

データ科学特論 課題 1

2120041 濱口和希

2020 年 4 月 30 日

1 $E_p[X], V_p[X]$ の計算

まず, $E_p[X]$ について求める. 問題より

$$p(x|\theta) = \frac{\theta}{2} e^{(-\theta|x-\mu|)} \quad (1)$$

$$E_p[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x|\theta)dx \quad (2)$$

$$V_p[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E_p[X])^2 p(x|\theta)dx \quad (3)$$

数式 (2) に数式 (1) を代入し定数を前に出すと

$$E_p[X] = \frac{\theta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{(-\theta|x-\mu|)} dx \quad (4)$$

ここで $|x - \mu|$ の範囲は次のように場合分けできる

$$|x - \mu| = \begin{cases} -x + \mu & (x < \mu) \\ x - \mu & (x > \mu) \end{cases} \quad (5)$$

式 (4) を不定積分として考えると $x < \mu$ の時は次のように表すことができる.

$$E_p[X] = \frac{\theta}{2} \int xe^{(\theta x - \theta \mu)} dx \quad (6)$$

被積分関数 $xe^{(\theta x - \theta \mu)}$ について, $s = \theta x - \theta \mu, ds = \theta dx$ と置換する.

$$= \frac{1}{2\theta} \int e^s (s + \theta \mu) ds \quad (7)$$

被積分関数 $e^s (s + \theta \mu)$ を展開し多項式の積分を各項に分けて定数を前に出す.

$$= \frac{1}{2\theta} \int e^s s ds + \frac{\mu}{2} \int e^s ds \quad (8)$$

被積分関数 $e^s s ds$ について, 部分積分を適用し計算する.

$$= \frac{e^s}{2\theta} (s + \theta \mu - 1) \quad (9)$$

$s = \theta x - \theta\mu$ を式 (9) に代入する.

$$= \frac{(\theta x - 1)e^{\theta(x-\mu)}}{2\theta} + C (C \text{ は積分定数}) \quad (10)$$

$x > \mu$ の時も同様に計算する.

$$- \frac{(\theta x + 1)e^{-\theta(x-\mu)}}{2\theta} + C (C \text{ は積分定数}) \quad (11)$$

任意の大きな数 A とするとし, 式 (10), 式 (11) を使用して, $[-A, \mu][\mu, A]$ の区間で定積分を行うと

$$\begin{aligned} E_p[X] &= \int_{-A}^{\mu} x e^{(\theta x - \theta\mu)} dx + \int_{\mu}^A x e^{(-\theta x + \theta\mu)} dx \\ &= \left[\frac{(\theta x - 1)e^{\theta(x-\mu)}}{2\theta} \right]_{-A}^{\mu} + \left[-\frac{(\theta x + 1)e^{-\theta(x-\mu)}}{2\theta} \right]_{\mu}^A \\ &= \left(\frac{\theta\mu - 1}{2\theta} \right) - \left(\frac{(-\theta A - 1)e^{-\theta(A+\mu)}}{2\theta} \right) + \left(-\frac{(\theta A + 1)e^{-\theta(A-\mu)}}{2\theta} \right) - \left(-\frac{\theta\mu + 1}{2\theta} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

式 (12) について $A \rightarrow \infty$ とすると,

$$E_p[X] = \left(\frac{\theta\mu - 1}{2\theta} \right) - 0 + 0 - \left(-\frac{\theta\mu + 1}{2\theta} \right) = \mu \quad (13)$$

$E_p[X] = \mu$ となる.

次に $V_p[X]$ について求める. 式 (3) に式 (13) を代入して計算すると

$$\begin{aligned} V_p[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - E_p[X])^2 p(x|\theta) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x|\theta) dx - 2\mu \int_{-\infty}^{\infty} x p(x|\theta) dx + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} p(x|\theta) dx \end{aligned} \quad (14)$$

確率密度関数 $p(x|\theta)$ を $(-\infty, \infty)$ まで広義積分すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x|\theta) dx = 1 \quad (15)$$

また, $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x|\theta) dx$ について部分積分を適用し計算すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x|\theta) dx = \mu^2 + \frac{2}{\theta^2} \quad (16)$$

となる. さらに

$$E_p[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x|\theta) dx = \mu \quad (17)$$

となるため, 式 (15) に (15), (16), (17) を代入し計算すると

$$\begin{aligned} V_p[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x|\theta) dx - 2\mu \int_{-\infty}^{\infty} x p(x|\theta) dx + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} p(x|\theta) dx \\ &= \mu^2 + \frac{2}{\theta^2} - 2\mu^2 + \mu^2 = \frac{2}{\theta^2} \end{aligned} \quad (18)$$

以上より

$$\begin{aligned} E_p[X] &= \mu \\ V_p[X] &= \frac{2}{\theta} \end{aligned} \tag{19}$$