ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§1. Некоторые задачи, приводящие к понятию дифференциального уравнения

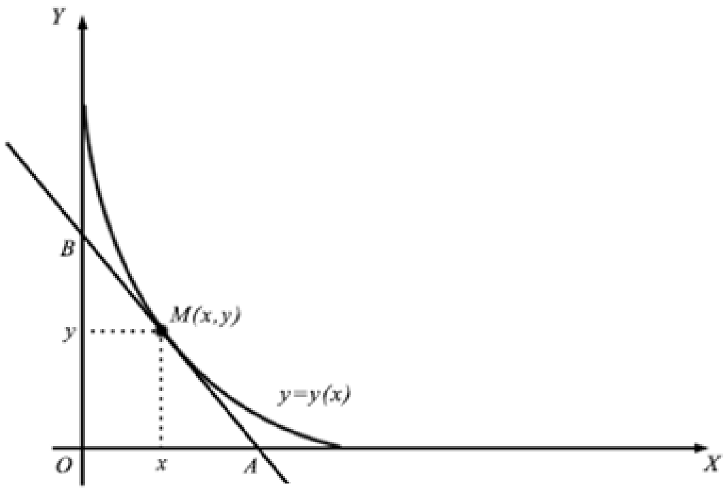
При изучении различных явлений окружающего нас мира не всегда удается найти зависимость, связывающую только величины, характеризующие данное явление. Можно лишь иногда установить закономерность между величинами, характеризующими явления, и их производными. В результате процесс описывается соотношениями, связывающими искомую функцию и ее производные (или дифференциалы). Если рассматривается функция одной переменной, то приходим к понятию обыкновенных дифференциальных уравнений (в литературе обычно обозначают ОДУ), если нескольких переменных, то задействуются частные производные и приходим к дифференциальным уравнениям в частных производных.

Пример 1. ***Математическое описание процесса распада радиоактивного вещества***. Количества вещества, не распавшегося к моменту времени t обозначим через $y(t)$. Из физических соображений следует, что, если нет цепной реакции, скорость распада пропорциональна имеющемуся количеству нераспавшегося радиоактивного вещества, то есть

$$\frac{dy}{d\,t} = -\beta^2 y(t).$$

Здесь через постоянную $\beta \neq 0$ обозначен зависящий от типа вещества коэффициент пропорциональности. Знак «–» взят, так как количество вещества убывает. Несложно проверить, что этому уравнению удовлетворяет функция $y = Ce^{-\beta^2 t}$, где C – ненулевая постоянная величина. Для определения постоянной C необходимо указать начальное количество вещества. Если при t=0 его было y_0, то $C= y_0$, и, следовательно, $y = y_0 e^{-\beta^2 t}$. Часто скорость распада характеризуют *периодом полураспада* – временем за которое распадется половина массы имеющегося вещества. Если обозначить его через T, то $\frac{y_0}{2} = y_0 e^{-\beta^2 T}$ и период полураспада определяется из соотношения $T = \frac{1}{\beta^2}\ln 2$.

Пример 2. Найти уравнение линии, проходящей через точку $M(2,3)$ и обладающую тем свойством, что отрезок любой ее касательной, заключенной между положительно направленными координатными осями, делится пополам в точке касания.



Пусть *M(x,y)* – текущая точка искомой кривой *y=y(x)*, *BA* – касательная к ней. Если α – угол наклона касательной, то $tg\alpha = \frac{dy}{dx}$, $\angle OAB = \pi - \alpha, tg(\pi - \alpha) = -tg\alpha$. Тогда

$$-tg\alpha = \frac{|OB|}{|OA|} = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{1}{x} \Rightarrow \ln y = \ln\frac{C}{x} \Rightarrow y = \frac{C}{x} \ ,$$

где C – *const*. По условию $M(2{,}3)$ лежит на искомой кривой, следовательно, $y(2) = 3 \Rightarrow C = 6 \Rightarrow xy = 6$ – лежащая в первом квадранте ветвь гиперболы.

Пример 3. Через сколько минут тело, нагретое до температуры 100^0С, охладится до 30^0С, если в течении 20 минут тело охлаждалось от 100^0С до 60^0С. Температура среды равна 20^0С

По закону Ньютона скорость изменения температуры *T* тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды, то есть

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 20^0),$$

где k – коэффициент пропорциональности. Можно проверить, что функция $T = 20^0 + Ce^{-kt}$, где *C-const*, является решением последнего уравнения. При *t*=0 по условию *T*=100^0С. Следовательно, *C*=80^0С и окончательно

$$T = 20^0 + 80^0 e^{-kt}.$$

Осталось определить коэффициент пропорциональности *k*. Так как за 20 минут тело охлаждается от 100^0С до 60^0С, то

$$60^0 = 20^0 + 80^0 e^{-k20} \Rightarrow e^{-20k} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{20}.$$

Закон изменения температуры имеет вид

$$T = 20^0 + 80^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}.$$

Положив *T*=30^0С, получим *t*=60 минут.

Рассмотрим, далее, некоторые общие понятия теории дифференциальных уравнений.

Соотношение вида $F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0$, связывающее независимую переменную *x,* неизвестную функцию *y(x)* и ее производные называется ***дифференциальным уравнением*** (будем обозначать ДУ). Порядок старшей производной, входящей в это уравнение, называется ***порядком дифференциального уравнения.***

Примеры:

1) $f'(x) = f(x)$ – (обыкновенное) ДУ первого порядка;

2) $y'' = cosx$ – ДУ второго порядка;

3) $0 \cdot y'' + y' = cosx$ – ДУ первого порядка;

4) уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

задает ***общий вид*** ДУ n-го порядка ***разрешенного*** относительно старшей производной;

5) уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

задает ***общий вид неоднородного*** (в случае $f(x) \not\equiv 0$) и ***однородного*** (в случае $f(x) \equiv 0$) ***линейного ДУ*** (ЛДУ) n-го порядка, где известные функции $a_1(x), \dots, a_n(x)$ называются *коэффициентами*, а $f(x)$ – ***правой частью*** ЛДУ.

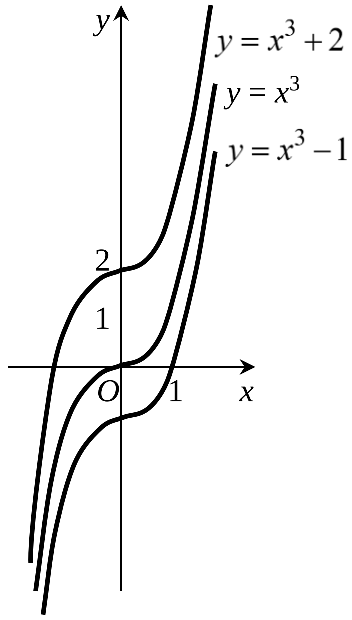
6) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ – уравнение колебаний струны – дифференциальное уравнение второго порядка с частными производными относительно неизвестной функции $u = u(x; t)$.

Далее будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения.

Решением дифференциального уравнения n-го порядка называется n раз дифференцируемая функция, которая при подстановке в это уравнение обращает его в верное тождество.

Основная задача теории дифференциальных уравнений – нахождение решений. Эта задача сводится к нахождению интегралов, поэтому процесс решения называют ***интегрированием дифференциальных уравнений***, а график решения *y= y(x)* называют ***интегральной кривой дифференциального уравнения.***

Например, функция $y = x^3$ является решением ДУ $y' = 3x^2$. При этом функции $y = x^3 + 2$, $y = x^3 - 1$ также являются решениями этого дифференциального уравнения. На рисунке изображены три интегральные кривые дифференциального уравнения $y' = 3x^2$.



Таким образом, ДУ задает *семейство* интегральных кривых на плоскости.

Пример. Решить ДУ первого порядка $y' = xe^{-x}$.

Решение. Интегрируем: $y = \int xe^{-x}dx$. Применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$y = \int xe^{-x}dx = \begin{bmatrix} u = x, du = dx \\ e^{-x}dx = dv, v = -e^{-x} \end{bmatrix} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C.$$

Пример. Решить ДУ второго порядка $y'' = \sin x$.

Решение. Интегрируем: $y' = \int \sin x dx = -\cos x + C_1$. Интегрируем повторно:

$$y = -\int (\cos x + C_1)dx = -\sin x + C_1 x + C_2.$$

Таким образом, множество решений дифференциального уравнения первого порядка определяется одной произвольной постоянной, а второго порядка – двумя. Аналогично, множество решений дифференциального *n*-го порядка определяется *n* произвольными постоянными. Чтобы из всего множества выделить конкретное решение, обычно задают дополнительные условия на искомую функцию.

***Задачей Коши* для ДУ *n*-го порядка** $F(x; y; y'; ...; y^{(n)}) = 0,$ называется задача нахождения такого решения ДУ, которое удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_{01}, \\ ..., \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0;\, n-1}. \end{cases}$$

Эти условия называются ***начальными условиями***, или ***условиями Коши*** для дифференциального уравнения n – порядка. Очевидно, что количество начальных условий совпадает с порядком ДУ и начальные условия Коши задают значения функции y и ее производных в одной и той же точке x_0.

§2. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Дифференциальное уравнение первого порядка в общем случае имеет вид

$$F(x, y, y') = 0.$$

Если его можно разрешить относительно первой производной неизвестной функции $y=y(x)$, то будем его называть ***ДУ первого порядка, разрешенного относительно производной***:

$$y' = f(x, y).$$

Иногда ДУ первого порядка записывают в виде

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

и называют ***ДУ первого порядка в дифференциалах***. Так как $y' = \frac{dy}{dx}$, то разрешенное относительно производной ДУ первого порядка всегда можно записать в дифференциалах

$$F(x,y)dx-dy=0.$$

При такой форме записи x и y равноправны и любая из них может рассматриваться как функция другой.

Рассмотрим ***задачу Коши для ДУ 1-го порядка***

$$\begin{cases} y' = f(x; y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Функция $y = \varphi(x, C)$, где C – произвольная постоянная, называется ***общим решением ДУ первого порядка***, если

- она является решением этого ДУ при любом значении произвольной постоянной;
- для любого допустимого $y(x_0) = y_0$ существует единственное $C = C_0$, такое, что функция $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет условию $y(x_0) = y_0$.

Частным решением ДУ первого порядка называется решение, которое получается из общего решения при конкретном значении произвольной постоянной. Если общее решение ДУ первого порядка можно получить только в неявном виде $\Phi(x, y, C) = 0$, то оно называется ***общим интегралом ДУ.*** Если в этом соотношении положить $C = C_0$, то получим ***частный интеграл ДУ.***

Теорема (Коши). Если функция $f(x,y)$ и ее частная производная $f'_y(x, y)$ непрерывны в некоторой области D плоскости Oxy, содержащей точку (x_0,y_0), то найдется интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, на котором существует единственное решение $y=y(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$.

Геометрически теорема означает, что через каждую внутреннюю точку области D проходит единственная интегральная кривая исходного ДУ первого порядка. Точки плоскости, через которые проходит более, чем одна интегральная кривая ДУ называются ***особыми точками*** этого уравнения. Интегральная кривая называется ***особой***, а соответствующее ей решение – ***особым решением ДУ***, если через каждую ее точку проходит по крайней мере еще одна интегральная кривая. Другими словами, решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется ***особым***.

Например, для ДУ $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$ имеем:

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{\frac{2}{3}}$$

или

$$\int \frac{dy}{y^{\frac{2}{3}}} = 3\int dx,$$

или

$$3y^{\frac{1}{3}} = 3(x + C),$$

откуда

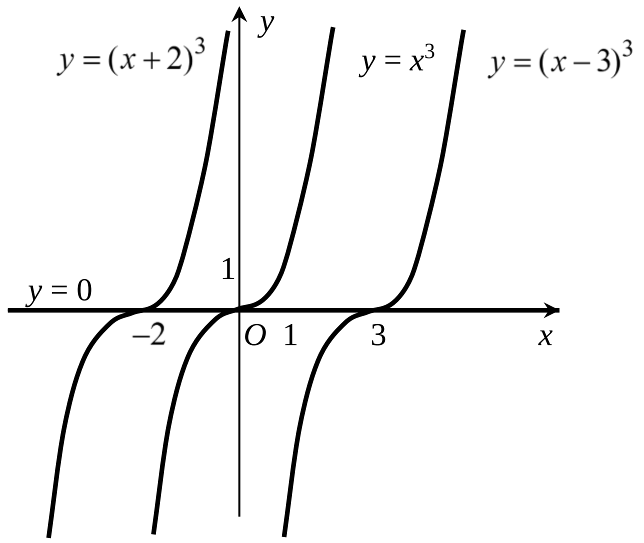
$$y = (x + C)^3$$

– общее решение, так как при любом значении постоянной C эта функция удовлетворяет данному ДУ. Проверим выполнимость условий теоремы Коши:

– функция $f(x; y) = 3\sqrt[3]{y^2}$ непрерывна во всех точках $(x; y)$;

– функция $f'_y(x; y) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}$ непрерывна при $y \neq 0$,

То есть условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши выполняются во всех точках вне оси Ox. Подставляя функцию $y = 0$ в ДУ, убеждаемся, что она является решением этого уравнения, однако ее нельзя получить из общего решения ни при каком значении C. Решение $y \equiv 0$ является особым, так как в каждой точке $(x_0, 0)$ этого решения нарушается единственность решения задачи Коши, то есть через эту точку проходят две интегральные кривые: кубическая парабола $y = (x - x_0)^3$ и прямая $y \equiv 0$ (ось Ox).



На рисунке изображены интегральные кривые данного ДУ: через каждую точку оси *Ox* проходят ровно две интегральные кривые данного ДУ.

Рассмотрим более подробно некоторые виды дифференциальных уравнений первого порядка.

§3. ДУ с разделяющими переменными

Дифференциальные уравнения вида

$$M_1(x)N_1(y)dx+M_2(x)N_2(y)dy=0$$

или разрешенные относительно первой производной

$$y' = f(x)\cdot g(y),$$

(где правая часть есть произведение функции «только от x» на функцию «только от y») называются ***ДУ с разделяющимися переменными.*** Они интегрируются путем разделения переменных

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

(переменные с x в *одной* части, а переменные с y – *в* другой) и последующим интегрированием: $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$. В результате получим $y=\phi(x;C)$ – общее решение (либо общий интеграл). Часто входящие в это решение интегралы нельзя выразить в элементарных функциях. В этом случае говорят, что ***решение ДУ выражено в квадратурах.***

Если ДУ записано в дифференциалах, то для разделения переменных разделим на $M_2(x)N_1(y)$, предполагая, что функции, стоящие в качестве сомножителей нигде в ноль не обращаются. Получим

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx = -\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy$$

Считая, что $y=y(x)$, последнее равенство можно рассматривать как равенство двух дифференциалов. Причём, в левой части дифференциал выражен через независимую переменную x, а правой – через промежуточный аргумент $y=y(x)$.

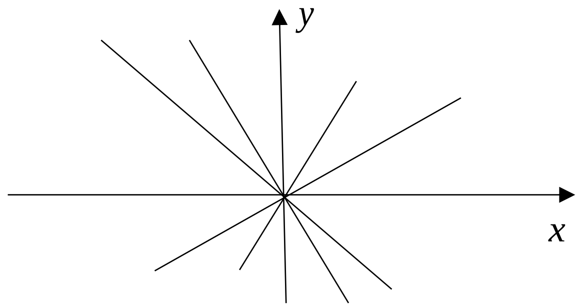
Неопределенные интегралы от этих дифференциалов будут отличаться лишь на произвольную постоянную C

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx = -\int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy + \mathrm{C}$$

Если это соотношение содержит все решения ДУ, то оно является общим интегралом этого ДУ. Дело в том, что при разделении переменных могут быть потеряны некоторые решения. А именно, если $y=y_0$ – корень уравнения $N_1(y)=0$, то подставляя $y=y_0$ в исходное уравнение с разделяющимися переменными, получаем тождество. То есть $y=y_0$ – решение. Если оно не получается из общего решения ни при каком значении C, то его нужно рассмотреть дополнительно к полученному решению. Аналогично обстоит дело и с корнями уравнения $M_2(x)=0$.

Пример. Решить уравнение $ydx–xdy=0$. Разделив на xy получим $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$. Проинтегрируем и получим $\ln|y| = \ln|x| + \ln|C| \Rightarrow |y| = |Cx| \Rightarrow y = Cx$. При разделении переменных делили на $xy\neq0$ и были потеряны два решения: $x=0$ и $y=0$. Второе получается из общего при $C=0$, а первое надо рассмотреть отдельно. Окончательно все решения

$$\begin{cases} y = Cx \\ x = 0 \end{cases}$$



Интегральными кривыми является семейство прямых, проходящих через начало координат. Как видно из рисунка, через каждую точку плоскости, за исключением начала координат, проходит единственная интегральная кривая, а через начало координат – бесконечное множество. Это происходит из-за нарушения условий теоремы Коши: так как $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ и частная производная $\left(\frac{y}{x}\right)_y = \frac{1}{x}$ разрывна в точке $x=0$. Точка (0,0) и есть ***особая точка уравнения.***

Пример. Проинтегрировать ДУ $xy'+y=0$.

Решение. Разделяем переменные $\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$ и интегрируем:

$\ln|y|=-\ln|x|+\ln|C| \;\Rightarrow\; y=\frac{C}{x}$ – общее решение (в области, где $x\neq0$) – семейство интегральных кривых – семейство гипербол.

§4. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Функция $f(x,y)$ называется ***однородной функцией*** порядка k относительно переменных x и y, если справедливо тождество $f(tx,ty)=t^k f(x,y)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Например, функция $f(x,y)=\sqrt{x+y}$ – однородная функция порядка ½.

Дифференциальное уравнение первого порядка $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ называется ***однородным дифференциальным уравнением,*** если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ являются однородными функциями одного и того же порядка.

Если разрешить однородное уравнение относительно производной

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

то, так как $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ являются однородными функциями одного и того же порядка, имеем, что

$$f(x,y)=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

– однородная функция нулевого порядка, то есть $f(x,y)=f(tx,ty)$ для любого действительного значения t. Положив, далее, $t=\frac{1}{x}$, имеем

$$f(x,y)=f\left(1,\frac{y}{x}\right)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

То есть ***однородную функцию нулевого порядка можно представить как функцию одного аргумента*** $\frac{y}{x}$. Обозначим далее

$$\frac{y}{x}=u\Rightarrow y=ux\Rightarrow y'=u'x+u.$$

Подставляя эту замену y и ее производной в исходное уравнение, получим

$$u'x+u=f(1,u)\Rightarrow\frac{du}{dx}=f(1,u)-u.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Интегрируя его и возвращаясь к исходным переменным, найдем общее решение.

Пример. Проинтегрировать ДУ $y'=-\dfrac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}$.

Решение. Так как $f(x,y)=\dfrac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}$ и

$$f(tx,ty)=-\frac{tx+\sqrt{(tx)^2+(ty)^2}}{ty}=f(x,y),$$

то уравнение является однородным дифференциальным уравнением первого порядка. Применяя подстановку в исходное дифференциальное уравнение $y=ux,\ y'=xu'+u$ получаем

$$xu'+u=-\frac{1+\sqrt{1+u^2}}{u}\Rightarrow\ xu'=-\frac{1+\sqrt{1+u^2}}{u}-u=-\frac{1+u^2+\sqrt{1+u^2}}{u}\ \Rightarrow$$

$$\int\frac{udu}{1+u^2+\sqrt{1+u^2}}=-\int\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{1}{1+\sqrt{1+u^2}}\cdot\frac{udu}{\sqrt{1+u^2}}=-\ln|x|+\ln|C|\Rightarrow$$

$$\ln\left|1+\sqrt{1+u^2}\right|=\ln\left|\frac{C}{x}\right| \Rightarrow \left(\sqrt{1+u^2}\right)^2=\left(\frac{C}{x}-1\right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{y^2}{x^2}=\frac{C^2}{x^2}-2\frac{C}{x} \Rightarrow y^2=C^2-2Cx,$$

то есть, семейство интегральных кривых – семейство парабол.

§5. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальные уравнения вида

$$a(x)y'+b(x)y+c(x)=0,$$

где $a(x)\neq 0$, $b(x)$, $c(x)$ – заданные функции, называется ***линейным дифференциальным уравнением* (ЛДУ) *первого порядка.***

Уравнения такого вида интегрируется заменой $y=uv$ (методом u на v), где $u=u(x)$ – новая неизвестная функция, $v=v(x)$ – вспомогательная функция. Выполняя подстановку $y=uv$ и учитывая, что $y'=u'v+uv'$, имеем

$$a(x)(u'v+uv')+b(x)uv+c(x)=0.$$

Вынося u за скобку, получаем

$$a(x)u'v+u[a(x)v'+b(x)v]+c(x)=0.$$

Выбирая вспомогательную функцию так, чтобы выражение в скобках обратилось в ноль, приходим к системе

$$\begin{cases} a(x)v'+b(x)v=0, \\ \\ a(x)u'v+c(x)=0. \end{cases}$$

дифференциальных уравнений с разделяющими переменными. Интегрируя первое уравнение

$$\frac{dv}{v}=-\frac{b(x)}{a(x)}dx \Rightarrow \ln|v|=-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx,$$

получаем $v=e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}$. Подставляя это выражение во второе уравнение, приходим к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными

$$a(x)\cdot u'\cdot e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}+c(x)=0,$$

откуда

$$du=-\frac{e^{\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}c(x)}{a(x)}\cdot dx \Rightarrow u=C-\int\frac{e^{\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}c(x)}{a(x)}\cdot dx \Rightarrow$$

$$y=u\cdot v=\left(C-\int\frac{e^{\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}c(x)}{a(x)}\cdot dx\right)\cdot e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}$$

– общее решение искомого дифференциального уравнения.

Помнить эту формулу для общего решения не обязательно, достаточно уметь применять «метод u на v».

Пример. Найти общее решение ДУ $xy'+y=1$.

Решение. Это линейное ДУ. Делаем замену $y=u\cdot v$.

Тогда $x(u'v+uv')+uv=1 \Rightarrow xu'v+u\underbrace{(xv'+v)}_{=0}=1 \Rightarrow \begin{cases} xv'+v=0, \\ xu'v=1, \end{cases}$

Откуда $\frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v|=-\ln|x| \;\Rightarrow\; v=\frac{1}{x}$. Подставляя это выражение во второе уравнение системы, получаем: $u'=1 \Rightarrow du=dx \Rightarrow u=x+C$.

Тогда $y=u\cdot v=(x+C)\cdot\frac{1}{x}=\frac{C}{x}+1$ – общее решение (в области $x\neq 0$).

При внимательном рассмотрении, очевидно, что это ДУ с разделяющимися переменными. Разделяем переменные и интегрируем:

$$x\frac{dy}{dx}=1-y \Rightarrow \frac{dy}{1-y}=\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y-1|=-\ln|x|+\ln|C| \Rightarrow y-1=\frac{C}{x},$$

откуда $y=\frac{C}{x}+1$ – общее решение.

Если посмотреть еще более внимательно, то заметим, что $xy'+y=(xy)'=1$, откуда $xy=x+C$ и $y=1+\frac{C}{x}$ – общее решение.

Рассмотренный пример показывает, что одно и то же ДУ может относиться к различным типам и, стало быть, интегрироваться различными стандартными (и даже нестандартными) методами.

Иногда удается решить ДУ, если считать искомой функцией x, а независимой переменной – y.

Пример. Найдем общее решение (общий интеграл) ДУ $y'=\frac{1}{x+y}$.

Решение. Отметим, что это дифференциальное уравнение

– не является ДУ с разделяющимися переменными;

– не является однородным ДУ 1-го порядка;

– не является линейным ДУ относительно неизвестной функции y.

Поскольку

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+y} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{dx}{dy}=x+y,$$

то, воспользовавшись теоремой о производной обратной функции, получим ДУ

$$x'_y=x+y,$$

которое является линейным относительно неизвестной функции $x = x(y)$. Для его решения используем подстановку $x(y) = u(y)v(y)$, $x'_y = u'v + uv'$ (здесь все функции зависят от переменной y и дифференцирование ведется по y). Тогда

$$u'v + uv' = uv + y; \qquad u'v + u\left(v' - v\right) = y.$$

Приравняв скобку к 0, получим систему $\begin{cases} v' - v = 0, \\ u'v = y. \end{cases}$

Разделим переменные в первом уравнении системы:

$$\frac{dv}{dy} = v; \qquad \frac{dv}{v} = dy; \qquad \int \frac{dv}{v} = \int dy;$$

$$\ln|v| = y; \qquad v = \mathrm{e}^{y}.$$

Подставляя во второе уравнение системы, получим

$$u'\mathrm{e}^{y} = y; \qquad \frac{du}{dy} = y\mathrm{e}^{-y}; \qquad du = y\mathrm{e}^{-y}\,dy.$$

Находим функцию u, применяя формулу интегрирования по частям:

$$u = \int y\mathrm{e}^{-y}\,dy = \left| \begin{matrix} U = y; & dU = dy \\ dV = \mathrm{e}^{-y}\,dy; & V = \int \mathrm{e}^{-y}\,dy = -\mathrm{e}^{-y} \end{matrix} \right| =$$

$$= -y\mathrm{e}^{-y} + \int \mathrm{e}^{-y}\,dy = -y\mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{-y} + C.$$

Отсюда, поскольку $x(y) = u(y)v(y)$, получаем общее решение (общий интеграл) уравнения: $x = (-y\mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{-y} + C)\mathrm{e}^{y}$, или $x = -y - 1 + C\mathrm{e}^{y}$. •

§6. Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называют ДУ вида

$$a(x)y' + b(x)y + c(x)y^{m} = 0.$$

Это уравнение можно проинтегрировать методом u на v, повторяя схему интегрирования ЛДУ. Действительно, полагая $y = u \cdot v$, приходим к системе

$$\begin{cases} a(x)\cdot v' + b(x)\cdot v = 0, \\ a(x)\cdot u'v + c(x)u^{m}v^{m} = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения (ДУ с разделяющимися переменными) системы находим вспомогательную функцию v, после подстановки которой во второе уравнение вновь получаем ДУ с разделяющимися переменными).

При $m = 0$ уравнение Бернулли превращается в ЛДУ, при $m = 1$ – и в ЛДУ, и в ДУ с разделяющимися переменными.

Пример. Проинтегрировать ДУ $xy' - y + 4x^{3}y^{2} = 0$.

Решение 1. Это ДУ Бернулли: $a(x)=x, b(x)=-1, c(x)=4x^3, \quad m=2$. Применяем метод u на v: $y=u\cdot v$. Тогда

$$x(u'v+uv')-uv+4x^3u^2v^2=0\Rightarrow$$

$$xu'v+u\underbrace{(xv'-v)}_{=0}=-4x^3u^2v^2\Rightarrow\begin{cases} xv'-v=0, \\ xu'v=-4x^3u^2v^2, \end{cases}$$

откуда

$$\frac{dv}{v}=\frac{dx}{x}\Rightarrow \ln|v|=\ln|x| \;\Rightarrow\; v=x\ .$$

Подставляя это выражение во второе уравнение системы, получаем:

$$u'=-4x^3u^2\Rightarrow\frac{du}{u^2}=-4x^3dx\Rightarrow-\frac{1}{u}=-x^4-C\ .$$

Тогда $y=u\cdot v=\dfrac{1}{x^4+C}\cdot x=\dfrac{x}{x^4+C}$ – общее решение (в некоторой области).

Решение 2. Заметим, что $xy'-y=-4x^3y^2\Rightarrow\dfrac{y-xy'}{y^2}=4x^3\Rightarrow\left(\dfrac{x}{y}\right)'=4x^3$. Интегрируя, получаем: $\dfrac{x}{y}=x^4+C\Rightarrow y=\dfrac{x}{x^4+C}$ – общее решение.

При определении типов ДУ 1-го порядка $y'=f(x;y)$ *по виду правой части удобно пользоваться следующей таблицей*:

$f(x;y)=$	Тип (вид) ДУ	Метод интегрирования
$f(x;y)=\varphi(x)\cdot\psi(y)$	ДУ с разделяющими переменными	разделяем переменные и интегрируем
$f(x;y)=f(tx;ty)$	однородное ДУ	подстановка $y=ux$
$f(x;y)=$ $=\rho(x)\cdot y+q(x)$	ЛДУ	подстановка $y=uv$
$f(x;y)=$ $=\rho(x)\cdot y+q(x)\cdot y^n$	уравнение Бернулли	подстановка $y=uv$

§7. Уравнения в полных дифференциалах

Дифференциальное уравнение вида

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

называется ***дифференциальным уравнением в полных дифференциалах***, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$. Найдя такую функцию $u(x,y)$, уравнение можно переписать в виде

$$du(x,y)=0\ ,$$

откуда

$$u(x,y)=C$$

искомый общий интеграл уравнения в полных дифференциалах.

Таким образом, для отыскания решения уравнения в полных дифференциалах требуется дать ответ на два вопроса:

во-первых, установить при каких условиях, налагаемых на функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, это уравнение таковым является;

во-вторых, сформулировать алгоритм нахождения функции $u(x,y)$.
Ответ на оба эти вопроса дает следующая теорема и ее доказательство.

Теорема. Уравнение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ с непрерывно дифференцируемыми функциями $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть левая часть уравнения есть есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$. То есть

$$du(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=P(x,y)dx+Q(x,y)dy,$$

откуда

$$P(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x},\, Q(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Продифференцировав первое из этих соотношений по y, а второе по x, получим

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\, \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$

В силу равенства вторых смешанных производных получаем, что

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Достаточность. Покажем, что при выполнении условия $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ левая часть уравнения $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$. При этом выясним, как на практике найти эту функцию. Для этого проинтегрируем равенство $P(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}$ по переменной x. Получаем

$$u(x,y)=\int P(x,y)dx+\varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ – произвольная функция переменной y. При интегрировании считаем y постоянной, и поэтому произвольная постоянная может зависеть от y. Подберем далее функцию $\varphi(y)$ таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$Q(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial y}$. Для этого продифференцируем последнее равенство по y и результат приравняем $Q(x,y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\int P(x,y)dx\right]+\varphi'(y)=Q(x,y).$$

Отсюда

$$\varphi'(y)=Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left[\int P(x,y)dx\right]=Q(x,y)-\int\frac{\partial P}{\partial y}dx.$$

Покажем далее, что правая часть последнего равенства не зависит от x. Дифференцируя ее по x , с учетом условия $P(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial x}, Q(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial y}$ получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Q(x,y)-\int\frac{\partial P}{\partial y}dx\right)=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{\partial P}{\partial y}dx=$$
$$=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int P(x,y)dx\right)=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\equiv 0.$$

Так как производная по x тождественно равна нулю, то правая часть равенства действительно не зависит от переменной x. Интегрируя это равенство по переменной y, имеем

$$\varphi(y)=\int\left(Q(x,y)-\int\frac{\partial P}{\partial y}dx\right)dy.$$

Подставляя найденное значение $\varphi(y)$ в выражение $u(x,y)=\int P(x,y)dx+\varphi(y)$, имеем

$$u(x,y)=\int P(x,y)dx+\int\left(Q(x,y)-\int\frac{\partial P}{\partial y}dx\right)dy.$$

Что и требовалось доказать.

Замечание. При отыскании функции $u(x,y)$ порядок действий можно изменять, то есть сначала подбирать функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую второму из соотношений

$$P(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}, Q(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y},$$

а затем – первому.

Пример. Решить дифференциальное уравнение

$$3x^2e^ydx+(x^3e^y-1)dy=0$$

и найти интегральную кривую, проходящую через точку $M(1,0)$.

Решение. В введенных ранее обозначениях, $P(x,y)=3x^2e^y$, $Q(x,y)=x^3e^y-1$. Соответственно, $\frac{\partial P}{\partial y}=3x^2e^y$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}=3x^2e^y$, то есть условие теоремы выполнены. Из соотношения $\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2e^y$ находим

$$u(x,y)=x^3e^y+\varphi(y),\frac{\partial u}{\partial y}=x^3e^y+\varphi'(y)=x^3e^y-1,$$

отсюда $\varphi'(y)=-1 \quad \Rightarrow \varphi(y)=y+C_1$. Поэтому функция $u(x,y)=x^3e^y-y+C_1$. Приравнивая полученную функцию к произвольной постоянной *C,* находим общий интеграл дифференциального уравнения: $x^3e^y-y=C$. Так как по условию требуется найти частный интеграл, то при x=1, y=0 произвольная постоянная принимает значение равное C=1, и требуемая интегральная кривая имеет уравнение $x^3e^y-y=1$.

§ 8. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений

Выше мы рассмотрели некоторые виды дифференциальных уравнений первого порядка и способы их точного решения. Если ни один из них не приводит к решению, либо требует весьма сложных вычислений, то используют приближенные методы. Традиционно их разделяют на ***численные*** и ***аналитические*** приближенные методы решений.

К ***аналитическим приближенным методам*** можно отнести использование степенных рядов для решения задачи Коши для дифференциальных уравнений. К ним прибегают в случае, когда найти точное решение задачи Коши для дифференциального уравнения в элементарных функциях не представляется или оказывается очень сложным. Решение удобно искать в виде степенного ряда.

При решении задачи Коши

$$\begin{cases} y' = f(x;y), \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

используется ряд Тейлора

$$y(x)=y(x_0)+\frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots,$$

где $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=f(x_0;y_0)$, а остальные производные $y^{(n)}(x_0)$ $(n=2,3,\ldots)$ находят путем последовательного дифференцирования уравнения и подстановки начальных данных в выражения для этих производных.

Пример. Найти решение дифференциального уравнения

$$yy'=\sin y,$$

Удовлетворяющее начальному условию $y(0)=\frac{\pi}{2}$.

Решение. Исходное уравнение допускает разделение переменных

$$\frac{ydy}{\sin y} = dx,$$

однако, интеграл от левой части этого уравнения не выражается в элементарных функциях. В окрестности точки $x_0 = 0$ дифференциальное уравнение удовлетворяет условиям теоремы Коши о существовании и единственности решения поставленной задачи Коши. Будем его искать в виде ряда Маклорена

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Так как $y(0) = \frac{\pi}{2}$, а $y' = \frac{\sin y}{y}$, то $y'(0) = \frac{2}{\pi}$. Дифференцируя по x обе части уравнения $y' = \frac{\sin y}{y}$, находим

$$y'' = \frac{\left(y'\cos y\right)y - y'\sin y}{y^2} = \frac{y'\left(y\cos y - \sin y\right)}{y^2},$$

откуда

$$y''(0) = \frac{-y'(0)\sin\frac{\pi}{2}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = -\left(\frac{2}{\pi}\right)^3.$$

Продолжая этот процесс, можно получить любое число членов разложения в ряд Маклорена искомого решения $y = y(x)$

$$y = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}x - \frac{2^2}{\pi^2}x^2 + \cdots$$

Пример. Методом последовательного дифференцирования найти три, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y' = x + \frac{1}{y}$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 1$.

Решение ищем в виде ряда

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots.$$

Из уравнения находим, что $y'(0) = 0 + \frac{1}{y(0)} = 1$. Дифференцируем исходное уравнение:

$$y'' = 1 - \frac{1}{y^2}y', \quad y''(0) = 1 - 1 = 0,$$

$$y''' = -\frac{y''y^2 - y'\cdot 2yy'}{y^4}, \quad y'''(0) = 2.$$

Подставляя найденные значения в ряд, будем иметь

$$y(x)=1+\frac{1}{1!}x+\frac{0}{2!}x^2+\frac{2}{3!}x^3+\ldots=1+x+\frac{x^3}{3}+\ldots.$$

Численные методы также не позволяют найти общее решение дифференциального уравнения. С их помощью можно определить только какое-либо частное решение, например решение задачи Коши

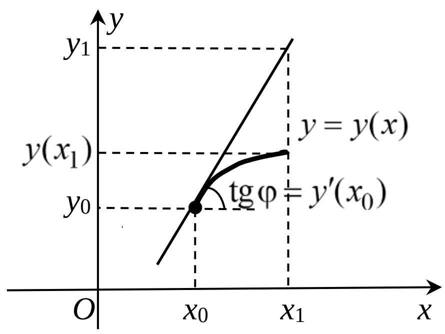
$$\begin{cases} y' = f(x;\, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Рассмотрим далее некоторые простейшие численные методы решения задачи Коши для дифференциальных уравнений первого порядка.

Метод Эйлера. Метод Эйлера является исторически первым методом приближенного решения дифференциального уравнения. Пусть требуется определить значения решения $y = y(x)$ задачи Коши на отрезке $[x_0; b]$ с шагом $h = \dfrac{b - x_0}{n}$, то есть в точках $x_i = x_0 + ih$ (называемых узлами сетки) $1 \le i \le n$, разбивающих отрезок равномерно на n частей (на равномерной сетке).

Идея метода Эйлера заключается в том, чтобы для нахождения значения $y(x_1)$ заменить график функции $y = y(x)$ касательной к нему в точке x_0. Тогда значение $y(x_1)$ заменится приближенно на значение

$$y(x_1) \approx y_1 = y(x_0) + y'(x_0)(x_1 - x_0).$$



Обозначим $y_0 = y(x_0)$, из ДУ получим $y'(x_0) = f(x_0;\, y_0)$. Тогда

$$y_1 = y_0 + hf(x_0;\, y_0).$$

Погрешность приближения $|\,y_1 - y(x_1)\,| \le Mh^2$, где константа $M = M(f;\, x_0;\, y_0)$ зависит от функции f и начальных условий.

По найденному значению y_1 аналогично определяется y_2 (приближенное значение для $y(x_2)$), и далее $y_3; y_4; \ldots; y_n$ по следующей расчетной формуле ***метода Эйлера***:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i;\, y_i).$$

Недостатком метода Эйлера является его невысокая точность; погрешность приближения

$$\max_{1\le i\le n} | y_i - y(x_i) | \le Mh,$$

где константа $M = M(f; b - x_0; x_0; y_0)$ зависит от функции f, начальных условий и длины отрезка $[x_0; b]$.

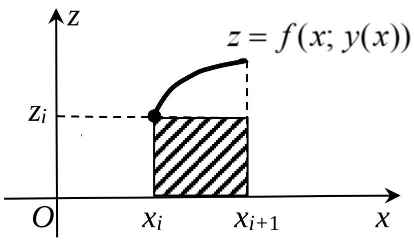
Для уточнения метода Эйлера рассмотрим задачу решения дифференциального уравнения на отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ с другой точки зрения. Преобразуем это уравнение:

$$y' = f(x; y); \qquad \frac{dy}{dx} = f(x; y); \qquad dy = f(x; y)dx;$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} dy = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x; y(x))dx;$$

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x; y(x))dx.$$

Несложно видеть, что метод Эйлера получается при вычислении интеграла в правой части по формуле левых прямоугольников. Более точные методы можно получить, применяя более эффективные методы приближенного вычисления определенного интеграла.

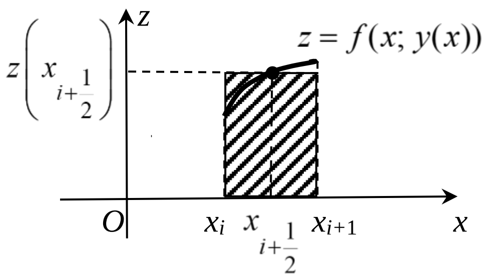


Модифицированный метод Эйлера. Модифицированный метод Эйлера получается при вычислении интеграла по формуле средних прямоугольников. Расчетные формулы этого метода имеют вид

$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_0 + \left(i + \frac{1}{2}\right)h;$$

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i);$$

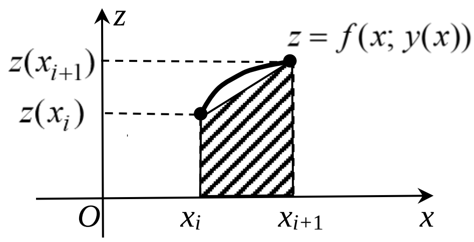
$$y_{i+1} = y_i + hf\left(x_{i+\frac{1}{2}}; y_{i+\frac{1}{2}}\right).$$



Метод Эйлера с пересчетом. При вычислении интеграла по формуле трапеций получается метод Эйлера с пересчетом:

$$y_{i+1} = y_i + h\frac{f(x_i; y_i) + f(x_{i+1}; \tilde{y}_{i+1})}{2},$$

где $\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i; y_i)$.

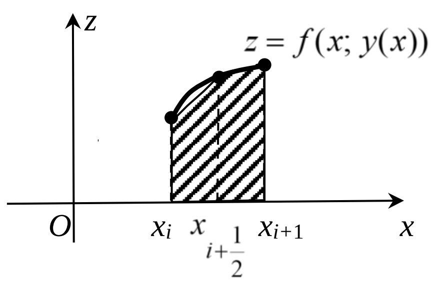


Эти методы имеют второй порядок точности, т. е.

$$\max_{1\le i\le n} | y_i - y(x_i) | \le Mh^2,$$

где константа $M = M(f; b - x_0; x_0; y_0)$.

Метод Рунге-Кутты 3-го порядка точности. При вычислении интеграла по формуле парабол (формуле Симпсона), как показано на рисунке, получается метод Рунге-Кутты 3-го порядка точности.



Расчетные формулы этого метода имеют вид:

$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_0 + \left(i + \frac{1}{2}\right)h;$$

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i);$$

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + 2hf\left(x_{i+\frac{1}{2}}; y_{i+\frac{1}{2}}\right) - hf(x_i; y_i);$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\left(f(x_i; y_i) + 4f\left(x_{i+\frac{1}{2}}; y_{i+\frac{1}{2}}\right) + f(x_{i+1}; \tilde{y}_{i+1})\right).$$

Наиболее употребительным на практике является ***метод Рунге-Кутты 4-го порядка точности***:

$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_0 + \left(i + \frac{1}{2}\right)h;$$

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i);$$

$$\tilde{y}_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f\left(x_{i+\frac{1}{2}}; y_{i+\frac{1}{2}}\right);$$

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf\left(x_{i+\frac{1}{2}}; \tilde{y}_{i+\frac{1}{2}}\right);$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\left(f(x_i; y_i) + 2f\left(x_{i+\frac{1}{2}}; y_{i+\frac{1}{2}}\right) + 2f\left(x_{i+\frac{1}{2}}; \tilde{y}_{i+\frac{1}{2}}\right) + f(x_{i+1}; \tilde{y}_{i+1})\right).$$

Вообще, метод Рунге-Кутты – это не один метод, а семейство методов, которые задаются формулами

$$y_{i+1} = y_i + h\sum_{j=1}^{s} b_j k_j,$$

где

$$k_1 = f(x_i; y_i);$$

$$k_2 = f(x_i + c_2 h; y_i + a_{21} h k_1);$$

$$\ldots;$$

$$k_s = f(x_i + c_{2s} h; y_i + a_{s1} h k_1 + a_{s2} h k_2 + \ldots + a_{s;s-1} h k_{s-1})$$

§9. Дифференциальные уравнения допускающие понижение порядка

Ранее рассматривали дифференциальные уравнения первого порядка, точнее их отдельные типы, допускающие интегрирования. Рассмотрим далее дифференциальные уравнения второго порядка

$$\boldsymbol{F(x, y, y', y'') = 0}.$$

Если удастся разрешить его относительно старшей производной

$$y'' = f(x, y, y'),$$

то получим общий вид дифференциального уравнения второго порядка, разрешенного относительно старшей производной. Для него вводят понятия начальных условий (начальные условия Коши) следующего вида

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_0'. \end{cases}$$

Для дифференциальных уравнений второго порядка (также, как и для уравнений первого порядка) вводится теорема Коши, дающая условия разрешимости задачи Коши для этого типа уравнений.

Теорема (существования и единственности решения задачи Коши для ДУ 2-го порядка)**.** Если функция $f(x; y; y')$ и ее частные производные $f'_y(x; y; y')$ и $f'_{y'}(x; y; y')$ непрерывны в некоторой области *D*, содержащей точку $(x_0; y_0; y_{01})$, то существует единственное решение уравнения $y'' = f(x; y; y')$, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$.

Аналогично вводятся определения общего $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ (C_1, C_2–$const$) и частного решений. Все эти понятия можно ввести и для дифференциальных уравнений более высокого порядка. В частности, ***общим решением*** ДУ *n*-го порядка называется функция $y = \varphi(x; C_1; C_2; ...; C_n)$, которая зависит от независимой переменной *x* и *n* произвольных постоянных и удовлетворяет условиям:

1) является решением ДУ при любых конкретных значениях произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$;

2) каковы бы ни были начальные условия, существуют такие значения произвольных постоянных $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$, что функция $y = \varphi(x; C_1^0; C_2^0; ...; C_n^0)$ является решением ДУ (1) и удовлетворяет начальным условиям (2).

Частным решением ДУ *n*-го порядка называется функция $y = \varphi(x; C_1^0; C_2^0; ...; C_n^0)$, которая получается из общего решения при конкретных значениях произвольных постоянных. Если общее решение ДУ найдено в неявном виде, то есть задается уравнением $\Phi(x; y; C_1; C_2; ...; C_n) = 0$, то говорят, что найден ***общий интеграл*** ДУ, а $\Phi(x; y; C_1^0; C_2^0; ...; C_n^0) = 0$ называется в этом случае ***частным интегралом***.

Рассмотрим далее несколько типов дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка:

1. ***Дифференциальные уравнения вида*** $y^{(n)} = f(x)$**.** В уравнениях такого типа правая часть является функцией только независимой переменной *x*. Они решаются *n* кратным последовательным интегрированием.

Пример. Найти общее решение ДУ $y'' = sinx$.

Решение. Дважды интегрируем уравнение по переменной *x*.

$$y' = -cosx + C_1 \Rightarrow y = -sinx + C_1x + C_2.$$

2. ***Уравнения, не содержащие явно искомой функции и нескольких первых производных*** $F\left(x, y^{(k)}, y^{(k-1)}, \ldots\ldots, y^{(n)}\right) = 0.$

Порядок такого уравнения понижается заменой $z = y^{(k)}$, где z=*z(x)* – функция независимой переменной *x*. При такой замене уравнение принимает вид $F\left(x, z, z', z'', \ldots\ldots, z^{(n-k)}\right) = 0$ и его порядок понижается на *k*.

Пример. Найти общее решение ДУ $y''' - y'' = 0$.

Решение. Это дифференциальное уравнение третьего порядка, в котором отсутствует явным образом неизвестная функция и ее первая производная, допускает понижение порядка на единицу. Выполняем замену неизвестной функции: $y'' = z, z = z(x)$. Тогда $y''' = (y'')' = z'$ и исходное ДУ 3-го порядка сводится к ДУ 1-го порядка $z' - z = 0$. Интегрируя это уравнение, как дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными,

$$\frac{dz}{z} = dx \ \Rightarrow \ \ln|z| = x + \ln|C_1| \ \Rightarrow z = C_1e^x,$$

получаем его общее решение. Далее возвращаемся к исходным обозначениям

$$y'' = C_1e^x$$

и получаем дифференциальное уравнение выше рассмотренного типа, которое решается интегрированием дважды

$$y' = C_1e^x + C_2 \ \Rightarrow y = C_1e^x + C_2x + C_3$$

– общее решение исходного ДУ 3-го порядка.

Для дифференциального уравнения второго порядка рассмотренный тип соответствует ***ДУ 2-го порядка, в котором отсутствует неизвестная функция:*** $F(x, y', y'') = 0$. Выполняя замену $z = z(x)$ неизвестной функции:

$$y' = z, \quad y'' = z'$$

сведем ДУ 2-го порядка к ДУ 1-го порядка $F(x, z, z') = 0$. Интегрируя полученное дифференциальное уравнение первого порядка, находим его общее решение $z = \varphi(x, C_1)$ или в исходных обозначениях

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, C_1).$$

Получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные

$$dy = \varphi(x, C_1)dx$$

и интегрируем

$$y = \int \varphi(x, C_1)dx.$$

В результате получаем общее решение $y = \psi(x, C_1, C_2)$. исходного дифференциального уравнения второго порядка.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$xy'' + y' = 1.$$

Решение. Заданное ДУ 2-го порядка допускает его понижение, поскольку отсутствует неизвестная функция. Выполняем замену неизвестной функции: $y' = z(x)$. Тогда $y'' = z'$ и исходное ДУ 2-го порядка сводится к ДУ 1-го порядка $xz' + z = 1$ интегрируя которое найдем $z(x)$:

$$(xz)' = 1 \implies xz = x + C_1 \implies z = \frac{C_1}{x} + 1$$

или, возвращаемся к исходным обозначениям

$$y' = \frac{C_1}{x} + 1.$$

Решая полученное ДУ 1-го порядка, получаем общее решение исходного дифференциального уравнения

$$y = C_1 \ln|x| + x + C_2.$$

3. ***Уравнение, не содержащее явно независимой переменной x***

$$F\left(y, y', y'', \ldots\ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Сделаем замену $p = y'$, выбирая за аргумент *y*: *p*=*p*(*y*). Тогда

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy} = pp'.$$

По аналогии можно получить $y''' = pp'^2 + p^2p''$ и так далее. Подставляя значения производных функции *y,* выраженные через неизвестную функцию *p*=*p*(*y*), придем к ДУ порядка на единицу меньше. Решая его и находя общее решение $p(y) = \varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})$, получим

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) \Rightarrow \int \frac{dy}{\varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})} = x + C_n$$

общий интеграл исходного уравнения.

Для случая **ДУ 2-го порядка, в котором отсутствует независимая переменная** имеем более простой случай.

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' + \frac{2}{1-y}y'^2 = 0.$

Решение. Делаем замену $y' = p(y), y'' = pp'$ получаем после подстановки в уравнение, $pp' + \frac{2}{1-y}p^2 = 0$ или $p\left(p' + \frac{2}{1-y}p\right) = 0$:

$$p = 0 \Rightarrow y = C \quad \text{или} \quad \frac{dp}{dy} = \frac{-2p}{1-y} \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{2dy}{1-y} \Rightarrow$$

$$\ln p = \ln C_1(1-y)^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = C_1(1-y)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{C_1 dy}{(1-y)^2} = dx \Rightarrow \frac{C_1}{1-y} = x + C_2$$

Пример. Найти общее решение ДУ $yy'' - (y')^2 = 0.$

Решение. Это ДУ 2-го порядка, допускающее его понижение, поскольку отсутствует независимая переменная. Выполняем замену неизвестной функции $y' = p(y)$. Тогда $y'' = pp'$ и исходное ДУ сводится к ДУ 1-го порядка

$$ypp' - p^2 = 0 \Rightarrow p(yp' - p) = 0,$$

что в свою очередь приводит к совокупности ДУ: либо $p = \frac{dy}{dx} = 0$, либо $yp' - p = 0$ (ДУ с разделяющимися переменными). Интегрируем эту совокупность: либо $y = C = const$, либо

$$\frac{dp}{dy} = \frac{p}{y} \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|p| = \ln|y| + \ln|C_1| \Rightarrow p = C_1 y.$$

Возвращаемся в последнем уравнении к исходным обозначениям

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y$$

и интегрируем

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y \Rightarrow \frac{dy}{y} = C_1 dx \Rightarrow \ln|y| = C_1 x + \ln|C_2| \Rightarrow |y| = e^{\ln|C_2|} e^{C_1 x} \Rightarrow |y| = C_2 e^{C_1 x},$$

откуда с учетом произвольности знака C_2 получаем $y = C_2 e^{C_1 x}$. Учитывая, что из этого решения при $C_2 = C, C_1 = 0$ получается ранее полученное решение $y = C = const$ в качестве частного случая, то объединяя эти решения, запишем общее решение (в некоторой области) исходного ДУ 2-го порядка в виде $y = C_2 e^{C_1 x}$.

Сравнивая два рассмотренные примера понижения порядка ДУ 2-го порядка, отметим, что в обоих случаях используется переход к новой неизвестной функции: но в первом случае независимая переменная остается прежней – переменной x, а во втором случае независимой переменной становится переменная y. В результате общее решения в первом случае получается в виде $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, а во втором случае – в виде $x = \varphi(y, C_1, C_2)$.

Отметим также, что среди рассматриваемых дифференциальных уравнений часто бывают ДУ, неразрешенные относительно старшей производной, и случается, что общие решения не всегда описывают *полные* решения (все множество интегральных кривых) таких ДУ. Поэтому при интегрировании этих ДУ следует более внимательно отслеживать возможную потерю их решений.

§10. *Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка.*

Теория дифференциальных уравнений высших порядков общего вида достаточно сложна. Но существует важный частный случай – линейные дифференциальные уравнения (обозначают обычно ЛДУ), для которых многие вопросы разрешаются сравнительно просто.

Дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x),$$

где $a_i = a_i(x)$ $(i=1,n)$ (***называемые коэффициентами***) и $f(x)$ (именуемая ***свободным членом или правой частью***) – заданные функции переменной x или постоянные величины, линейное относительно неизвестной функции y и ее производных $y^{(i)}(x)$, называется ***линейным дифференциальным уравнением***

n-го порядка. В дальнейшем будем предполагать, что функции $a_i=a_i(x)$ и $f(x)$ – непрерывны на некотором интервале (a,b). Если $f(x)\equiv 0$, то уравнение называется ***линейным однородным дифференциальным уравнением***, если $f(x)\not\equiv 0$, то ***линейным неоднородным дифференциальным уравнением.***
Сформулируем для линейных дифференциальных уравнений теорему Коши.

Теорема **(**существования и единственности решения задачи Коши для ЛДУ n-го порядка**).** Если коэффициенты $a_1(x), a_2(x), ..., a_{n-1}(x), a_n(x)$ и свободный член $f(x)$ линейного дифференциального уравнения непрерывны в окрестности точки x_0, то при любых значениях $y_0, y_{01}, ..., y_{0;\,n-1}$ существует единственное решение линейного дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_{01}, ..., y^{(n-1)}(x_0)=y_{0;\,n-1}$.

Для сокращения записей и наглядности проводимых в дальнейшем рассуждений введем обозначение

$$L(y)=y^{(n)}+a_1(x)\cdot y^{(n-1)}+...+a_{n-1}(x)\cdot y'(x)+a_n(x)\cdot y(x)\ .$$

Это обозначение можно рассматривать как оператор, то есть функцию, определенную на множестве функций. Несложно показать, что этот оператор является линейным, то есть оператор, примененный к линейной комбинации достаточное число раз дифференцируемых функций, равен линейной комбинации операторов от этих функций:

$$L(\alpha_1 y_1+...+\alpha_k y_k)=\alpha_1 L(y_1)+...\alpha_k L(y_k),$$

где $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$ – действительные числа. Его называют **линейный дифференциальный оператор** (ЛДО). Тогда во введенных обозначениях:

$L(y)=0$ – общий вид ***однородного*** ЛДУ n-го порядка;

$L(y)=f(x)$ – общий вид ***неоднородного*** ЛДУ n-го порядка.

Рассмотрим однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0.$$

Пусть функции $y=y_1(x)$ и $y=y_2(x)$ являются решениями этого однородного ЛДУ, то есть справедливы равенства

$$y_1''(x)+a_1(x)y_1'(x)+a_2(x)y_1(x)=0;$$
$$y_2''(x)+a_1(x)y_2'(x)+a_2(x)y_2(x)=0.$$

Составим линейную комбинацию

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

этих решений ($C_1,C_2-const$). Продифференцируем дважды эту линейную комбинацию

$$y'=C_1y_1'(x)+C_2y_2'(x);$$
$$y''=C_1y_1''(x)+C_2y_2''(x)$$

и подставим в левую часть исходного дифференциального уравнения, а затем, раскрывая скобки и группируя слагаемые с постоянными C_1 и с C_2, с учетом того, что $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – являются решениями исходного однородного дифференциального уравнения, получим:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = C_1 y_1''(x) + C_2 y_2''(x) +$$

$$+a_1(x)(C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x)) + a_2(x)(C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)) =$$

$$= C_1(y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_2(x)y_1(x)) +$$

$$+C_2(y_2''(x) + a_1(x)y_2'(x) + a_2(x)y_2(x)) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0,$$

а значит, функция $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ также является решением исходного однородного ЛДУ.

Таким образом доказали следующее утверждение.

Утверждение. Если функции $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ являются частными решениями однородного ЛДУ $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$, то их линейная комбинация

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные, также является решением этого однородного ЛДУ.

Несложно доказать, что на самом деле верна следующая теорема:

Теорема (*свойство решений однородного ЛДУ*). Если $y_1,..., y_n$ – решения однородного ЛДУ $L(y) = 0$, то их произвольная линейная комбинация

$$\alpha_1 y_1 + ... + \alpha_k y_k,$$

($\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_k$ – произвольные постоянные) также является решением этого линейного дифференциального уравнения.

Таким образом, из теоремы следует интересный факт, что если известны n решений $y_1,..., y_n$ однородного ЛДУ n-го порядка, то функция

$$\tilde{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n,$$

зависящая от n произвольных постоянных C_1, C_2, ..., C_n, является решением этого уравнения $L(y) = 0$. Решение будет общим только тогда, если при любых допустимых начальных условиях

$$y(x_0) = y_0, y_0'(x_0) = y_0', ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

постоянные C_1, C_2, ..., C_n можно подобрать единственным образом так, чтобы эта функция $\tilde{y}$ удовлетворяла заданным начальным условиям. Прежде, чем сформулировать условия, при которых это будет выполнено, напомним понятия линейной зависимости и независимости функций.

Система функций $y_1(x), y_2(x),...,y_n(x)$, , называется ***линейно зависимой*** на интервале (a,b), если существуют действительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, не все одновременно равные нулю, такие, что выполняется равенство

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0$$

для $\forall x \in (a,b)$. Если это равенство имеет место только при

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

для $\forall x \in (a,b)$, то такая система функций называется ***линейно независимой.***

При изучении линейных пространств показывали, что ***две функции*** $y_1(x)$ и $y_2(x)$ будут ***линейно зависимы*** на (a,b) тогда и только тогда, когда они пропорциональны, то есть $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \equiv \text{const}$ при всех $x \in (a;b)$.

Пример. 1) Функции $y_1(x) = 3x,\ y_2(x) = x$ линейно зависимы, поскольку равенство

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0$$

при $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 3$ справедливо для всех действительных x.

2) Функции $y_1(x) = x,\ y_2(x) = x^2$ линейно независимы, так как

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \neq \text{const}.$$

Вопрос о линейной независимости системы функций $y_1(x), y_2(x), ...,y_n(x)$ решается с помощью определителя Вронского (вронскиана) этих функций

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Теорема. Для того, чтобы система функций $y_1(x),...,y_n(x)$ была линейно независимой на интервале (a,b) необходимо и достаточно, чтобы определитель Вронского этой системы функций был отличен от нуля на этом интервале.

Следствие. Если $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ – дифференцируемые на $(a;b)$ функции и их вронскиан $W(x_0) \neq 0$ при некотором $x_0 \in (a;b)$, то эти функции линейно независимы на $(a;b)$.

Обратное, вообще говоря, неверно, что иллюстрируется следующим примером. Функции $y_1(x) = x^2,\ y_2(x) = x\,|\,x\,|$ непрерывны и дифференцируемы всюду на $\mathbb{R}$, их вронскиан $W(x) = 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, однако эти функции линейно независимы.

Если функции $y_1(x),...,y_n(x)$ являются решениями однородного ЛДУ с непрерывными коэффициентами, то для такой системы функций можно сформулировать следующие утверждения.

Утверждение. Если функции $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ являются решениями некоторого однородного ЛДУ с непрерывными коэффициентами, то они линейно независимы на $(a; b)$ тогда и только тогда, когда вронскиан этих функций отличен от нуля на этом интервале, то есть $W(x) \neq 0$ при всех $x \in (a; b)$.

При этом для определителя Вронского $W(x)$, построенного для частных решений некоторого однородного ЛДУ с непрерывными на $(a; b)$ коэффициентами, имеют место следующее свойство.

Утверждение. Если вронскиан частных решений некоторого однородного ЛДУ с непрерывными на $(a; b)$ коэффициентами отличен от нуля $W(x_0) \neq 0$ при некотором $x_0 \in (a; b)$, то $W(x) \neq 0$ при всех $x \in (a; b)$.

Для произвольных функций (не являющихся решениями некоторого ЛОДУ с непрерывными коэффициентами) утверждение справедливо только в одну сторону (см. следствие к теореме и пример после него).

Будем говорить, что решения $y_1 = y_1(x),..., y_n = y_n(x)$ образуют на интервале (a, b) ***фундаментальную систему решений*** (ФСР) однородного ЛДУ, если:

1) это линейно независимые на интервале (a, b) решения;
2) их число совпадают с порядком ЛДУ.

Другими словами, фундаментальной системой решений ЛОДУ n-го порядка называется совокупность n линейно независимых решений этого уравнения. Смысл введения ФСР в том, что любое решение ЛОДУ может быть представлено в виде линейной комбинации функций, составляющих фундаментальную систему решений этого уравнения. Или, формулируя в терминах линейных пространств, любое решение однородного линейного дифференциального уравнения может быть разложено по базису, состоящему из линейно независимых решений однородного ЛДУ. причем число функций в фундаментальной системе решений ЛОДУ совпадает с порядком этого уравнения.

Пример. Проверить, что функции $y_1 = e^{-x}\sin x, y_2 = e^{-x}\cos x$ образуют фундаментальную систему решений однородного ЛДУ $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Решение. Так как $\dfrac{y_2}{y_1} = \dfrac{e^{-x}\cos x}{e^{-x}\sin x} = \mathrm{ctg}x \neq const$, то функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ линейно независимы. Проверим далее, является ли функция $y_1(x)$ решением данного дифференциального уравнения. Учитывая, что

$$y_1' = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x = e^{-x}\left(-\sin x + \cos x\right),$$

$$y_1'' = -e^{-x}\left(-\sin x + \cos x\right) + e^{-x}\left(-\cos x - \sin x\right) = -2e^{-x}\cos x,$$

имеем

$$-2e^{-x}\cos x + 2e^{-x}\left(-\sin x + \cos x\right) + 2e^{-x}\sin x \equiv 0,$$

то есть функция $y_1(x) = e^{-x}\sin x$ удовлетворяет данному ДУ. Аналогично проверяется, что и $y_2(x) = e^{-x}\cos x$ – решение этого ДУ. Таким образом, $y_1 = e^{-x}\sin x, y_2 = e^{-x}\cos x$ – два линейно независимыми решения рассматриваемого однородного ЛДУ второго порядка, и, следовательно, образуют его фундаментальную систему решений.

§11. Структура общего решения однородного ЛДУ n-го порядка

Ответ на вопрос о виде общего решения однородного дифференциального уравнения дает следующая теорема.

Теорема. Если $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ – какая-либо фундаментальная система решения однородного ЛДУ $L(y) = 0$ n-го порядка, то функция

$$y = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x),$$

где C_i – произвольные постоянные, есть его общее решение.

Действительно, то, что $y = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)$ является решением, вытекает из свойств однородного ЛДУ. Проверим теперь, что эта функция решает любую допустимую задачу Коши $y(x_0) = y_0^0,\ y'(x_0) = y_0^1, \ldots, y^{n-1}(x_0) = y_0^{n-1}$. По условию

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = y_0^0, \\ C_1 y_1'(x_0) + \ldots C_n y_n'(x_0) = y_0^1, \\ \vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots C_1 y_1^{n-1}(x_0) = y_0^{n-1}. \end{cases}$$

Определитель матрицы этой системы (относительно неизвестных C_i) – есть отличный от нуля вронскиан (так как это фундаментальная система решений) и, таким образом, эта система для любого $x_0 \in X$ и для любых $y_0^0, y_0^1, \ldots, y_0^{n-1} \in \mathbb{R}$ имеет единственное решение относительно $C_1, \ldots, C_n$ и, стало быть, функция $y = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)$ является общим решением ЛДУ $L(y) = 0$. Что и требовалось доказать.

Таким образом для того, чтобы ***успешно интегрировать однородное ЛДУ, достаточно научиться находить фундаментальную систему его решений.*** В дальнейшем общее решение однородного дифференциального уравнения будем обозначать при необходимости $y_{oo}(x)$.

Пример. Показать, что функции $y_1=e^x, y_2=e^{-x}, y_3=\sin x,\ \ y_4=\cos x$ образуют фундаментальную систему решений однородного ЛДУ $y^{(4)}-y=0$ и записать вид общего решения.

Решение. Легко проверить, что $y_1=e^x,\ y_2=e^{-x},\ y_3=\sin x,\ y_4=\cos x$ удовлетворяют данному ДУ на всей числовой оси. Воспользуемся сформулированным ранее утверждением относительно свойств вронскиана, составленного для решений однородного ДУ: если вронскиан отличен от нуля в какой-либо точке, то он отличен от нуля на всем интервале определения функций. Вронскиан вышеприведенных решений

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & \sin x & \cos x \\ e^x & -e^{-x} & \cos x & -\sin x \\ e^x & e^{-x} & -\sin x & -\cos x \\ e^x & -e^{-x} & -\cos x & \sin x \end{vmatrix}$$ отличен от нуля, например, при $x=0$:

$$W(0)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=8\neq 0$$

и, следовательно, эти функции образуют фундаментальную систему решений. Тогда общее решение рассматриваемого ДУ имеет вид:

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\sin x+C_4\cos x.$$

Нетрудно проверить, что функции

$$y_1=\mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\ y_2=\mathrm{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\ y_3=\sin x,\ y_4=\cos x$$

также образуют фундаментальную систему решений, поэтому общее решение можно записать и в виде: $y=C_1\mathrm{sh}x+C_2\mathrm{ch}x+C_3\sin x+C_4\cos x$. Это подтверждает тот факт, что ФСР неединственна (что, в общем случае следует из неединственности базиса линейного пространства).

Из теоремы следует, что ***для отыскания общего решения однородного ЛДУ второго порядка достаточно найти любых два его линейно независимых решения и составить их линейную комбинацию*** $y=C_1y_1+C_2y_2$.
Предположим, что известно какое-либо одно решение $y_1(x)$ уравнения

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0.$$

Как найти еще одно линейно независимое с ним решение ЛДУ. Из определения двух линейно независимых функций следует, что $\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\neq const$ для $\forall x\in(a,b)\Rightarrow\frac{y_2(x)}{y_1(x)}=u(x)$ и второе линейно независимое решение находится подстановкой $y_2(x)=y_1(x)u(x)$, где *u(x)* находится из условия $L\big(y_2(x)\big)=0$ при подстановке в уравнение.

Пример. Решить уравнение $y''-4y'+3y=0$.

Решение. Несложно заметить, что $y_1(x) = e^x$. Второе линейно независимое решение ищем подстановкой $y_2(x) = u(x)e^x$. Находим производные этой подстановки

$$y_2'(x) = e^x(u'(x) + u(x)), y_2''(x) = e^x(u''(x) + 2u'(x) + u(x))$$

и подставим их в исходное ЛДУ. Получаем $u''(x) - 2u'(x) = 0$. Сделаем замену $z = u'(x)$. Имеем

$$z' - 2z = 0.$$

Разделяя переменные найдем, что $z = e^{2x}$ и $u(x) = 0{,}5e^{2x}$. Окончательно: $y_2(x) = e^{3x}$ и $y_{OO} = C_1e^x + C_2e^{3x}$.

§12. *Структура общего решения неоднородного ЛДУ*

Вернемся к неоднородному ЛДУ $L(y) = f(x)$. Учитывая структуру решений однородного ЛДУ и свойства решений неоднородного ЛДУ, убеждаемся в том, что его ***общее решение*** $y = y_{OH}(x)$ (общее решение неоднородного уравнения) ***выражается следующей формулой***:

$$y = y_{OH}(x) = C_1y_1(x) + \ldots + C_ny_n(x) + y_H(x),$$

где $y_1 = y_1(x), \ldots, y_n = y_n(x)$ – произвольная фундаментальная система решений однородного ЛДУ $L(y) = 0$, а $y_H(x)$ – произвольное частное решение неоднородного ЛДУ $L(y) = f(x)$.

Таким образом, ***для того, чтобы проинтегрировать неоднородное ЛДУ, достаточно уметь находить фундаментальную систему решений однородного ЛДУ и некоторое частное решение неоднородного ЛДУ***.

Пример. Показать, что функция $y = x^3$ является частным решением ЛДУ $y''' = 6$, а функции $y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = x^2$ образуют фундаментальную систему решений соответствующего однородного ЛДУ. Используя этот факт, записать вид общего решения.

Решение. Имеем: $y''' = (x^3)''' = 6, y_1''' = y_2''' = y_3''' = 0$ и, таким образом, $y = x^3$ является частным решением неоднородного ЛДУ $y''' = 6$, а функции $y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = x^2$ являются решениями однородного ЛДУ. Покажем, что они образуют фундаментальную систему решений. Найдем вронскиан $W(x)$ функций $y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = x^2$:

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Следовательно, функции $y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = x^2$ линейно независимые и образуют фундаментальную систему решений однородного ЛДУ. Тогда общее решение неоднородного ЛДУ $y''' = 6$ запишется в виде:

$$y = y_{OO} + y_H = C_1 + C_2x + C_3x^2 + x^3.$$

Если неоднородное уравнение имеет вид $L(x) = f_1(x) + f_2(x)$, то частное решение такого уравнения можно получить как сумму частных решений уравнений $L(x) = f_1(x)$ и $L(x) = f_2(x)$.

§13. *ЛДУ с постоянными коэффициентами.*

Рассмотрим однородное ЛДУ $L(y)=0$ с постоянными коэффициентами, то есть $a_1(x)\equiv a_1, ..., a_n(x)\equiv a_n$ – действительные числа.

Следуя идее Эйлера, ищем решение этого ЛДУ в виде

$$y=e^{\lambda x},$$

где λ – некоторое (в общем случае комплексное) число. Тогда $y^{(k)}=\lambda^k\cdot e^{\lambda x}$. Подставляя выражения для искомой функции и ее производных в ЛДУ $L(y)=0$, получаем $e^{\lambda x}\left(\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+...a_{n-1}\lambda+a_n\right)=0$, откуда, сокращая на $e^{\lambda x}$, приходим к ***характеристическому уравнению*** $\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+...a_{n-1}\lambda+a_n=0$ для нахождения искомых чисел λ.

Рассмотрим случай, когда характеристическое уравнение имеет n различных действительных корней $\lambda_1,...,\lambda_n$. В этом случае решения $y_1=e^{\lambda_1 x},...,y_n=e^{\lambda_n x}$ *образуют фундаментальную систему решений* однородного ЛДУ, так как их вронскиан отличен от нуля, и поэтому общее решение однородного ЛДУ $L(y)=0$ в случае различных корней характеристического уравнения имеет вид

$$y=y_{OO}(x)=C_1e^{\lambda_1 x}+...+C_ne^{\lambda_n x}.$$

Пример. Найти общее решение ЛДУ $y^{(4)}-5y''+4y=0$.

Решение. Данное ДУ – однородное ЛДУ с постоянными коэффициентами. Следуя методу Эйлера, составляем характеристическое уравнение $\lambda^4-5\lambda+4=0$ (биквадратное уравнение) и решаем его: $\lambda^4-5\lambda+4=(\lambda^2-1)(\lambda^2-4)=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-2)=0$, откуда корни $\lambda_1=-1, \lambda_2=1, \lambda_3=-2, \lambda_4=2$ этого уравнения являются действительными и различными. Тогда общее решение этого ЛДУ имеет вид:

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{x}+C_3e^{-2x}+C_4e^{2x}.$$

В общем случае кратных и комплексных корней характеристического уравнения общее решение имеет более сложную структуру. Рассмотрим эту ситуацию подробно на примере ДУ 2-го порядка.

Рассмотрим ЛДУ с постоянными коэффициентами:

$$y''+py'+qy=0,$$

где p и q – действительные числа. Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид: $\lambda^2+p\lambda+q=0$.

Общее решение однородного ЛДУ имеет вид:

$$y=y_{OO}=C_1y_1(x)+C_2y_2(x),$$

где $y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x)$ – фундаментальная система решений однородного ЛДУ.

Рассмотрим возможные случаи:

1. корни λ_1 и λ_2 ***различные и действительные***: $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда функции $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ образуют фундаментальную систему решений этого ЛДУ, и его общее решение запишется в виде:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Пример. Найти общее решение ЛДУ $y'' + y' - 2y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ и найдем его корни: $\lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = -2$ (действительные и различные). Тогда $y_1(x) = e^x$ и $y_2(x) = e^{-2x}$ – фундаментальная система решений и

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$$

– общее решение рассматриваемого ЛДУ.

2. корни ***действительные и равные*** (совпадают): $\lambda_1 = \lambda_2$, то есть $\lambda_1 = \lambda$ – корень кратности два характеристического уравнения. Функция $y_1(x) = e^{\lambda x}$ является решением ЛДУ. Чтобы получить фундаментальную систему решений требуется найти еще одно линейно независимое решение. Второе решение можно взять в виде: $y_2(x) = xe^{\lambda x}$. Убедимся, что эта функция является решением. Имеем:

$$y_2' = (1 + \lambda x)e^{\lambda x},\ y_2'' = \left((1 + \lambda x)e^{\lambda x}\right)' = \left(2\lambda + \lambda^2 x\right)e^{\lambda x}.$$

Поэтому

$$y_2'' + p\,y_2' + q\,y_2 =$$
$$= \left(2\lambda + \lambda^2 x\right)e^{\lambda x} + p(1 + \lambda x)e^{\lambda x} + qxe^{\lambda x} =$$
$$= xe^{\lambda x}\left(\lambda^2 + p\lambda + q\right) + e^{\lambda_1 x}(2\lambda + p) = 0,$$

так как λ – корень характеристического уравнения $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ и по теореме Виета $\lambda + \lambda = -p$, то $y_2(x) = xe^{\lambda x}$ также является решением. Поскольку $\dfrac{y_2}{y_1} = x \neq const$, то решения $y_1,\ y_2$ линейно независимы, то есть образуют фундаментальную систему решений. Тогда общее решение ЛДУ в рассматриваемом случае можно записать в виде:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x}.$$

Пример. Найти общее решение ЛДУ $y'' - 2y' + y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$. Его корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ – действительные и равные между собой. Тогда

$$y_1(x) = e^x, y_2(x) = xe^x$$

– фундаментальная система решений и

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x$$

– общее решение рассматриваемого ЛДУ.

3. корни характеристического уравнения ***комплексные*** (комплексно сопряженные): $\lambda_1 = a+bi$, $\lambda_2 = a-bi$, a и b – действительные числа, $b \neq 0$; i – мнимая единица $i^2=-1$. В этом случае фундаментальную систему решений образуют функции $y_1(x)=e^{ax}\cos(bx), y_2(x)=e^{ax}\sin(bx)$ и общее решение рассматриваемого ЛДУ имеет вид

$$y = y_{OO} = e^{ax}\left(C_1\cos(bx)+C_2\sin(bx)\right).$$

Пример. Найти общее решение ЛДУ $y''+y'+y=0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $\lambda^2+\lambda+1=0$ и найдем его корни $\lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (комплексно сопряженные). Тогда

$$y_1(x)=e^{\frac{-1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x \quad \text{и} \quad y_2(x)=y=e^{\frac{-1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

– фундаментальная система решений и

$$y=e^{\frac{-1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

– общее решение данного ЛДУ.

§14. Неоднородные ЛДУ со специальной правой частью

Рассмотрим неоднородное ЛДУ второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

$$y''+py'+qy=f(x),$$

где $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x)$, – ***специальная правая часть***. Здесь $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлены соответственно степени n и m, α и β – действительные числа. Число $\alpha+\beta i$ будем называть ***контрольной постоянной***.

Частное решение неоднородного ЛДУ с постоянными коэффициентами и специальной правой частью *по методу неопределенных коэффициентов* будем искать в виде:

$$y_H(x) = x^k e^{\alpha x}\left(\tilde{P}_\nu(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_\nu(x)\sin\beta x\right),$$

где k – кратность числа $\alpha+i\beta$ как корня характеристического уравнения (k=0, если $\alpha+i\beta$ не является корнем характеристического уравнения), $\nu = max\{m,n\}$, $\tilde{P}_\nu$ и $\tilde{Q}_\nu$ – многочлены степени ν с неопределенными (пока неизвестными) коэффициентами. Таким образом

1. $y_H(x) = e^{\alpha x}\left(\tilde{P}_\nu(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_\nu(x)\sin\beta x\right)$,

если $\alpha+i\beta$ не является корнем характеристического уравнения;

2. $y_H(x) = xe^{\alpha x}\left(\tilde{P}_v(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_v(x)\sin\beta x\right)$,
если $\alpha + i\beta$ совпадает с одним из корней корнем характеристического уравнения: $\alpha + i\beta = \lambda_1$ и $\alpha + i\beta \neq \lambda_2$.

Для нахождения неопределенных коэффициентов подставляем выражения для решения $y_H(x)$ и его производных в исходное ЛДУ и приравниваем коэффициенты при одинаковых (линейно независимых) функциях.

Рассмотрим далее ***частные случаи специальной правой части***.
Правая часть – ***многочлен***: $f(x) = P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$. Тогда

1) $y_H(x) = \tilde{P}_n(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n$, если $\alpha + i\beta = 0$ не является корнем характеристического уравнения (здесь $\tilde{P}_n(x)$ – многочлен n-ой степени общего вида; $A_0, A_1, \ldots, A_n$ – коэффициенты, подлежащие определению);

2) $y_H(x) = x\tilde{P}_n(x) = x(A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n)$, если $\alpha + i\beta = 0$ совпадает с одним из корней характеристического уравнения;

3) $y_H(x) = x^2\tilde{P}_n(x) = x^2(A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n)$,, если $\alpha + i\beta = 0$ совпадает с обоими корнями характеристического уравнения.

Пример. Найти общее решение ЛДУ $y'' = 6x$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение однородного ЛДУ: $\lambda^2 = 0$ и находим его корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Общее решение однородного ЛДУ имеет вид $y_{OO} = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = C_1 + C_2x$. Так как многочлен в правой части ЛДУ имеет степень 1 и контрольная постоянная $\alpha + i\beta = 0 + i0 = 0$ совпадает с обоими корнями характеристического уравнения, частное решение неоднородного ЛДУ ищем в виде многочлена первой степени общего вида, умноженного на x^2: $y_H = x^2(Ax + B)$. Тогда

$$y' = 3Ax^2 + 2Bx, y'' = 6Ax + 2B.$$

Подставляя в исходное ЛДУ, имеем

$$6Ax + 2B = 6x \Longrightarrow A = 1, B = 0 \text{ и } y_H = x^3.$$

Общее решение исходного неоднородного уравнения $y = y_{OO} + y_H$ имеет вид

$$y = C_1 + C_2x + x^3.$$

Пример. Найти общее решение ЛДУ $y'' + 2y' = 4x$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение однородного ЛДУ

$$\lambda^2 + 2\lambda = 0$$

и находим его корни $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2$. Поскольку многочлен в правой части ЛДУ имеет степень 1 и контрольная постоянная $\alpha + \beta i = 0 + 0i = 0$ совпадает с одним корнем характеристического уравнения, частное решение неоднородного ЛДУ ищем в виде многочлена первой степени общего вида умноженного на x

$$y = x(Ax + B).$$

Тогда $y' = 2Ax + B, y'' = 2A$. Подставляя в исходное ЛДУ, имеем:

$$y'' + 2y' = 2A + 2(2Ax + B) = 4Ax + 2A + 2B \equiv 4x.$$

Приравнивая коэффициенты при различных степенях x, для нахождения коэффициентов A и B получаем систему

$$\begin{cases} 4A=4, \\ 2A+2B=0, \end{cases}$$

решая которую, получаем $A=1, B=-1$ и $y_H = x^2 - x$. Общее решение неоднородного ЛДУ имеет вид $y = C_1 + C_2 e^{-2x} + x^2 - x.$

Пример. Найти общее решение ЛДУ $y'' + 5y' + 6y = 18x^2 - 1$.
Решение. Составляем характеристическое уравнение однородного ЛДУ: $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$ и находим его корни: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. Поскольку многочлен в правой части ЛДУ имеет степень 2 и контрольная постоянная $\alpha + \beta i = 0 + 0i = 0$ не совпадает ни с одним корнем характеристического уравнения, частное решение неоднородного ЛДУ ищем в виде многочлена 2-ой степени общего вида

$$y = Ax^2 + Bx + C.$$

Подставляя в исходное ЛДУ, имеем:

$$y'' + 5y' + 6y = 2A + 5(2Ax + B) + 6(Ax^2 + Bx + C) = 18x^2 - 1.$$

Приравнивая коэффициенты при различных степенях x, для нахождения коэффициентов A, B и C, получаем систему

$$\begin{cases} 6A = 18, \\ 10A + 6B = 0, \\ 2A + 5B + 6C = -1, \end{cases}$$

решая которую, получаем $A = 3, B = -5, C = 3$ и $y_H = 3x^2 - 5x + 3$. Общее решение неоднородного ЛДУ имеет вид $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + 3x^2 - 5x + 3.$

Правая часть – ***многочлен с экспонентой***: $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$. Тогда контрольная постоянная $\alpha + \beta i = \alpha + 0i = \alpha$ и частное решение неоднородного ЛДУ ищется в виде

$$y_H(x) = e^{\alpha x} \tilde{P}_n(x) x^k = e^{\alpha x}(A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n),$$

если $\alpha + \beta i = \alpha$ является корнем кратности k ($k = 0$, если $\alpha + \beta i = \alpha$ не является корнем) характеристического уравнения.

Правая часть – ***многочлен с тригонометрическими функциями***:

$$f(x) = P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x.$$

Тогда контрольная постоянная $\alpha + \beta i = 0 + \beta i = \beta i$, $\nu = \max\{m; n\}$, и частное решение неоднородного ЛДУ ищется в виде:

$$y_H(x) = x^k\big((A_0 x^\nu + A_1 x^{\nu-1} + \cdots + A_\nu) \cos \beta x + (B_0 x^\nu + B_1 x^{\nu-1} + \cdots + B_\nu) \sin \beta x\big),$$

если $\alpha + \beta i = \beta i$ является корнем кратности k ($k = 0$, если $\alpha + \beta i$ не является корнем) характеристического уравнения.

В некоторых случаях, когда правая часть не является специальной, ее удается представить в виде суммы специальных правых частей. Тогда и

частное решение неоднородного ЛДУ можно искать в виде суммы частных решений, соответствующих этим специальным правым частям.

Пример. Указать общий вид (с неопределенными коэффициентами) частного решения ЛДУ $y''+y=f(x)$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение $\lambda^2+1=0$ однородного ЛДУ и находим его корни: $\lambda_1=i, \lambda_2=-i$. Тогда, если

а) $f(x)=x^3$, то так как контрольная постоянная $\alpha+\beta i=0+0i=0$ не совпадает ни с одним корнем характеристического уравнения, частное решение неоднородного ЛДУ ищем в виде $y=Ax^3+Bx^2+Cx+D$;

б) $f(x)=\dfrac{x}{e^{2x}}$, то поскольку контрольная постоянная $\alpha+\beta i=-2+0i=-2$ не совпадает ни с одним корнем характеристического уравнения, частное решение неоднородного ЛДУ ищем в виде $y=e^{-2x}(Ax+B)$;

в) $f(x)=(x+1)\cos x+x^2\sin x$, то так как $\nu=\max\{m;n\}=\max\{1;2\}=2$ и контрольная постоянная $\alpha+\beta i=0+1\cdot i=i$ совпадает с одним корнем характеристического уравнения, частное решение неоднородного ЛДУ ищем в виде $y=x[(A_1x^2+A_2x+A_3)\cos x+(B_1x^2+B_2x+B_3)\sin x]$;

г) $f(x)=x\operatorname{sh}x$, то поскольку $f(x)=x\operatorname{sh}x=x\cdot\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=f_1(x)+f_2(x)$ не является специальной правой частью, но является суммой специальных правых частей $f_1(x)=\dfrac{x}{2}\cdot e^x$ и $f_2(x)=-\dfrac{x}{2}\cdot e^{-x}$ с контрольными постоянными $\alpha+\beta i=1+0\cdot i=1\neq\pm i$ и $\alpha+\beta i=-1+0\cdot i=-1\neq\pm i$, то частное решение неоднородного ЛДУ ищем в виде суммы частных решений

$$y_{H_1}=e^x(Ax+B) \text{ и } y_{H_2}=e^{-x}(Cx+D)$$

для ЛДУ $y''+y=f_1(x)$ и $y''+y=f_2(x)$ соответственно.

Пример. Найти общее решение ЛДУ $y''+y'-2y=-20\sin(2x)$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение однородного ЛДУ $\lambda^2+\lambda-2=0$ и находим его корни $\lambda_1=1, \lambda_2=-2$. Поскольку многочлен при $\sin(2x)$ в правой части ЛДУ имеет степень 0 и контрольная постоянная $\alpha+\beta i=0+2i=2i$ не совпадает ни с одним корнем характеристического уравнения, частное решение неоднородного ЛДУ ищем в виде

$$y=A\cos(2x)+B\sin(2x).$$

Подставляя в исходное ЛДУ, имеем:

$$y''+y'-2y=-4A\cos(2x)-4B\sin(2x)-2A\sin(2x)+$$
$$+2B\cos(2x)-2(A\cos(2x)+B\sin(2x))\equiv-20\sin(2x).$$

Приравнивая коэффициенты при $\sin 2x$ и $\cos 2x$, для нахождения коэффициентов A и B, получаем систему

$$\begin{cases} -4A+2B-2A=0, \\ -4B-2A-2B=-20, \end{cases}$$

решая которую, получаем $A=1,\ B=3$ и $y_H=\cos(2x)+3\sin(2x)$. Общее решение неоднородного ЛДУ имеет вид $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+\cos(2x)+3\sin(2x)$.

§15. Метод вариации произвольных постоянных

Метод вариации произвольных постоянных нахождения частного решения неоднородного ЛДУ был предложен Лагранжем и подходит для правой части любого вида. Рассмотрим его на примере ЛДУ 2-го порядка

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$$

при условии, что известна $y=y_1(x), y=y_2(x)$ фундаментальная система решений однородного ЛДУ. Тогда частное решение неоднородного ЛДУ ищется в виде

$$y=y_H(x)=C_1(x)\cdot y_1(x)+C_2(x)\cdot y_2(x),$$

где $C_1(x), C_2(x)$ – некоторые вспомогательные функции, подлежащие определению. Вид частного решения используем при подстановке в ДУ

$$y'=C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)+C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x).$$

Учитывая, что так как необходимо определить две функции $C_1(x), C_2(x)$, то одно соотношение между ними можно выбрать произвольно. Пусть функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ такие, что справедливо равенство

$$C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0.$$

Тогда

$$y'=C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x),$$

а

$$y''=C_1'(x)\cdot y_1'(x)+C_2'(x)\cdot y_2'(x)+C_1(x)\cdot y_1''(x)+C_2(x)\cdot y_2''(x),$$

Подставляя выражение для частного решения и его производных в ЛДУ и вынося функции $C_1(x), C_2(x)$ за скобки, получаем

$$y''+p(x)y'+q(x)y=C_1(x)\left(y_1''(x)+p(x)y_1'(x)+q(x)y_1(x)\right)+$$

$$C_2(x)\cdot\left(y_2''(x)+p(x)y_2'(x)+q(x)y_2(x)\right)+C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)\equiv f(x),$$

где функции $y=y_1(x), y=y_2(x)$ являются решениями однородного ЛДУ и поэтому выражения в скобках обращаются в нуль. В результате для нахождения производных неизвестных функций $C_1(x), C_2(x)$ получаем систему линейных алгебраических уравнений, определителем которой является вронскиан

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot y_1(x)+C_2'(x)\cdot y_2(x)=0, \\ C_1'(x)\cdot y_1'(x)+C_2'(x)\cdot y_2'(x)=f(x) \end{cases}$$

Решая её, определяем производные неизвестных функций $C_1'(x)=a(x)$, $C_2'(x)=b(x)$ и интегрированием находим сами функции. Тогда

$$y_H(x)=y_1(x)\cdot\int a(x)dx+y_2(x)\cdot\int b(x)dx$$

и общее решение $y=y_{OO}(x)+y_H(x)$ неоднородного ЛДУ имеет вид

$$y=C\cdot y_1(x)+C_2\cdot y_2(x)+y_1(x)\cdot\int a(x)dx+y_2(x)\cdot\int b(x)dx.$$

Пример. Найти общее решение ДУ $y''=\frac{y'}{x}+x$.

Найдем решение однородного уравнения $y''-\frac{y'}{x}=0$. Разделим переменные

$$\frac{y''}{y'}=\frac{1}{x}\Longrightarrow \ln|y'|=\ln|x|+\ln|C'| \Rightarrow y'=C'x \Longrightarrow y=C_1x^2+C_2$$

– общее решение однородного уравнения, где

$$y_1(x)=x^2, \qquad y_2(x)=1$$

– фундаментальная система решений однородного ЛДУ. Частное решение неоднородного ищем в виде $y_{\text{Н}}=C_1(x)x^2+C_2(x)$, где функции *C1(x)* и_*C2(x)* являются решением системы

$$\begin{cases} C_1'(x)x^2+C_2'=0 \\ C_1'(x)2x+0=x \end{cases} \Rightarrow C_1'(x)=\frac{1}{2}, C_2'=-\frac{x^2}{2}.$$

Интегрируя, получаем

$$C_1(x)=\frac{x}{2}, C_2=-\frac{x^3}{6}.$$

Тогда решение неоднородного ЛДУ

$$y_{\text{Н}}=C_1(x)x^2+C_2(x)=\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{6}=\frac{x^3}{3},$$

а общее решение исходного уравнения

$$y_{\text{ОН}}=C_1x^2+C_2+\frac{x^3}{3}.$$

Метод вариации произвольных постоянных особенно эффективен для ЛДУ с постоянными коэффициентами, так как в этом случае фундаментальная система решений однородного ЛДУ легко определяется по корням соответствующего характеристического уравнения.

Пример. Найти общее решение ЛДУ $y''+y=\operatorname{tg}x$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение однородного ЛДУ $\lambda^2+1=0$ и находим его корни: $\lambda_1=i, \lambda_2=-i$. Определяем фундаментальную систему

$$y_1(x)=\sin x,\ y_2(x)=\cos x$$

и общее решение $y_{OO}(x)=C_1\sin x+C_2\cos x$ однородного ЛДУ. Ищем частное решение неоднородного ЛДУ в виде $y_H(x)=C_1(x)\sin x+C_2(x)\cos x$, где

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot\sin x+C_2'(x)\cdot\cos x=0, \\ C_1'(x)\cdot\cos x+C_2'(x)\cdot(-\sin x)=\operatorname{tg}x \end{cases} \text{или} \begin{cases} C_1'(x)=\sin x, \\ C_2'(x)=-\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}, \end{cases}$$

откуда

$$C_1(x) = -\cos x,\ C_2(x) = \sin x + \ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right|.$$

Тогда

$$y_H(x) = C_1(x)\sin x +$$

$$+C_2(x)\cos x = (-\cos x)\sin x + \left(\sin x + \ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right|\right)\cos x = \cos x \cdot \ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right|$$

и общее решение исходного ЛДУ имеет вид

$$y = y_{OO}(x) + y_H(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \cos x \cdot \ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right|.$$

§16. Понятие о системах дифференциальных уравнений

Во многих прикладных задачах требуется определить сразу несколько функций, связанных между собой дифференциальными уравнениями. Например, если материальная точка массой m движется под действием переменной силы $F(t,r,r')$ по закону $r=r(t)$, то вектор функция $r(t)=r(x(t),y(t),z(t))$ удовлетворяет уравнению $m\frac{d^2r}{dt^2} = F(t,r,\frac{dr}{dt})$. Это векторное уравнение эквивалентно системе скалярных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{1}{m}F_1(t,x,y,z,x',y',z') \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{1}{m}F_2(t,x,y,z,x',y',z') \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{1}{m}F_3(t,x,y,z,x',y',z') \end{cases}$$

где F_1, F_2 , F_3 – проекции вектора F на оси координат.

Если уравнения системы разрешены относительно старших производных, то система ДУ называется ***канонической***. В дальнейшем независимую переменную будем обозначать t, а неизвестные функции этой переменной – $x_1(t)$, $x_2(t)$, …, $x_n(t)$. Если их не больше трех, то $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Если в предыдущей системе ввести еще три новые переменные (то есть «расширить фазовое пространство») $\frac{dx}{dt} = u$, $\frac{dy}{dt} = v$, $\frac{dz}{dt} = w$, то $\frac{du}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ и так далее, то получим систему из шести ДУ первого порядка.

Система n дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t,x_1,x_2,\dots,x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t,x_1,x_2,\dots,x_n) \\ \qquad\qquad \cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t,x_1,x_2,\dots,x_n) \end{cases}$$

где $f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ заданные непрерывные в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ функции *(n+1)* переменной, называется ***нормальной системой дифференциальных уравнений.*** В левой части нормальной системы находятся только производные первого порядка, а в правой части их вообще не содержится. Важность изучения нормальных систем ДУ обусловлена тем, что произвольную каноническую систему дифференциальных уравнений почти всегда можно записать в нормальной форме методом «расширения фазового пространства», то есть введением новых переменных.

Решением нормальной системы n дифференциальных уравнений на (a,b) называется совокупность непрерывно дифференцируемых на *(a,b)* функций $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, которые при подстановке в уравнения системы превращают их в верные тождества.

Общим решением нормальной системы ДУ называется совокупность функций $x_i = x_i(t, C_1, C_2, \dots, C_n)$ $(i = \overline{1,n})$, зависящая от *n* произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$, если

1) она является решением этой системы при любых допустимых значениях $C_1, C_2, \dots, C_n$;

2) каковы бы ни были допустимые начальные условия

$$x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, \dots x_n(t_0) = x_n^0$$

можно найти единственным образом такие постоянные

$$\mathrm{C}_1 = \mathrm{C}_1^0, \mathrm{C}_2 = \mathrm{C}_2^0, \dots, \mathrm{C}_n = \mathrm{C}_n^0$$

что функции $x_i = x_i(t, \mathrm{C}_1^0, \mathrm{C}_2^0, \dots \mathrm{C}_n^0)$ $(i = \overline{1,n})$ удовлетворяют этим начальным условиям

$x_i\left(t_0, \mathrm{C}_1^0, \mathrm{C}_2^0, \dots, \mathrm{C}_n^0\right) = x_i^0$ $(i = \overline{1,n})$.

Частным решением системы ДУ называют решение, полученное из общего при конкретном наборе произвольных постоянных.

Наиболее изученным и используемым вариантом СДУ является ***линейная* СДУ** (ЛСДУ):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}(t) \cdot x_1(t) + \cdots + a_{1n}(t) \cdot x_n(t) + f_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}(t) \cdot x_1(t) + \cdots + a_{nn}(t) \cdot x_n(t) + f_n(t) \end{cases},$$

где $t \in T$.

В векторно-матричных обозначениях ЛСДУ можно записать в более компактной форме: $\dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t) + f(t)$, $t \in T$, где

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \ \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix}, \ A(t) = [a_{ij}(t)]_{n \times n}, \ f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix},$$

начальное условие Коши: $x(t_0) = x_0$.

§17. Метод исключения при решении систем ЛДУ

Одним из методов решения СДУ является метод исключения, т. е. метод сведения данной СДУ к одному или нескольким ДУ относительно одной (в каждом уравнении) неизвестной функции. Порядок такого уравнения должен быть равен числу уравнений нормальной системы ДУ. Опишем схему этого метода для ЛСДУ.

Из одного какого-либо уравнения выражается одна какая-либо неизвестная функция и подставляется во все другие уравнения. В результате эта функция исключается из системы, и приходим к новой системе из $n-1$ уравнений с $n-1$ неизвестными функциями, затем исключается следующая неизвестная функция и т. д.

Пример. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + x_3(t), \\ \dot{x}_2(t) = 6x_1(t) - 6x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) = x_1(t), \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = -1, \\ x_2(0) = 0, \\ x_3(0) = 1. \end{cases}$$

Решение. Из 3-го ДУ находим $x_1(t) = \dot{x}_3(t)$ и подставляем в первые два ДУ: $\begin{cases} \ddot{x}_3(t) = x_2(t) + x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = 6\dot{x}_3(t) - 6x_3(t) \end{cases}$. Из первого ДУ находим $x_2(t) = \ddot{x}_3(t) - x_3(t)$ и подставляем во второе ДУ: $\dddot{x}_3(t) - \dot{x}_3(t) = \dot{x}_3(t) + x_3(t)$. Получили $x_3''' - 7x_3' + 6x_3 = 0$ – однородное ЛДУ с постоянными коэффициентами. Составляем характеристическое уравнение $\lambda^3 - 7\lambda + 6 = 0$ и находим его корни: $\lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = 2;\ \lambda_3 = -3$ (действительные и различные). Тогда функции e^t, e^{2t} и e^{-3t} – фундаментальная система решений и общее решение этого ЛДУ имеет вид $x_3(t) = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{-3t}$, откуда $x_1(t) = \dot{x}_3(t) =$ $= C_1e^t + 2C_2e^{2t} - 3C_3e^{-3t}$, $x_2(t) = \ddot{x}_3(t) - x_3(t) = 3C_2e^{2t} + 8C_3e^{-3t}$. Таким образом, общее решение ЛСДУ имеет вид: $\begin{cases} x_1(t) = C_1e^t + 2C_2e^{2t} - 3C_3e^{-3t} \\ x_2(t) = 3C_2e^{2t} + 8C_3e^{-3t} \\ x_3(t) = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{-3t} \end{cases}$.

Находим значения произвольных постоянных, учитывая начальные условия:

$$\begin{cases} -1 = x_1(0) = C_1 + 2C_2 - 3C_3 \\ 0 = x_2(0) = 3C_2 + 8C_3 \\ 1 = x_3(0) = C_1 + C_2 + C_3 \end{cases}, \text{ откуда}$$

$C_1 = \dfrac{3}{2},\ C_2 = -\dfrac{4}{5}, C_3 = -\dfrac{3}{10}$ и $\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{3}{2}e^t - \dfrac{8}{5}e^{2t} - \dfrac{9}{10}e^{-3t} \\ x_2(t) = -\dfrac{12}{5}e^{2t} + \dfrac{12}{5}e^{-3t} \\ x_3(t) = \dfrac{3}{2}e^t - \dfrac{4}{5}e^{2t} + \dfrac{3}{10}e^{-3t} \end{cases}$ – искомое частное решение ЛСДУ.

§18. Система двух ЛДУ с двумя неизвестными функциями

В приложениях ДУ параметр t обычно играет роль текущего времени и часто при обозначении неизвестной и функции и ее производных опускается: $x = x(t),\ \dot{x} = \dot{x}(t)$ (подразумевается по умолчанию).

Рассмотрим ЛСДУ с неизвестными функциями $x = x(t),\ y = y(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by + f(t) \\ \dot{y} = cx + dy + g(t) \end{cases}.$$

Применяем метод исключения. Если $b \neq 0$, то из первого ДУ выражаем y через x: $y = \dfrac{\dot{x} - ax - f(t)}{b}$ и подставляем во второе ДУ:

$\dfrac{\ddot{x} - a\dot{x} - \dot{f}(t)}{b} = cx + d \cdot \dfrac{\dot{x} - ax - f(t)}{b} + g(t)$. Приходим к ЛДУ

$$\ddot{x} - (a+d)\dot{x} + (ad - bc)x = b\,g(t) - d\,f(t) + \dot{f}(t).$$

Интегрируя это ЛДУ, находим неизвестную функцию $x = x(t;\, C_1;\, C_2)$. Используя выражение y через x, находим неизвестную функцию $y = y(t;\, C_1;\, C_2)$. В результате получаем общее решение исходной ЛСДУ.

Если же $b = 0$, то из первого ЛДУ, содержащего только одну неизвестную функцию, находим $x = x(t;\, C_1)$ и подставляем во второе ЛДУ, интегрируя которое, находим неизвестную функцию $y = y(t;\, C_1;\, C_2)$. В результате получаем общее решение исходной ЛСДУ.

Пример. Решить задачу Коши $\begin{cases} \dot{x} = y + t, \\ \dot{y} = -x - t, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

Решение. Из первого ЛДУ выражаем y через x: $y = \dot{x} - t$ и подставляем во второе ЛДУ: $\ddot{x} - 1 = -x - t \Rightarrow \ddot{x} + x = 1 - t$. Общее решение соответствующего однородного ЛДУ имеет вид: $x_{OO}(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$. Находим частное решение неоднородного ЛДУ: $x_H(t) = At + B \Rightarrow x_H(t) = 1 - t$. Тогда

$$x(t) = x_{OO}(t) + x_H(t) = = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 1 - t,$$

$$y(t) = \dot{x}(t) - t = C_2 \cos t - C_1 \sin t - 1 - t$$

и общее решение исходной ЛСДУ имеет вид:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 1 - t \\ y(t) = C_2 \cos t - C_1 \sin t - 1 - t \end{cases}.$$

Далее: $\begin{cases} 1 = x(0) = C_1 + 1 \\ 0 = y(0) = C_2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 1 \end{cases}$. Таким образом, $\begin{cases} x = \sin t + 1, \\ y = \cos t - 1, \end{cases}$ – искомое частное решение (решение задачи Коши) для искомой ЛСДУ.

§19. Определение преобразования Лапласа и условия его существования.

Пусть некоторая функция действительной переменной *f(t)* определена на полуинтервале $t \in [0, +\infty)$. Рассмотрим следующий несобственный интеграл (называется ***интегралом Лапласа***)

$$\int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt,$$

где $p=s+iw$ – комплексная переменная. Это НИЗОП – несобственный интеграл зависящий от параметра. Если этот интеграл сходится, то функцию *f(t)* называют оригиналом, а функцию

$$F(p) = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

комплексной переменой p называют изображением для оригинала *f(t)*. Тот факт, что *f(t)* и *F(p)* относятся друг к другу как оригинал и изображение записывают в виде

$$f(t) \doteqdot F(p), f(t) \longrightarrow F(p), \mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$$

Процесс перехода от действительной функции *f(t)* к функции комплексной переменной *F(p)* по вышеприведенной формуле называется ***преобразованием Лапласа***. Этот переход от функции действительной переменной к функции комплексной переменной лежит в основе операционного исчисления. Смысл введения операционного исчисления состоит в том, что с помощью изображений удается упростить ряд задач, то есть некоторым операциям над оригиналами соответствуют более простые операции над их изображениями.

В дальнейшем, употребляя слово «оригинал» будем подразумевать функцию, удовлетворяющую следующим условиям:

1) *f(t)=0* для любого *t<0*;
2) для $\forall t > 0$ функция *f(t)* является непрерывной или имеет конечное число точек разрыва первого рода на любом конечном промежутке;
3) существуют такие действительные положительные числа M и $s_0 \in \mathbb{R}_+$, что для $\forall t > 0$ выполняется неравенство $|f(t)| \leq Me^{s_0 t}$.

Наименьшее действительное число s_0 для которого выполняется третье условие, называется ***показателем роста функции*** *f(t)*. Последнее условие означает, что функция *f(t)* может быть как ограниченной ($s_0 = 0$), так и неограниченное. Но при этом функция *f(t)* при $t > 0$ возрастает не быстрее, чем некоторая функция $e^{s_0 t + lnM}$ *(M>0)*.

Пример. В качестве простейшего оригинала можно рассмотреть единичную функцию

$$1(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t > 0 \end{cases}$$

M=1, $s_0 = 0$. Найдем ее изображение

$$F(p) = \int_{0}^{+\infty} 1 \cdot e^{-pt}dt = \frac{e^{-pt}}{-p}\Bigg|_{0}^{+\infty} = \frac{e^{-st}e^{-iwt}}{-p}\Bigg|_{0}^{+\infty} =$$

$$= \left|\text{так как } e^{-iwt} = (coswt - isinwt) \text{ограничена: } \left|e^{-iwt}\right| = 1\right| = \frac{1}{p}$$

если $s = Rep > 0$.

Окончательно, $\boxed{1(t) \doteqdot \frac{1}{p}, Rep > 0}$.

Условие 1) для оригинала особой роли не играет, так как всякую функцию *f(t)*, которая определена на всей числовой оси $t \in (-\infty, +\infty)$ можно заменить на функцию 1(*t*) *f(t)* для которой это условие будет выполнено:

$$1(t)f(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ f(t), t > 0 \end{cases}$$

С учетом этого, можно ввести в рассмотрение функции e^t, *cost, sint,* ...и вместо них рассматривать 1(*t*)e^t , 1(*t*)*cost*, 1(*t*)*sint*,… Для простоты записей множитель 1(*t*) часто опускают: $\boxed{e^{\alpha t} \doteqdot \frac{1}{p-\alpha}, Rep > Re\alpha}$.

Рассмотрим далее интеграл Лапласа и исследуем его на абсолютную сходимость. Точнее, выясним каким образом влияет на сходимость комплексный параметр *p*. Необходимо исследовать, когда

$$\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-pt}|dt < +\infty.$$

Оценим $|e^{-pt}| = \left|e^{(s+iw)t}\right| = |e^{-st}|\left|e^{-iwt}\right| = |e^{-st}||(coswt - isinwt)| = e^{-st}$ и неравенство для несобственного интеграла примет вид

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-st}dt < +\infty$$

Анализируя это неравенство, видим, что под интегралом отсутствует мнимая часть параметра *p*. Следовательно, сходимость интеграла Лапласа не зависит от *Imp*, а определяется только поведением его действительной части *Rep*. Привели схему доказательства следующего факта: ***если функция f(t) – оригинал с показателем роста s*₀, *то для нее существует в полуплоскости Rep*> *s*₀ *изображение F(p)***.

Так как $|f(t)| \le Me^{s_0 t} \Rightarrow |f(t)e^{-pt}| \le |f(t)||e^{-pt}| \le Me^{s_0 t}e^{-st} = Me^{(s-s_0)t}$ то

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \le \frac{M}{s - s_0},$$

где $|f(t)| \le Me^{s_0 t}$. Непосредственно из этого неравенства следует еще один важный факт: ***если F(p) является изображением для функции f(t), то***

$$\lim_{\substack{p\to\infty \\ (Rep\to+\infty)}} F(p) = 0$$

Учитывая это и условие 2) из определения оригинала, можно доказать, что *F(p)* всегда имеет вид дробно-рациональной функции.

§20. Основные свойства преобразования Лапласа.

1. Линейность. Если $f_1(t) \risingdotseq F_1(p)$ и $f_2(t) \risingdotseq F_2(p)$, а C_1, C_2 – постоянные, то

$$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) \risingdotseq C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p)$$

Пример. Найти изображение для функции $cos\beta t$.

$$cos\beta t = \frac{e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}}{2} \risingdotseq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p - i\beta} + \frac{1}{p + i\beta}\right] = \frac{1}{2}\frac{2p}{p^2 + \beta^2}$$

$$\boxed{cos\beta t \risingdotseq \frac{p}{p^2 + \beta^2}\ , ch\beta t \risingdotseq \frac{p}{p^2 - \beta^2}, sin\beta t \risingdotseq \frac{\beta}{p^2 + \beta^2}\ , sh\beta t \risingdotseq \frac{\beta}{p^2 - \beta^2}}$$

2. Подобие. Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и число k>0, то $f(kt) \risingdotseq \frac{1}{k} F\left(\frac{p}{k}\right)$. То есть умножение аргумента оригинала на положительное число k приводит к делению изображения и его аргумента на это число.

Это свойство можно сформулировать и в другом виде: если $F(p) \risingdotseq f(t)$, то

$$F(kp) \risingdotseq \frac{1}{k} f\left(\frac{t}{k}\right).$$

Пример.

$$F(p) = \frac{1}{16p^2 + 1} = \frac{1}{(4p)^2 + 1} = \left|F(4p) \text{ от } sint\text{:}\ \frac{1}{p^2 + 1} \risingdotseq sint\right| \risingdotseq \frac{1}{4} sin\left(\frac{t}{4}\right).$$

3. Свойство смещения изображения. Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и α – произвольное комплексное число, то $f(t)e^{\alpha t} \risingdotseq F(p - \alpha)$. То есть умножение оригинала на $e^{\alpha t}$ приводит изменению аргумента p в изображении на $(p - \alpha)$. Это свойство может быть сформулировано и в обратную сторону: если $F(p) \risingdotseq f(t)$, то $F(p - \alpha) \risingdotseq f(t)e^{\alpha t}$.

Используя это свойство, несложно доказать справедливость равенств:

$$\boxed{cos\beta t e^{\alpha t} \risingdotseq \frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}\ , \qquad sin\beta t e^{\alpha t} \risingdotseq \frac{\beta}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}}$$

4. Свойство сдвига оригинала вправо (свойство запаздывания оригинала). Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и τ – положительное число, то

$$f(t - \tau)1(t - \tau) \risingdotseq e^{-p\tau} F(p),$$

то есть сдвиг оригинала вправо на положительную величину τ приводит к умножению изображения на величину $e^{-p\tau}$.

5. Свойство дифференцирования оригинала. Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и $f'(t)$ удовлетворяет условия оригинала, то $f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(+0)$, где $f(+0) = \lim\limits_{t \to +0} f(t)$.

В частном случае, если $f(+0) = 0$, то имеет место следующее операционное равенство $f'(t) \risingdotseq pF(p)$, то есть в этом случае дифференцирование оригинала приводит к умножению изображения на p.

Если $f''(t), f'''(t)$, …. являются оригиналами, то по данному свойству имеем

$f''(t) \risingdotseq p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$,

$f'''(t) \risingdotseq p^3 F(p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0)$.

6. Свойство дифференцирования изображения. Умножение оригинала на (-t) приводит к дифференцированию изображения, то есть если $f(t) \risingdotseq F(p)$, $n \in \mathbb{N}$, то $t^n f(t) \risingdotseq (-1)^n F^{(n)}(p)$ либо $(-t)^n f(t) \risingdotseq F^{(n)}(p)$.

Пример. $1(t) \risingdotseq \frac{1}{p}$, $t \risingdotseq (-1)\left(\frac{1}{p}\right)' = \frac{1}{p^2}$

$$\boxed{t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}, n \in \mathbb{N}}$$

$$\boxed{te^{\lambda t} \risingdotseq \frac{1}{(p-\lambda)^2}}$$

$$\boxed{t^n e^{\lambda t} \risingdotseq \frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}}$$

Вышеприведенные свойства используются как для нахождения изображений для заданных оригиналов, так и для нахождения оригиналов для заданных изображений. Чаще всего нахождение оригиналов по изображению используют таблицу и свойства преобразования Лапласа.

Оригинал *f(t)*	Изображение *F(p)*
1	$\frac{1}{p}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{p^{n+1}}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$
$sin\beta t$	$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$
$cos\beta t$	$\frac{p}{p^2+\beta^2}$
$e^{-\alpha t}sin\beta t$	$\frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$
$e^{-\alpha t}cos\beta t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$
$e^{-\alpha t}\ \frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^{n+1}}$
$tsin\beta t$	$\frac{2p\beta}{(p^2+\beta^2)^2}$
$tcos\beta t$	$\frac{p^2-\beta^2}{(p^2+\beta^2)^2}$
$sh\alpha t$	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$
$ch\alpha t$	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$

Пример. $\frac{2p+1}{(p^2+1)(p-2)} = \frac{1}{p-2} - \frac{p}{p^2+1} \risingdotseq e^{2t} - cost$.

§21. Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операционным методом

Пусть требуется найти решение *y(t)* задачи Коши для ЛДУ *n* порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \\ y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0 \end{cases}$$

Будем предполагать, что искомая функция *y(t)*, ее производные, а также функция *f(t)* являются оригиналами. Обозначим изображения для *y(t)* и *f(t)* через *Y(p) и F(p)* соответственно. Тогда по свойству дифференцирования оригинала, с учетом нулевых начальных условий, имеем

$$y'(t) \doteqdot pY(p), y^{//}(t) \doteqdot p^2 Y(p), \dots, y^{(n)}(t) = p^n Y(p)$$

и, применяя преобразование Лапласа к ЛДУ, получаем

$$a_n p^n Y(p) + a_{n-1} p^{n-1} Y(p) + \cdots + a_1 p Y(p) + a_0 Y(p) = F(p)$$

Это уравнение является операторным уравнением для поставленной задачи Коши. Оно является алгебраическим уравнением переменной *p.* Выразим из него *Y(p)* и придем к уравнению

$$Y(p) = \frac{F(P)}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0}.$$

Если обозначить $A_n(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0$ (в правой части ни что иное, как характеристический многочлен исходного ДУ), то придем к уравнению

$$Y(p) = \frac{F(p)}{A_n(p)},$$

где выражение в правой части известно. Часть этого выражения $\frac{1}{A_n(p)}$ называют ***передаточной функцией.*** Если от изображения вернуться к оригиналу, то получим решение искомой задачи Коши.

Если начальные условия не являются нулевыми, то в правой части выражения для изображения искомой функции, точнее, в числителе, будут содержаться известные дополнительные слагаемые, так как изображение производных имеет другой вид. Если задана начальная задача

$$y(0) = y_0, y'(0) = y_1, \cdots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1},$$

то

$$y'(t) \doteqdot pY(p) - y_0,$$
$$y''(t) \doteqdot p^2 Y(p) - p y_0 - y_1$$
$$y'''(t) \doteqdot p^3 Y(p) - p^2 y_0 - p y_1 - y_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

И для нахождения изображения решения получаем выражение

$$Y(p) = \frac{F(p) + B(p)}{A_n(p)}$$

Обращая полученное выражение, находим искомое решение задачи Коши.
Пример. Найти решение задачи Коши

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + y = te^{-t} \\ y(0) = 1, y'(0) = 2 \end{cases}$$

Пусть $y(t) \doteqdot Y(p)$. Тогда

$$y'(t) \doteqdot pY(p) - y_0 = pY(p) - 1$$

$$y''(t) \doteqdot p^2Y(p) - py_0 - y_1 = p^2Y(p) - p - 2$$

$$te^{-t} \doteqdot \frac{1}{(p+1)^2}$$

И операторное уравнение имеет вид

$$Y(p)(p^2 + 2p + 1) - 2 - p - 2 = \frac{1}{(p+1)^2}$$

$$Y(p)(p+1)^2 - (p+4) = \frac{1}{(p+1)^2}$$

$$Y(p) = \frac{1}{(p+1)^4} + \frac{(p+4)}{(p+1)^2}$$

$$Y(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{3}{(p+1)^2} + \frac{1}{(p+1)^4}$$

Или обращая $y(t) = (1 + 3t + \frac{t^3}{6})e^{-t}$

Операционным методом находим решение задачи Коши для неоднородного ЛДУ с постоянными коэффициентами, не находя общего решения однородного и какого-либо частного решения неоднородного уравнения. Недостатком метода является то, что начальные условия должны быть заданы в нулевой точке. Если начальные условия заданы в некоторой точке t_0, то переходом к новой переменной $\tau = t - t_0$ получаем задачу Коши с нулевыми начальными условиями относительно новой переменной τ.

Если считать $y(0) = C_0, y'(0) = C_1, \cdots, y^{(n-1)}(0) = C_{n-1}$ произвольными постоянными, то решение, найденное операторным методом, будет являться общим решением исходного ДУ и из него может быть получено решение произвольной задачи Коши. Удобство операторного метода состоит еще и в том, что решение может быть получено и в случае, когда правая часть является составной функцией.

Совершенно аналогичным образом находится решение систем ЛДУ с постоянными коэффициентами. Отличие только в том, что вместо одного операторного уравнения получаем систему таких уравнений.

Пример. Найти общее решение системы ЛДУ

$$\begin{cases} \dot{x} + y = e^t \\ x + \dot{y} = e^{-t} \end{cases}$$

Положим далее, что $x(0) = x_0, y(0) = C_0$.

Пусть $x(t) \doteqdot X(p), y(t) \doteqdot Y(p)$.

Тогда $x'(t) \doteqdot pX(p) - x_0$, $y'(t) \doteqdot pY(p) - y_0$.

И получаем систему операторных уравнений

$$\begin{cases} pX(p) - x_0 + Y(p) = \dfrac{1}{p-1} \\ pY(p) - y_0 + X(p) = \dfrac{1}{p+1} \end{cases}$$

Решая систему, найдем

$$X(p) = \frac{p}{p^2-1}x_0 - \frac{1}{p^2-1}y_0 + \frac{p^2+1}{(p^2-1)^2}$$

$$Y(p) = \frac{p}{p^2-1}y_0 + \frac{1-x_0}{p^2-1} - \frac{2p}{(p^2-1)^2}$$

И, следовательно,

$$\begin{cases} x(t) = x_0 cht - y_0 sht + tcht \\ y(t) = y_0 cht + (1-x_0) sht - tsht \end{cases}$$