .

#### Dimostrazione.

$\rho$  preserva  $F$ . Sia  $G = \bigcup_{i=1}^k \pi_{R_i}(F)$ . Poiché per ogni dipendenza funzionale  $X \rightarrow A \in F$  si ha che  $XA \in \rho$ , si ha che  $G \supseteq F$  e, quindi  $G^+ \supseteq F^+$ . L'inclusione  $G^+ \subseteq F^+$  è banalmente verificata in quanto per definizione,  $G \subseteq F^+$ .

Ogni schema di relazione in  $\rho$  è in 3NF. Se  $S \in \rho$ , ogni attributo in  $S$  fa parte della chiave e quindi, banalmente,  $S$  è in 3NF. Se  $R \in \rho$  esiste una dipendenza funzionale in  $F$  che coinvolge tutti gli attributi in  $R$ . Poiché  $F$  è una copertura minimale tale dipendenza avrà la forma  $R - A \rightarrow A$ ; poiché  $F$  è una copertura minimale, non ci può essere una dipendenza funzionale  $X \rightarrow A \in F^+$  t.c.  $X \subset R - A$  e, quindi,  $R - A$  è chiave in  $R$ . Sia  $Y \rightarrow B$  una qualsiasi dipendenza in  $F^+$ ; se  $B = A$  allora, poiché  $F$  è una copertura minimale,  $Y = R - A$  (cioè,  $Y$  è una superchiave); se  $B \neq A$  allora  $B \in R - A$  e quindi  $B$  è primo. Se  $XA \in \rho$ , poiché  $F$  è una copertura minimale, non ci può essere una dipendenza funzionale  $X' \rightarrow A \in F^+$  t.c.  $X' \subset X$  e, quindi,  $X$  è chiave in  $XA$ . Sia  $Y \rightarrow B$  una qualsiasi dipendenza in  $F^+$  tale che  $YB \subseteq XA$ ; se  $B = A$  allora, poiché  $F$  è una copertura minimale,  $Y = X$  (cioè,  $Y$  è una superchiave); se  $B \neq A$  allora  $B \in X$  e quindi  $B$  è primo.



**Teorema 4.9**

Sia  $R$  uno schema di relazione,  $F$  un insieme di dipendenze funzionali su  $R$ , che è una copertura minimale e  $\rho$  la decomposizione di  $R$  prodotta dall'Algoritmo 4.5. La decomposizione  $\sigma = \rho \cup \{K\}$ , dove  $K$  è una chiave per  $R$ , è tale che:

1. ogni schema di relazione in  $\sigma$  è in 3NF
2.  $\sigma$  preserva  $F$
3.  $\sigma$  ha un join senza perdita.

**Dimostrazione.**

$\sigma$  preserva  $F$ . Sia  $\sigma = \{R_1, R_2, \dots, R_k, R_{k+1}\}$  dove  $\rho = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$  è la decomposizione ottenuta mediante l'Algoritmo 4.5 e  $R_{k+1} = K$ . Sia  $G' = \bigcup_{i=1}^{k+1} \{X \rightarrow Y \in F^+ \text{ t.c. } XY \in R_i\}$ . Poiché per il Teorema 4.8  $F \equiv G$ , dove  $G = \bigcup_{i=1}^k \{X \rightarrow Y \in F^+ \text{ t.c. } XY \in R_i\}$ , è sufficiente dimostrare che  $G \equiv G'$ , cioè, per il LEMMA 2, che  $G \subseteq (G')^+$  e  $G' \subseteq G^+$ . Infatti,  $G \subseteq G'$  e quindi  $G \subseteq (G')^+$ . Inoltre, per definizione,  $G' \subseteq F^+$ ; poiché  $F^+ = G^+$ , si ha che  $G' \subseteq G^+$ .

Ogni schema di relazione in  $\sigma$  è in 3NF. Poiché  $\sigma = \rho \cup \{K\}$ , è sufficiente verificare che lo schema di relazione  $K$  è in 3NF. Mostriamo che  $K$  è chiave per lo schema  $K$ . Supponiamo per assurdo che  $K$  non sia chiave per lo schema  $K$ ; allora esiste un sottoinsieme proprio  $K' \subset K$  tale che  $K' \rightarrow K \in F^+$ ; poiché  $K$  è chiave per lo schema  $R$ ,  $K \rightarrow R \in F^+$ ; pertanto per transitività  $K' \rightarrow R \in F^+$ , che contraddice il fatto che  $K$  è chiave per lo schema  $R$ . Pertanto,  $K$  è chiave per lo schema  $K$  e quindi per ogni dipendenza funzionale  $X \rightarrow A \in F^+$  con  $XA \subseteq K$ ,  $A$  è primo.

$\sigma$  ha un join senza perdita. Supponiamo che l'ordine in cui gli attributi in  $R - K$  vengono aggiunti a  $Z$  dall'Algoritmo 4.1 quando calcola  $K^+$  sia  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , e supponiamo che per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$ , l'attributo  $A_i$  venga aggiunto a  $Z$  a causa della presenza in  $F$  della dipendenza  $Y_i \rightarrow A_i$  dove

$$Y_i \rightarrow Z^{(i-1)} = KA_1A_2 \dots A_{i-1} \subseteq K^+.$$

Per dimostrare che  $\rho$  ha un join senza perdita mostreremo che quando l'Algoritmo 4.4 è applicato a  $\rho$  viene prodotta una tabella che ha una riga con tutte 'a'. Senza perdita di generalità, supponiamo che l'Algoritmo 4.4 esamini le dipendenze funzionali  $Y_1 \rightarrow A_1, Y_2 \rightarrow A_2, \dots, Y_n \rightarrow A_n$  in questo ordine. Dimostreremo per induzione su  $i$  che dopo che è stata considerata la dipendenza funzionale  $Y_i \rightarrow A_i$  nella riga che corrisponde allo schema di relazione  $K$  c'è una 'a' in ogni colonna  $j$  con  $j \leq i$ .

*Base dell'induzione:*  $i = 1$ . Poiché  $Y_1 \subseteq Z^{(0)} = K$ , sia nella riga che corrisponde allo schema di relazione  $Y_1A_1$  che in quella che corrisponde allo schema di relazione  $K$  ci sono tutte 'a' in corrispondenza agli attributi in  $Y_1$ ; inoltre nella riga che corrisponde allo schema di relazione  $Y_1A_1$  c'è una 'a' in corrispondenza ad  $A_1$ . Pertanto l'Algoritmo 4.4 pone una 'a' in corrispondenza ad  $A_1$  nella riga che corrisponde allo schema di relazione  $K$ .

*Induzione:*  $i > 1$ . Per l'ipotesi induttiva, nella riga che corrisponde allo schema di relazione  $K$  c'è una 'a' in corrispondenza ad ogni attributo  $A_j$  con  $j \leq i - 1$ . Poiché  $Y_i \subseteq KA_1A_2 \dots A_{i-1}$ , sia nella riga che corrisponde allo schema di relazione  $Y_iA_i$  che in quella che corrisponde allo schema di relazione  $K$  ci sono tutte 'a' in corrispondenza agli attributi in  $Y_i$ ; inoltre nella riga che corrisponde allo schema di relazione  $Y_iA_i$  c'è una 'a' in corrispondenza ad  $A_i$ . Pertanto l'Algoritmo 4.4 pone una 'a' in corrispondenza ad  $A_i$  nella riga che corrisponde allo schema di relazione  $K$ .  $\square$

**4.8 La forma normale di Boyce-Codd**

ATTENZIONE! Questo paragrafo non è stato trattato nel corso relativo all'anno 2014/2015.

Successivamente alla terza forma normale sono state definite altre forme normali per gli schemi di relazione, alcune delle quali sono basate su vincoli (dipendenze multivalore e dipendenze di join) più generali delle dipendenze funzionali. Una forma normale che ancora si basa sul concetto di dipendenza funzionale è la cosiddetta forma normale di Boyce-Codd.

**Definizione 4.14**

Siano  $R$  uno schema di relazione e  $F$  un insieme di dipendenze funzionali su  $R$ .  $R$  è in forma normale di Boyce-Codd se per ogni dipendenza funzionale  $X \rightarrow A \in F^+$  tale che  $A \notin X$  si ha

che  $X$  è una superchiave.

Come è evidente dalla definizione, la forma normale di Boyce-Codd è più restrittiva della terza forma normale: ogni schema di relazione in forma normale di Boyce-Codd è in terza forma normale, ma non è vero il viceversa. Infatti, consideriamo il seguente schema di relazione,

$$\text{Orario\_lezioni} = \{Aula, \text{Giorno}, \text{Ora}, \text{Corso}\}$$

su cui sono definite le seguenti dipendenze funzionali

$Aula \rightarrow \text{Giorno}, \text{Ora} \rightarrow \text{Corso}$  (in una certa aula in un certo giorno ad una certa ora viene tenuto un solo corso)

$\text{Corso} \rightarrow \text{Aula}$  (un corso viene tenuto sempre nella stessa aula).

Poiché la chiave di  $\text{Orario\_lezioni}$  è  $\{Aula \text{ Giorno Ora}\}$ , nella dipendenza funzionale  $\text{Corso} \rightarrow \text{Aula}$  la parte sinistra non è una superchiave e, quindi, lo schema di relazione  $\text{Orario\_lezioni}$  non è in forma normale di Boyce-Codd pur essendo in terza forma normale. In uno schema che non è in forma normale di Boyce-Codd si presenta ancora il problema della ridondanza nella rappresentazione dei dati (ad esempio in  $\text{Orario\_lezioni}$  il fatto che un corso si tiene in una certa aula è ripetuto per ogni ora in cui il corso viene tenuto). Sorge quindi il problema di capire se per la forma normale di Boyce-Codd valgono risultati analoghi a quelli visti nei paragrafi precedenti per la terza forma normale, vale a dire se è valida la seguente affermazione:

“Dato uno schema di relazione  $R$  e un insieme di dipendenze funzionali  $F$  su  $R$  esiste sempre una decomposizione  $\rho = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$  di  $R$  tale che:

- $\forall i \in \{1, \dots, n\}, R_i$  è in forma normale di Boyce-Codd
- $\rho$  preserva  $F$
- ha un join senza perdita”

La risposta a questa domanda è negativa. Infatti, è evidente che qualsiasi decomposizione di  $\text{Orario\_lezioni}$  che non contenga lo schema di relazione  $\{Aula \text{ Giorno Ora Corso}\}$ , non permette di rappresentare la dipendenza funzionale  $\{Aula \text{ Giorno Ora}\} \rightarrow \text{Corso}$ . Tuttavia è possibile dimostrare che dato uno schema di relazione  $R$  e un insieme di dipendenze funzionali  $F$  su  $R$  esiste sempre una decomposizione  $\rho = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$  di  $R$  tale che:

- $\forall i \in \{1, \dots, k\}, R_i$  è in forma normale di Boyce-Codd
- $\rho$  ha un join senza perdita

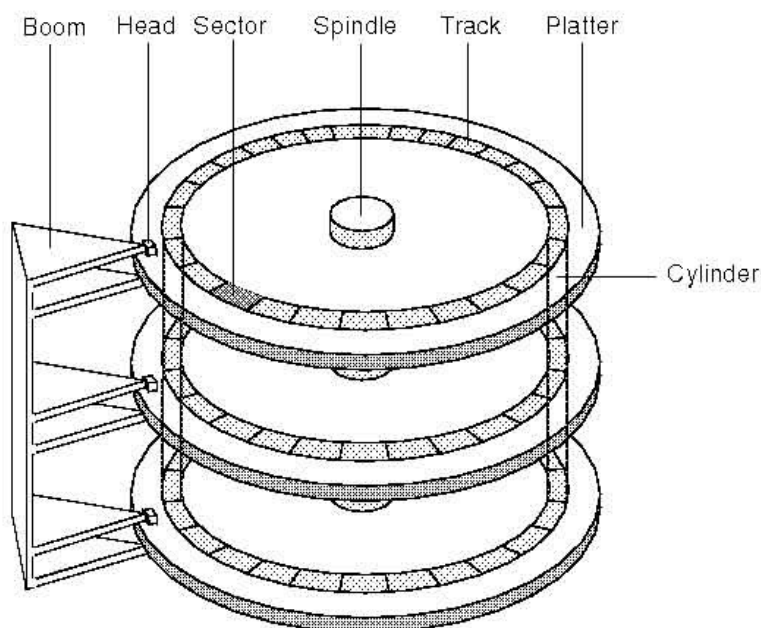
e che esiste un algoritmo che produce una tale decomposizione in tempo polinomiale. Tale algoritmo fornirebbe nel caso dell'esempio esaminato la decomposizione:  $\{R_1 = \text{Aula Corso}, R_2 = \text{Giorno Ora Corso}\}$ .

## 5 Organizzazione fisica della base di dati

Un requisito fondamentale di un database è l'efficienza, cioè la capacità di rispondere alle richieste dell'utente il più rapidamente possibile: questo obiettivo può essere raggiunto grazie ad una particolare organizzazione fisica dei dati. In questo capitolo verrà mostrato come il database è organizzato a livello fisico, ovvero come questo viene salvato sull'unità di memoria di massa (disco rigido); nel prossimo paragrafo sarà quindi necessario illustrare brevemente come il sistema operativo gestisce la lettura e scrittura di tali dispositivi.

### 5.1 La memoria secondaria

Il computer necessita di una *memoria secondaria* dove poter salvare in modo permanente i dati presenti nella RAM. Questa memoria secondaria è tipicamente un disco rigido, la cui struttura meccanica è illustrata nella seguente figura.



L'unità di memoria è composta da più **piatti**, di solito tre, ognuno dei quali è suddiviso in **tracce**: esse sono come cerchi concentrici che ripartizionano tutta la superficie del piatto. Al momento della *formattazione*, durante la quale viene data una struttura logica per poter memorizzare i dati, impostando la struttura del filesystem che vi verrà creato sopra, vengono creati i **settori** (o **blocchi** o pagine) di dimensione fissa, che varia da  $2^9$  a  $2^{12}$  bytes.

Quando si parla di *accesso* al disco s'intende il trasferimento di un blocco da memoria secondaria a memoria principale, quindi **lettura** di un blocco, o da memoria principale a memoria secondaria, ossia **scrittura** di un blocco. Il tempo necessario per un accesso è dato dalla somma di:

- *tempo di posizionamento* della testina sulla traccia in cui si trova il blocco;
- *ritardo della rotazione*, necessaria per posizionare la testina all'inizio del blocco;
- *tempo di trasferimento* dei dati contenuti nel blocco.

Il tempo richiesto per un accesso a memoria secondaria è dell'ordine dei millisecondi, quindi notevolmente superiore a quello di elaborazione dei dati in memoria principale. Per questo motivo il **costo** di un'operazione sulla base di dati è definito in termini di *numero di accessi*.

### 5.2 Memorizzare le relazioni

#### 5.2.1 Record

Ad ogni relazione corrisponde un file di record che hanno tutti lo stesso tipo (numero e tipo dei campi): ad ogni attributo corrisponde un *campo*, che sono di tipo elementare (interi, reali,

stringhe di caratteri), ed ad ogni tupla corrisponde un record. In un record, oltre ai campi che corrispondono agli attributi, ci possono essere altri campi che contengono informazioni sul record stesso o puntatori ad altri record.

Un **puntatore** ad un record è essenzialmente un dato che permette di accedere rapidamente a quel record. Pertanto un puntatore può essere l'indirizzo dell'inizio (primo byte) del record su disco. Tale scelta però può non essere adeguata se si vuole avere una certa libertà di muovere il record; in questo caso è preferibile assumere come puntatore una coppia  $(b, k)$  in cui  $b$  è l'indirizzo del blocco che contiene il record e  $k$  è il valore di uno o più campi che servono come chiave nel file a cui il record appartiene. In tal modo è possibile spostare il record all'interno del blocco. All'inizio di un record alcuni byte possono essere utilizzati per:

- specificare il tipo del record, necessario quando in uno stesso blocco sono memorizzati record di tipo diverso;
- specificare la lunghezza del record, se esso ha campi a lunghezza variabile;
- contenere un bit di “cancellazione”, utile nel caso che il record sia puntato. In tal caso lo spazio occupato dal record cancellato non può essere riutilizzato
- contenere un bit di “usato/non usato” per specificare se in quello spazio c'è un record oppure è vuoto (contiene valori casuali).

Per poter accedere ad un campo di un record contenente un dato è necessario sapere qual è il primo byte del campo nel record. Se tutti i campi del record hanno lunghezza fissa, basta ordinarli; infatti, una volta ordinati, l'inizio di ciascun campo sarà sempre ad un numero fisso di byte dall'inizio del record: il numero di byte del record che precedono il campo è detto **offset** del campo. Se il record contiene campi a lunghezza variabile allora l'offset di un campo può variare da un record all'altro. In tal caso si possono usare due strategie:

- all'inizio di ogni campo c'è un contatore che specifica la lunghezza del campo in numero di byte
- all'inizio del record ci sono gli offset di ciascun campo a lunghezza variabile (tutti i campi a lunghezza fissa precedono quelli a lunghezza variabile).

Nel primo caso per individuare la posizione di un campo bisogna esaminare i campi precedenti per vedere quanto sono lunghi; quindi la prima strategia è meno efficiente della seconda.

### 5.2.2 Blocchi

I record sono memorizzati nei blocchi. Analogamente a quanto accade per un record, anche in un blocco può essere riservato spazio per memorizzare informazioni sul blocco stesso (record cancellati, record non usati, puntatori a record se il blocco contiene record a lunghezza variabile), dello spazio “spreco” (per far in modo che gli offset di campi interi siano multipli di 4) o per collegarlo ad altri blocchi in una lista. Se un blocco contiene solo record di lunghezza fissa allora il blocco può essere suddiviso in aree (sottoblocchi) di lunghezza fissa ciascuna delle quali può contenere un record. Quando bisogna inserire un record nel blocco si cerca un'area non usata; se il bit “usato/non usato” è in ciascun record ciò può richiedere la scansione di tutto il blocco; per evitare ciò si possono raccogliere tutti i bit “usato/non usato” in uno o più byte all'inizio del blocco. In un blocco ci possono essere informazioni sul blocco stesso o puntatori ad altri blocchi. Se un blocco contiene solo record di lunghezza fissa è suddiviso in aree (sottoblocchi) di lunghezza fissa ciascuna delle quali può contenere un record; i bit “usato/non usato” sono raccolti in uno o più byte all'inizio del blocco.

Se un blocco contiene record di lunghezza variabile per accedere ai record si possono usare due strategie:

- si suppone che il primo record abbia inizio dal primo byte del blocco; si pone in ogni record un campo che ne specifica la lunghezza in termini di numero di byte. Per calcolare il byte di inizio di un record si somma all'offset del record precedente la sua lunghezza (ed eventualmente si prende il successivo multiplo di 4);
- si pone all'inizio del blocco una **directory** contenente i puntatori ai record nel blocco (in questo caso un puntatore è l'offset del record nel blocco). Poiché il numero di record che possono entrare in un blocco è in questo caso variabile, la directory può essere realizzata in uno dei modi seguenti:

- la directory è preceduta da un campo che specifica quanti sono i puntatori nella directory
- la directory ha dimensione fissa (può contenere un numero fisso di puntatori) e contiene il valore 0 (che non può essere un offset) negli spazi che non contengono puntatori (se il numero di records nel blocco è inferiore al numero di puntatori che possono essere memorizzati nella directory)
- la directory è una lista di puntatori (la fine della lista è specificata da uno 0).

L'uso di una directory all'inizio del blocco permette di spostare i record “puntati”; infatti, basta far in modo che il puntatore invece di puntare al record punti al campo della directory che contiene l'offset. Inoltre permette di spostare i bit di cancellazione dai record alla directory e quindi di riutilizzare lo spazio occupato da un record a lunghezza variabile quando questo viene cancellato.

## 5.3 File

In questo paragrafo esamineremo diversi tipi di organizzazione fisica di file che consentono la ricerca di record in base al valore di uno o più campi *chiave*. Il termine “chiave” non va inteso nel senso in cui viene usato nella teoria relazionale, in quanto un valore della chiave non necessariamente identifica univocamente un record nel file. Le operazioni elementari su questi tipi di file sono dunque:

- la ricerca di uno o più record con un dato valore per la chiave;
- l'inserimento di un record con un dato valore per la chiave;
- la cancellazione di uno o più record con un dato valore per la chiave;
- la modifica di uno o più record con un dato valore per la chiave.

### 5.3.1 Heap

In questo tipo di organizzazione i record sono memorizzati nei blocchi senza alcun ordine: un record viene sempre inserito come ultimo record del file. L'accesso al file avviene attraverso una directory che contiene i puntatori ai blocchi; se le dimensioni lo consentono, tale directory può essere mantenuta in memoria principale durante l'utilizzo del file; altrimenti saranno necessari ulteriori accessi per portare in memoria principale i necessari blocchi della directory. Denotiamo con  $b$  il numero di blocchi del file ed esprimiamo in termini di  $b$  il costo delle varie operazioni, nella ipotesi che la directory si trovi in memoria principale. Se la chiave di **ricerca** non identifica univocamente un record nel file, poiché non esiste alcun particolare ordinamento dei record, per effettuare una ricerca occorre scandire tutto il file sequenzialmente e, quindi, il costo di una ricerca è dato da  $b$ . L'**inserimento** di un record richiede la lettura dell'ultimo blocco del file; se in tale blocco c'è spazio sufficiente per memorizzare il nuovo record, il record viene inserito, altrimenti viene chiesto un nuovo blocco al file system; dopo l'inserimento del record nel blocco, il blocco deve essere scritto su memoria secondaria. Quindi due accessi (uno per lettura e uno per scrittura) sono sufficienti per l'inserimento di un record. La **cancellazione** di tutti i record con un dato valore per la chiave richiede  $b$  accessi in lettura per la ricerca di tutti i record che hanno quel valore per la chiave e  $c$  accessi in scrittura, dove  $c$  è il numero di blocchi contenenti record con quel valore per la chiave; ulteriori accessi possono essere necessari se si vuole recuperare lo spazio occupato dai record cancellati trasferendovi record che si trovano nell'ultimo blocco. La **modifica** di tutti i record con un dato valore per la chiave richiede  $b$  accessi in lettura per la ricerca di tutti i record che hanno quel valore per la chiave e  $c$  accessi in scrittura, dove  $c$  è il numero di blocchi contenenti record con quel valore per la chiave.

Se la chiave di ricerca identifica univocamente un record nel file, la ricerca di un record con un dato valore per la chiave richiede in media  $[b/2]$  accessi. Per ottenere il costo medio occorre sommare i costi per accedere ai singoli record e quindi dividere tale somma per il numero dei record. Infatti, per la ricerca di un record che si trova nell' $i$ -esimo blocco sono necessari  $i$  accessi (in lettura); pertanto se denotiamo con  $n$  il numero di record nel file e con  $B$  il numero di record che possono essere memorizzati in un blocco ( $[n/B] = b$ ), il numero medio di accessi necessari per la ricerca di un record è data da

$$\frac{B(1 + 2 + \dots + b)}{n} = \frac{Bb(b+1)}{2n} \simeq [b/2]$$

(si osservi che  $b/2 \leq \lfloor b/2 \rfloor \leq (b+1)/2$ ).

L'inserimento di un record richiede la lettura dell'ultimo blocco del file; se in tale blocco c'è spazio sufficiente per memorizzare il nuovo record, il record viene inserito, altrimenti viene chiesto un nuovo blocco al file system; dopo l'inserimento del record nel blocco, il blocco deve essere scritto su memoria secondaria. Quindi 2 accessi (uno per lettura e uno per scrittura) sono sufficienti per l'inserimento di un record. La cancellazione di un record con un dato valore per la chiave richiede  $\lfloor b/2 \rfloor$  accessi in lettura per la ricerca del record che ha quel valore per la chiave e 1 accesso in scrittura. Se si vuole recuperare lo spazio occupato dal record cancellato e i record hanno lunghezza fissa si può trasferire un record che si trova nell'ultimo blocco (restituendo al sistema il blocco se non vi sono altri record, in modo di ridurre i costi delle successive operazioni sul file) al posto di quello cancellato. Se si vuole recuperare lo spazio occupato dal record cancellato e i record hanno lunghezza variabile, si possono far slittare i record nel blocco (aggiornando i puntatori ai record nell'intestazione del blocco) e, se in tal modo si è ottenuto uno spazio sufficiente per trasferirvi un record che si trova nell'ultimo blocco, procedere come nel caso precedente. La modifica di un record con un dato valore per la chiave richiede  $\lfloor b/2 \rfloor$  accessi in lettura per la ricerca del record che ha quel valore per la chiave e 1 accesso in scrittura.

| Operazione    | Costo                         |
|---------------|-------------------------------|
| Inserimento   | 2 accessi                     |
| Ricerca       | $\lfloor b/2 \rfloor$ accessi |
| Modifica      | costo ricerca + 1 accesso     |
| Cancellazione | costo ricerca + 3 accessi     |

### 5.3.2 File hash

In questo tipo di organizzazione i record sono ripartiti in **bucket** (secchi) in base al valore della chiave. Se  $B$  è il numero dei bucket, questi vengono numerati da 0 a  $B-1$ . Dato un valore  $v$  per la chiave il numero del bucket in cui deve trovarsi un record con chiave  $v$  è calcolato mediante una funzione che prende il nome di *funzione hash*. Ciascun bucket è costituito da uno o più blocchi (come vedremo, affinché la gestione del file sia efficiente è opportuno che il numero dei blocchi in un bucket sia piccolo) ed è organizzato come un heap. L'accesso ai bucket avviene attraverso la bucket directory che contiene  $B$  elementi (normalmente  $B$  è sufficientemente piccolo da consentire di mantenere la bucket directory in memoria principale durante l'utilizzo del file); l' $i$ -esimo elemento contiene l'indirizzo (bucket header) del primo blocco dell' $i$ -esimo bucket. Tutti i blocchi di un bucket sono collegati tra loro mediante puntatori in una lista. Una funzione hash per essere "buona" deve ripartire uniformemente i record nei bucket, cioè al variare del valore della chiave deve assumere con la "stessa" probabilità uno dei valori compresi tra 0 e  $B-1$ . Esiste un'ampia letteratura sulle funzioni hash. In genere, una funzione hash trasforma la chiave in un intero, divide questo intero per  $B$ , e fornisce il resto della divisione come numero di bucket in cui deve trovarsi il record con quel valore della chiave. Una strategia per definire una funzione hash è, ad esempio, la seguente:

1. trattare il valore  $v$  della chiave come una sequenza di bit
2. suddividere tale sequenza in gruppi di bit di uguale lunghezza
3. sommare tali gruppi trattandoli come interi
4. dividere il risultato per il numero dei bucket (cioè per  $B$ )
5. prendere il resto della divisione come numero del bucket in cui deve trovarsi un record con chiave  $v$ .

Una qualsiasi operazione (ricerca, inserimento, cancellazione, modifica) su un file hash richiede la valutazione di  $h(v)$  (dove  $v$  è un valore per la chiave e  $h$  è la funzione hash) per individuare il bucket in cui deve trovarsi il record con chiave  $v$ ; successivamente, l'operazione (ricerca, inserimento, cancellazione, modifica) viene effettuata sul bucket che, come già detto, è organizzato come un heap. Se la funzione hash distribuisce uniformemente i record nei bucket, ogni bucket è costituito da un numero di blocchi che è  $1/B$ -esimo del numero di blocchi di cui è costituito l'intero file. Pertanto il costo richiesto per un'operazione è approssimativamente  $1/B$ -esimo del costo che sarebbe richiesto per fare la stessa operazione se il file fosse organizzato come un heap. Si osservi

che, poiché l'inserimento di un record viene effettuato sull'ultimo blocco del bucket, è opportuno che la bucket directory contenga anche, per ogni bucket, un puntatore all'ultimo record del bucket. Da quanto detto appare evidente che quanti più sono i bucket tanto più basso è il costo di ogni operazione. D'altra parte limitazioni al numero dei bucket derivano dalle seguenti considerazioni:

1. ogni bucket deve avere almeno un blocco
2. se le dimensioni della bucket directory sono tali che non può essere mantenuta in memoria principale durante l'utilizzo del file, ulteriori accessi sono necessari per leggere i blocchi della bucket directory.

### 5.3.3 File con indice (indice sparso)

Nella presentazione di questo tipo di organizzazione, spesso chiamato *ISAM* (Indexed Sequential Access Method), assumeremo che il valore della chiave identifica univocamente un record del file. Inoltre, inizialmente, assumeremo che i record non siano puntati.

Inizialmente il file viene ordinato in base al valore (crescente) della chiave e viene memorizzato lasciando in ogni blocco una certa percentuale (ad esempio il 20%) di spazio non utilizzato per l'inserimento di nuovi record; quindi viene creato un nuovo file, il **file indice** che contiene un record per ogni blocco del file principale, e infine la directory del file indice che generalmente ha dimensioni tali da poter essere mantenuta in memoria principale durante l'utilizzo del file.

Un file indice è un file i cui record consistono di coppie del tipo  $(v, b)$ , in cui  $v$  è un valore della chiave e  $b$  è l'indirizzo di un blocco del file principale: il valore della chiave di ogni record nel blocco di indirizzo  $b$  è maggiore o uguale a  $v$  e il valore della chiave di ogni record che si trova in un blocco che precede quello di indirizzo  $b$  è minore di  $v$ .

Il file indice viene creato nel modo seguente. Per ogni blocco del file principale viene creata una coppia costituita dal valore della chiave del primo record nel blocco e dall'indirizzo del blocco; l'unica eccezione è rappresentata dal primo blocco per il quale viene preso, anziché il valore della chiave del primo record, un valore (denotato con  $-\infty$ ) che è più piccolo di qualsiasi valore che può essere assunto dalla chiave.

L'accesso al file principale avviene attraverso il file indice nel modo seguente. Dato un valore  $v$  della chiave, si cerca nel file indice un valore  $v'$  della chiave che *ricopre*  $v$ , cioè una coppia  $(v', b')$  aventi le seguenti proprietà:

- $v' \leq v$
- o  $(v', b')$  è l'ultimo record del file indice oppure, se  $(v'', b'')$  è il successivo record nel file indice,  $v < v''$ .

Il blocco che ha per indirizzo  $b'$  è allora il blocco in cui deve trovarsi il record con chiave  $v$ . Pertanto la ricerca di un record con chiave  $v$  richiede un accesso in più oltre quelli necessari per la ricerca nel file indice di un valore della chiave che ricopre  $v$ . La chiave del file principale è una chiave anche per il file indice; pertanto i record del file indice possono a loro volta essere ordinati in base al valore della chiave. Il fatto che il file indice sia ordinato in base al valore della chiave consente di usare metodi più efficienti della scansione completa per ricercare sul file indice un valore della chiave che ricopra un dato valore  $v$ . Il più semplice è costituito dalla **ricerca binaria**.

Siano  $B_1, B_2, \dots, B_m$  i blocchi del file indice; si comincia con il considerare il blocco  $B_{\lceil m/2 \rceil}$  e si confronta il valore  $w$  della chiave nel primo record di tale blocco con  $v$ ; se  $v = w$  la ricerca ha termine; se  $v < w$  si ripete il procedimento come se il file indice fosse costituito dai blocchi  $B_1, B_2, \dots, B_{\lceil m/2 \rceil - 1}$ ; se invece  $v > w$  e nel blocco esiste un valore della chiave che ricopre  $v$  la ricerca ha termine, altrimenti si ripete il procedimento come se il file indice fosse costituito dai blocchi  $B_{\lceil m/2 \rceil}, \dots, B_m$ . Il procedimento viene iterato fino a quando ci si riduce a considerare un unico blocco; a questo punto si scandisce il blocco per trovare un valore della chiave che ricopre  $v$ . Poiché ad ogni passo il numero di blocchi su cui deve essere effettuata la ricerca viene dimezzato, dopo al più  $\lceil \log_2(m) \rceil$  passi la ricerca è ristretta ad un unico blocco.

Un altro metodo è costituito dalla **ricerca per interpolazione**. Questo tipo di ricerca è basato sulla conoscenza della distribuzione dei valori della chiave. In altre parole per poter effettuare questa ricerca si deve disporre di una funzione  $f$  che dati tre valori  $v_1, v_2, v_3$  della chiave fornisce un valore che è la frazione dell'intervallo di valori della chiave compresi tra  $v_2$  e  $v_3$  in cui deve trovarsi  $v_1$ . In tal caso, se  $B_1, B_2, \dots, B_m$  sono i blocchi del file indice (o di una sua parte) e  $v_2$  è il valore della chiave nel primo record di  $B_1$  e  $v_3$  è il valore della chiave nell'ultimo record di  $B_m$  allora

$v_1$  deve essere confrontato con il valore della chiave nel primo record di  $B_i$ , dove  $i = mf(v_1, v_2, v_3)$ ; analogamente a quanto accade nella ricerca binaria, se  $v_1$  è minore di tale valore allora il procedimento deve essere ripetuto sui blocchi  $B_1, B_2, \dots, B_{i-1}$ , mentre se è maggiore il procedimento deve essere ripetuto sui blocchi  $B_i, B_{i+1}, \dots, B_m$ , finché la ricerca si restringe ad un unico blocco. È stato mostrato che la **ricerca** per interpolazione richiede circa  $1 + \log_2(\log_2(m))$  accessi.

Per **inserire** un nuovo record nel file principale occorre innanzitutto ricercare il blocco  $B_i$  del file principale in cui il record deve trovarsi in base al valore della chiave. Se in  $B_i$  c'è spazio sufficiente, il record viene inserito in modo da rispettare l'ordinamento (quindi spostando eventualmente record con chiave maggiore). Altrimenti si possono seguire diverse strategie. Ad esempio si può verificare se c'è spazio sufficiente nel blocco successivo  $B_{i+1}$ ; in tal caso, o il nuovo record o un record che era precedentemente in  $B_i$  diventa il primo record di  $B_{i+1}$  e, pertanto, il record del file indice che contiene il puntatore a  $B_{i+1}$  deve essere modificato. Se  $B_{i+1}$  non esiste ( $B_i$  è l'ultimo blocco del file) oppure è pieno si può prendere in considerazione il blocco  $B_{i-1}$  ed eventualmente procedere in modo simile ripartendo i record di tra  $B_{i-1}$  e  $B_i$ ; anche in questo caso sarà necessario apportare una modifica al file indice. Se anche  $B_{i-1}$  è pieno oppure se  $B_{i-1}$  non esiste ( $B_i$  è il primo blocco del file), è necessario richiedere al sistema un nuovo blocco che seguirà  $B_i$  e ripartire i record di  $B_i$  tra  $B_i$  e il nuovo blocco; quindi occorre inserire nel file indice il record relativo al nuovo blocco. In ogni caso occorrerà modificare i bit di "usato/non usato" nelle intestazioni dei blocchi coinvolti.

Per **cancellare** un record dal file principale occorre innanzitutto ricercare il record, quindi cancellarlo, spostare i record nel blocco in modo da recuperare lo spazio lasciato libero e modificare i bit di "usato/non usato" nell'intestazione del blocco. Se il record cancellato è il primo record del blocco occorre modificare nel file indice il record relativo al blocco. Se il record cancellato era l'unico record del blocco, il blocco viene restituito al sistema e nel file indice occorre cancellare il record relativo al blocco (anche in questo caso se il record cancellato è l'unico record del blocco, il blocco viene restituito al sistema). In ogni caso occorrerà modificare i bit di "usato/non usato" nelle intestazioni dei blocchi coinvolti.

Per **modificare** un record del file principale occorre innanzitutto ricercare il record; quindi, se la modifica non coinvolge campi della chiave, il record viene modificato e il blocco riscritto. Altrimenti la modifica equivale ad una cancellazione seguita da un inserimento.

Consideriamo ora il caso in cui il file principale contiene record puntati. In tal caso la fase di inizializzazione non differisce dal caso precedente salvo che è preferibile lasciare più spazio libero nei blocchi per successivi inserimenti. Infatti, poiché i record sono puntati, non possono essere spostati per mantenere l'ordinamento quando si inseriscono nuovi record; pertanto, se non c'è spazio sufficiente in un blocco  $B$  per l'inserimento di un nuovo record, occorre richiedere al sistema un nuovo blocco che viene collegato a  $B$  tramite un puntatore; in tal modo ogni record del file indice punta al primo blocco di un bucket e il file indice non viene mai modificato (a meno che le dimensioni dei bucket non siano diventate tali da richiedere una riorganizzazione dell'intero file). La ricerca di un record con chiave  $v$  richiede la ricerca sul file indice di un valore della chiave che ricopre  $v$  e quindi la scansione del bucket corrispondente. La cancellazione di un record richiede la ricerca del record e quindi la modifica dei bit di cancellazione nell'intestazione del blocco. La modifica di un record richiede la ricerca del record; quindi, se la modifica non coinvolge campi della chiave, il record viene modificato e il blocco riscritto. Altrimenti la modifica equivale ad una cancellazione seguita da un inserimento. In quest'ultimo caso non è sufficiente modificare il bit di cancellazione del record cancellato, ma è necessario inserire in esso un puntatore al nuovo record inserito in modo che questo sia raggiungibile da qualsiasi record che contenga un puntatore al record cancellato. Poiché non è possibile mantenere il file principale ordinato, se si vuole avere la possibilità di esaminare il file seguendo l'ordinamento della chiave occorre inserire in ogni record un puntatore al record successivo nell'ordinamento.

### 5.3.4 B-tree

Questa organizzazione è una generalizzazione del file con indice. Infatti in un file con indice, attraverso una ricerca sul file indice, viene individuato il blocco del file principale in cui deve trovarsi il record con un dato valore per la chiave. In un B-tree si accede al file attraverso una *gerarchia* di indici. L'indice a livello più alto nella gerarchia è costituito da un unico blocco e quindi può risiedere in memoria principale durante l'utilizzo del file. Durante la ricerca di un record con un dato valore per la chiave si accede agli indici a partire da quello a livello più alto; a mano a mano che si scende nella gerarchia di indici si restringe la porzione (insieme di blocchi) del file principale in cui deve trovarsi il record desiderato, fino a che, nell'ultimo livello (il più basso nella



gerarchia) tale porzione è ristretta ad un unico blocco. I blocchi degli indici e del file principale devono essere sempre pieni almeno per metà.

Ogni blocco di un file indice è costituito di record contenenti una coppia  $(v, b)$  dove  $v$  è il valore della chiave del primo record della porzione del file principale che è accessibile attraverso il puntatore  $b$ ;  $b$  può essere un puntatore ad un blocco del file indice a livello immediatamente più basso oppure (nei record del file indice nel più basso livello della gerarchia) ad un blocco del file principale.

Per **ricercare** il record del file principale con un dato valore  $v$  per la chiave si procede nel modo seguente. Si parte dall'indice a livello più alto (che è costituito da un unico blocco) e ad ogni passo si esamina un unico blocco. Se il blocco esaminato è un blocco del file principale, tale blocco è quello in cui deve trovarsi il record desiderato; se, invece, è un blocco di un file indice, si cerca su tale blocco un valore della chiave che ricopre  $v$  e si segue il puntatore associato (che sarà o un puntatore ad un blocco dell'indice al livello immediatamente inferiore o un blocco del file principale). Per valutare il costo di un'operazione di ricerca, assumiamo, per comodità, che il numero di record del file principale che possono essere memorizzati in un blocco sia un numero dispari  $2e - 1$ , che il numero di record di un file indice che possono essere memorizzati in un blocco sia un numero dispari  $2d - 1$  (cioè, poiché ogni blocco è pieno almeno per metà, ogni blocco del file principale contiene almeno  $e$  record e ogni blocco di un indice contiene almeno  $d$  record). Con tali assunzioni il file principale ha al più  $n/e$  blocchi, dove  $n$  è il numero di record del file principale. Poiché ad ogni blocco del file principale corrisponde un record nel file indice al livello 1 (il più basso nella gerarchia) il numero di record del file indice a livello più basso sarà  $n/e$  e, per l'ipotesi fatta (ogni blocco è pieno almeno per metà), questi  $n/e$  record saranno memorizzati in al più  $n/(ed)$  blocchi. Ripetendo tale ragionamento, si ottiene che l'indice a livello  $i$  ha  $n/(ed^{i-1})$  record memorizzati in al più  $n/(ed^i)$  blocchi. Sia  $k$  il livello più alto della gerarchia; l'indice a livello  $k$  avrà  $n/(ed^{k-1})$  record memorizzati in al più  $n/(ed^k)$  blocchi; poiché tale indice è costituito da un unico blocco  $n/(ed^k) \geq 1$ . Poiché per ricercare un record del file principale si deve accedere ad un blocco per ogni livello di indice più al blocco del file principale che contiene il record desiderato, il numero di accessi necessari per un operazione di ricerca è  $k + 1 \leq \log_d(n/e) + 1$ .

Il numero di accessi necessari per effettuare l'inserimento del record con valore  $v$  della chiave è dato dal numero di accessi necessari per ricercare il blocco in cui deve essere inserito il record con chiave  $v$  più uno per riscrivere il blocco, se nel blocco c'è spazio sufficiente per inserire il record. Se, viceversa, nel blocco non c'è spazio sufficiente per inserire il nuovo record, l'operazione di inserimento può richiedere un numero ulteriore di accessi a causa della necessità di mantenere i blocchi pieni al meno per metà, come mostra il seguente esempio. Si osservi che, per salvare spazio, il primo record in ogni blocco di un file indice è costituito da un puntatore anziché da una coppia 7chiave-puntatore; tale puntatore permette di accedere alla parte del file principale contenente record con valore della chiave minore del valore presente nel secondo record del blocco del file indice. Supponiamo che in un certo istante la configurazione del B-tree sia la seguente:

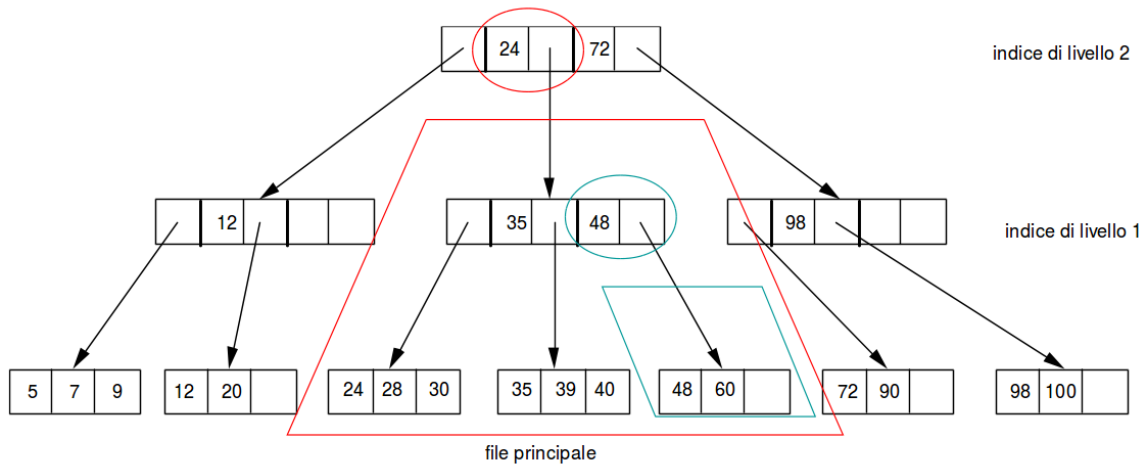


Figura 1

e che si voglia inserire il record con valore della chiave 25. Poiché il blocco (il terzo da sinistra) del file principale in cui dovrebbe essere inserito tale record è pieno occorre richiedere al sistema un nuovo blocco e ripartire i record del terzo blocco e il nuovo record fra il terzo blocco e il nuovo blocco in modo da soddisfare il vincolo che ogni blocco deve essere pieno almeno per metà. Inoltre,

poiché il blocco del file indice di primo livello in cui dovrebbe essere inserito il puntatore al nuovo blocco del file principale è pieno, occorre procedere per il file indice di livello 1 allo stesso modo in cui si è proceduto per il file principale, richiedendo un nuovo blocco al sistema. Ma allora un analogo discorso deve essere fatto per l'indice di livello 2. Pertanto dopo l'inserimento del record con chiave 25 il B-tree si presenterà come segue:

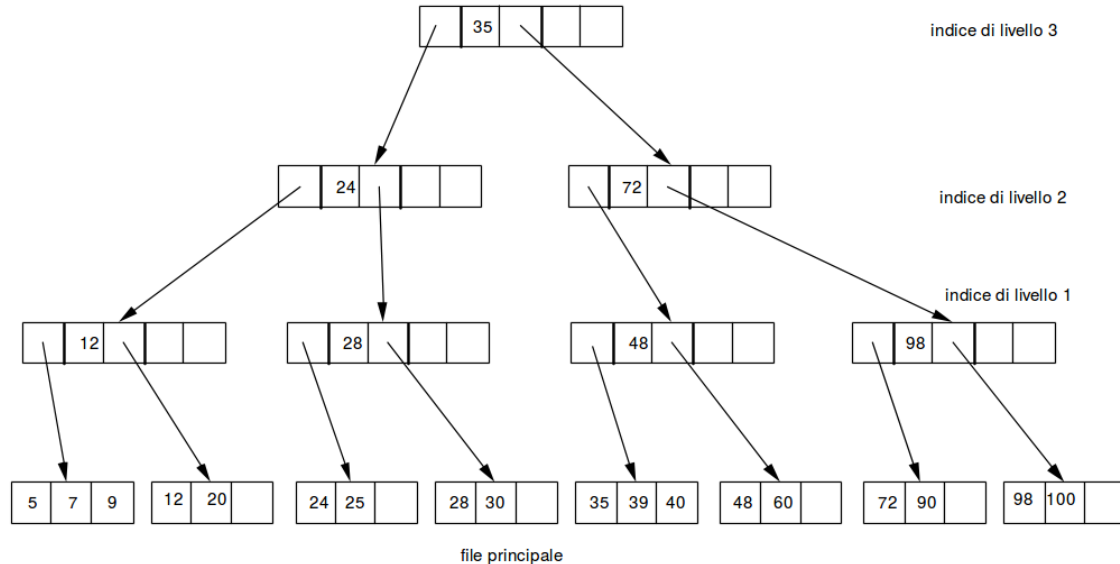


Figura 2

Come si vede il numero dei livelli degli indici è aumentato di 1, il che comporta un aumento dei costi delle successive operazioni sul file principale. Il numero di accessi necessari per effettuare la cancellazione del record con valore  $v$  della chiave è dato dal numero di accessi necessari per ricercare il blocco in cui si trova il record con chiave  $v$  più uno per riscrivere il blocco, se il blocco rimane pieno almeno per metà successivamente alla cancellazione. Se, viceversa, il blocco non rimane pieno almeno per metà successivamente alla cancellazione, l'operazione può richiedere un numero ulteriore di accessi come mostra il seguente esempio.

Supponiamo che in un certo istante la configurazione del B-tree quella mostrata in FIGURA 2 e che si voglia cancellare il record con chiave 28. Poiché, a seguito della cancellazione di tale record nel blocco rimane un solo record (e quindi non è soddisfatto il vincolo che ogni record debba essere pieno al meno per metà), e tale record può trovare posto nel blocco precedente (il terzo da sinistra), il blocco può essere restituito al sistema. Inoltre, poiché nel secondo blocco dell'indice di livello 1 rimane un solo puntatore possiamo procedere per l'indice di livello 1 analogamente a come si è proceduto per il file principale. Ma allora un analogo discorso deve essere fatto per l'indice di livello 2. Pertanto dopo la cancellazione del record con chiave 28 il B-tree si presenterà come segue:

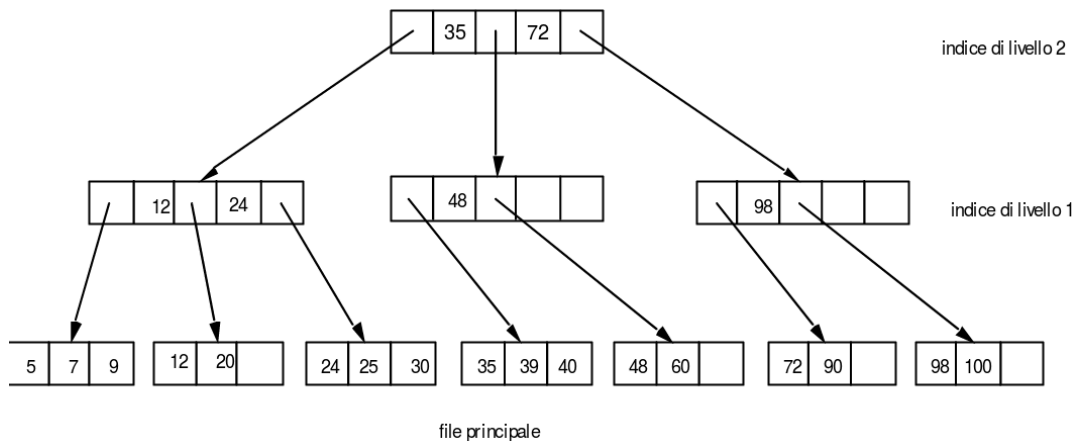


Figura 3

Come si vede il numero dei livelli degli indici è diminuito di 1, il che comporta una diminuzione

dei costi delle successive operazioni sul file principale. Il numero di accessi necessari per effettuare la modifica del record con valore  $v$  della chiave è dato dal numero di accessi necessari per ricercare il blocco in cui si trova il record con chiave  $v$  più uno per riscrivere il blocco, se la modifica non coinvolge campi della chiave, altrimenti è dato dalla somma degli accessi necessari per la cancellazione del record con chiave  $v$  e quelli necessari per l'inserimento del record con il nuovo valore della chiave.

### 5.3.5 File con indice denso

Nelle organizzazioni viste nei paragrafi precedenti, escluso l'heap, la maggior parte dei blocchi del file principale non sono riempiti completamente; ciò comporta spreco di memoria e aumento dei tempi di ricerca. D'altra parte, in un heap i blocchi sono completamente pieni, ma non si ha un metodo efficiente per la ricerca di un record con un dato valore per la chiave. Un tipo di organizzazione che cerca di cogliere gli aspetti positivi dell'uno e degli altri tipi di organizzazione è il **file con indice denso**. Mentre nel caso di un file con indice sparso visto precedentemente, ogni record del file indice contiene un puntatore per ogni blocco del file principale, che è ordinato in base al valore della chiave, nel caso di un file con indice denso ogni record del file indice contiene un puntatore ad un record del file principale, che non ha nessun tipo di ordinamento.

Un indice denso è un file che può avere una qualsiasi delle organizzazioni viste precedentemente. Per ricercare, cancellare o modificare un record del file principale, dato un valore per la chiave, occorre ricercare il record con quel valore per la chiave nell'indice denso, fare un accesso per leggere il blocco del file principale che contiene il record desiderato e, nel caso di modifica o cancellazione, un accesso per riscrivere tale blocco. Nel caso di una cancellazione, occorre anche cancellare nell'indice denso il record che ha il valore dato per la chiave. Per inserire un record si procede nel modo seguente: si inserisce il record alla fine del file principale e quindi si inserisce nell'indice denso il corrispondente record.

Apparentemente questo tipo di organizzazione sembra richiedere per ogni operazione qualche accesso in più rispetto a quello che richiederebbe la stessa operazione se il file principale avesse la stessa organizzazione scelta per l'indice denso. In realtà occorre tener presente che i costi di una operazione di ricerca (e quindi di ogni operazione) dipendono dalle dimensioni del file (numero di blocchi necessari per memorizzarlo) e che generalmente la dimensione dei record del file indice è nettamente più piccola di quella dei record del file principale. Pertanto ogni operazione sul file indice ha un costo inferiore di quello che avrebbe la stessa operazione se il file principale avesse la stessa organizzazione scelta per l'indice denso.

L'uso di un indice denso permette anche di eliminare i puntatori a record del file principale: basta sostituire ogni puntatore ad un record del file principale con il puntatore al corrispondente record dell'indice denso: In tal modo per accedere al record occorre un accesso in più; d'altra parte se si vuole muovere un record nel file principale è sufficiente modificare il puntatore nel corrispondente record del file indice e, quindi, è possibile compattare il file principale riutilizzando lo spazio di record cancellati. Un'altra alternativa è quella di sostituire ad ogni puntatore (che non si trovi nell'indice denso) al file principale il valore della chiave e in base ad esso ricercare il record utilizzando l'indice denso. Questa tecnica permette di compattare sia il file principale che il file indice; tuttavia, mentre l'uso di un puntatore ad un record del file principale permette di raggiungere il record con un unico accesso e quello di un puntatore al file indice permette di raggiungere il record con due accessi, l'uso del valore della chiave come puntatore può richiedere un numero superiore di accessi (quelli necessari per la ricerca sul file indice più un accesso al file principale) per raggiungere il record.

### 5.3.6 Strutture con record nidificati

I metodi di organizzazione fisica visti nei paragrafi precedenti consentono la ricerca efficiente di un record dato il valore della chiave. Spesso, però, è necessario effettuare su una base di dati un diverso tipo di operazione consistente nel ricercare tutti i record che sono in qualche modo correlati ad un dato record  $r$  (ad esempio tutti i record *ORDINE* relativi agli ordini fatti da un certo *CLIENTE*). Perché questo tipo di ricerca possa essere effettuata in modo efficiente occorre che una volta trovato il record  $r$  sia possibile ritrovare i record ad esso correlati col minor numero di accessi (ad esempio ogni record *ORDINE* potrebbe trovarsi nello stesso blocco del record relativo al *CLIENTE* che lo ha fatto). In tal caso è implicita una relazione gerarchica tra il record  $r$  e i record ad esso correlati. Per dare una rappresentazione lineare di tutte le possibili relazioni gerarchiche tra record introduciamo il seguente concetto di pattern:

- se  $R$  è un tipo record,  $R$  è un pattern le cui istanze sono tutte le occorrenze di un singolo record di tipo  $R$ ;
- se  $P_1, P_2, \dots, P_n$  sono pattern allora  $P_1, P_2, \dots, P_n$  è un pattern le cui istanze sono tutte le possibili sequenze  $i_1, i_2, \dots, i_n$  tali che  $i_j$  è un'istanza di  $P_j$ ;
- se  $P$  è un pattern allora  $(P)^*$  è un pattern le cui istanze sono sequenze (eventualmente vuote) di istanze di  $P$ ; un'istanza di  $(P)^*$  è detta repeating group.

Il modo più comune di memorizzare strutture gerarchiche è quello di memorizzare sequenzialmente i record di ogni singola istanza di un pattern, ad esempio memorizzare sequenzialmente un record relativo ad un cliente e i record di tutti gli ordini fatti da quel cliente. Un altro modo è quello di rimpiazzare un repeating group con un puntatore ad un blocco che lo contiene; a tale puntatore può essere associato il numero di istanze nel repeating group, altrimenti queste devono essere collegate in una lista la cui fine è indicata da una marca di fine lista.

La necessità di rappresentare strutture gerarchiche è particolarmente forte nei sistemi gerarchici e nei sistemi a rete, dove vengono utilizzati anche altri metodi di organizzazione (ad esempio un repeating group può essere sostituito da un array di puntatori ai record del repeating group) oltre i due sopra menzionati. Tuttavia ci sono dei sistemi relazionali che consentono di far uso di strutture nidificate e, quindi, permettono di memorizzare in uno stesso blocco record appartenenti a relazioni diverse. Se un tipo record è coinvolto in una struttura nidificata e quindi le occorrenze di quel tipo record sono memorizzate in modo che record correlati sono “vicini”, non è possibile pensare di imporre sui record di quel tipo di essere memorizzati in accordo a qualche tipo di organizzazione visto precedentemente, come i file hash o i file ordinati (con indice). Pertanto se vogliamo poter accedere ad un record in base al valore della chiave dobbiamo creare un indice denso. Ad esempio se vogliamo accedere ad un record *ORDINE* in base al numero dell'ordine e ogni record *ORDINE* è memorizzato “vicino” al record *CLIENTE* relativo al cliente che ha fatto l'ordine, possiamo creare un file hash o un file con indice i cui record contengono il numero di un ordine (chiave) e un puntatore al relativo record *ORDINE*.

### 5.3.7 Indici secondari

Gli indici che abbiamo esaminato precedentemente, sia quelli sparsi che quelli densi, consentono di ricercare un record in base al valore della chiave e prendono il nome di indici primari. Se vogliamo ricercare i record che hanno un dato valore in un campo non chiave dobbiamo ricorrere ad un indice secondario.

#### Definizione 5.1

Un **indice secondario** è una struttura nidificata con il seguente pattern:

VALORE(RIFERIMENTO)\*

Un'istanza di tale pattern è costituita da un valore del campo non chiave e da una sequenza di riferimenti ai record che contengono quel valore in quel campo. Un riferimento può essere costituito o da un puntatore al record o dal valore della chiave per quel record (i vantaggi e svantaggi di ciascuna di tali scelte sono stati discussi precedentemente). In particolare, una struttura nidificata con il pattern suddetto potrebbe essere usata per costruire un indice denso quando si è interessati ad ricercare record del file principale in base al valore di un campo non chiave.

## 6 Concorrenza

Un criterio per classificare i sistemi di gestione di basi di dati è il numero di utenti che possono usare il sistema concorrentemente. Un sistema è **singolo-utente** se può essere usato da al più un utente alla volta ed è **multiutente** se molti utenti possono usarlo contemporaneamente; la maggior parte dei sistemi di gestione di basi di dati è del secondo tipo.

Se il sistema di calcolo ha più CPU allora è possibile il simultaneo processamento di due programmi da parte di due diverse CPU; tuttavia la maggior parte della teoria del controllo della concorrenza nelle basi di dati è stata sviluppata per sistemi di calcolo con una sola CPU. In tali sistemi i programmi sono eseguiti concorrentemente in modo *interleaved*, ovvero interfogliato: la CPU può eseguire un solo programma alla volta, tuttavia il sistema operativo permette di eseguire alcune istruzioni di un programma, sospendere quel programma, eseguire istruzioni di un altro programma e quindi ritornare ad eseguire istruzioni del primo. In tal modo l'esecuzione concorrente dei programmi è interleaved; ciò consente di tenere la CPU occupata quando un programma deve effettuare operazioni di I/O.

### 6.1 Scheduling di transazioni

In un sistema di gestione di basi di dati multiutente la principale risorsa a cui i vari programmi accedono concorrentemente è la base di dati. L'esecuzione di una parte di un programma che rappresenta un'unità logica di accesso o modifica del contenuto della base di dati è detta transazione. Ci sono sistemi (ad esempio le basi di dati statistici) in cui gli utenti effettuano solo interrogazioni ma non modifiche; in tali sistemi l'esecuzione concorrente di più transazioni non crea problemi. Al contrario nei sistemi in cui vengono effettuate da più utenti sia operazioni di lettura che di scrittura (un tipico esempio di sistemi di questo tipo è costituito dai sistemi per la prenotazione di posti sui voli) l'esecuzione concorrente di più transazioni può provocare problemi se non viene controllata in qualche modo.

Prima di esaminare alcuni dei problemi che possono sorgere quando l'esecuzione concorrente di più transazioni non è controllata, introduciamo il concetto di **schedule** (piano di esecuzione) di un insieme di transazioni.

#### Definizione 6.1

Dato un insieme  $T$  di transazioni, uno **schedule**  $S$  di  $T$  è un ordinamento delle operazioni nelle transazioni in  $T$  tale che per ogni transazione  $t$  in  $T$  se  $o_1$  e  $o_2$  sono due operazioni in  $t$  tali che  $o_1$  precede  $o_2$  in  $t$  allora  $o_1$  precede  $o_2$  in  $S$ .

In altre parole uno schedule deve *conservare l'ordine* che le operazioni hanno all'interno delle singole transazioni. Qualsiasi schedule ottenuto permutando le transazioni in  $T$  è detto *seriale*. Consideriamo le seguenti transazioni

| $t_1$        |
|--------------|
| read(X)      |
| $X := X - N$ |
| write(X)     |
| read(Y)      |
| $Y := Y + N$ |
| write(Y)     |

| $t_2$        |
|--------------|
| read(X)      |
| $X := X + M$ |
| write(X)     |

e i seguenti schedule di  $\{t_1, t_2\}$ :

| $t_1$        | $t_2$        |
|--------------|--------------|
| read(X)      |              |
| $X := X - N$ |              |
|              | read(X)      |
|              | $X := X + M$ |
| write(X)     |              |
| read(Y)      |              |
|              | write(X)     |
| $Y := Y + N$ |              |
| write(Y)     |              |

| $t_1$        | $t_2$        |
|--------------|--------------|
| read(X)      |              |
| $X := X - N$ |              |
| write(X)     |              |
|              | read(X)      |
|              | $X := X + M$ |
|              | write(X)     |
| read(Y)      |              |
| $Y := Y + N$ |              |
| write(Y)     |              |

Nel primo caso l'aggiornamento di  $X$  prodotto da  $t_1$  viene perso in quanto  $t_2$  legge il valore di  $X$  prima che l'aggiornamento prodotto da  $t_1$  sia stato reso permanente. Nel secondo caso  $t_2$  legge e aggiorna il valore di  $X$  dopo che l'aggiornamento prodotto da  $t_1$  è stato reso permanente, ma prima che venga ripristinato il vecchio valore di  $X$  in conseguenza del fallimento di  $t_1$ .

Consideriamo ora una transazione  $t_3$  che somma i valori di  $X$  e di  $Y$ . Il seguente schedule di  $\{t_1, t_3\}$  fa sì che la somma prodotta da  $t_3$  sia la somma del valore di  $X$  dopo che  $X$  è stato aggiornato da  $t_1$  e del valore di  $Y$  prima che sia stato aggiornato da  $t_1$ .

| $t_1$                               | $t_3$  |
|-------------------------------------|--|
| read(X)<br>$X := X - N$<br>write(X) | $somma := 0$<br><br>read(X)<br>$somma := somma + X$<br>read(Y)<br>$somma := somma + Y$ |
| read(Y)<br>$Y := Y + N$<br>write(Y) |  |

In tutti e tre i casi visti siamo portati a considerare gli schedule non corretti in quanto i valori prodotti non sono quelli che si avrebbero se le due transazioni fossero eseguite nel modo “naturale” cioè sequenzialmente.

In generale possiamo osservare che l'esecuzione naturale e, quindi, intuitivamente corretta di un insieme di transazioni è quella *sequenziale*; la possibilità di eseguire concorrentemente un insieme di transazioni, come si è detto, è introdotta nei sistemi per motivi di efficienza. Pertanto tutti gli schedule seriali sono corretti e uno schedule non seriale è corretto se è *serializzabile*, cioè se è “**equivalente**” ad uno schedule seriale. Sorge quindi la necessità di definire un concetto di equivalenza di schedule.

La più semplice definizione di equivalenza potrebbe essere basata sul confronto del risultato: due schedule sono equivalenti se producono lo stesso stato finale. Tale definizione non è però soddisfacente in quanto due schedule potrebbero produrre lo stesso stato finale solo per alcuni valori iniziali. Consideriamo ad esempio le due transazioni

| $t_1$                               |
|-------------------------------------|
| read(X)<br>$X := X + 5$<br>write(X) |

| $t_2$                                 |
|---------------------------------------|
| read(X)<br>$X := X * 1.5$<br>write(X) |

e i seguenti schedule di  $\{t_1, t_2\}$ :

| $t_1$                                       | $t_2$                                     |
|---|---|
| read(X)<br><br>$X := X + 5$<br><br>write(X) | read(X)<br><br>$X := X * 1.5$<br>write(X) |

| $t_1$                                   | $t_2$                                     |
|---|---|
| read(X)<br><br>$X := X + 5$<br>write(X) | read(X)<br>$X := X * 1.5$<br><br>write(X) |

Tali schedule producono gli stessi valori solo se il valore iniziale di  $X$  è 10; ma producono valori diversi in tutti gli altri casi. Problemi di questo tipo potrebbero essere evitati sfruttando proprietà algebriche che garantiscano che il risultato sia lo stesso indipendentemente dai valori iniziali delle variabili; tuttavia tale soluzione richiederebbe dei costi inaccettabili (che non sono giustificati dallo scopo che si vuole raggiungere). Pertanto si fa l'assunzione più restrittiva che due valori sono uguali solo se sono prodotti da esattamente la stessa sequenza di operazioni. Quindi, ad esempio, date le due transazioni

| $t_1$        |
|--------------|
| read(X)      |
| $X := X + N$ |
| write(X)     |

| $t_2$        |
|--------------|
| read(X)      |
| $X := X - M$ |
| write(X)     |

e i due schedule:

| $t_1$        | $t_2$        |
|--------------|--------------|
| read(X)      |              |
| $X := X + N$ |              |
| write(X)     |              |
|              | read(X)      |
|              | $X := X - M$ |
|              | write(X)     |

| $t_1$        | $t_2$        |
|--------------|--------------|
|              | read(X)      |
|              | $X := X - M$ |
|              | write(X)     |
| read(X)      |              |
| $X := X + N$ |              |
| write(X)     |              |

non sono considerati equivalenti.

Oltre alla definizione di equivalenza, un altro elemento che ha influenza sulla complessità del problema di decidere se uno schedule è serializzabile (cioè se è equivalente ad uno schedule seriale) è costituito dal fatto che il valore calcolato da una transazione per ogni dato sia *dipendente* o meno dal vecchio valore di quel dato. Nel primo caso il problema della serializzabilità può essere risolto in tempo polinomiale con un semplice algoritmo su grafi; nel secondo caso il problema risulta essere *NP-completo*.

Nella pratica è difficile testare la serializzabilità di uno schedule. Infatti l'ordine di esecuzione delle operazioni delle diverse transazioni è determinato in base a diversi fattori: il carico del sistema, l'ordine temporale in cui le transazioni vengono sottomesse al sistema e le loro priorità. Pertanto è praticamente impossibile determinare in anticipo come le operazioni saranno interleaved, cioè in quale ordine verranno eseguite; d'altra parte, se prima si eseguono le operazioni e poi si testa la serializzabilità dello schedule, i suoi effetti devono essere annullati se lo schedule risulta non serializzabile. Inoltre quando le transazioni vengono sottomesse al sistema in modo continuo è difficile stabilire quando uno schedule comincia e quando finisce. Quindi l'approccio seguito nei sistemi è quello di determinare metodi che garantiscano la serializzabilità di uno schedule eliminando così la necessità di dover testare ogni volta la serializzabilità di uno schedule. Uno di 4tali metodi consiste nell'imporre dei protocolli, cioè delle regole, alle transazioni in modo da garantire la serializzabilità di ogni schedule. Questi protocolli usano tecniche di *locking* (cioè di controllo dell'accesso ai dati) per prevenire l'accesso concorrente ai dati. Altri metodi di controllo usano i **timestamp** delle transazioni, cioè degli identificatori delle transazioni che vengono generati dal sistema e in base ai quali le operazioni delle transazioni possono essere ordinate in modo da assicurare la serializzabilità.

## 6.2 Item

Tutte le tecniche per la gestione della concorrenza richiedono che la base di dati sia partizionata in item, cioè in unità a cui l'accesso è controllato. Le dimensioni degli item devono essere definite in base all'uso che viene fatto della base di dati in modo tale che in media una transazione acceda a pochi item. Ad esempio se la transazione tipica su una base di dati relazionale è la ricerca di una tupla mediante un indice, è appropriato trattare le tuple come item; se invece la transazione tipica consiste nell'effettuazione di un join di due relazioni, è opportuno considerare le relazioni come item. Le dimensioni degli item usate da un sistema sono dette la sua granularità. Una granularità grande permette una gestione efficiente della concorrenza; una piccola granularità può invece sovraccaricare il sistema, ma consente l'esecuzione concorrente di molte transazioni.

## 6.3 Tecniche di locking per il controllo della concorrenza

Queste tecniche fanno uso del concetto di lock. Un **lock** è un privilegio di accesso ad un singolo item. In pratica è una variabile associata all'item il cui valore descrive lo stato dell'item rispetto alle operazioni che possono essere effettuate su di esso. Un lock viene richiesto da una transazione mediante un'operazione di locking e viene rilasciato mediante un'operazione di unlocking; fra l'esecuzione di un'operazione di locking su un certo item  $X$  e l'esecuzione di un'operazione di unlocking su  $X$  diciamo che la transazione mantiene un lock su  $X$ . Sono stati studiati diversi

tipi di lock; in ogni caso si assume che una transazione debba effettuare un'operazione di locking ogni volta che deve leggere o scrivere un item e che l'operazione agisca come primitiva di sincronizzazione, cioè se una transazione richiede un lock su un item su cui un'altra transazione mantiene un lock, la transazione non può procedere finché il lock non viene rilasciato dall'altra transazione. Inoltre si assume che ciascuna transazione rilascia ogni lock che ha ottenuto. Uno schedule è detto legale se obbedisce a queste regole.

### 6.3.1 Lock binario

Un **lock binario** può assumere solo due valori *locked* e *unlocked*. Le transazioni fanno uso di due operazioni *lock(X)* e *unlock(X)*; la prima serve per richiedere l'accesso all'item  $X$ , la seconda per rilasciare l'item  $X$  consentendone l'accesso ad altre transazioni. Se una transazione richiede l'accesso ad un item  $X$  mediante un *lock(X)* e il valore della variabile è *locked* la transazione viene messa in attesa, altrimenti viene consentito alla transazione l'accesso ad  $X$  e alla variabile associata ad  $X$  viene assegnato il valore *locked*. Se una transazione rilascia un item  $X$  mediante un *unlock(X)*, alla variabile associata ad  $X$  viene assegnato il valore *unlocked*; in tal modo se un'altra transazione è in attesa di accedere ad  $X$  l'accesso gli viene consentito. Consideriamo di nuovo le due transazioni dell'esempio precedente e vediamo come l'uso dei lock può prevenire il problema dell'"aggiornamento perso". Le transazioni  $t_1$  e  $t_2$  risultano modificate nel modo seguente

| $t_1$        | $t_2$        |
|--------------|--------------|
| lock(X)      | lock(X)      |
| read(X)      | read(X)      |
| $X := X - N$ | $X := X + M$ |
| write(X)     | write(X)     |
| unlock(X)    | unlock(X)    |
| lock(Y)      |              |
| read(Y)      |              |
| $Y := Y + N$ |              |
| write(Y)     |              |
| unlock(Y)    |              |

Uno schedule legale di  $t_1$  e  $t_2$  è il seguente:

| $t_1$        | $t_2$        |
|--------------|--------------|
| lock(X)      |              |
| read(X)      |              |
| $X := X - N$ |              |
| write(X)     |              |
| unlock(X)    |              |
|              | lock(X)      |
|              | read(X)      |
|              | $X := X + M$ |
|              | write(X)     |
|              | unlock(X)    |
| lock(Y)      |              |
| read(Y)      |              |
| $Y := Y + N$ |              |
| write(Y)     |              |
| unlock(Y)    |              |

Il più semplice modello per le transazioni è quello che considera una transazione come una sequenza di operazioni di lock e unlock. Si assume che ogni operazione di lock su un item  $X$  implica la lettura di  $X$  e ogni operazione di unlock di un item  $X$  implica la scrittura di  $X$ . Il nuovo valore dell'item viene calcolato da una funzione che è associata in modo univoco ad ogni coppia lockunlock ed ha per argomenti tutti gli item letti (locked) dalla transazione prima dell'operazione di unlock. I valori che un item assume durante l'esecuzione di una transazione sono formule costruite applicando le funzioni suddette ai valori iniziali degli item. Due schedule sono equivalenti se le formule che danno i valori finali per ciascun item sono le stesse per i due schedule.

Consideriamo ad esempio le due transazioni seguenti:



| $t_1$                 |
|-----------------------|
| lock(X)               |
| unlock(X) $f_1(X)$    |
| lock(Y)               |
| unlock(Y) $f_2(X, Y)$ |

| $t_2$                 |
|-----------------------|
| lock(Y)               |
| unlock(Y) $f_3(Y)$    |
| lock(X)               |
| unlock(X) $f_4(X, Y)$ |

e il seguente schedule  $S$  di  $t_1$  e  $t_2$ :

| $t_1$     | $t_2$     |
|-----------|-----------|
| lock(X)   |           |
| unlock(X) |           |
|           | lock(Y)   |
|           | unlock(Y) |
| lock(Y)   |           |
| unlock(Y) |           |
|           | lock(X)   |
|           | unlock(X) |

Se indichiamo con  $X_0$  e  $Y_0$  i valori iniziali di  $X$  e  $Y$ , abbiamo che il valore finale per  $X$  prodotto da  $S$  è dato dalla formula  $f_4(f_1(X_0), Y_0)$ . D'altra parte il valore finale per  $X$  prodotto dallo schedule seriale  $t_1, t_2$  è dato dalla formula  $f_4(f_1(X_0), f_2(X_0, Y_0))$ , mentre il valore finale per  $X$  prodotto dallo schedule seriale  $t_2, t_1$  è dato dalla formula  $f_1(f_4(X_0, Y_0))$ ; pertanto  $S$  non è serializzabile in quanto non è equivalente a nessuno schedule seriale di  $\{t_1, t_2\}$ .

Consideriamo ora le due transazioni seguenti

| $t_1$                 |
|-----------------------|
| lock(X)               |
| unlock(X) $f_1(X)$    |
| lock(Y)               |
| unlock(Y) $f_2(X, Y)$ |

| $t_2$                 |
|-----------------------|
| lock(X)               |
| unlock(X) $f_3(X)$    |
| lock(Y)               |
| unlock(Y) $f_4(X, Y)$ |

e il seguente schedule  $S$  di  $t_1$  e  $t_2$ :

| $t_1$     | $t_2$     |
|-----------|-----------|
| lock(X)   |           |
| unlock(X) |           |
|           | lock(X)   |
|           | unlock(X) |
| lock(Y)   |           |
| unlock(Y) |           |
|           | lock(Y)   |
|           | unlock(Y) |

Se di nuovo indichiamo con  $X_0$  e  $Y_0$  i valori iniziali di  $X$  e  $Y$ , abbiamo che il valore finale per  $X$  e  $Y$  prodotti da  $S$  sono dati rispettivamente dalle formule  $f_3(f_1(X_0))$  e  $f_4(f_1(X_0), f_2(X_0, Y_0))$ . Poiché tali formule coincidono con quelle prodotte dallo schedule seriale  $\{t_1, t_2\}$ , lo schedule  $S$  è serializzabile.

La serializzabilità di uno schedule in questo semplice modello, può essere testata mediante un semplice algoritmo su grafi diretti. L'idea su cui si basa tale algoritmo è la seguente. Dato uno schedule, per ogni item si esamina l'ordine in cui le varie transazioni fanno un lock su quell'item; se lo schedule è serializzabile questo ordine deve essere consistente con quello di uno schedule seriale; pertanto se l'ordine imposto sulle transazioni da un certo item è diverso da quello imposto da un altro item, lo schedule non è serializzabile. L'algoritmo lavora nel modo seguente.

#### Algoritmo 6.1

Dato uno schedule  $S$ :

- crea un grafo diretto  $G$  (grafo di serializzazione) i cui nodi corrispondono alle transazioni; in tale grafo c'è un arco diretto da  $t_i$  a  $t_j$  se in  $S$   $T_i$  esegue un *unlock*( $X$ ) e  $T_j$  esegue il successivo *lock*( $X$ ) (il significato intuitivo dell'esistenza di un arco da  $t_i$  a  $t_j$  è che  $t_j$

legge il valore per  $X$  scritto da  $t_i$  e quindi se esiste uno schedule seriale equivalente ad  $S$  in tale shedule  $t_i$  deve precedere  $t_j$ );

- verifica se  $G$  ha un ciclo. Se  $G$  ha un ciclo allora  $S$  non è serializzabile; altrimenti esiste un ordinamento  $S'$  delle transazioni tale che  $t_i$  precede  $t_j$  se c'è in  $G$  un arco diretto da  $T_i$  a  $T_j$ ; tale ordinamento può essere ottenuto applicando a  $G$  il procedimento noto come ordinamento topologico consistente nell'eliminare ricorsivamente da un grafo diretto i nodi che non hanno archi entranti (l'ordine di eliminazione dei nodi fornisce lo schedule seriale  $S'$ ).

Il seguente teorema prova la correttezza dell'algoritmo.

### **Teorema 6.1**

L'Algoritmo 1 determina correttamente se uno schedule è serializzabile.

**Dimostrazione.** Cominciamo con il dimostrare che se il grafo di serializzazione  $G$  contiene un ciclo allora  $S$  non è serializzabile. Supponiamo, per assurdo, che  $G$  contenga un ciclo  $t_1, t_2, \dots, t_k, t_1$  e che esista uno schedule seriale  $S'$  equivalente ad  $S$ . Sia  $t_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , la transazione del ciclo che compare per prima in  $S'$  e sia  $X$  l'item che causa la presenza in  $G$  dell'arco da  $t_i - 1$  a  $t_i$ . Il valore finale per  $X$  prodotto da  $S'$  è dato da una formula in cui compare una funzione  $f$  associata ad una coppia lockunlock in  $t_i - 1$  e almeno uno degli argomenti di  $f$  è una formula in cui compare una funzione  $g$  associata ad una coppia lock-unlock in  $t_i$ . D'altra parte in  $S$  l'effetto di  $t_i - 1$  su  $X$  precede quello di  $t_i$  su  $X$ ; quindi nella formula che dà il valore finale per  $X$  prodotto da  $S$  la funzione  $f$  compare più internamente di  $g$  ( $f$  è applicata prima di  $g$ ). Pertanto  $S'$  ed  $S$  non sono equivalenti (contraddizione). Mostriamo ora che se  $G$  non ha cicli allora  $S$  è serializzabile. A tal fine definiamo profondità di una transazione  $t$  la lunghezza del più lungo cammino in  $G$  da un qualsiasi nodo a  $t$ . Sia  $S'$  lo schedule seriale costruito dall'algoritmo; mostreremo per induzione sulla profondità delle transazioni che ogni transazione  $t$  per ogni item su cui effettua un'operazione di lock legge in  $S$  lo stesso valore che legge in  $S'$  (e quindi per ogni item su cui effettua un'operazione di lock produce in  $S$  lo stesso valore che produce in  $S'$ ). Base dell'induzione. Se per una transazione  $t$  la profondità è 0 vuol dire che in  $G$  non ci sono archi entranti in  $t$ ; pertanto in  $S$   $t$  legge solo valori iniziali. D'altra parte in  $S'$   $t$  viene prima di qualsiasi transazione che effettua un'operazione di lock su un item su cui  $t$  effettua un'operazione di lock. Infatti, se  $X$  è un item su cui  $t$  effettua un'operazione di lock e  $t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_k}$  è la sequenza in  $S$  delle transazioni che effettuano un'operazione di lock su  $X$ ,  $t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_k}$  è un cammino in  $G$ ; poiché  $t$  deve comparire in tale cammino e in  $G$  non ci sono archi entranti in  $t$ , si deve avere  $t = t_{i_1}$  e quindi nessun altro nodo del cammino può essere eliminato dal procedimento di ordinamento topologico prima di  $t$ . Induzione. Cominciamo con il mostrare che ogni transazione per ogni item su cui effettua un'operazione di lock legge sia in  $S$  che in  $S'$  il valore prodotto da una stessa transazione. Supponiamo, per assurdo, che esistano una transazione  $t$  e un item  $X$  tali che  $t$  legge in  $S$  il valore di  $X$  prodotto da una transazione  $t'$  e in  $S'$  il valore prodotto da un'altra transazione  $t''$ . Sia  $t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_k}$  la sequenza in  $S$  delle transazioni che effettuano un'operazione di lock su  $X$ ;  $t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_k}$  è un cammino in  $G$  in cui  $t'$  compare immediatamente prima di  $t$ . Anche  $t''$  compare in tale cammino, e quindi deve comparire prima di  $t'$ . Poiché in  $S'$ ,  $t''$  deve seguire  $t'$ ,  $S'$  non può essere ottenuto da  $G$  mediante il procedimento di ordinamento topologico (contraddizione). Sia  $t$  una transazione che ha profondità  $d$ ,  $d > 0$ , in  $G$ ; per quanto visto  $t$ , per ogni item su cui effettua un'operazione di lock, legge sia in  $S$  che in  $S'$  il valore prodotto da una stessa transazione  $t'$ . Poiché  $t'$  ha profondità minore di  $d$  per l'ipotesi induttiva  $t'$ , per ogni item su cui effettua un'operazione di lock, legge sia in  $S$  che in  $S'$  lo stesso valore e, quindi, produce sia in  $S$  che in  $S'$  lo stesso valore. Pertanto  $t$ , per ogni item su cui effettua un'operazione di lock, legge sia in  $S$  che in  $S'$  lo stesso valore.  $\square$

### **Definizione 6.2**

Diciamo che una transazione obbedisce al protocollo di locking a due fasi, o più semplicemente che è **a due fasi**, se prima effettua tutte le operazioni di lock (fase di locking) e poi tutte le operazioni di unlock (fase di unlocking).

Mostreremo che il protocollo di locking a due fasi garantisce la serializzabilità; più precisamente, si ha che:

### Teorema 6.2

Sia  $T$  un insieme di transazioni. Se ogni transazione in  $T$  è a due fasi allora ogni schedule di  $T$  è serializzabile.

**Dimostrazione.** Sia  $S$  uno schedule di  $T$ . Supponiamo, per assurdo, che  $S$  non sia serializzabile. Per il TEOREMA 6.1, il grafo di serializzazione  $G$  di  $S$  contiene un ciclo  $t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_k}$ ; ciò significa che  $T_{i+1}$ ,  $i \in \{1, \dots, k-1\}$ , effettua un'operazione di lock, su un item su cui  $t_i$  ha effettuato un'operazione di unlock e che  $t_1$  effettua un'operazione di lock, su un item su cui  $t_k$  ha effettuato un'operazione di unlock. Pertanto in  $S$   $t_1$  effettua un'operazione di lock dopo aver effettuato un'operazione di unlock e quindi  $t_1$  non è a due fasi (contraddizione).

Mostriamo ora che se una transazione  $t_1$  non è a due fasi, esiste sempre una transazione  $t_2$  tale che esiste uno schedule di  $\{t_1, t_2\}$  che non è serializzabile. Infatti, se  $t_1$  non è a due fasi, effettua un'operazione di lock dopo aver effettuato un'operazione di unlock; consideriamo anche la seguente transazione  $t_2$

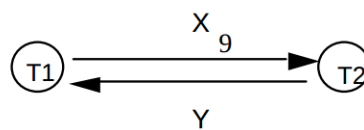
| $t_1$     |
|-----------|
| ...       |
| unlock(X) |
| ...       |
| lock(Y)   |
| ...       |

| $t_2$     |
|-----------|
| lock(X)   |
| lock(Y)   |
| unlock(X) |
| unlock(Y) |

il seguente schedule  $S$  di  $t_1$  e  $t_2$  non è serializzabile

| $t_1$     | $t_2$     |
|-----------|-----------|
| ...       |           |
| unlock(X) |           |
| ...       |           |
|           | lock(X)   |
|           | lock(Y)   |
|           | unlock(X) |
| unlock(Y) |           |
| ...       |           |
|           | lock(Y)   |
| ...       |           |

Infatti il suo grafo di serializzazione



contiene un ciclo. Naturalmente possono esistere schedule di transazioni che non sono a due fasi che sono serializzabili. Tuttavia poiché è normale non conoscere l'insieme di transazioni con cui una transazione può essere eseguita concorrentemente siamo costretti a richiedere che tutte le transazioni siano a due fasi perché sia garantita la serializzabilità di ogni schedule.

### 6.3.2 Lock a tre valori

Consideriamo ora un modello per le transazioni che consente un maggior grado di concorrenza. In tale modello si fa l'assunzione realistica che una transazione possa accedere ad un item solo per leggerlo, senza modificarlo. Se una transazione desidera solo leggere un item  $X$  effettua un'operazione  $rlock(X)$  che impedisce a qualsiasi altra transazione di modificare il valore di  $X$ ; tuttavia un qualsiasi numero di transazioni può ottenere contemporaneamente un lock di lettura su  $X$ . Se, invece, una transazione desidera modificare il valore di  $X$  effettua un'operazione  $wlock(X)$ ; in tal caso nessuna altra transazione può ottenere un lock di scrittura o di lettura su  $X$ . Entrambi i lock sono rilasciati mediante un'operazione di  $unlock(X)$ . Pertanto si fa uso di un lock a tre valori: *rlocked*, *wlocked*, *unlocked*.

Quanto detto per gli schedule legali vale anche in questo modello con l'unica differenza che una

transazione che mantiene un lock di lettura su un certo item può richiedere un lock in scrittura su quello stesso item.

Analogamente a quanto fatto per il modello precedente assumiamo che quando una transazione effettua un *wlock* su un item il nuovo valore dell'item viene calcolato da una funzione, univocamente associata a quell'operazione di *wlock*, che ha come argomenti tutti gli item su cui la transazione ha già effettuato un lock (di lettura o di scrittura) prima dell'unlock associato al *wlock*. Quindi, analogamente a quanto accadeva nel modello precedente, l'effetto di uno schedule sulla base di dati può essere espresso dalle formule che calcolano (a partire dai valori iniziali degli item e applicando le funzioni associate ai *wlock*) i valori degli item che sono modificati da almeno una transazione. Tuttavia, poiché in questo modello si assume che una transazione possa leggere un item senza modificarlo, la definizione di equivalenza di schedule deve essere modificata per tener conto di tale eventualità.

### Definizione 6.3

Due schedule sono **equivalenti** se:

1. producono lo stesso valore per ogni item su cui viene effettuato un *wlock*
2. ogni operazione *rlock*(X) legge lo stesso valore di X nei due schedule.

Vediamo ora quali condizioni di precedenza tra transazioni è possibile inferire dalla semantica delle transazioni appena vista.

Supponiamo che in uno schedule  $S$  una transazione  $t_1$  effettui un'operazione *wlock* su un item  $X$  e che una transazione  $t_2$  effettui un'operazione *rlock* su  $X$  prima che una terza transazione  $t_3$  esegua la successiva operazione di *wlock* su  $X$  (in altre parole,  $t_1$  modifica il valore di  $X$  e  $t_2$  legge il valore di  $X$  prodotto da  $t_1$  prima che  $X$  venga nuovamente modificato da  $t_3$ ). Allora in qualsiasi schedule seriale equivalente ad  $S$   $t_1$  deve precedere  $t_2$  e  $t_2$  deve precedere  $t_3$ . D'altra parte, se due transazioni  $t_1$  e  $t_2$  leggono entrambe il valore di un item  $X$  prodotto da una transazione non è lecito stabilire nessuna precedenza tra  $t_1$  e  $t_2$ . Per rappresentare le precedenze tra le transazioni è possibile usare, come per il modello precedente, un grafo diretto che ha per nodi le transazioni e ha un arco da una transazione  $t_i$  a una transazione  $t_j$  se la semantica delle transazioni impone che  $t_i$  debba precedere  $t_j$ . Analogamente a quanto accade per il modello precedente, un semplice algoritmo su tale grafo permette di decidere se uno schedule è serializzabile e in caso affermativo di ottenere uno schedule seriale equivalente ad esso.

### Algoritmo 6.2

Dato uno schedule  $S$

- crea un grafo diretto  $G$  (grafo di serializzazione) i cui nodi corrispondono alle transazioni; in tale grafo c'è un arco diretto da  $t_i$  a  $t_j$  se
  - in  $S$   $t_i$  esegue una *rlock*(X) o una *wlock*(X) e  $t_j$  è la transazione che esegue la successiva *wlock*(X)
  - in  $S$   $t_i$  esegue una *wlock*(X) e  $t_j$  esegue una *rlock*(X) dopo che  $t_i$  ha eseguito la *wlock*(X) e prima che un'altra transazione esegua una *wlock*(X).
- verifica se  $G$  ha un ciclo. Se  $G$  ha un ciclo allora  $S$  non è serializzabile; altrimenti esiste un ordinamento  $S'$  delle transazioni tale che  $t_i$  precede  $t_j$  se c'è in  $G$  un arco diretto da  $t_i$  a  $t_j$ ; tale ordinamento può essere ottenuto applicando a  $G$  il procedimento di ordinamento topologico.

Il seguente teorema, che può essere dimostrato con la stessa tecnica usata per il TEOREMA 6.1, prova la correttezza dell'algoritmo.

### Teorema 6.3

L'Algoritmo 2 determina correttamente se uno schedule è serializzabile.