データ科学特論　課題 1

2120041 濱口和希

2020 年 4 月 30 日

1　$E_p[X], V_p[X]$ の計算

まず，$E_p[X]$ について求める．問題より

$$p(x|\theta) = \frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{(-\theta|x-\mu|)} \tag{1}$$

$$E_p[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x|\theta)dx \tag{2}$$

$$V_p[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E_p[X])^2 p(x|\theta)dx \tag{3}$$

数式 (2) に数式 (1) を代入し定数を前に出すと

$$E_p[X] = \frac{\theta}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{e}^{(-\theta|x-\mu|)}dx \tag{4}$$

ここで $|x-\mu|$ の範囲は次のように場合分けできる

$$|x-\mu| = \begin{cases} -x+\mu & (x<\mu) \\ x-\mu & (x>\mu) \end{cases} \tag{5}$$

式 (4) を不定積分として考えると $x<\mu$ の時は次のように表すことができる．

$$E_p[X] = \frac{\theta}{2}\int x\mathrm{e}^{(\theta x-\theta\mu)}dx \tag{6}$$

被積分関数 $x\mathrm{e}^{(\theta x-\theta\mu)}$ について，$s = \theta x - \theta\mu, ds = \theta dx$ と置換する．

$$= \frac{1}{2\theta}\int \mathrm{e}^s(s+\theta\mu)ds \tag{7}$$

被積分関数 $\mathrm{e}^s(s+\theta\mu)$ を展開し多項式の積分を各項に分けて定数を前に出す．

$$= \frac{1}{2\theta}\int \mathrm{e}^s s ds + \frac{\mu}{2}\int \mathrm{e}^s ds \tag{8}$$

被積分関数 $\mathrm{e}^s sds$ について，部分積分を適用し計算する．

$$= \frac{\mathrm{e}^s}{2\theta}(s+\theta\mu-1) \tag{9}$$

$s = \theta x - \theta\mu$ を式 (9) に代入する．

$$= \frac{(\theta x - 1)\mathrm{e}^{\theta(x-\mu)}}{2\theta} + C(C \text{ は積分定数}) \tag{10}$$

$x > \mu$ の時も同様に計算する．

$$-\frac{(\theta x + 1)\mathrm{e}^{-\theta(x-\mu)}}{2\theta} + C(C \text{ は積分定数}) \tag{11}$$

任意の大きな数 A とするとし，式 (10)，式 (11) を使用して，$[-A, \mu][\mu, A]$ の区間で定積分を行うと

$$E_p[X] = \int_{-A}^{\mu} x\mathrm{e}^{(\theta x - \theta\mu)} dx + \int_{\mu}^{A} x\mathrm{e}^{(-\theta x + \theta\mu)} dx \tag{12}$$

$$= \left[\frac{(\theta x - 1)\mathrm{e}^{\theta(x-\mu)}}{2\theta}\right]_{-A}^{\mu} + \left[-\frac{(\theta x + 1)\mathrm{e}^{-\theta(x-\mu)}}{2\theta}\right]_{\mu}^{A}$$

$$= \left(\frac{\theta\mu - 1}{2\theta}\right) - \left(\frac{(-\theta A - 1)\mathrm{e}^{-\theta(A+\mu)}}{2\theta}\right) + \left(-\frac{(\theta A + 1)\mathrm{e}^{-\theta(A-\mu)}}{2\theta}\right) - \left(-\frac{\theta\mu + 1}{2\theta}\right)$$

式 (12) について $A \to \infty$ とすると，

$$E_p[X] = \left(\frac{\theta\mu - 1}{2\theta}\right) - 0 + 0 - \left(-\frac{\theta\mu + 1}{2\theta}\right) = \mu \tag{13}$$

$E_p[X] = \mu$ となる．

次に $V_p[X]$ について求める．式 (3) に式 (13) を代入して計算すると

$$V_p[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E_p[X])^2 p(x|\theta) dx \tag{14}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x|\theta) dx - 2^{\mu} \int_{-\infty}^{\infty} x p(x|\theta) dx + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} p(x|\theta) dx$$

確率密度関数 $p(x|\theta)$ を $(-\infty, \infty)$ まで広義積分すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x|\theta) dx = 1 \tag{15}$$

また，$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x|\theta) dx$ について部分積分を適用し計算すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x|\theta) dx = \mu^2 + \frac{2}{\theta^2} \tag{16}$$

となる．さらに

$$E_p[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x|\theta) dx = \mu \tag{17}$$

となるため，式 (15) に (15)，(16)，(17) を代入し計算すると

$$V_p[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x|\theta) dx - 2^{\mu} \int_{-\infty}^{\infty} x p(x|\theta) dx + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} p(x|\theta) dx \tag{18}$$

$$= \mu^2 + \frac{2}{\theta^2} - 2\mu^2 + \mu^2 = \frac{2}{\theta^2}$$

以上より

$$
\begin{aligned}
E_p[X] &= \mu \\
V_p[X] &= \frac{2}{\theta}
\end{aligned} \tag{19}
$$