Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Classe : 4ème Informatiques

Série : Révision 1er et 2éme trimestres

Nom du prof : Haythem Mhadhbi

Exercice 1 : 30 min 6 pts

1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - (1+i)z + 2 + 2i = 0$.

   (a) Calculer $(1-3i)^2$.

   (b) Résoudre l'équation (E).

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
   On désigne par A, B et C les points d'affixes 4; $1-i$ et $2i$.

   (a) Placer les points A, B et C.

   (b) Montrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle.

   (c) Soit D le point d'affixe $3+3i$. Montrer que $ABCD$ est un carré.

3. Soit M un point du plan d'affixe z et M' le point d'affixe $z' = (z-4)(i\bar{z}-2)$

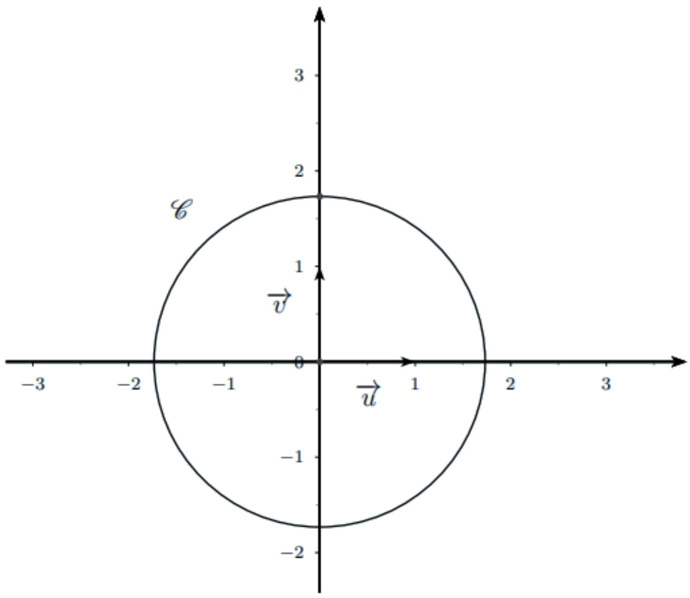
   (a) Calculer z' lorsque $z = 1-i$.

   (b) Vérifier que $z' = i(z-4)(\overline{z-2i})$.

   (c) En déduire que si M appartient à la droite (AC) alors M' appartient à une droite que l'on précisera.

Exercice 2 : 40 min 6 pts

Dans la figure ci-dessous , $\left(O,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ est un repère orthonormé et $\mathscr{C}$ est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$.



1. Soit A le point d'affixe $z_A = \sqrt{2} + i$.

   (a) Montrer que A appartient au cercle $\mathscr{C}$.

   (b) Placer A.

2. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2+(\sqrt{6}-i\sqrt{3})z-3i\sqrt{2}=0$.

   (a) Vérifier que $i\sqrt{3}$ est une solution de (E).

   (b) En déduire l'autre solution.

3. On considère les points I, J et K d'affixes $z_I=i\sqrt{3}$, $z_J=-\sqrt{6}$ et $z_K=\sqrt{6}+2i\sqrt{3}$

   (a) Montrer que $(z_I-z_J)\times\overline{z_A}=3\sqrt{3}$.En déduire que la droite (IJ) est parallèle à la droite (OA).

   (b) Montrer que le point I est le milieu du segment $[JK]$.

   (c) Placer le point I et construire alors les points J et K.

Exercice 3 : 40 min 6 pts

Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0=6 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n+1}{3} \end{cases}$.

1. (a) Montrer que pour tout entier $n, u_n>\dfrac{1}{2}$.

   (b) Montrer que (u_n) est décroissante.

   (c) Déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite.

2. On pose $v_n=\ln\left(u_n-\dfrac{1}{2}\right)$.

   (a) Montrer que (v_n) est arithmétique et préciser sa raison et son premier terme.

   (b) Écrire v_n puis u_n en fonction de n.

   (c) Retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 4 : 40 min 6 pts

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1+u_n^2}{2}} \end{cases}$; $n\in\mathbb{N}$

1. (a) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $u_n>1$.

   (b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1-u_n^2}{2(u_{n+1}+u_n)}$.

   (c) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

   (d) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite .

2. Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n=\ln\left(u_n^2-1\right)$.

   (a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $r=-\ln 2$.

   (b) Calculer v_n puis u_n en fonction de n.

   (c) Retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 5 : 40 min 6 pts

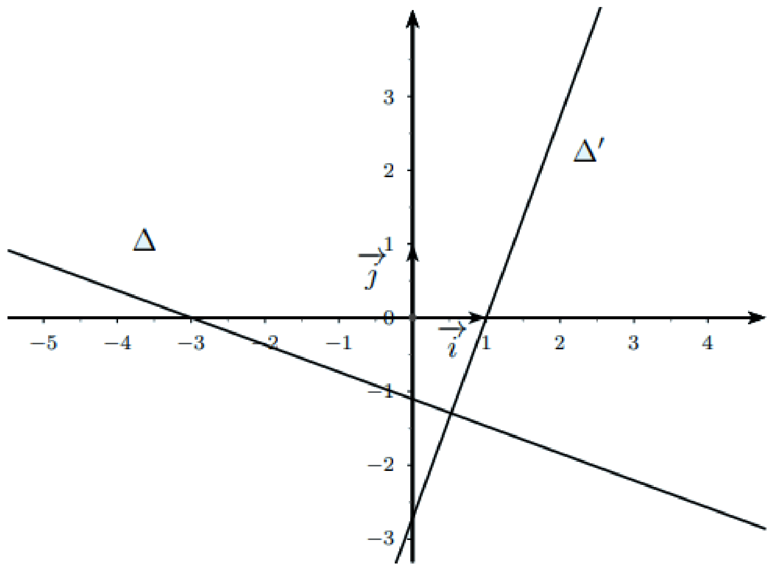
1. Soit l'équation $(E) : 11x - 13y = 9$ avec $x, \quad y \in \mathbb{Z}$.
   (a) vérifier que $(2, 1)$ est une solution particulière de l'équation (E).
   (b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).
2. Soit $d = x \wedge y$ où (x, y) est solution de (E).Déterminer les valeurs possibles de d.
3. On donne le système $(S) : \begin{cases} n \equiv 0[11] \\ n \equiv 9[13] \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$.
   Montrer que n est solution de (S) équivaut à $n \equiv 22[143]$
4. (a) Vérifier que $55^2 \equiv 9[13]$ et $55^3 \equiv 1[13]$
   (b) En déduire que 55^{2021} est une solution de (S).
   (c) Déterminer le reste de 55^{2021} modulo 143 .

Exercice6: 40 min 6 pts

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel n on a $16^{2n+1} + 18^n \equiv 0[17]$
   (b) En déduire le reste de la division de $16^{2019} + 18^{1009} + 2019$ par 17.
2. Soit a et b deux entiers vérifiant $a^{17} \equiv b[17]$ et $a^{40} \equiv 1[17]$.
   Montrer que $b^{33} \equiv a[17]$
3. Soit l'équation $(E) : 17x - 40y = 1$ avec x et y deux entiers relatifs.
   (a) Vérifier que $(-7, -3)$ est une solution de (E).
   (b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).
   (c) Déterminer le plus entiers naturel n tel que $17n \equiv 1[40]$
4. Soit l'équation (F) $x^2 + 2x \equiv 0[5]$ avec x est entier relatif.
   (a) Montrer que si $x = 5k + 3$ avec $k \in \mathbb{Z}$ alors x est une solution de (F)
   (b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation (F).

Exercice7: 40 min 6 pts

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)e^x$.
   On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
   (a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.
   (b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats.
   (c) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad f'(x) = xe^x$.
   (d) Dresser le tableau de variation de f.
2. Montrer que le point $A\left(-1, -\dfrac{2}{e}\right)$ est un point d'inflexion pour la courbe $\mathscr{C}$.
3. On donne dans la figure ci-dessous le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et les droites:
   Δ d'équation $y = -\dfrac{1}{e}x - \dfrac{3}{e}$ et Δ' d'équation $y = e(x-1)$.



   (a) Vérifier que Δ est la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point A et que Δ' est la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 1 .
   (b) Placer le point A et tracer $(\mathscr{C})$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
4. (a) Vérifier que $f(x) = f'(x) - e^x$.
   (b) En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.
   (c) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C})$, les deux axes des coordonnés et la droite d'équation $x = 1$.
5. Soit g la restriction de f à $[0, +\infty[$
   (a) Montrer que g réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
   (b) Construire dans le même repère la courbe $(\mathscr{C}')$ de la fonction g^{-1} la réciproque de g.

Exercice8: 40 min 6 pts

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

1. a) Montrer que la matrice A est inversible.

   b) Montrer que $A^{-1} = B$.

   c) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système $\begin{cases} 4x + 2y + z = & -8 \\ y + z = & 2 \\ 2x + y = & -2 \end{cases}$

2. On considère l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = z^3 + az^2 + bz + c$,où a ;b , et c sont des réels.

   a) Déterminer a ;b , et c sachant que $f(2) = f(1-i) = 0$.

   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 - 4z^2 + 6z - 4 = 0$.

3. Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$; on désigne par A et B les points d'affixes respectives 2 et $1 - i$.

   a) Montrer que le triangle OAB est rectangle en B.

   b) Soit C le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses; Montrer que $OBAC$ est un carré.