esprit — Se former autrement — HONORIS UNITED UNIVERSITIES	**TEST 2** Semestre : 1 ☒ 2 ☐ Session : Principale ☒ Rattrapage ☐

Module : Analyse Numérique
Enseignant(s) : Noureddine JILANI
CLASSE : 3B

Documents autorisés :	Oui ☐ Non ☒		Nombre de pages :	1	
Calculatrice autorisée :	Oui ☐ Non ☒		Internet autorisé :	Oui ☐ Non ☒	
Date : 08/04/2021	Heure : 11h		Durée : 1h		

Exercice 1 (10 points)

On veut approcher l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx.$$

1. **(2 points)** Déterminer la valeur exacte de I.
   $I = [arctan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

2. **(2 points)** Donner une valeur approchée de I en utilisant la méthode simple de Trapèze $I_T(f)$.
   $I_T(f) = (f(a) + f(b))\frac{(b-a)}{2} = \frac{3}{4}$

3. Pour tout $x_1, x_2 \in [0,1]$, $x_1 < x_2$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. On définit, pour toute fonction f continue sur $[0,1]$, la formule de quadrature $I_{New}(f)$ de la façon suivante :

$$I_{New}(f) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

   a) **(2 points)** Montrer que $I_{New}(f)$ est exacte d'ordre au moins 1 sur $[0,1]$ si et seulement si

$$\alpha_1 = \frac{x_2 - 0.5}{x_2 - x_1} \quad \alpha_2 = \frac{0.5 - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\begin{cases} \int_0^1 x^0 dx = \alpha_1 x_1^0 + \alpha_2 x_2^0 \\ \int_0^1 x^1 dx = \alpha_1 x_1^1 + \alpha_2 x_2^1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{x_2 - 0.5}{x_2 - x_1} \quad \alpha_2 = \frac{0.5 - x_1}{x_2 - x_1}$$

   b) **(1 point)** Déterminer l'ordre de la méthode $I_{New}(f)$ si $x_1 = 0.25$ et $x_2 = 0.75$.
   $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$
   $\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 = \frac{1}{2}(0.25)^2 + \frac{1}{2}(0.75)^2 \neq \frac{1}{3}$ alors $I_{New}(f)$ est d'ordre 1.

4. **(3 points)** Calculer l'erreur d'intégration pour les deux approximations $I_T(f)$ et $I_{New}(f)$ de l'intégrale I. En déduire laquelle des deux méthodes qui approche le mieux $\frac{\pi}{4}$
   $E_T(f) = |\frac{\pi}{4} - \frac{3}{4}| = 0.035$
   $E_{New}(f) = |\frac{\pi}{4} - 0.79| = 0.005$
   Alors $I_{New}(f)$ meilleur que la méthode de Trapèze $I_T(f)$

Exercice 2 (10 points)

On se propose de construire une suite convergente vers le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1. Soit la fonction définie par $f(x) = x^2 - x - 1$

a) **(1 point)** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $x^* \in]1, 2[$.
f est une fonction continue est croissante sur $]1, 2[$ et $f(1)f(2) = -1 < 0$ alors il existe d'après le Théorème de valeur intermidère une solution unique $x^* \in]1, 2[$

b) **(2 points)** Ecrire le schéma itératif de la méthode de Newton.

- f est de classe $C^2([1, 2])$.
- f satisfait le TVI.
- $f'(x) > 0$ sur $]1, 2[$.
- $f''(x) = 2 > 0$ sur $]1, 2[$.
- x_0 donné,
- $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - x_n - 1}{2x_n - 1} = \frac{x_n^2 + 1}{2x_n - 1}$

c) **(2 points)** Déterminer le nombre des itérations nécessaires par la méthode de Newton pour avoir une valeur approchée de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ avec une précision de 10^{-4}, préciser le choix de x_0 assurant la convergence.
pour $x_0 = \frac{7}{4}$ on a $f(x_0)f''(x_0) = 0.625 > 0$ $n = 1$ $x_1 = 1.625$ $|f(x_1)| = 0.015 > 0.0001$
$n = 2$ $x_2 = 1,618055...$ $|f(x_1)| = 0.00004 < 0.0001$
donc on a besoin de deux itérations

2. On définie le schéma itératif suivant

$$\begin{cases} u_{n+1} = g(u_n) \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

avec g est une fonction définie sur $I = [1, 2]$ par $g(x) = \frac{2x+1}{x+1}$.

a) **(1 point)** Montrer que g admet un unique point fixe $\tilde{x}^*$ dans I $(g(\tilde{x}^*) = \tilde{x}^*)$

$$\frac{2x+1}{x+1} = x \Leftrightarrow x^2 + x = 2x + 1 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

donc g admet un unique point fixe dans I

b) **(2 points)** Déterminer $\tilde{x}^*$ avec une précision de $\varepsilon = 10^{-4}$
$n = 1$ $u_1 = \frac{5}{3}$ $|f(u_1)| = 0, 11... > 0.0001$
$n = 2$ $u_2 = \frac{13}{8}$ $|f(u_3)| = 0, 015 > 0.0001$
$n = 3$ $u_3 = \frac{34}{21}$ $|f(u_3)| = 0.00226757369 > 0.0001$
$n = 4$ $u_4 = \frac{89}{55}$ $|f(u_4)| = 0.0003305785 > 0.0001$
$n = 5$ $u_5 = \frac{233}{144}$ $|f(u_5)| = 0.000048 < 0.0001$

c) **(2 points)** Comparer le résultat obtenu avec la méthode de Newton en terme de nombre minimal d'itérations.
On remarque l'orsqu'on prend $x_0 = 2$ qui vérifie l'ypothèse $f(x_0)f"(x_0) > 0$ $x_1 = \frac{5}{3}, x_2 = \frac{34}{21}, x_3 = \frac{1597}{987}$ donc quelque soit le choix de x_0 la mééthode de newton meilleur que le schéma itérative de u_n