

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2021	Session principale
	Épreuve : Mathématiques	Section : Sciences de l'informatique
	Durée : 3h	Coefficient de l'épreuve: 3



N° d'inscription

--	--	--	--	--	--

*Le sujet comporte 4 pages. **La page 4 sur 4 est à rendre avec la copie.***

Exercice N°1: (5 points)

- 1) On considère dans \mathbb{C} l'équation (E) : $z^2 - (5 - 3i)z + 2 - 9i = 0$.
 - a) Vérifier que $(3 + i)^2 = 8 + 6i$.
 - b) Résoudre l'équation (E).

- 2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A, B et K d'affixes respectives $z_A = 1 - 2i$, $z_B = 4 - i$ et $z_K = 2$.
 - a) Soit C le symétrique de A par rapport à K. Montrer que $z_C = 3 + 2i$.
 - b) Dans l'annexe ci-jointe figure 1, placer les points A, B, C et K.
 - c) Calculer $\overline{(z_B - z_A)}(z_B - z_C)$.
 - d) Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle.

- 3) La droite (AB) coupe l'axe (O, \vec{u}) en un point F. On pose $z_F = \alpha$ où α est un réel.
 - a) Montrer que $\overline{(z_B - z_A)}(z_F - z_A) = 3\alpha - 1 + (7 - \alpha)i$.
 - b) Déterminer alors le réel α .
 - c) Vérifier que B est le milieu du segment [AF].
 - d) Soit G le point d'intersection des droites (FK) et (BC). Déterminer l'affixe du point G.



Exercice N°2 : (4,5 points)

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par
$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = \frac{3+5u_n}{5+3u_n}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

- 1) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n < 1$.
b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{3(1-u_n^2)}{5+3u_n}$. Dédurre que la suite (u_n) est croissante.
c) Montrer que la suite (u_n) est convergente puis calculer sa limite.
- 2) Soit la suite (v_n) définie sur \mathbb{N} par : $v_n = \frac{1-u_n}{1+u_n}$.
a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$.
b) Exprimer v_n en fonction de n puis montrer que $u_n = \frac{4^n - 1}{4^n + 1}$.
c) A partir de quelle valeur de n , $u_n \geq 0,99$?

Exercice N° 3 : (4,5 points)

- 1) On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $-2x + 3y = 10$.
a) Vérifier que le couple $(7,8)$ est solution de l'équation (E).
b) Résoudre l'équation (E).

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On pose $a_n = 7 + 3 \times 6^n$, $b_n = 8 + 2 \times 6^n$ et $d_n = \text{PGCD}(a_n, b_n)$.

- 2) a) Vérifier que le couple (a_n, b_n) est solution de l'équation (E).
b) En déduire que d_n divise 10.
- 3) a) Montrer que $6^n \equiv 1[5]$.
b) Prouver que $a_n \equiv 0[5]$ et $b_n \equiv 0[5]$.
c) Dédurre que $d_n = 5$ ou $d_n = 10$.
- 4) a) Montrer par récurrence que $6^n \equiv 6[10]$.
b) En déduire que $a_n \equiv 5[10]$.
c) Montrer que $d_n = 5$.



Exercice N°4 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} + \ln x$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) > 0$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution α et que

$$0,5 < \alpha < 0,6.$$

3) a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f''(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.

b) Montrer que le point $G(1,1)$ est un point d'inflexion de la courbe (C).

c) Montrer que la droite $T : y = 2x - 1$ est la tangente à (C) au point G.

4) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = f(x) - (2x - 1)$.

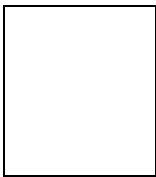
a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x}$ et en déduire que la fonction g est croissante.

b) Calculer $g(1)$ et déterminer le signe de g sur $]0, +\infty[$.

c) Déduire la position relative de T et (C).

5) Dans l'annexe ci-jointe figure 2, Tracer T et (C).





Section : N° d'inscription : Série :

Nom et Prénom :

Date et lieu de naissance :

Signatures des surveillants

.....
.....



Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences de l'informatique
Session principale (2021)
Annexe à rendre avec la copie

Figure 1

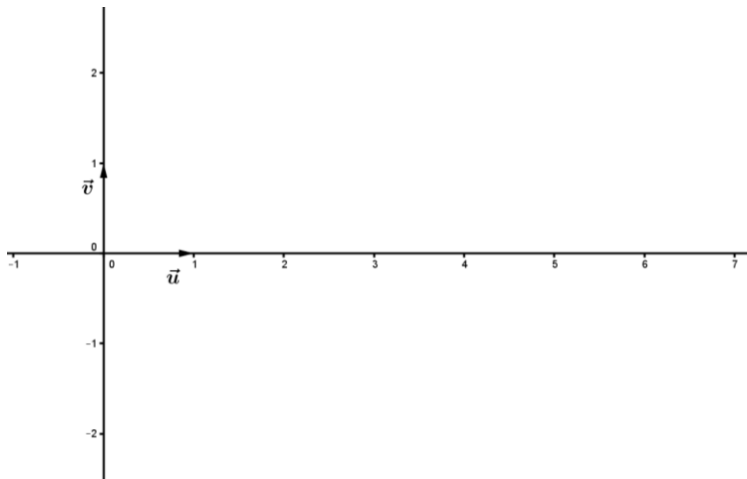


Figure 2

