データ科学特論　課題 1

2120041 濱口和希

2020 年 5 月 14 日

1

まず，$\boldsymbol{A\theta} = \boldsymbol{B}$ の形に変形する．問題より

$$L(\theta) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(y_i - f(x_i;\theta))^2 \tag{1}$$

$f(x_i;\theta) = \theta_1 x_i + \theta_2$ を式 (1) に代入すると

$$L(\theta) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(y_i - (\theta_1 x_i + \theta_2))^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(y_i - \theta_1 x_i - \theta_2)^2 \tag{2}$$

ここで式 (2) を θ_1, θ_2 で偏微分すると

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} = 2\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(y_i - \theta_1 x_i - \theta_2)(-x_i) = 0 \\ \frac{\partial L(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_1} = 2\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}(y_i - \theta_1 x_i - \theta_2)(-1) = 0 \end{array}\right) \tag{3}$$

計算すると

$$\left(\begin{array}{c} \sum_{i=1}^{2}(y_i - \theta_1 x_i - \theta_2)x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{2}(y_i - \theta_1 x_i - \theta_2) = 0 \end{array}\right) \tag{4}$$

$$= \left(\begin{array}{c} (\sum_{i=1}^{2} x_i^2)\theta_1 + (\sum_{i=1}^{2} x_i)\theta_2 = (\sum_{i=1}^{2} y_i x_i) \\ (\sum_{i=1}^{2} x_i)\theta_1 + (\sum_{i=1}^{2} 1)\theta_2 = (\sum_{i=1}^{2} y_i) \end{array}\right) \tag{5}$$

ここで

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{2} x_i^2 & \sum_{i=1}^{2} x_i \\ \sum_{i=1}^{2} x_i & \sum_{i=1}^{2} 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{2} y_i x_i \\ \sum_{i=1}^{2} y_i \end{bmatrix} \tag{6}$$

とすると $\boldsymbol{A\theta} = \boldsymbol{B}$ に変形できる．問題より $\mathcal{D} = (x_i, y_i)_{i=1}^2 = (1,1), (a,b)$ を与え $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ をそれぞれ計算すると

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 & x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + a^2 & 1 + a \\ 1 + a & 2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} x_1 y_1 + x_2 y_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + ab \\ 1 + b \end{bmatrix} \tag{8}$$

問 1 終了

2

問 1 より

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1+a^2 & 1+a \\ 1+a & 2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

行列式 $\boldsymbol{A}$ の逆行列が存在するためには $\det\boldsymbol{A} \neq 0$ である必要がある．したがって，

$$\det\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1+a^2 & 1+a \\ 1+a & 2 \end{vmatrix} = 2(1+a^2) - (1+a)(1+a) = 3a^2 + 2a + 3 \neq 0 \tag{10}$$

ここで，a を未知数として根を求めるため，解の公式を使用すると

$$a = \frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{j}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{j}}{2} \tag{11}$$

となるため，$a \neq \frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{j}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{j}}{2} (j = \sqrt{(-1)})$ の時，行列式 $\boldsymbol{A}$ は逆行列を持つ正則行列となる．
問 2 終了

3

問 1,2 より行列式 $\boldsymbol{A}$ は $a \neq \frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{j}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{j}}{2}$ の時

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} = \frac{1}{(a-1)^2} \begin{bmatrix} 2 & -(1+a) \\ -(1+a) & 1+a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+ab \\ 1+b \end{bmatrix} \tag{12}$$

計算すると

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(a-1)^2} \begin{bmatrix} a^2 - a + b \\ ab - a - b + 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

したがって，

$$\theta_1 = \frac{1}{(a-1)^2}(a^2 - a + b) \tag{14}$$

$$\theta_2 = \frac{1}{(a-1)^2}(ab - a - b + 1) \tag{15}$$

問 3 終了