

Basi di Dati - Appunti

Cristian Di Pietrantonio

02-12-2014

ATTENZIONE! Questa dispensa è ancora in stesura e potrebbe non contenere gli ultimi argomenti visti a lezione. Qui saranno raccolti i contenuti di tutte le slide e dei vari materiali sparsi sul sito della prof M. Moscarini; a questi materiali saranno aggiunti appunti, esempi ed esercizi mostrati a lezione. I sorgenti LaTeX sono disponibili su GitHub [QUI](#), dove troverete anche la versione più aggiornata di questo documento (main.pdf).

Contents

1	Introduzione	3
1.1	Le basi di dati	3
1.1.1	Integrità	3
1.1.2	Sicurezza	3
1.2	Transazione	3
1.3	Ripristino	4
1.4	Compiti del DBA	4
2	Il modello relazionale	5
2.1	Relazioni e tabelle	5
3	Algebra relazionale	6
3.1	Proiezione	6
3.2	Selezione	6
3.3	Unione	7
3.4	Differenza	7
3.5	Intersezione	7
3.6	Prodotto cartesiano	7
3.7	Join naturale	8
3.8	Theta Join	8
4	Progettazione di una base di dati	9
4.1	Anomalie	9
4.2	La Terza Forma Normale	9
4.3	Decomposizione di schemi di relazione	11
4.4	Chiusura di un insieme di dipendenze funzionali	12
4.4.1	L'insieme F^A	12
4.4.2	Chiusura di un insieme di attributi	13
4.4.3	Uguaglianza tra F^A e F^+	14
4.4.4	Algoritmo per calcolare X^+	15
4.5	Decomposizioni che preservano le dipendenze funzionali	16
4.5.1	Equivalenza tra due insiemi di dipendenze funzionali	16
4.5.2	Algoritmo per verificare l'equivalenza tra F e G	16
4.6	Decomposizioni con Join senza perdita	18
4.7	Decomposizioni in 3NF che conservano la dipendenze funzionali e hanno un join senza perdita	21
4.8	La forma normale di Boyce-Codd	23
5	Organizzazione fisica della base di dati	25
5.1	La memoria secondaria	25
5.2	Memorizzare le relazioni	25
5.2.1	Record	25
5.2.2	Blocchi	26
5.3	File	27
5.3.1	Heap	27

1 Introduzione

I sistemi di gestione di basi di dati (DBMS) sono strumenti software per la gestione di grandi masse di dati. Prima dell'avvento dei database, ogni programma aveva il suo file privato, organizzato *sequenzialmente* e la gestione dei dati era affidata al filesystem. Ciò causava problemi di:

- **ridondanza**: diversi files venivano replicati, dovendo essere condivisi con più applicazioni;
- **inconsistenza**: se un'informazione veniva aggiornata, tale aggiornamento poteva riguardare solo una copia del dato;
- **dipendenza dei dati**: i dati venivano strutturati dalle applicazioni, in base al loro utilizzo.

Per ovviare a questi problemi si iniziò a progettare le **basi di dati**, le quali videro una grande svolta quando alcuni ingegneri dell'IBM introdussero negli anni '70 il *modello relazionale*.

1.1 Le basi di dati

Le caratteristiche di una base di dati sono:

- **multiuso e integrazione**: la stessa base di dati può essere utilizzata da diverse applicazioni con diversi scopi;
- **indipendenza e controllo centralizzato**: i dati non sono gestiti dalle applicazioni ma da un software dedicato, il quale ne gestisce anche le regole di accesso.

I vantaggi che ne derivano sono la minima ridondanza, integrità dei dati e sicurezza.

1.1.1 Integrità

I dati devono rispettare dei vincoli che esistono nella realtà di interesse. Consideriamo ad esempio il database di InfoStud della Sapienza:

- uno studente risiede in *una sola* città (**dipendenze funzionali**);
- la matricola *identifica univocamente* uno studente (**vincoli di chiave**);
- un voto è un intero positivo tra 18 e 30 (**vincoli di dominio**).

1.1.2 Sicurezza

I dati devono essere protetti da accessi non autorizzati. Il **DBA** (*Database Administrator*) deve considerare:

- valore corrente per *accessi autorizzati*;
- valore corrente per *accessi non autorizzati*;
- *chi* può accedere *a quali* dati e in *quale* modalità;
- definire regole di accesso ed effetti relativi a una violazione.

1.2 Transazione

Definizione 1.1

Si definisce **transazione** una sequenza di operazioni che costituiscono un'unica operazione logica.

Esempio 1.1

“Trasferire €1000 da $c/c1$ al $c/c2$ ”

1. cerca $c/c1$;
2. modifica *saldo* in *saldo* – 1000;
3. cerca $c/c2$;

4. modifica *saldo* in *saldo* + 1000;

Una transazione deve essere eseguita completamente (*committed*) o non deve essere eseguita affatto (*rolled back*).

1.3 Ripristino

Può capitare che, a causa di un malfunzionamento del sistema (ad esempio sbalzi di tensione), la base di dati si trovi con delle informazioni corrotte. In questi casi, per ripristinare il valore corretto dei dati, si hanno due possibili modi di agire:

- sfruttare il **transaction log**, che contiene i dettagli di tutte le transazioni, tra cui valori precedenti e successivi alla modifica;
- ripristinare l'ultimo **dump** effettuato. Il dump è una copia periodica del database.

1.4 Compiti del DBA

Il Database Administrator ha vari compiti, tra i quali ricadono le scelte di progettazione della base di dati. Esse implicano la definizione di:

- schema logico
- schema fisico
- sottoschema o viste

inoltre al DBA spetta l'onere di mantenere il sistema.

2 Il modello relazionale

Il modello attualmente più diffuso e con il quale si organizzano i database è chiamato **modello relazionale**. Tale nome è dovuto al fatto che esso è basato sul concetto matematico di *relazione*.

Definizione 2.1

Dati n domini D_1, D_2, \dots, D_n non necessariamente distinti, una relazione r su D_1, D_2, \dots, D_n è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n$.

Ogni elemento di r è una n -pla $(d_1, d_2, \dots, d_n) \forall d_i \in D_i$

2.1 Relazioni e tabelle

Una relazione r può essere rappresentata mediante una tabella: le righe corrispondono agli elementi della relazione (n -ple), le colonne corrispondono ai domini $D_1 \dots D_n$.

Esempio 2.1

La seguente tabella rappresenta una relazione con due 4-ple sui domini *String*, *String*, *Int* e *Real*.

String	String	Int	Real
Paolo	Rossi	2	26,5
Mario	Biachi	10	28,7

A questo punto è poco chiaro cosa rappresenti tale relazione. Bisogna stabilire metodo per fornire un'interpretazione standard che rispecchi la realtà di interesse a cui essa si riferisce: a questo fine diamo nomi alle colonne e alla tabella stessa. La precedente tabella diverrà quindi:

Nome	Cognome	Esami	Media
Paolo	Rossi	2	26,5
Mario	Biachi	10	28,7

Ora risulta più evidente che la realtà di interesse sono gli studenti di una data università. Daremo quindi il nome *Studenti* a tale tabella.

Il nome dato ad ogni colonna viene chiamato **attributo**.

Definizione 2.2

Uno *schema di relazione* è un insieme di attributi.

Definizione 2.3

Uno *schema di base di dati relazionale* è un insieme $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ di schemi di relazione.

Definizione 2.4

Una *base di dati relazionale* con schema $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ è un insieme $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ dove r_i è un'istanza di relazione con schema R_i .

3 Algebra relazionale

Data una base di dati, dobbiamo essere in grado di *interrogarla*. Interrogare una base di dati significa accedere a determinate informazioni tramite uno specifico linguaggio di interrogazione. Le specifiche essenziali di tale linguaggio sono formalizzate nell'**algebra relazionale**; essa consiste di un insieme di *operatori* che possono essere applicati a una (operatore unario) o due (operatore binario) istanze di relazione e *restituiscono* un'istanza di relazione. L'algebra relazionale è un **linguaggio procedurale**: l'interrogazione consiste in un'espressione in cui compaiono *operatori* e *istanze di relazione* della base di dati.

3.1 Proiezione

La *proiezione* è un operatore che consente di effettuare un “taglio verticale” su una relazione, cioè di selezionare solo alcune colonne (attributi). Viene indicata con il simbolo:

$$\pi_{A_1, A_2, \dots, A_k}(r)$$

e seleziona le colonne di r che corrispondono agli attributi A_1, A_2, \dots, A_k .

Esempio 3.1

Si consideri la seguente relazione *Cliente*:

Nome	C#	Città
Rossi	C1	Roma
Rossi	C2	Milano
Bianchi	C3	Roma
Verdi	C4	Roma

Interrogiamo la base di dati con l'operatore di proiezione nel seguente modo: $\pi_{Nome}(Cliente)$. Verrà restituita la seguente istanza:

Nome
Rossi
Bianchi
Verdi

Da notare come siano stati eliminati i valori doppi poiché viene restituito un *insieme*.

3.2 Selezione

L'operatore di *selezione* consente di effettuare un “taglio orizzontale” su una relazione, cioè di selezionare solo le righe (tuple) che soddisfano una data condizione. Si denota con il simbolo

$$\sigma_C(r)$$

dove C è detta condizione di selezione.

La *condizione di selezione* è un'espressione booleana in cui i termini semplici sono del tipo

$$\begin{aligned} &A \Theta B \\ &\text{oppure} \\ &A \Theta 'a' \end{aligned}$$

dove:

- Θ è un operatore di confronto $\Theta \in \{<, =, >, \leq, \geq\}$;
- A e B sono due attributi con lo stesso dominio, $dom(A) = dom(B)$;
- $a \in dom(A)$

Esempio 3.2

Si riprenda in considerazione la seguente tabella:

Nome	C#	Città
Rossi	C1	Roma
Rossi	C2	Milano
Bianchi	C3	Roma
Verdi	C4	Roma

Vogliamo ottenere i dati dei clienti che risiedono a Roma. La *query* si traduce in:
 $\sigma_{Città='Roma'}(Cliente)$. L'istanza di relazione che ci viene restituita è la seguente:

Nome	C#	Città
Rossi	C1	Roma
Bianchi	C3	Roma
Verdi	C4	Roma

Esempio 3.3

Facendo riferimento alla tabella dell'esempio precedente, vogliamo ottenere i dati dei clienti che si chiamano "Rossi" e risiedono a Roma. La *query* si traduce in:

$\sigma_{Città='Roma' \wedge Nome='Rossi'}(Cliente)$. L'istanza di relazione che ci viene restituita è la seguente:

Nome	C#	Città
Rossi	C1	Roma

3.3 Unione

L'operatore di *unione* consente di costruire una relazione contenente tutte le tuple che appartengono ad almeno uno dei due operandi. Si denota con $r_1 \cup r_2$. L'operazione di unione può essere applicata solo ad operandi **union compatibili**, cioè tali che:

- hanno lo stesso numero di attributi;
- gli attributi corrispondenti sono definiti sullo stesso dominio.

3.4 Differenza

L'operatore di *differenza* consente di costruire una relazione contenente tutte le tuple del primo operando che non appartengono al secondo operando. L'operatore è applicabile solo a operandi *union compatibili*.

3.5 Intersezione

L'operatore di *intersezione* consente di costruire una relazione contenente tutte le tuple che appartengono ad entrambi gli operandi. Si denota con $r_1 \cap r_2 = (r_1 - (r_1 - r_2))$.

3.6 Prodotto cartesiano

L'operatore *prodotto cartesiano* consente di costruire una relazione contenente tutte le tuple che si ottengono concatenando una tupla del primo operando con una tupla del secondo operando. Si denota con $r_1 \times r_2$.

Esempio 3.4

Consideriamo le seguenti relazioni *Cliente* e *Ordine*:

Nome	C#	Città	C#	A#	Num
Rossi	C1	Roma	C1	A1	100
Rossi	C2	Milano	C2	A2	200
			C1	A2	200

Il prodotto cartesiano tra queste due relazioni dà come risultato la relazione che chiameremo per convenienza *Risultato*:

Nome	C#	Città	C#	A#	Num
Rossi	C1	Roma	C1	A2	100
Rossi	C1	Roma	C2	A2	200
Rossi	C1	Roma	C1	A2	200
Rossi	C2	Milano	C1	A1	100
Rossi	C2	Milano	C2	A2	200
Rossi	C2	Milano	C1	A2	200

Esempio 3.5

Riprendendo la relazione *Risultato* dall'esempio precedente, vogliamo effettuare una query che richieda i “dati dei clienti e dei loro ordini”:

$$\pi_{Nome, Cliente.C\#, Città, A\#, Num}(\sigma_{Cliente.C\# = Ordine.C\#}(Cliente \times Ordine))$$

La query viene eseguita in quest'ordine:

1. Viene effettuato il prodotto cartesiano $Cliente \times Ordine$;
2. dal prodotto cartesiano vengono selezionate le tuple dove i corrispondenti attributi $C\#$ hanno lo stesso valore;
3. sulla relazione ricavata dalla selezione (punto 2) viene operata una proiezione per prendere le colonne volute, che andranno a formare la relazione che sarà il risultato finale della query.

Nome	C#	Città	A#	Num
Rossi	C1	Roma	A2	100
Rossi	C1	Roma	A2	200
Rossi	C2	Milano	A2	200

3.7 Join naturale

L'operatore *join naturale* consente di selezionare le tuple del prodotto cartesiano dei due operandi che soddisfano la condizione

$$(R_1.A_1 = R_2.A_1) \wedge (R_1.A_2 = R_2.A_2) \wedge \dots \wedge (R_1.A_k = R_2.A_k)$$

Dove R_1 e R_2 sono i nomi delle due relazioni operando e $A_1 \dots A_k$ sono gli attributi comuni. Il join naturale è definito come

$$r_1 \bowtie r_2 = \pi_{XY}(\sigma_C(r_1 \times r_2))$$

dove

- $C = (R_1.A_1 = R_2.A_1) \wedge (R_1.A_2 = R_2.A_2) \wedge \dots \wedge (R_1.A_k = R_2.A_k)$;
- X sono gli attributi di r_1 ;
- Y sono gli attributi di r_2 che non sono in r_1 ;

3.8 Theta Join

Il Θ -Join consente di selezionare le tuple del prodotto cartesiano di due operandi che soddisfano una condizione del tipo $A \Theta B$, dove:

- Θ è un operatore di confronto $\Theta \in \{<, =, >, \leq, \geq\}$;
- A è un attributo dello schema del primo operando e B uno del secondo;
- $dom(A) = dom(B)$;

4 Progettazione di una base di dati

4.1 Anomalie

Si immagini di dover progettare una base di dati relazionale contenente i dati degli studenti e dei corsi di un'Università. La soluzione più immediata è di creare un'unica relazione

$$Università(Matr, Nome, Città, Prov, C\#, Titolo, Docente, C_laurea, Data, Voto)$$

in cui una tupla $(m, n, c, p, C, t, D, l, d, v)$ rappresenta il fatto che uno studente con matricola m e nome n , residente nella città c che si trova in provincia di p , ha sostenuto l'esame del corso, con codice C e titolo t , tenuto dal docente D , del corso di laurea l in data d riportando il voto v .

Adottando questa soluzione si avrebbero un certo numero di inconvenienti che vanno sotto il nome di **anomalia**. Un'anomalia è essenzialmente un comportamento *inaspettato e indesiderato* da parte della base di dati, generato in risposta ad un'operazione. Le anomalie più comuni (spiegate relativamente all'esempio) sono:

- **anomalie di inserimento**: non si possono inserire i dati di uno studente se non ha sostenuto almeno un esame;
- **anomalie di cancellazione**: se si cancellano i dati di un corso (perché il corso è stato disattivato) e c'è uno studente che ha sostenuto solo l'esame relativo a quel corso, perdo le informazioni sullo studente;
- **anomalie di aggiornamento**: se devo modificare il docente di un corso devo farlo per ogni tupla in cui compare il corso;
- **ridondanza** dei dati: le informazioni anagrafiche di uno studente sono ripetute per ogni esame sostenuto dallo studente.

Queste anomalie sono dovute al fatto che si sono rappresentati in un'unica relazione più *concetti*: il concetto "Studente", "Corso" ed "Esame". Rappresentando i tre concetti in tre relazioni distinte

$$\begin{aligned} &Studente(Matr, Nome, Città, Prov) \\ &Corso(C\#, Titolo, Docente, C_laurea) \\ &Esame(Matr, C\#, Data, Voto) \end{aligned}$$

tali anomalie vengono eliminate. Tuttavia è possibile riscontrare il permanere di simili anomalie concernenti le città: per eliminare queste ultime anomalie che hanno la stessa origine di quelle viste precedentemente, posso utilizzare lo *schema* seguente:

$$\begin{aligned} &Studente(Matr, Nome, Città) \\ &Comune(Città, Prov) \\ &Corso(C\#, Titolo, Docente, C_laurea) \\ &Esame(Matr, C\#, Data, Voto) \end{aligned}$$

4.2 La Terza Forma Normale

Si è constatato che ci sono schemi migliori di altri. Esistono dunque *regole e proprietà formali* che ci permettono di costruire un *buono* schema?

Se si analizzano le anomalie nella relazione *Università* si nota che sono legate al fatto che

- *Voto* e *Data* sono *determinati univocamente* da *Matr* e *C#*;
- i dati di uno studente sono *determinati univocamente* da *Matr*;
- i dati di un corso sono *determinati univocamente* da *C#*.

Il concetto di "determina univocamente" è colto dal concetto formale di **dipendenza funzionale**.

Definizione 4.1

Dato uno schema di relazione R , una *dipendenza funzionale* su R è una coppia ordinata di sottoinsiemi non vuoti $X, Y \in R$ e viene denotata come $X \rightarrow Y$.

Proposizione 4.1

Un'istanza r di R *soddisfa* la dipendenza funzionale $X \rightarrow Y$ se per ogni coppia di tuple $t_1, t_2 \in r$ si ha che se $t_1[X] = t_2[X] \Rightarrow t_1[Y] = t_2[Y]$.

In simboli:

$$(\forall (t_1, t_2) \in r \text{ t.c. } t_1[X] = t_2[X] \Rightarrow t_1[Y] = t_2[Y]) \Rightarrow (X \rightarrow Y \text{ soddisfa } r).$$

Sia F un insieme di dipendenze funzionali su R ed r un'istanza di R . Se r soddisfa tutte le dipendenze in F , diciamo che r è un'istanza *legale* di R .

Definizione 4.2

La *chiusura* di F , denotata con F^+ , è l'insieme di dipendenze funzionali che sono soddisfatte da ogni istanza legale di R .

Banalmente si ha che $F \subseteq F^+$.

Definizione 4.3

Dato uno schema di relazione R , un insieme di dipendenze funzionali F su R e un sottoinsieme K di R , diciamo che K è una **chiave** per R se:

- $K \rightarrow R \in F^+$
- $\forall K' \subset K, K' \rightarrow R \notin F^+$.

In pratica una chiave è il minimo sottoinsieme di R che determina univocamente il valore dei restanti attributi di R (banalmente la chiave determina se stessa e i suoi sottoinsiemi) tale che, se prendessimo un suo sottoinsieme, esso non sarebbe chiave.

In futuro denoteremo con A_1, A_2, \dots, A_n un insieme di attributi, con X e Y sottoinsiemi di R , con XY l'insieme $X \cup Y$.

Esempio 4.1

Considerando il precedente schema *Università*, possiamo osservare che un'istanza di *Università* per rispecchiare la realtà di interesse deve soddisfare le seguenti dipendenze funzionali:

- $Matr, C\# \rightarrow Nome, Città, Prov, Titolo, Docente, C_laurea, Data, Voto;$
- $C\# \rightarrow Titolo, Docente, C_laurea$
- $Matr \rightarrow Nome, Città, Prov$
- $Città \rightarrow Prov$

Quindi $\{Matr, C\#\}$ costituisce una *chiave* per *Università*.

Ci sono attributi che **dipendono parzialmente** dalla chiave. Nell'Esempio 4.1 $\{Titolo, Docente, C_laurea\}$ dipendono funzionalmente da $C\#$; altri attributi invece **dipendono transitivamente** dalla chiave, ad esempio $Prov$ dipende funzionalmente da $Matr$ in quanto $Matr \rightarrow Città \rightarrow Prov$.

Prendendo lo schema finale, vediamo che in nessuno schema di relazione ci sono attributi che dipendono parzialmente né transitivamente dalla chiave.

Proposizione 4.2

Uno schema di relazione in cui non ci sono attributi che dipendono parzialmente né transitivamente dalla chiave è detto in **Terza Forma Normale** (3NF).

Formalizziamo i concetti appena introdotti:

Definizione 4.4

Dati uno schema di relazione R e un insieme di dipendenze funzionali F su R diciamo che:

- un attributo $A \in R$ è **primo** se appartiene ad una chiave di R ;
- un sottoinsieme $X \subset R$ è una **superchiave** se contiene una chiave di R .

Nell'Esempio 4.1, considerando la relazione *Università*, *Matr* è primo mentre $\{Matr, C\#, Nome\}$ è una superchiave.

Definizione 4.5

Siano R uno schema di relazione ed F un insieme di dipendenze funzionali su R .

- $X \rightarrow A \in F^+$ è una dipendenza parziale su R se A non è primo e X è contenuto propriamente in una chiave di R .
- $X \rightarrow A \in F^+$ è una dipendenza transitiva su R se A non è primo e $\forall K \subset R$ si ha che X non è contenuto propriamente in K e $K - X \neq \emptyset$.

Proposizione 4.3

Siano R uno schema di relazione ed F un insieme di dipendenze funzionali su R . R è in 3NF se, $\forall (X \rightarrow A) \in F^+$ t.c. $A \notin X$, si ha che A è primo oppure X è una superchiave.

Teorema 4.1

Siano R uno schema di relazione e F un insieme di dipendenze funzionali su R . Uno schema R è in 3NF se e solo se non esistono né dipendenze parziali né dipendenze transitive in R .

Dimostrazione. La parte *solo se* deriva banalmente dalla definizione [4.5].

Parte se. Supponiamo per assurdo che R non sia in 3NF nonostante non ci siano dipendenze parziali o transitive; in tal caso esiste una dipendenza funzionale $X \rightarrow A \in F^+$ t.c. A non è primo e X non è una superchiave. Poiché X non è una superchiave due casi (mutuamente esclusivi) sono possibili:

- o per ogni chiave K di R , X non è contenuto propriamente in K e $K - X \neq \emptyset$; in tal caso $X \rightarrow A$ è una dipendenza transitiva su R (contraddizione)
- oppure esiste una chiave K di R t.c. $X \subset K$; in tal caso $X \rightarrow A$ è una dipendenza parziale su R (contraddizione). \square

Un obiettivo da tenere presente quando si progetta una base di dati è quello di produrre uno schema in cui ogni relazione sia in 3NF. Nella fase di progettazione concettuale si individuano i concetti che devono essere rappresentati nella base di dati. Se questo lavoro di individuazione è fatto accuratamente lo schema relazionale che può essere derivato in modo automatico con opportune regole, è in 3NF. Se tuttavia dopo tale processo ci trovassimo a produrre uno schema che non è in 3NF dovremmo procedere ad una fase di decomposizione.

4.3 Decomposizione di schemi di relazione

Uno schema che non è in 3NF può essere decomposto in più modi in un insieme di schemi in 3NF. Sia $R = ABC$ con l'insieme di dipendenze funzionali $F = \{A \rightarrow B, B \rightarrow C\}$. R non è in 3NF per la presenza in F^+ della dipendenza transitiva $B \rightarrow C$, ma può essere decomposto in:

$$\begin{aligned} R_1 &= AB \text{ con } F_1 = \{A \rightarrow B\} \\ R_2 &= BC \text{ con } F_2 = \{B \rightarrow C\} \\ &\text{oppure} \\ R_1 &= AB \text{ con } F_1 = \{A \rightarrow B\} \\ R_2 &= AC \text{ con } F_2 = \{A \rightarrow C\} \end{aligned}$$

Entrambi gli schemi sono in 3NF, tuttavia la seconda soluzione non è soddisfacente. Infatti, si consideri l'istanza della *base di dati* costituita dalle due istanze legali di R_1 e R_2 :

A	B	A	C
a_1	b_1	a_1	c_1
a_2	b_1	a_2	c_2

L'istanza di R che si può ricostruire da questa tramite *join naturale* è

A	B	C
a_1	b_1	c_1
a_2	b_1	c_2

non è un'istanza legale di R , in quanto non soddisfa la dipendenza funzionale $B \rightarrow C$.

Esempio 4.2

Si consideri la relazione $Studente = \{Matr, Com, Prov\}$, con $F = \{Matr \rightarrow Com, Matr \rightarrow Prov, Com \rightarrow Prov\}$; essa è in 3FN. Una decomposizione possibile è la seguente:

$$R_1 = \{Matr, Com\} \text{ con } F_1 = \{Matr \rightarrow Com\}$$

$$R_2 = \{Matr, Prov\} \text{ con } F_2 = \{Matr \rightarrow Prov\}$$

entrambe sono in 3FN; si considerino le seguenti istanze di R_1 e R_2

Matr	Com	Matr	Prov
O_1	Marino	O_1	Parma
O_2	Marino	O_2	Latina

e si provi a fare il join naturale per riottenere lo schema di partenza. Ecco il risultato:

Matr	Com	Prov
O_1	Marino	Parma
O_2	Marino	Latina

chiaramente si perde la dipendenza funzionale $Com \rightarrow Prov$.

Una istanza di una relazione contiene i dati di una certa realtà che lo schema della base di dati intende rappresentare e si assumono come riferimenti veritieri. Pertanto quando si decompone uno schema si vuole che ogni sua istanza sia ricostruibile da un'istanza dello schema ottenuto dalla decomposizione.

Proposizione 4.4

Una decomposizione di uno schema di relazione deve avere i seguenti requisiti:

- deve preservare le dipendenze funzionali che valgono su ogni istanza legale dello schema originario;
- deve permettere di ricostruire mediante join naturale ogni istanza legale dello schema originario.

4.4 Chiusura di un insieme di dipendenze funzionali

Quando si decompone uno schema di relazione in R su cui è definito un insieme di dipendenze funzionali F , le dipendenze funzionali che si vogliono preservare sono tutte quelle che sono soddisfatte da ogni istanza legale di R , cioè le dipendenze funzionali in F^+ ; sarà quindi necessario calcolare tale insieme.

4.4.1 L'insieme F^A

Definizione 4.6

Sia R uno schema di relazione e F un insieme di dipendenze funzionali. Sia F^A l'insieme di dipendenze funzionali definito nel modo seguente:

- $f \in F \Rightarrow f \in F^A$;
- $Y \subseteq X \subseteq R \Rightarrow X \rightarrow Y \in F^A$ (**assioma della riflessività**);
- $X \rightarrow Y \in F^A \Rightarrow XZ \rightarrow YZ \in F^A, \forall Z \subseteq R$ (**assioma dell'aumento**);
- $X \rightarrow Y \in F^A, Y \rightarrow Z \in F^A \Rightarrow X \rightarrow Z \in F^A$ (**assioma della transitività**).

Dimostreremo che $F^+ = F^A$, cioè che la chiusura di un insieme di dipendenze funzionali F può essere ottenuta a partire da F applicando ricorsivamente gli assiomi della riflessività, dell'aumento e della transitività, conosciuti come **assiomi di Armstrong**.

Teorema 4.2

Sia F un insieme di dipendenze funzionali. Valgono le seguenti implicazioni:

- **regola dell'unione:** $X \rightarrow Y \in F^A$ e $X \rightarrow Z \in F^A \Rightarrow X \rightarrow YZ \in F^A$
- **regola della decomposizione:** $X \rightarrow Y \in F^A$ e $Z \subseteq Y \Rightarrow X \rightarrow Z \in F^A$
- **regola della pseudotransitività:** $X \rightarrow Y \in F^A$ e $WY \rightarrow Z \in F^A \Rightarrow WX \rightarrow Z \in F^A$.

Dimostrazione.

- *Regola dell'unione.* Se $X \rightarrow Y \in F^A$, per l'assioma dell'aumento si ha $X \rightarrow XY \in F^A$. Analogamente, se $X \rightarrow Z \in F^A$, sempre per l'assioma dell'aumento si ha $XY \rightarrow YZ \in F^A$. Quindi, poiché $X \rightarrow XY \in F^A$ e $XY \rightarrow YZ \in F^A$, per l'assioma della transitività si ha $X \rightarrow YZ \in F^A$.
- *Regola della decomposizione.* Se $Z \subseteq Y$ allora, per l'assioma della riflessività, si ha $Y \rightarrow Z \in F^A$. Quindi, poiché $X \rightarrow Y \in F^A$ e $Y \rightarrow Z \in F^A$, per l'assioma della transitività si ha $X \rightarrow Z \in F^A$.
- *Regola della pseudotransitività.* Se $X \rightarrow Y \in F^A$, per l'assioma dell'aumento si ha $WX \rightarrow WY \in F^A$. Quindi, poiché $WX \rightarrow WY \in F^A$ e $WY \rightarrow Z \in F^A$, per l'assioma della transitività si ha $WX \rightarrow Z \in F^A$. \square

Si osservi che, per la regola dell'unione, se $X \rightarrow A_i \in F^A, \forall i \in \{1, \dots, n\}$, allora $X \rightarrow A_1, A_2, \dots, A_n \in F^A$ e che, per la regola della decomposizione, se $X \rightarrow A_1, A_2, \dots, A_n \in F^A$ allora $X \rightarrow A_i \in F^A, \forall i \in \{1, \dots, n\}$; cioè:

$$X \rightarrow A_1, A_2, \dots, A_n \in F^A \Leftrightarrow X \rightarrow A_i \in F^A, \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Pertanto, possiamo limitarci, quando necessario, a considerare solo dipendenze funzionali in cui il membro destro sia un *singleton* (ovvero un solo attributo).

4.4.2 Chiusura di un insieme di attributi

Allo scopo di dimostrare che $F^+ = F^A$, introduciamo il concetto di *chiusura* di un insieme di attributi rispetto ad un insieme di dipendenze funzionali.

Definizione 4.7

Siano R uno schema di relazione, F un insieme di dipendenze funzionali su R e X un sottoinsieme di R . La chiusura di X rispetto ad F , denotata con X_F^+ (o semplicemente X^+ , se non sorgono ambiguità) è definita nel modo seguente: $X_F^+ = \{A \text{ t.c. } X \rightarrow A \in F^A\}$.

In parole povere, la chiusura di un insieme di attributi X è l'insieme di tutti gli attributi determinati da X tramite dipendenze funzionali in F^A .

Lemma 4.1

Siano R uno schema di relazione ed F un insieme di dipendenze funzionali su R . Si ha che: $Y \subseteq X^+ \Leftrightarrow X \rightarrow Y \in F^A$.

Dimostrazione. Sia $Y = A_1, A_2, \dots, A_n$.

Parte se. Poiché $Y \subseteq X^+$, si ha che $X \rightarrow A_i \in F^A, \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Pertanto, per la regola dell'unione, $X \rightarrow Y \in F^A$.

Parte solo se. Poiché $X \rightarrow Y \in F^A$, per la regola della decomposizione si ha che, $X \rightarrow A_i \in F^A, \forall i \in \{1, \dots, n\}$, cioè $A_i \in X^+, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ e, quindi, $Y \subseteq X^+$. \square

4.4.3 Uguaglianza tra F^A e F^+

Con le conoscenze acquisite finora siamo in grado di dimostrare che $F^+ = F^A$.

Teorema 4.3

Siano R uno schema di relazione ed F un insieme di dipendenze funzionali su R . Si ha che $F^+ = F^A$.

Dimostrazione. Mostriamo che $F^+ \subseteq F^A$ e contemporaneamente $F^+ \supseteq F^A$, equivalente a dire che i due insiemi sono uguali.

$F^+ \subseteq F^A$. Sia $X \rightarrow Y$ una dipendenza funzionale in F^A . Dimostriamo che $X \rightarrow Y \in F^+$ per induzione sul numero i di applicazioni di uno degli assiomi di Armstrong.

Base dell'induzione: $i = 0$. In tal caso $X \rightarrow Y \in F$ e quindi, banalmente, $X \rightarrow Y \in F^+$.

Ipotesi induttiva: Ogni dipendenza funzionale ottenuta a partire da F applicando gli assiomi di Armstrong un numero di volte minore o uguale a $i-1$, con $i > 0$, è in F^+ .

Passo induttivo: all' i -esimo passo si ha $X \rightarrow Y$, che è il risultato di uno dei seguenti tre casi:

- $X \rightarrow Y$ è stata ottenuta mediante l'assioma della riflessività, in tal caso $Y \subseteq X$. Sia r un'istanza di R e siano t_1 e t_2 due tuple di r tali che $t_1[X] = t_2[X]$; banalmente si ha $t_1[Y] = t_2[Y]$. $X \rightarrow Y$ è dunque una dipendenza funzionale *soddisfatta* da ogni istanza legale di R , e per definizione fa parte di F^+ .
- $X \rightarrow Y$ è stata ottenuta applicando l'assioma dell'aumento ad una dipendenza funzionale $V \rightarrow W \in F^A$, quest'ultima già inclusa per ipotesi induttiva in F^+ , in uno dei passaggi precedenti all'attuale i -esimo; si ha quindi che $X = VZ$ e $Y = WZ$, per qualche $Z \subseteq R$. Sia r un'istanza legale di R e siano t_1 e t_2 due tuple di r tali che:
 1. $t_1[X] = t_2[X]$; banalmente si ha che $t_1[V] = t_2[V]$ e $t_1[Z] = t_2[Z]$
 2. per l'ipotesi induttiva da $t_1[V] = t_2[V]$ segue $t_1[W] = t_2[W]$
 3. da $t_1[W] = t_2[W]$ e $t_1[Z] = t_2[Z]$ segue $t_1[Y] = t_2[Y]$
- $X \rightarrow Y$ è stata ottenuta applicando l'assioma della transitività a due dipendenze funzionali $X \rightarrow Z$ e $Z \rightarrow Y \in F^A$, ottenute applicando ricorsivamente gli assiomi di Armstrong un numero di volte minore o uguale a $i-1$. Sia r un'istanza legale di R e siano t_1 e t_2 due tuple di r tali che $t_1[X] = t_2[X]$. Per l'ipotesi induttiva da $t_1[X] = t_2[X]$ segue $t_1[Z] = t_2[Z]$; da $t_1[Z] = t_2[Z]$, ancora per l'ipotesi induttiva, segue $t_1[Y] = t_2[Y]$.

$F^A \subseteq F^+$. Si supponga per assurdo che esista una dipendenza funzionale $X \rightarrow Y \in F^+$ tale che $X \rightarrow Y \notin F^A$. Si mostrerà che esiste un'istanza legale di R che non soddisfa $X \rightarrow Y$ (contraddicendo allora il fatto che $X \rightarrow Y \in F^+$).

Consideriamo la seguente istanza r di R :

X^+				$R - X^+$			
1	1	..	1	1	1	..	1
1	1	..	1	0	0	..	0

Mostriamo che:

- r è un'istanza legale di R . Sia $V \rightarrow W$ una dipendenza funzionale in F e supponiamo per assurdo che non sia soddisfatta da r . In tal caso le due tuple di r devono avere gli stessi valori per V e differenti valori per W ; ciò implica che $V \subseteq X^+$ e $W \cap (R - X^+) \neq \emptyset$. Poiché $V \subseteq X^+$, per il [LEMMA 4.1](#), si ha che $X \rightarrow V \in F^A$; pertanto, per l'assioma della transitività, $X \rightarrow W \in F^A$ e, quindi, per il [Lemma 4.1](#), $W \subseteq X^+$ (che contraddice $W \cap (R - X^+) \neq \emptyset$).

- r non soddisfa $X \rightarrow Y$. Supponiamo per assurdo che r soddisfi $X \rightarrow Y$. Poiché $X \subseteq X^+$ (per l'assioma della riflessività), le due tuple di r coincidono sugli attributi X e quindi, poiché r soddisfa $X \rightarrow Y$, devono coincidere anche sugli attributi Y . Questo implica che $Y \subseteq X^+$ e quindi, per il Lemma 4.1, che $X \rightarrow Y \in F^A$. \square

4.4.4 Algoritmo per calcolare X^+

Per stabilire se una decomposizione preserva F^+ , quest'ultimo va calcolato. Tale operazione potrebbe tuttavia richiedere tempo esponenziale dipendente da $|F|$; se $F = \{A \rightarrow B_1, A \rightarrow B_2, \dots, A \rightarrow B_n\}$, con $|F| = n$, per le regole della decomposizione e dell'unione si ha che $F^+ \supseteq \{A \rightarrow Z \text{ t.c. } Z \subseteq B_1 B_2 \dots B_n\}$ e quindi $|F^+| = 2^n - 1$. D'altra parte, per sapere se una decomposizione preserva le dipendenze, è sufficiente poter decidere se una dipendenza funzionale $X \rightarrow Y \in F^+$; ciò può essere fatto calcolando X^+ e verificando se $Y \subseteq X^+$. Il calcolo di X^+ può essere fatto mediante il seguente algoritmo polinomiale.

Algoritmo 4.1

INPUT: uno schema di relazione R , un insieme F di dipendenze funzionali su R , un sottoinsieme X di R .

OUTPUT: X_F^+ nella variabile Z

```

BEGIN
  Z := X;
  S := {A t.c. Y → V ∈ F ∧ A ∈ V ∧ Y ⊆ Z};
  WHILE S ⊄ Z
    BEGIN
      Z := Z ∪ S;
      S := {A t.c. Y → V ∈ F ∧ A ∈ V ∧ Y ⊆ Z};
    END
  END

```

Teorema 4.4

L'Algoritmo 4.1 calcola correttamente la chiusura di un insieme di attributi X rispetto ad un insieme F di dipendenze funzionali.

Dimostrazione. Si indichi con $Z^{(0)}$ il valore iniziale di Z (ovvero $Z^{(0)} = X$) e con $Z^{(i)}$ ed $S^{(i)}$, $i \geq 1$, i valori di Z ed S dopo l' i -esima esecuzione del corpo del ciclo; è facile vedere che $Z^{(i)} \subseteq Z^{(i+1)}$, $\forall i$. Sia j tale che $S^{(j)} \subseteq Z^{(j)}$ (cioè $Z^{(j)}$ è il valore di Z quando l'algoritmo termina); si proverà che:

$$A \in X^+ \Leftrightarrow A \in Z^{(j)}$$

Parte solo se. Verrà dimostrato per induzione su i che $Z^{(i)} \subseteq X^+$, $\forall i$, e quindi, in particolare $Z^{(j)} \subseteq X^+$.

Base dell'induzione: $i = 0$. Poiché $Z^{(0)} = X$ e $X \subseteq X^+$, si ha $Z^{(0)} \subseteq X^+$.

Induzione: $i > 0$. Per l'ipotesi induttiva $Z^{(i-1)} \subseteq X^+$. Sia A un attributo in $Z^{(i)} - Z^{(i-1)}$; deve esistere una dipendenza $Y \rightarrow V \in F$ tale che $Y \subseteq Z^{(i-1)}$ e $A \in V$. Poiché $Y \subseteq Z^{(i-1)}$, per l'ipotesi induttiva si ha che $Y \subseteq X^+$; pertanto, per il [LEMMA 4.1](#), $X \rightarrow Y \in F^A$. Poiché $X \rightarrow Y \in F^A$ e $Y \rightarrow V \in F$, per l'assioma della transitività si ha $X \rightarrow V \in F^A$ e quindi, per il Lemma 4.1, $V \subseteq X^+$. Pertanto, $\forall A \in Z^{(i)} - Z^{(i-1)}$ si ha $A \in X^+$. Da ciò segue, per l'ipotesi induttiva, che $Z^{(i)} \subseteq X^+$.

Parte se. Sia A un attributo in X^+ . Mostreremo che $A \in Z^{(j)}$. Poiché $A \in X^+$, si ha $X \rightarrow A \in F^+$ (per il [TEOREMA 4.3](#)); pertanto $X \rightarrow A$ deve essere soddisfatta da ogni istanza legale di R . Si consideri la seguente istanza r di R :

$Z^{(0)}$				$R - Z^{(0)}$			
1	1	..	1	1	1	..	1
1	1	..	1	0	0	..	0

Mostriamo che r è un'istanza legale di R . Infatti, se, per assurdo, esistesse in F una dipendenza funzionale $V \rightarrow W$ non soddisfatta da r , si dovrebbe avere $V \subseteq Z^{(j)}$ e $W \cap (R - Z^{(j)}) \neq \emptyset$; ma, in tal caso, si avrebbe $S^{(j)} \not\subseteq Z^{(j)}$ (contraddizione). Poiché r è un'istanza legale di R deve soddisfare $X \rightarrow A$; ma, allora, poiché $X = Z^{(0)} \subseteq Z^{(j)}$, A deve essere in $Z^{(j)}$. \square

4.5 Decomposizioni che preservano le dipendenze funzionali

Si vuole ora formalizzare il concetto di decomposizione che “preserva un insieme di dipendenze funzionali”. A tal fine, cominciamo con l'introdurre i concetti di *decomposizione* di uno schema di relazione ed *equivalenza* tra due insiemi di dipendenze funzionali.

Definizione 4.8

Sia R uno schema di relazione. Una decomposizione di R è una *famiglia* $\rho = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$ di sottoinsiemi di R che *ricopre* R ($\bigcup_{i=1}^k R_i = R$).

4.5.1 Equivalenza tra due insiemi di dipendenze funzionali

Definizione 4.9

Siano F e G due insiemi di dipendenze funzionali. F e G sono *equivalenti*, in simboli $F \equiv G$, se $F^+ = G^+$.

Verificare l'equivalenza di due insiemi F e G di dipendenze funzionali richiede dunque che venga verificata l'uguaglianza di F^+ e G^+ , cioè che $F^+ \subseteq G^+$ e contemporaneamente $F^+ \supseteq G^+$. Come detto in precedenza, calcolare la chiusura di un insieme di dipendenze funzionali può richiedere tempo esponenziale. Il seguente lemma ci permette tuttavia di verificare l'equivalenza dei due insiemi di dipendenze funzionali in tempo polinomiale.

Lemma 4.2

Siano F e G due insiemi di dipendenze funzionali. $F \subseteq G^+ \Rightarrow F^+ \subseteq G^+$.

Dimostrazione. Sia $f \in (F^+ - F)$. Poiché, per il [TEOREMA 4.3](#), f è derivabile da F mediante gli assiomi di Armstrong e ogni dipendenza funzionale in F è derivabile da G mediante gli assiomi di Armstrong, f è derivabile da G mediante gli assiomi di Armstrong. \square

Definizione 4.10

Sia R uno schema di relazione, F un insieme di dipendenze funzionali su R e $\rho = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$ una decomposizione di R . Diciamo che ρ *preserva* F se $F \equiv \bigcup_{i=1}^k \pi_{R_i}(F)$, dove $\pi_{R_i}(F) = \{X \rightarrow Y \text{ t.c. } X \rightarrow Y \in F^+ \wedge XY \subseteq R_i\}$.

4.5.2 Algoritmo per verificare l'equivalenza tra F e G

Verificare se una decomposizione preserva un insieme di dipendenze funzionali F richiede, dunque, che venga verificata l'equivalenza dei due insiemi di dipendenze funzionali F e $G = \bigcup_{i=1}^k \pi_{R_i}(F)$; poiché, per definizione, $F^+ \supseteq G$, per il Lemma 2 è sufficiente verificare che $F \subseteq G^+$; ciò può essere fatto con il seguente algoritmo (la cui correttezza è una banale conseguenza del Lemma 4.1 e del Teorema 3).

Algoritmo 4.2

```

INPUT: due insiemi  $F$  e  $G$  di dipendenze funzionali su  $R$ ;
OUTPUT: la variabile successo che avrà valore TRUE se  $F \subseteq G^+$ , FALSE altrimenti;
BEGIN
  successo := true;
  FOR EACH  $X \rightarrow Y \in F$ 
  BEGIN
    calcola  $X_G^+$ ;
    IF  $Y \not\subseteq X_G^+$  THEN successo = false;
  END

```


END

L'Algoritmo 2 richiede che venga calcolato X_G^+ ; se si volesse utilizzare a tale scopo l'Algoritmo 1 si dovrebbe prima calcolare G , ma, per la definizione di G , ciò richiederebbe il calcolo di F^+ che richiede tempo esponenziale. Il seguente algoritmo permette di calcolare X_G^+ a partire da F .

Algoritmo 4.3

INPUT: uno schema di relazione R , un insieme F di dipendenze funzionali su R , una decomposizione $\rho = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$ di R , un sottoinsieme X di R ;

OUTPUT: la chiusura di X rispetto a $G = \bigcup_{j=1}^k \pi_{R_j}(F)$, (nella variabile Z);

```

BEGIN  $Z := X$ ;
 $S := \emptyset$ ;
FOR  $j := 1$  TO  $k$ 
   $S := S \cup (Z \cap R_j)_F^+ \cap R_j$ ;
WHILE  $S \not\subseteq Z$ 
  BEGIN
     $Z := Z \cup S$ ;
    FOR  $j := 1$  TO  $k$ 
       $S := S \cup (Z \cap R_j)_F^+ \cap R_j$ ;
    END
  END
END

```

Teorema 4.5

Sia R uno schema di relazione, F un insieme di dipendenze funzionali su R , $\rho = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$ una decomposizione di R e X un sottoinsieme di R . L'Algoritmo 4.3 calcola correttamente X_G^+ , dove $G = \bigcup_{j=1}^k \pi_{R_j}(F)$.

Dimostrazione. Indichiamo con $Z^{(0)}$ il valore iniziale di Z ($Z^{(0)} = X$) e con $Z^{(i)}$, $i \geq 1$, il valore di Z dopo l' i -esima esecuzione dell'assegnazione $Z := Z \cup S$; è facile vedere che $Z^{(i)} \subseteq Z^{(i+1)}$, $\forall i$. Sia $Z^{(f)}$ il valore di Z quando l'algoritmo termina; proveremo che:

$$A \in X_G^+ \Leftrightarrow A \in Z^{(f)}$$

Parte solo se. Mostriamo per induzione su i che $Z^{(i)} \subseteq X_G^+$, $\forall i$.

Base dell'induzione: $i = 0$. Poiché $Z^{(0)} = X$ e $X \subseteq X^+$, si ha $Z^{(0)} \subseteq X_G^+$.

Induzione: $i > 0$. Per l'ipotesi induttiva $Z^{(i-1)} \subseteq X_G^+$. Sia A un attributo in $Z^{(i)} - Z^{(i-1)}$; in tal caso deve esistere un indice j tale che $A \in (Z^{(i-1)} \cap R_j)_F^+ \cap R_j$. Poiché $A \in (Z^{(i-1)} \cap R_j)_F^+$ si ha $(Z^{(i-1)} \cap R_j) \rightarrow A \in F^+$ (per il Teorema 4.3).

Poiché $(Z^{(i-1)} \cap R_j) \rightarrow A \in F^+$, $A \in R_j$ e $Z^{(i-1)} \cap R_j \subseteq R_j$ si ha, per la definizione di G , che $(Z^{(i-1)} \cap R_j) \rightarrow A \in G$. Poiché per l'ipotesi induttiva si ha che $X \rightarrow Z^{(i-1)} \in G^+$, per la regola di decomposizione si ha anche che $X \rightarrow (Z^{(i-1)} \cap R_j) \in G^+$ e, quindi, per l'assioma della transitività, che $X \rightarrow A \in G^+$, cioè $A \in X_G^+$. Quindi $Z^{(i)} \subseteq X_G^+$.

Parte se. Mostriamo che $X_G^+ \subseteq Z^{(f)}$ tenendo conto anche della seguente proposizione:

Proposizione 4.5

Presi comunque due insiemi di attributi X ed Y e un insieme di dipendenze funzionali F si ha, per la definizione di chiusura di un insieme di attributi, $X \subseteq Y \Rightarrow X_F^+ \subseteq Y_F^+$.

Poichè $X = Z^{(0)} \subseteq Z^{(f)}$, dalla Proposizione 4.5 segue che $X_G^+ \subseteq (Z^{(f)})_G^+$. Mostriamo che $Z^{(f)} = (Z^{(f)})_G^+$ da cui segue $X_G^+ \subseteq Z^{(f)}$.

Supponiamo per assurdo che $Z^{(f)} \neq (Z^{(f)})_G^+$. Consideriamo l'Algoritmo 4.1 che, per evitare ambiguità, riscriviamo sostituendo la variabile W alla variabile Z e la variabile U alla variabile S :

INPUT: uno schema di relazione R , un insieme F di dipendenze funzionali su R , un sottoinsieme X di R .

OUTPUT: X_F^+ nella variabile W

```

BEGIN
 $W := X;$ 
 $U := \{A \text{ t.c. } Y \rightarrow V \in F \wedge A \in V \wedge Y \subseteq W\};$ 
WHILE  $U \not\subseteq W$ 
  BEGIN
     $W := W \cup U;$ 
     $U := \{A \text{ t.c. } Y \rightarrow V \in F \wedge A \in V \wedge Y \subseteq W\};$ 
  END
END

```

Se eseguiamo tale algoritmo fornendo in input l'insieme di attributi $Z^{(f)}$ e l'insieme di dipendenze funzionali G , al termine la variabile W conterrà $(Z^{(f)})_G^+$. Se, come abbiamo supposto per assurdo, $Z^{(f)} \neq (Z^{(f)})_G^+$, deve esistere un attributo B che appartiene a $U^{(0)}$ e non appartiene a $W^{(0)} = Z^{(f)}$ (altrimenti si avrebbe $Z^{(f)} = (Z^{(f)})_G^+$). D'altra parte si ha:

$$U^{(0)} = \{A \text{ t.c. } Y \rightarrow V \in G \wedge A \in V \wedge Y \subseteq W^{(0)}\}$$

e quindi, per la definizione di G , deve esistere j tale che:

$$B \in \{A \text{ t.c. } Y \rightarrow V \in F^+ \wedge A \in V \wedge Y \subseteq W^{(0)} \wedge YV \subseteq R_j\}$$

Da $Y \subseteq W^{(0)} \wedge YV \subseteq R_j$ segue che:

$$[a] \ Y \subseteq W^{(0)} \cap R_j = Z^{(f)} \cap R_j$$

Inoltre dal fatto che $Y \rightarrow V \in F^+$ segue, per il [LEMMA 4.1](#), che $V \subseteq Y_F^+$ e, quindi, per la [a] e per la Proposizione 4.5 si ha che $V \subseteq (Z^{(f)} \cap R_j)_F^+$. Infine poichè $YV \subseteq R_j$ si ha:

$$V \subseteq (Z^{(f)} \cap R_j)_F^+ \cap R_j$$

Poichè $B \in V$ si ha che $B \in (Z^{(f)} \cap R_j)_F^+ \cap R_j$ e quindi $B \in S^{(f)}$. Poichè B non appartiene a $Z^{(f)}$ (per l'ipotesi per assurdo), $Z^{(f)}$ non può essere il valore finale di Z (contraddizione). \square

4.6 Decomposizioni con Join senza perdita

Come è stato ribadito nel paragrafo 4.3, se si decompone uno schema di relazione R che non è in 3NF si vuole che la decomposizione $\{R_1, R_2, \dots, R_k\}$ ottenuta sia tale che ogni istanza legale r di R sia ricostruibile mediante join naturale (il cui simbolo ricordiamo essere \bowtie) da un'istanza legale $\{r_1, r_2, \dots, r_k\}$ dello schema decomposto $\{R_1, R_2, \dots, R_k\}$. Poichè per ricostruire una tupla t di r è necessario che $t[R_i] \in R_i, \forall i \in \{1, \dots, k\}$, si deve avere $r_i = \pi_{R_i}(r), \forall i \in \{1, \dots, k\}$.

Definizione 4.11

Sia R uno schema di relazione. Una decomposizione $\rho = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$ di R ha un *join senza perdita* se per ogni istanza legale r di R si ha $r = \pi_{R_1}(r) \bowtie \pi_{R_2}(r) \bowtie \dots \bowtie \pi_{R_k}(r)$.

Teorema 4.6

Sia R uno schema di relazione e $\rho = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$ una decomposizione di R . Per ogni istanza legale r di R , indicato con $m_\rho(r) = \pi_{R_1}(r) \bowtie \pi_{R_2}(r) \bowtie \dots \bowtie \pi_{R_k}(r)$, si ha:

1. $r \subseteq m_\rho(r)$
2. $\pi_{R_i}(m_\rho(r)) = \pi_{R_i}(r)$
3. $m_\rho(m_\rho(r)) = m_\rho(r)$

Dimostrazione.

Prova di [1]. Sia t una tupla di r . $\forall i \in \{1, \dots, k\}, t[R_i] \in \pi_{R_i}(r)$ e quindi $t \in m_\rho(r)$.

Prova di [2]. Per il punto [1] si ha $r \subseteq m_\rho(r)$ e, quindi, $\pi_{R_i}(r) \subseteq \pi_{R_i}(m_\rho(r))$. E' sufficiente, pertanto, mostrare che $\pi_{R_i}(r) \supseteq \pi_{R_i}(m_\rho(r))$. Banalmente, per ogni tupla $t \in m_\rho(r)$ e per ogni $i \in \{1, \dots, k\}$, deve esistere una tupla $t' \in r$ t.c. $t[R_i] = t'[R_i]$.

Prova di [3]. Per il punto [2] si ha $\pi_{R_i}(m_\rho(r)) = \pi_{R_i}(r)$. Pertanto

$$m_\rho(m_\rho(r)) = \pi_{R_1}(m_\rho(r)) \bowtie \dots \bowtie \pi_{R_k}(m_\rho(r)) = \pi_{R_1}(r) \bowtie \dots \bowtie \pi_{R_k}(r) = m_\rho(r).$$

□

Il seguente algoritmo permette di decidere in tempo polinomiale se una decomposizione di uno schema di relazione ha un join senza perdita.

Algoritmo 4.4

INPUT: uno schema di relazione R , un insieme F di dipendenze funzionali su R , una decomposizione $\rho = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$ di R ;

OUTPUT: decide se ρ ha un join senza perdita;

BEGIN

Costruisci una tabella r nel modo seguente:

- r ha $|R|$ colonne e $|\rho|$ righe
- all'incrocio dell' i -esima riga e della j -esima colonna si metta:
 - il simbolo a_j se l'attributo $A_j \in R_i$;
 - il simbolo $b_{i,j}$ altrimenti;

REPEAT

FOR EACH $X \rightarrow Y \in F$

DO

IF $\exists \{t_1, t_2\} \in r$ t.c. $t_1[X] = t_2[X] \wedge t_1[Y] \neq t_2[Y]$ THEN

FOR EACH $A_j \in Y$

IF $t_1[A_j] = 'a_j'$ THEN $t_2[A_j] := t_1[A_j]$;

ELSE $t_1[A_j] := t_2[A_j]$;

UNTIL r ha una riga con tutte 'a' OR r non è cambiato;

IF r ha una riga con tutte 'a' THEN

ρ ha un join senza perdita;

ELSE

ρ non ha un join senza perdita;

END

Il seguente esempio mostra come tale algoritmo viene applicato.

Esempio 4.3

Sia $R = ABCDE$ uno schema di relazione, $F = \{C \rightarrow D, DH \rightarrow C, D \rightarrow H, A \rightarrow BC\}$ un insieme di dipendenze funzionali su R e $\rho = \{AE, ABDH, CDE\}$ una scomposizione di R . Quello che vogliamo sapere è: ρ ha un join senza perdita?

Come indicato dall'Algoritmo 4.4, si costruisca una tabella che ha come colonne gli attributi di R e come righe le varie relazioni in ρ , inserendo poi in ogni cella uno dei due simboli indicati nell'algoritmo, secondo il criterio specificato. Nella cella individuata dalla prima colonna e dalla prima riga, ad esempio, va messo il simbolo a_1 visto che l'attributo A rappresentante la prima colonna è presente nella relazione rappresentante la prima riga; nella seconda colonna, prima riga, la cella contiene $b_{1,2}$ poiché B non è presente in AE .

	A	B	C	D	E	H
AE	a_1	$b_{1,2}$	$b_{1,3}$	$b_{1,4}$	a_5	$b_{1,6}$
ABDH	a_1	a_2	$b_{2,3}$	a_4	$b_{2,5}$	a_6
CDE	$b_{3,1}$	$b_{3,2}$	a_3	a_4	a_5	$b_{3,6}$

Ora, per ogni dipendenza funzionale $A \rightarrow Y \in F$, controlliamo se ci sono due righe (tuple) t_1 e t_2 tali che $t_1[X] = t_2[X]$ e $t_1[Y] \neq t_2[Y]$. In questo caso abbiamo le dipendenze funzionali $D \rightarrow H$ e $A \rightarrow BC$ verifica tale condizione; per convenienza conviene segnare, ad ogni iterazione dell'algoritmo, quali dipendenze funzionali verifichino la suddetta condizione. Usiamo

la seguente tabella dove le colonne sono le iterazioni, e le righe rappresentano le dipendenze funzionali. Inseriremo una “✓” quando una dipendenza funzionale verifica la condizione; “.” altrimenti:

	I_1
$C \rightarrow D$.
$DH \rightarrow C$.
$D \rightarrow H$	✓
$A \rightarrow BC$	✓

Tornando alla tabella precedente, visto che l’ultima dipendenza funzionale verifica la condizione cercata nelle righe 1 e 2, andiamo a modificare i valori di ogni attributo Y , in questo caso $Y = BC$; dato che $t_1[B] \neq a_j$ abbiamo che il valore della cella diviene uguale a $t_2[B]$, mentre $t_1[C] := t_2[C]$. Dopo queste modifiche, al termine della **prima iterazione** si ha la seguente situazione:

	A	B	C	D	E	H
AE	a_1	a₂	b_{2,3}	$b_{1,4}$	a_5	$b_{1,6}$
ABDH	a_1	a_2	$b_{2,3}$	a_4	$b_{2,5}$	a_6
CDE	$b_{3,1}$	$b_{3,2}$	a_3	a_4	a_5	a₆

	I_1
$C \rightarrow D$.
$DH \rightarrow C$.
$D \rightarrow H$	✓
$A \rightarrow BC$	✓

L’algoritmo non ha terminato la sua esecuzione perché non ha riscontrato una condizione di uscita (una riga con tutte “a” o l’ultima iterazione eseguita non ha apportato nessun cambiamento). Procediamo quindi con le successive iterazioni.

Iterazione 2

	A	B	C	D	E	H
AE	a_1	a_2	$b_{2,3}$	a₄	a_5	$b_{1,6}$
ABDH	a_1	a_2	a₃	a_4	$b_{2,5}$	a_6
CDE	$b_{3,1}$	$b_{3,2}$	a_3	a_4	a_5	a_6

	I_1	I_2
$C \rightarrow D$.	✓
$DH \rightarrow C$.	✓
$D \rightarrow H$	✓	.
$A \rightarrow BC$	✓	.

Iterazione 3

	A	B	C	D	E	H
AE	a_1	a_2	a₃	a_4	a_5	a₆
ABDH	a_1	a_2	a_3	a_4	$b_{2,5}$	a_6
CDE	$b_{3,1}$	$b_{3,2}$	a_3	a_4	a_5	a_6

	I_1	I_2	I_3
$C \rightarrow D$.	✓	.
$DH \rightarrow C$.	✓	.
$D \rightarrow H$	✓	.	✓
$A \rightarrow BC$	✓	.	✓

Alla fine della terza iterazione ci accorgiamo che la prima riga è composta da soli elementi a_j , quindi l’algoritmo termina indicando che ρ ha un join senza perdita.

Teorema 4.7

Sia R uno schema di relazione, F un insieme di dipendenze funzionali su R e $\rho = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$ una decomposizione di R . L’Algoritmo 4.4 decide correttamente se ρ ha un join senza perdita.

Dimostrazione. Occorre dimostrare che: quando l’algoritmo termina la tabella r ha una tupla con tutte ‘a’ $\Leftrightarrow \rho$ ha un join senza perdita. Verrà dimostrata solo la parte “solo se” (per uno sketch della prova della parte “se” consultare il testo di Ullman).

Parte solo se. Supponiamo per assurdo ρ abbia un join senza perdita e che quando l’algoritmo termina la tabella r non abbia una tupla con tutte ‘a’. La tabella r può essere interpretata come

un'istanza legale di R (basta sostituire ai simboli 'a' e 'b' valori presi dai domini dei corrispondenti attributi in modo tale che ad uno stesso simbolo venga sostituito lo stesso valore) in quanto l'algoritmo termina quando non ci sono più violazioni delle dipendenze in F . Poiché nessun simbolo 'a' che compare nella tabella costruita inizialmente viene mai modificato dall'algoritmo, per ogni $i \in \{1, \dots, k\}$, $\pi_{R_i}(r)$ contiene una tupla con tutte 'a'; pertanto $m_\rho(r)$ contiene una tupla con tutte 'a' e, quindi, $m_\rho(r) \neq r$ (contraddizione).

Corollario 4.1

Sia R uno schema di relazione, F un insieme di dipendenze funzionali su R e $\rho = \{R_1, R_2\}$ una decomposizione di R .

$(R_1 \cap R_2) \rightarrow (R_1 - R_2) \vee (R_1 \cap R_2) \rightarrow (R_2 - R_1) \Rightarrow \rho$ ha un join senza perdita.

4.7 Decomposizioni in 3NF che conservano la dipendenze funzionali e hanno un join senza perdita

In questo paragrafo mostreremo che:

Proposizione 4.6

Dato uno schema di relazione R e un insieme di dipendenze funzionali F su R esiste sempre una decomposizione $\rho = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$ di R tale che:

- $\forall i, i \in \{1, \dots, k\}$, R_i è in 3NF;
- preserva F ;
- ρ ha un join senza perdita

e che una tale decomposizione può essere calcolata in tempo polinomiale.

A tal fine abbiamo bisogno di introdurre il concetto di copertura minimale di un insieme di dipendenze funzionali.

Definizione 4.12

Sia F un insieme di dipendenze funzionali. Una *copertura minimale* di F è un insieme G di dipendenze funzionali equivalente ad F tale che:

1. per ogni dipendenza funzionale in G la parte destra è un singleton, cioè è costituita da un unico attributo (ogni attributo nella parte destra è non ridondante);
2. $\nexists X \rightarrow A \in G$ t.c. $\exists X' \subseteq X$ t.c. $G \equiv G - \{X \rightarrow A\} \cup \{X' \rightarrow A\}$ (ogni attributo nella parte sinistra è non ridondante);
3. $\nexists X \rightarrow A \in G$ t.c. $G \equiv G - \{X \rightarrow A\}$ (ogni dipendenza è non ridondante).

Per ogni insieme di dipendenze funzionali F esiste una copertura minimale che può essere ottenuta in tempo polinomiale a partire dall'insieme G equivalente ad F in cui per ogni dipendenza funzionale la parte destra è un singleton (G esiste sempre per la regola della decomposizione)

- prima sostituendo ricorsivamente ogni dipendenza funzionale $A_1, \dots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \dots, A_n \rightarrow A$ tale che $G \equiv G - \{A_1, \dots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \dots, A_n \rightarrow A\} \cup \{A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n \rightarrow A\}$ con la dipendenza funzionale $\{A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n \rightarrow A\}$
- e successivamente eliminando ricorsivamente ogni dipendenza funzionale $X \rightarrow A$ t.c. $G \equiv G - \{X \rightarrow A\}$.

Il seguente algoritmo, dato uno schema di relazione R e un insieme di dipendenze funzionali F su R , che è una copertura minimale, permette di calcolare in tempo polinomiale una decomposizione $\rho = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$ di R tale che:

- $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, R_i è in 3NF;
- ρ preserva F .

Algoritmo 4.5

INPUT: uno schema di relazione R e un insieme F di dipendenze funzionali su R , che è una copertura minimale;

OUTPUT: una decomposizione ρ di R che preserva F e tale che per ogni schema di relazione in ρ è in 3NF;

```

BEGIN
 $S := \emptyset$ ;
FOR EACH  $A \in R$  tale che  $A$  non è coinvolto in nessuna dipendenza funzionale in  $F$  DO
     $S := S \cup \{A\}$ ;
IF  $S \neq \emptyset$  THEN
    BEGIN
         $R := R - S$ ;
         $\rho := \rho \cup \{S\}$ ;
    END
IF esiste una dipendenza funzionale in  $F$  che coinvolge tutti gli attributi in  $R$  THEN
     $\rho := \rho \cup \{R\}$ ;
ELSE
    FOR EACH  $X \rightarrow A \in F$  DO  $\rho := \rho \cup \{XA\}$ 
END

```

Teorema 4.8

Sia R uno schema di relazione ed F un insieme di dipendenze funzionali su R , che è una copertura minimale. L'Algoritmo 4.5 permette di calcolare in tempo polinomiale una decomposizione ρ di R tale che:

1. ogni schema di relazione in ρ è in 3NF
2. preserva F .

Dimostrazione.

ρ preserva F . Sia $G = \bigcup_{i=1}^k \pi_{R_i}(F)$. Poiché per ogni dipendenza funzionale $X \rightarrow A \in F$ si ha che $XA \in \rho$, si ha che $G \supseteq F$ e, quindi $G^+ \supseteq F^+$. L'inclusione $G^+ \subseteq F^+$ è banalmente verificata in quanto per definizione, $G \subseteq F^+$.

Ogni schema di relazione in ρ è in 3NF. Se $S \in \rho$, ogni attributo in S fa parte della chiave e quindi, banalmente, S è in 3NF. Se $R \in \rho$ esiste una dipendenza funzionale in F che coinvolge tutti gli attributi in R . Poiché F è una copertura minimale tale dipendenza avrà la forma $R - A \rightarrow A$; poiché F è una copertura minimale, non ci può essere una dipendenza funzionale $X \rightarrow A \in F^+$ t.c. $X \subset R - A$ e, quindi, $R - A$ è chiave in R . Sia $Y \rightarrow B$ una qualsiasi dipendenza in F^+ ; se $B = A$ allora, poiché F è una copertura minimale, $Y = R - A$ (cioè, Y è una superchiave); se $B \neq A$ allora $B \in R - A$ e quindi B è primo. Se $XA \in \rho$, poiché F è una copertura minimale, non ci può essere una dipendenza funzionale $X' \rightarrow A \in F^+$ t.c. $X' \subset X$ e, quindi, X è chiave in XA . Sia $Y \rightarrow B$ una qualsiasi dipendenza in F^+ tale che $YB \subseteq XA$; se $B = A$ allora, poiché F è una copertura minimale, $Y = X$ (cioè, Y è una superchiave); se $B \neq A$ allora $B \in X$ e quindi B è primo.

Teorema 4.9

Sia R uno schema di relazione, F un insieme di dipendenze funzionali su R , che è una copertura minimale e ρ la decomposizione di R prodotta dall'Algoritmo 4.5. La decomposizione $\sigma = \rho \cup \{K\}$, dove K è una chiave per R , è tale che:

1. ogni schema di relazione in σ è in 3NF
2. σ preserva F
3. σ ha un join senza perdita.

Dimostrazione.

σ preserva F . Sia $\sigma = \{R_1, R_2, \dots, R_k, R_{k+1}\}$ dove $\rho = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$ è la decomposizione

ottenuta mediante l'Algoritmo 4.5 e $R_{k+1} = K$. Sia $G' = \bigcup_{i=1}^{k+1} \{X \rightarrow Y \in F^+ \text{ t.c. } XY \in R_i\}$. Poiché per il Teorema 4.8 $F \equiv G$, dove $G = \bigcup_{i=1}^k \{X \rightarrow Y \in F^+ \text{ t.c. } XY \in R_i\}$, è sufficiente dimostrare che $G \equiv G'$, cioè, per il LEMMA 2, che $G \subseteq (G')^+$ e $G' \subseteq G^+$. Infatti, $G \subseteq G'$ e quindi $G \subseteq (G')^+$. Inoltre, per definizione, $G' \subseteq F^+$; poiché $F^+ = G^+$, si ha che $G' \subseteq G^+$.

Ogni schema di relazione in σ è in 3NF. Poiché $\sigma = \rho \cup \{K\}$, è sufficiente verificare che lo schema di relazione K è in 3NF. Mostriamo che K è chiave per lo schema K . Supponiamo per assurdo che K non sia chiave per lo schema K ; allora esiste un sottoinsieme proprio $K' \subset K$ tale che $K' \rightarrow K \in F^+$; poiché K è chiave per lo schema R , $K \rightarrow R \in F^+$; pertanto per transitività $K' \rightarrow R \in F^+$, che contraddice il fatto che K è chiave per lo schema R . Pertanto, è chiave per lo schema K e quindi per ogni dipendenza funzionale $X \rightarrow A \in F^+$ con $XA \subseteq K$, A è primo.

σ ha un join senza perdita. Supponiamo che l'ordine in cui gli attributi in $R - K$ vengono aggiunti a Z dall'Algoritmo 4.1 quando calcola K^+ sia A_1, A_2, \dots, A_n , e supponiamo che per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, l'attributo A_i venga aggiunto a Z a causa della presenza in F della dipendenza $Y_i \rightarrow A_i$ dove

$$Y_i \rightarrow Z^{(i-1)} = KA_1A_2 \dots A_{i-1} \subseteq K^+.$$

Per dimostrare che ρ ha un join senza perdita mostreremo che quando l'Algoritmo 4.4 è applicato a ρ viene prodotta una tabella che ha una riga con tutte 'a'. Senza perdita di generalità, supponiamo che l'Algoritmo 4.4 esamini le dipendenze funzionali $Y_1 \rightarrow A_1, Y_2 \rightarrow A_2, \dots, Y_n \rightarrow A_n$ in questo ordine. Dimosteremo per induzione su i che dopo che è stata considerata la dipendenza funzionale $Y_i \rightarrow A_i$ nella riga che corrisponde allo schema di relazione K c'è una 'a' in ogni colonna j con $j \leq i$.

Base dell'induzione: $i = 1$. Poiché $Y_1 \subseteq Z^{(0)} = K$, sia nella riga che corrisponde allo schema di relazione Y_1A_1 che in quella che corrisponde allo schema di relazione K ci sono tutte 'a' in corrispondenza agli attributi in Y_1 ; inoltre nella riga che corrisponde allo schema di relazione Y_1A_1 c'è una 'a' in corrispondenza ad A_1 . Pertanto l'Algoritmo 4.4 pone una 'a' in corrispondenza ad A_1 nella riga che corrisponde allo schema di relazione K .

Induzione: $i > 1$. Per l'ipotesi induttiva, nella riga che corrisponde allo schema di relazione K c'è una 'a' in corrispondenza ad ogni attributo A_j con $j \leq i - 1$. Poiché $Y_i \subseteq KA_1A_2 \dots A_{i-1}$, sia nella riga che corrisponde allo schema di relazione Y_iA_i che in quella che corrisponde allo schema di relazione K ci sono tutte 'a' in corrispondenza agli attributi in Y_i ; inoltre nella riga che corrisponde allo schema di relazione Y_iA_i c'è una 'a' in corrispondenza ad A_i . Pertanto l'Algoritmo 4.4 pone una 'a' in corrispondenza ad A_i nella riga che corrisponde allo schema di relazione K . \square

4.8 La forma normale di Boyce-Codd

ATTENZIONE! Questo paragrafo non è stato trattato nel corso relativo all'anno 2014/2015.

Successivamente alla terza forma normale sono state definite altre forme normali per gli schemi di relazione, alcune delle quali sono basate su vincoli (dipendenze multivalore e dipendenze di join) più generali delle dipendenze funzionali. Una forma normale che ancora si basa sul concetto di dipendenza funzionale è la cosiddetta forma normale di Boyce-Codd.

Definizione 4.13

Siano R uno schema di relazione e F un insieme di dipendenze funzionali su R . R è in forma normale di Boyce-Codd se per ogni dipendenza funzionale $X \rightarrow A \in F^+$ tale che $A \notin X$ si ha che X è una superchiave.

Come è evidente dalla definizione, la forma normale di Boyce-Codd è più restrittiva della terza forma normale: ogni schema di relazione in forma normale di Boyce-Codd è in terza forma normale, ma non è vero il viceversa. Infatti, consideriamo il seguente schema di relazione,

$$\text{Orario-lezioni} = \{Aula, \text{Giorno}, \text{Ora}, \text{Corso}\}$$

su cui sono definite le seguenti dipendenze funzionali

$Aula \rightarrow \text{Giorno}, \text{Ora} \rightarrow \text{Corso}$ (in una certa aula in un certo giorno ad una certa ora viene tenuto un solo corso)

$\text{Corso} \rightarrow \text{Aula}$ (un corso viene tenuto sempre nella stessa aula).

Poiché la chiave di *Orario_Lezioni* è $\{Aula\}$, nella dipendenza funzionale $Corso \rightarrow Aula$ la parte sinistra non è una superchiave e, quindi, lo schema di relazione *Orario_Lezioni* non è in forma normale di Boyce-Codd pur essendo in terza forma normale. In uno schema che non è in forma normale di Boyce-Codd si presenta ancora il problema della ridondanza nella rappresentazione dei dati (ad esempio in *Orario_Lezioni* il fatto che un corso si tiene in una certa aula è ripetuto per ogni ora in cui il corso viene tenuto). Sorge quindi il problema di capire se per la terza forma normale di Boyce-Codd valgono risultati analoghi a quelli visti nei paragrafi precedenti per la terza forma normale, vale a dire se è valida la seguente affermazione:

“Dato uno schema di relazione R e un insieme di dipendenze funzionali F su R esiste sempre una decomposizione $\rho = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$ di R tale che:

- $\forall i \in \{1, \dots, n\}, R_i$ è in forma normale di Boyce-Codd
- ρ preserva F
- ha un join senza perdita”

La risposta a questa domanda è negativa. Infatti, è evidente che qualsiasi decomposizione di *Orario_Lezioni* che non contenga lo schema di relazione $\{Aula\}$, non permette di rappresentare la dipendenza funzionale $\{Aula\} \rightarrow Corso$. Tuttavia è possibile dimostrare che dato uno schema di relazione R e un insieme di dipendenze funzionali F su R esiste sempre una decomposizione $\rho = \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$ di R tale che:

- $\forall i \in \{1, \dots, k\}, R_i$ è in forma normale di Boyce-Codd
- ρ ha un join senza perdita

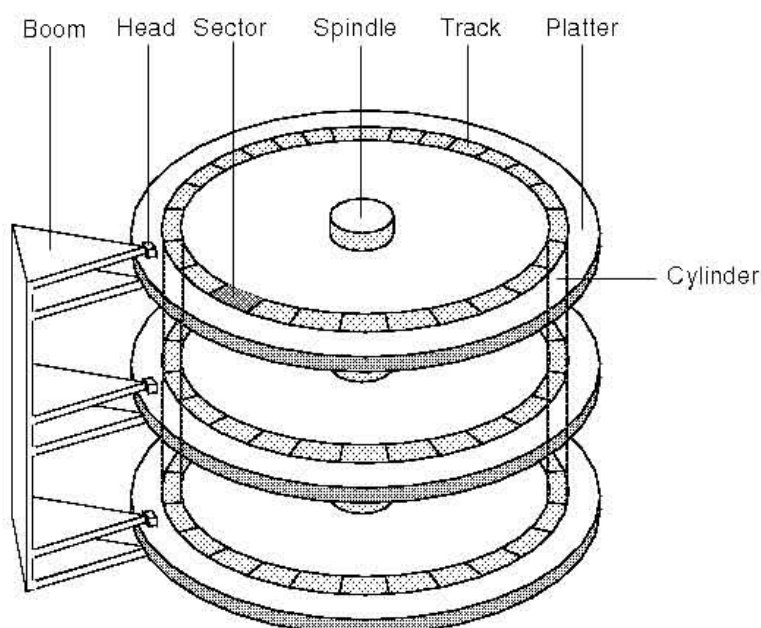
e che esiste un algoritmo che produce una tale decomposizione in tempo polinomiale. Tale algoritmo fornirebbe nel caso dell'esempio esaminato la decomposizione: $\{R_1 = Aula, R_2 = Corso\}$.

5 Organizzazione fisica della base di dati

Un requisito fondamentale di un database è l'efficienza, cioè la capacità di rispondere alle richieste dell'utente il più rapidamente possibile: questo obiettivo può essere raggiunto grazie ad una particolare organizzazione fisica dei dati. In questo capitolo verrà mostrato come il database è organizzato a livello fisico, ovvero come questo viene salvato sull'unità di memoria di massa (disco rigido); nel prossimo paragrafo sarà quindi necessario illustrare brevemente come il sistema operativo gestisce la lettura e scrittura di tali dispositivi.

5.1 La memoria secondaria

Il computer necessita di una *memoria secondaria* dove poter salvare in modo permanente i dati presenti nella RAM. Questa memoria secondaria è tipicamente un disco rigido, la cui struttura meccanica è illustrata nella seguente figura.



L'unità di memoria è composta da più **piatti**, di solito tre, ognuno dei quali è suddiviso in **tracce**: esse sono come cerchi concentrici che ripartizionano tutta la superficie del piatto. Al momento della *formattazione*, durante la quale viene data una struttura logica per poter memorizzare i dati, impostando la struttura del filesystem che vi verrà creato sopra, vengono creati i **settori** (o **blocchi** o pagine) di dimensione fissa, che varia da 2^9 a 2^{12} bytes.

Quando si parla di *accesso* al disco s'intende il trasferimento di un blocco da memoria secondaria a memoria principale, quindi **lettura** di un blocco, o da memoria principale a memoria secondaria, ossia **scrittura** di un blocco. Il tempo necessario per un accesso è dato dalla somma di:

- *tempo di posizionamento* della testina sulla traccia in cui si trova il blocco;
- *ritardo della rotazione*, necessaria per posizionare la testina all'inizio del blocco;
- *tempo di trasferimento* dei dati contenuti nel blocco.

Il tempo richiesto per un accesso a memoria secondaria è dell'ordine dei millisecondi, quindi notevolmente superiore a quello di elaborazione dei dati in memoria principale. Per questo motivo il **costo** di un'operazione sulla base di dati è definito in termini di *numero di accessi*.

5.2 Memorizzare le relazioni

5.2.1 Record

Ad ogni relazione corrisponde un file di record che hanno tutti lo stesso tipo (numero e tipo dei campi): ad ogni attributo corrisponde un *campo*, che sono di tipo elementare (interi, reali,

stringhe di caratteri), ed ad ogni tupla corrisponde un record. In un record, oltre ai campi che corrispondono agli attributi, ci possono essere altri campi che contengono informazioni sul record stesso o puntatori ad altri record.

Un **puntatore** ad un record è essenzialmente un dato che permette di accedere rapidamente a quel record. Pertanto un puntatore può essere l'indirizzo dell'inizio (primo byte) del record su disco. Tale scelta però può non essere adeguata se si vuole avere una certa libertà di muovere il record; in questo caso è preferibile assumere come puntatore una coppia (b, k) in cui b è l'indirizzo del blocco che contiene il record e k è il valore di uno o più campi che servono come chiave nel file a cui il record appartiene. In tal modo è possibile spostare il record all'interno del blocco. All'inizio di un record alcuni byte possono essere utilizzati per:

- specificare il tipo del record, necessario quando in uno stesso blocco sono memorizzati record di tipo diverso;
- specificare la lunghezza del record, se esso ha campi a lunghezza variabile;
- contenere un bit di "cancellazione", utile nel caso che il record sia puntato. In tal caso lo spazio occupato dal record cancellato non può essere riutilizzato
- contenere un bit di "usato/non usato" per specificare se in quello spazio c'è un record oppure è vuoto (contiene valori casuali).

Per poter accedere ad un campo di un record contenente un dato è necessario sapere qual è il primo byte del campo nel record. Se tutti i campi del record hanno lunghezza fissa, basta ordinarli; infatti, una volta ordinati, l'inizio di ciascun campo sarà sempre ad un numero fisso di byte dall'inizio del record: il numero di byte del record che precedono il campo è detto **offset** del campo. Se il record contiene campi a lunghezza variabile allora l'offset di un campo può variare da un record all'altro. In tal caso si possono usare due strategie:

- all'inizio di ogni campo c'è un contatore che specifica la lunghezza del campo in numero di byte
- all'inizio del record ci sono gli offset di ciascun campo a lunghezza variabile (tutti i campi a lunghezza fissa precedono quelli a lunghezza variabile).

Nel primo caso per individuare la posizione di un campo bisogna esaminare i campi precedenti per vedere quanto sono lunghi; quindi la prima strategia è meno efficiente della seconda.

5.2.2 Blocchi

I record sono memorizzati nei blocchi. Analogamente a quanto accade per un record, anche in un blocco può essere riservato spazio per memorizzare informazioni sul blocco stesso (record cancellati, record non usati, puntatori a record se il blocco contiene record a lunghezza variabile), dello spazio "spreco" (per far in modo che gli offset di campi interi siano multipli di 4) o per collegarlo ad altri blocchi in una lista. Se un blocco contiene solo record di lunghezza fissa allora il blocco può essere suddiviso in aree (sottoblocchi) di lunghezza fissa ciascuna delle quali può contenere un record. Quando bisogna inserire un record nel blocco si cerca un'area non usata; se il bit "usato/non usato" è in ciascun record ciò può richiedere la scansione di tutto il blocco; per evitare ciò si possono raccogliere tutti i bit "usato/non usato" in uno o più byte all'inizio del blocco. In un blocco ci possono essere informazioni sul blocco stesso o puntatori ad altri blocchi. Se un blocco contiene solo record di lunghezza fissa è suddiviso in aree (sottoblocchi) di lunghezza fissa ciascuna delle quali può contenere un record; i bit "usato/non usato" sono raccolti in uno o più byte all'inizio del blocco.

Se un blocco contiene record di lunghezza variabile per accedere ai record si possono usare due strategie:

- si suppone che il primo record abbia inizio dal primo byte del blocco; si pone in ogni record un campo che ne specifica la lunghezza in termini di numero di byte. Per calcolare il byte di inizio di un record si somma all'offset del record precedente la sua lunghezza (ed eventualmente si prende il successivo multiplo di 4);
- si pone all'inizio del blocco una **directory** contenente i puntatori ai record nel blocco (in questo caso un puntatore è l'offset del record nel blocco). Poiché il numero di record che possono entrare in un blocco è in questo caso variabile, la directory può essere realizzata in uno dei modi seguenti:

- la directory è preceduta da un campo che specifica quanti sono i puntatori nella directory
- la directory ha dimensione fissa (può contenere un numero fisso di puntatori) e contiene il valore 0 (che non può essere un offset) negli spazi che non contengono puntatori (se il numero di records nel blocco è inferiore al numero di puntatori che possono essere memorizzati nella directory)
- la directory è una lista di puntatori (la fine della lista è specificata da uno 0).

L'uso di una directory all'inizio del blocco permette di spostare i record “puntati”; infatti, basta far in modo che il puntatore invece di puntare al record punti al campo della directory che contiene l'offset. Inoltre permette di spostare i bit di cancellazione dai record alla directory e quindi di riutilizzare lo spazio occupato da un record a lunghezza variabile quando questo viene cancellato.

5.3 File

In questo paragrafo esamineremo diversi tipi di organizzazione fisica di file che consentono la ricerca di record in base al valore di uno o più campi *chiave*. Il termine “chiave” non va inteso nel senso in cui viene usato nella teoria relazionale, in quanto un valore della chiave non necessariamente identifica univocamente un record nel file. Le operazioni elementari su questi tipi di file sono dunque:

- la ricerca di uno o più record con un dato valore per la chiave;
- l'inserimento di un record con un dato valore per la chiave;
- la cancellazione di uno o più record con un dato valore per la chiave;
- la modifica di uno o più record con un dato valore per la chiave.

5.3.1 Heap

In questo tipo di organizzazione i record sono memorizzati nei blocchi senza alcun ordine: un record viene sempre inserito come ultimo record del file. L'accesso al file avviene attraverso una directory che contiene i puntatori ai blocchi; se le dimensioni lo consentono, tale directory può essere mantenuta in memoria principale durante l'utilizzo del file; altrimenti saranno necessari ulteriori accessi per portare in memoria principale i necessari blocchi della directory. Denotiamo con b il numero di blocchi del file ed esprimiamo in termini di b il costo delle varie operazioni, nella ipotesi che la directory si trovi in memoria principale. Se la chiave di **ricerca** non identifica univocamente un record nel file, poiché non esiste alcun particolare ordinamento dei record, per effettuare una ricerca occorre scandire tutto il file sequenzialmente e, quindi, il costo di una ricerca è dato da b . L'**inserimento** di un record richiede la lettura dell'ultimo blocco del file; se in tale blocco c'è spazio sufficiente per memorizzare il nuovo record, il record viene inserito, altrimenti viene chiesto un nuovo blocco al file system; dopo l'inserimento del record nel blocco, il blocco deve essere scritto su memoria secondaria. Quindi due accessi (uno per lettura e uno per scrittura) sono sufficienti per l'inserimento di un record. La **cancellazione** di tutti i record con un dato valore per la chiave richiede b accessi in lettura per la ricerca di tutti i record che hanno quel valore per la chiave e c accessi in scrittura, dove c è il numero di blocchi contenenti record con quel valore per la chiave; ulteriori accessi possono essere necessari se si vuole recuperare lo spazio occupato dai record cancellati trasferendovi record che si trovano nell'ultimo blocco. La **modifica** di tutti i record con un dato valore per la chiave richiede b accessi in lettura per la ricerca di tutti i record che hanno quel valore per la chiave e c accessi in scrittura, dove c è il numero di blocchi contenenti record con quel valore per la chiave.

Se la chiave di ricerca identifica univocamente un record nel file, la ricerca di un record con un dato valore per la chiave richiede in media $[b/2]$ accessi. Per ottenere il costo medio occorre sommare i costi per accedere ai singoli record e quindi dividere tale somma per il numero dei record. Infatti, per la ricerca di un record che si trova nell' i -esimo blocco sono necessari i accessi (in lettura); pertanto se denotiamo con n il numero di record nel file e con B il numero di record che possono essere memorizzati in un blocco ($[n/B] = b$), il numero medio di accessi necessari per la ricerca di un record è data da

$$\frac{B(1 + 2 + \dots + b)}{n} = \frac{Bb(b+1)}{2n} \simeq [b/2]$$

(si osservi che $b/2 \leq \lfloor b/2 \rfloor \leq (b+1)/2$).

L'inserimento di un record richiede la lettura dell'ultimo blocco del file; se in tale blocco c'è spazio sufficiente per memorizzare il nuovo record, il record viene inserito, altrimenti viene chiesto un nuovo blocco al file system; dopo l'inserimento del record nel blocco, il blocco deve essere scritto su memoria secondaria. Quindi 2 accessi (uno per lettura e uno per scrittura) sono sufficienti per l'inserimento di un record. La cancellazione di un record con un dato valore per la chiave richiede $\lfloor b/2 \rfloor$ accessi in lettura per la ricerca del record che ha quel valore per la chiave e 1 accesso in scrittura. Se si vuole recuperare lo spazio occupato dal record cancellato e i record hanno lunghezza fissa si può trasferire un record che si trova nell'ultimo blocco (restituendo al sistema il blocco se non vi sono altri record, in modo di ridurre i costi delle successive operazioni sul file) al posto di quello cancellato. Se si vuole recuperare lo spazio occupato dal record cancellato e i record hanno lunghezza variabile, si possono far slittare i record nel blocco (aggiornando i puntatori ai record nell'intestazione del blocco) e, se in tal modo si è ottenuto uno spazio sufficiente per trasferirvi un record che si trova nell'ultimo blocco, procedere come nel caso precedente. La modifica di un record con un dato valore per la chiave richiede $\lfloor b/2 \rfloor$ accessi in lettura per la ricerca del record che ha quel valore per la chiave e 1 accesso in scrittura.

Operazione	Costo
Inserimento	2 accessi
Ricerca	$\lfloor b/2 \rfloor$ accessi
Modifica	costo ricerca + 1 accesso
Cancellazione	costo ricerca + 3 accessi

5.3.2 File hash

In questo tipo di organizzazione i record sono ripartiti in **bucket** (secchi) in base al valore della chiave. Se B è il numero dei bucket, questi vengono numerati da 0 a $B-1$. Dato un valore v per la chiave il numero del bucket in cui deve trovarsi un record con chiave v è calcolato mediante una funzione che prende il nome di *funzione hash*. Ciascun bucket è costituito da uno o più blocchi (come vedremo, affinché la gestione del file sia efficiente è opportuno che il numero dei blocchi in un bucket sia piccolo) ed è organizzato come un heap. L'accesso ai bucket avviene attraverso la bucket directory che contiene B elementi (normalmente B è sufficientemente piccolo da consentire di mantenere la bucket directory in memoria principale durante l'utilizzo del file); l' i -esimo elemento contiene l'indirizzo (bucket header) del primo blocco dell' i -esimo bucket. Tutti i blocchi di un bucket sono collegati tra loro mediante puntatori in una lista. Una funzione hash per essere "buona" deve ripartire uniformemente i record nei bucket, cioè al variare del valore della chiave deve assumere con la "stessa" probabilità uno dei valori compresi tra 0 e $B-1$. Esiste un'ampia letteratura sulle funzioni hash. In genere, una funzione hash trasforma la chiave in un intero, divide questo intero per B , e fornisce il resto della divisione come numero di bucket in cui deve trovarsi il record con quel valore della chiave. Una strategia per definire una funzione hash è, ad esempio, la seguente:

1. trattare il valore v della chiave come una sequenza di bit
2. suddividere tale sequenza in gruppi di bit di uguale lunghezza
3. sommare tali gruppi trattandoli come interi
4. dividere il risultato per il numero dei bucket (cioè per B)
5. prendere il resto della divisione come numero del bucket in cui deve trovarsi un record con chiave v .

Una qualsiasi operazione (ricerca, inserimento, cancellazione, modifica) su un file hash richiede la valutazione di $h(v)$ (dove v è un valore per la chiave e h è la funzione hash) per individuare il bucket in cui deve trovarsi il record con chiave v ; successivamente, l'operazione (ricerca, inserimento, cancellazione, modifica) viene effettuata sul bucket che, come già detto, è organizzato come un heap. Se la funzione hash distribuisce uniformemente i record nei bucket, ogni bucket è costituito da un numero di blocchi che è $1/B$ -esimo del numero di blocchi di cui è costituito l'intero file. Pertanto il costo richiesto per un'operazione è approssimativamente $1/B$ -esimo del costo che sarebbe richiesto per fare la stessa operazione se il file fosse organizzato come un heap. Si osservi

che, poiché l'inserimento di un record viene effettuato sull'ultimo blocco del bucket, è opportuno che la bucket directory contenga anche, per ogni bucket, un puntatore all'ultimo record del bucket. Da quanto detto appare evidente che quanti più sono i bucket tanto più basso è il costo di ogni operazione. D'altra parte limitazioni al numero dei bucket derivano dalle seguenti considerazioni:

1. ogni bucket deve avere almeno un blocco
2. se le dimensioni della bucket directory sono tali che non può essere mantenuta in memoria principale durante l'utilizzo del file, ulteriori accessi sono necessari per leggere i blocchi della bucket directory.