



Ecole Polytechnique de Tunisie

TP Théorie de la commande

Commande d'altitude d'un quadrirotor

Elaboré par :

BAHRINI Ghanem

BARKOUS Hamdi

Encadré par :

BENHADJ BRAIEKNaceur

BOUAFOURA Mohamed Karim

A.U :2021/2022

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	But du projet	3
2	Présentation du système étudié	3
2.1	Présentation des paramètres	4
2.2	Modélisation des actions mécaniques :	4
3	Modèle mathématique du système	5
4	Simulation du modèle sur Matlab simulink	10
4.1	Schéma bloc	10
4.2	Analyse temporelle :	11
5	Élaboration de la commande	11
5.1	Réponse en boucle fermée sans correcteur :	11
5.1.1	Schéma fonctionnel du système asservi	11
5.1.2	Analyse fréquentielle :	12
5.1.3	Réponse temporelle :	13
5.2	Choix du correcteur :	13
5.3	Réponse en boucle fermée avec un correcteur à avance de phase	14
5.3.1	Analyse du cahier de charge :	14
5.3.2	Synthèse du correcteur	15
5.3.3	Schéma bloc :	15
5.3.4	Analyse temporelle :	16
6	Analyse et commande du système dans l'espace d'état	17
6.1	Forme canonique de commandabilité	17
6.2	Commande par retour d'état	18
6.2.1	Présentation de la méthode	18
6.2.2	Schéma bloc :	19
6.3	Résultat :	19
7	Commande numérique RST du système	20
7.1	Schéma bloc :	20
7.2	Détermination des polynômes R,S et T	21
7.3	Résultat :	23
8	Interprétation des différentes structures de commande	23

Table des matières	2
9 Conclusion	24

1 Introduction

Le Quadrirotor est un système sous actionne (le nombre d'entrées de commande est inférieur au nombre de degrés de liberté), ce qui induit une grande difficulté dans la conception de la commande.

Le drone a formé un saut qualitatif dans le domaine de la robotique et de la technologie, la question qui vient à l'esprit est comment modéliser un quadrirotor et comment contrôler son altitude ?

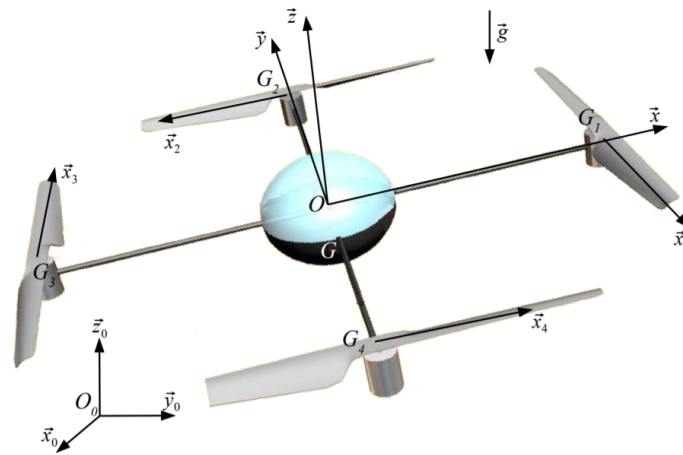


FIGURE 1 – Schéma simplifié du quadrirotor

1.1 But du projet

L'objectif de ce projet est de modéliser le quadrirotor en exploitant les équations de dynamique du drone et les équations électro-mécaniques des 4 moteurs. Ce modèle est indispensable pour concevoir les algorithmes de pilotage de haut niveau qui seront développés dans les parties suivantes

2 Présentation du système étudié

Un quadrirotor est constitué d'un corps principal mis en mouvement par 4 hélices entraînées chacune par un moteur électrique. Tous les composants électroniques du drone, dont les 4 moteurs, sont alimentés par une batterie Lithium Polymère. La carte électronique embarquée à bord du quadrirotor traite les informations des différents capteurs et élabore la commande des 4 variateurs des

moteurs en fonction de la consigne à suivre, définie par l'utilisateur et transmise au drone par liaison Wi-Fi.

2.1 Présentation des paramètres

Paramètres géométriques :

- le repère $R_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ au sol noté S_0 supposé être un référentiel galiléen :
- le repère $R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ au corps du drone noté S , de centre d'inertie G_s . Les axes \vec{x} et \vec{y} sont dirigés selon les bras du drone orthogonaux, l'axe \vec{x} étant dirigé vers l'avant du drone
- le repère $R_i = (G_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z})$ à chaque hélice notée S_i , de centre d'inertie G_i avec $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. O est le centre géométrique des centres d'inertie des 4 hélices. Ainsi $\vec{OG}_1 = -\vec{OG}_3 = l\vec{x}$ et $\vec{OG}_2 = -\vec{OG}_4 = l\vec{y}$. On pose alors $\vec{G_sO} = h\vec{z}$. On note G le centre de gravité de l'ensemble $E = \left\{ S \cup_{i=1}^4 S_i \right\}$.

Paramètres cinématiques :

- Le mouvement du corps S par rapport au sol S_0 est donné par le torseur cinématique $\{V_{S/S_0}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{S/S_0} \\ \vec{V}_{G,S/S_0} \end{array} \right\}$ où $\vec{\Omega}_{S/S_0} = \vec{\Omega} = p\vec{x} + q\vec{y} + r\vec{z}$ et $\vec{V}_{G,S/S_0} = \vec{V} = u\vec{x} + v\vec{y} + w\vec{z}$.
- Chaque hélice ∞ est en liaison pivot d'axe (G_i, \vec{z}) avec le corps du drone S . On pose $\theta_i = (\vec{x}, \vec{x}_i) = (\vec{y}, \vec{y}_i)$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, On note alors $\vec{\Omega}_{S_i/S} = \varepsilon_i \omega_i \vec{z}$ la vitesse angulaire de l'hélice S_i par rapport à S , avec ω_i la vitesse angulaire strictement positive de chaque hélice et $\varepsilon_i = \pm 1$ en fonction du sens de rotation de chaque hélice (compte tenu du type de pas de l'hélice).

2.2 Modélisation des actions mécaniques :

Le drone est soumis à :

- l'action de la pesanteur dont l'accélération est notée $\vec{g} = -g\vec{z}_0$,
- l'action de l'air sur chaque hélice S_i en mouvement, dont la forme a été démontrée précédemment : $\{T_{air \rightarrow S_i}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_i = a\omega_i^2 \vec{z} \\ \vec{M}_i(G_i) = -b\varepsilon_i \omega_i^2 \vec{z} \end{array} \right\}_{G_i}$, avec

$\varepsilon_i = \pm 1$ selon le pas de l'hélice considérée, a et b sont des constantes positives ;

- les actions électromagnétiques intérieures aux moteurs produisant des couples sur chaque rotor lié à une hélice $\vec{\Gamma}_i = \varepsilon_i \Gamma_i \vec{z}$, où le couple Γ_i est toujours positif.

3 Modèle mathématique du système

la détermination du centre de gravité G du système :

Par définition du centre de gravité G on a :

$$\vec{OG} = \frac{1}{M} \left(m_s \vec{OG_s} + \sum_{i=1}^{i=4} m_i \vec{OG_i} \right) = \frac{1}{M} \left(-m_s h \vec{z} + m \sum_{i=1}^{i=4} \vec{OG_i} \right) = \frac{m_s}{M} (-h) \vec{z}$$

Equation de comportement dynamique du drone :

On isole l'ensemble du drone soumis à :

- l'action de la pesanteur sur l'ensemble
- l'action de l'air sur les 4 hélices

Le PFD dans le référentiel galiléen R_0 au point G donne :

$$\begin{aligned} M\vec{a}(G, E/S_0) &= -Mg\vec{z}_0 + \sum_{i=1}^{i=4} a\omega_i^2 \vec{z} \\ \vec{\delta}(G, E/S_0) &= \left(\frac{d\vec{\sigma}(G, E/S_0)}{dt} \right)_{S_0} = \sum_{i=1}^{i=4} -b\varepsilon_i \omega_i^2 \vec{z} + \sum_{i=1}^{i=4} \vec{GG_i} \wedge a\omega_i^2 \vec{z} \\ &= \sum_{i=1}^{i=4} -b\varepsilon_i \omega_i^2 \vec{z} + al \left((\omega_3^2 - \omega_1^2) \vec{y} + (\omega_2^2 - \omega_4^2) \vec{x} \right) \end{aligned}$$

Pour simplifier ces équations, dans le cas d'un vol stationnaire le repère R est alors confondu avec R_0 , les éléments de cinétique sont nuls ainsi :

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2 = \frac{Mg}{a}$$

$$\text{et } \omega_3^2 = \omega_1^2, \omega_2^2 = \omega_4^2$$

$$\text{Ainsi } 2\omega_1^2 + 2\omega_2^2 = \frac{Mg}{a} \text{ et } (\varepsilon_1 + \varepsilon_3) \omega_1^2 + (\varepsilon_2 + \varepsilon_4) \omega_2^2 = 0$$

Les ω_i ne peuvent pas être nuls (sinon le drone ne vole pas!) $\varepsilon_2 + \varepsilon_4 \neq 0$ car sinon $\omega_1 = 0$

On a donc : $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1$ et $\varepsilon_2 = \varepsilon_4$

Si $\varepsilon_2 = \varepsilon_4 = 1$ alors il n'y a pas de solution d'équilibre possible

Ainsi $\varepsilon_2 = \varepsilon_4 = -1$

Les hélices 1 et 3 ont un pas à droite tandis que les hélices 2 et 4 ont un pas à gauche.

Dans ces conditions, $\omega_1^2 = \omega_2^2$ et $\omega_1^2 = \frac{Mg}{4a}$

Ainsi comme les $\omega_i > 0$, on obtient : $\omega_i = \bar{\omega} = \sqrt{\frac{Mg}{4a}}$

Calcul des éléments cinétique et détermination des équations de mouvements :

$$\vec{\sigma}(G_i, S_i/S_0) = I_{G_i}(S_i) \cdot \vec{\Omega}_{S_i/S_0}$$

$$\text{Or } \vec{\Omega}_{S_i/0} = p\vec{x} + q\vec{y} + (r + \varepsilon_i\omega_i)\vec{z}$$

Le corps du drone possède deux plans de symétrie, la matrice est donc diagonale

$$\text{en tout point de l'intersection des plans, donc en } G : I_{G_i}(S_i) = \begin{pmatrix} A_i & 0 & 0 \\ 0 & B_i & 0 \\ 0 & 0 & C_i \end{pmatrix}_R$$

on obtient donc :

$$\vec{\sigma}(G_i, S_i/S_0) = \begin{cases} A_i p \cos^2 \theta_i + B_i p \sin^2 \theta_i + (A_i - B_i) q \sin \theta_i \cos \theta_i \\ A_i q \sin^2 \theta_i + B_i q \cos^2 \theta_i + (A_i - B_i) p \cos \theta_i \sin \theta_i \\ C_i (r + \varepsilon_i \omega_i) \end{cases}$$

La vitesse angulaire d'une hélice est très grande, donc d'une période très faible par rapport au mouvement du drone. On peut donc approcher les quantités à chaque instant par leur moyenne sur une période. Cette moyenne est définie de la manière suivante :

$$\langle \vec{\sigma}(G_i, S_i/S_0) \rangle = \frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} \vec{\sigma}(G_i, S_i/S_0) dt$$

Calculons explicitement la composante selon \vec{x} (notée σ_x)

$$\langle \sigma_x \rangle = \frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} \left(A_i p \cos^2(\omega_i t) + B_i p \sin^2(\omega_i t) + (A_i - B_i) \frac{q}{2} \sin(2\omega_i t) \right) dt$$

Or la moyenne des fonctions cosinus et sinus au carré vaut $1/2$ sur une période et l'intégrale de $\sin(2\omega_i t)$ est égale à 0. Ainsi la moyenne est $\langle \sigma_x \rangle = \frac{A_i+B_i}{2} p$
De la même manière, on établit le même résultat pour la composante selon \vec{y} (en prenant q à la place de p .)

Ainsi on obtient : $\langle \vec{\sigma}(G_i, S_i/S_0) \rangle = I_r p \vec{x} + I_r q \vec{y} + J_r (r + \varepsilon_i \omega_i) \vec{z}$
avec $I_r = \frac{A_i+B_i}{2}$ et $J_r = C_i$.

$$\vec{\sigma}(G, E/S_0) = I p \vec{x} + I q \vec{y} + J r \vec{z} + \sum_{i=1}^{i=4} J_r \varepsilon_i \omega_i \vec{z}$$

Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{\sigma}(G, E/S_0)}{dt} \right)_{R_0} &= I \dot{p} \vec{x} + p \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)_{R_0} + I \dot{q} \vec{y} + I q \left(\frac{d\vec{y}}{dt} \right)_{R_0} + \\ &\quad \left(J \dot{r} + J_r \sum_{i=1}^{i=4} \varepsilon_i \dot{\omega}_i \right) \vec{z} + \left(J r + J_r \sum_{i=1}^{i=4} \varepsilon_i \omega_i \right) \left(\frac{d\vec{z}}{dt} \right)_{R_0} \\ &= \sum_{i=1}^{i=4} -b \varepsilon_i \omega_i^2 \vec{z} + a l \left((\omega_3^2 - \omega_1^2) \vec{y} + (\omega_2^2 - \omega_4^2) \vec{x} \right) \end{aligned}$$

Or on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)_{R_0} &= (p \vec{x} + q \vec{y} + r \vec{z}) \wedge \vec{x} = -q \vec{z} + r \vec{y} \\ \left(\frac{d\vec{y}}{dt} \right)_{R_0} &= (p \vec{x} + q \vec{y} + r \vec{z}) \wedge \vec{y} = p \vec{z} - r \vec{x} \\ \left(\frac{d\vec{z}}{dt} \right)_{R_0} &= (p \vec{x} + q \vec{y} + r \vec{z}) \wedge \vec{z} = -p \vec{y} + q \vec{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } I \dot{p} - I q r + \left(J r + J_r \sum_{i=1}^{i=4} \varepsilon_i \omega_i \right) q &= a l (\omega_2^2 - \omega_4^2) \\ I \dot{q} + I p r - \left(J r + J_r \sum_{i=1}^{i=4} \varepsilon_i \omega_i \right) p &= a l (\omega_3^2 - \omega_1^2) \\ \left(J \dot{r} + J_r \sum_{i=1}^{i=4} \varepsilon_i \dot{\omega}_i \right) &= -b \sum_{i=1}^{i=4} \varepsilon_i \omega_i^2 \end{aligned}$$

L'accélération est donnée par :

$$\vec{a}(G, E/S_0) = \dot{u}\vec{x} + \dot{v}\vec{y} + \dot{w}\vec{z} + u(-q\vec{z} + r\vec{y}) + v(p\vec{z} - r\vec{x}) + r(-p\vec{y} + q\vec{x})$$

Ainsi :

$$\dot{u} - rv + rq = g_1$$

$$\dot{v} + ru - rp = g_2$$

$$\dot{w} - uq + vp = g_3 + \frac{a}{M} \sum_{i=1}^{i=4} \omega_i^2$$

On isole une hélice i soumise :

- à l'action de l'air
- à la pesanteur
- au l'action de la liaison pivot

Le théorème du moment dynamique appliqué en G_i dans le référentiel galiléen S_0 en projection selon \vec{z}

donne :

$$\vec{\delta}(G_i, S_i/S_0) \cdot \vec{z} = \varepsilon_i \Gamma_i + M_i$$

$$\text{En effet, } \left(\vec{\sigma}(G_i, S_i/S_0) \cdot \frac{d\vec{z}}{dt} S_0 = 0 \right)$$

$$\text{Ainsi } J_r(\varepsilon_i \dot{\omega}_i + \dot{r}) = \varepsilon_i \Gamma_i - b \varepsilon_i \omega_i^2$$

Dans cette étude on s'intéresse seulement à la linéarisation du sous système verticale donc on obtient :

$$\dot{w} = \left(2\bar{\omega} \frac{a}{M} \right) \sum_{i=1}^{i=4} \tilde{\omega}_i$$

$$J_r \sum_{i=1}^{i=4} \dot{\omega}_i = \sum_{i=1}^{i=4} \tilde{\Gamma}_i - 2b\bar{\omega} \sum_{i=1}^{i=4} \tilde{\omega}_i$$

Le sous-système d'équations pour obtenir un mouvement vertical fait intervenir la somme des vitesses angulaires et des couples. Il suffit donc d'imposer les mêmes variations (positives) pour obtenir une élévation. Les autres mouvements n'interviennent alors pas car les variations de vitesse étant identiques, elles s'annulent donc deux à deux.

Modélisation électro-mécanique des moteurs : En régime stationnaire, on a les relations

$$\begin{aligned}\bar{u}K_m &= R_m\bar{\Gamma}_i + K_m^2\bar{\omega} \\ \bar{\Gamma}_i &= b\bar{\omega}^2\end{aligned}$$

On en déduit : $\bar{u} = \frac{R_mb}{K_m}\bar{\omega}^2 + K_m\bar{\omega}$.

En linéarisant les équations précédentes autour du point stationnaire, on obtient le système d'équation suivant :

$$\begin{aligned}\tilde{u}_i &= \frac{R_m}{K_m}\tilde{\Gamma}_i + \frac{L_m}{K_m}\dot{\tilde{\Gamma}}_i + K_m\tilde{\omega}_i \\ J_r\dot{\tilde{\omega}}_i &= \tilde{\Gamma}_i - 2b\bar{\omega}\tilde{\omega}_i\end{aligned}$$

Modélisation du sous système vertical : Les équations considérées sont les

suivantes : $\dot{w} = (2\bar{\omega}\frac{a}{M})\sum_{i=1}^{i=4}\tilde{\omega}_i$
avec $\dot{z} = w$ $J_r\sum_{i=1}^{i=4}\dot{\tilde{\omega}}_i = \sum_{i=1}^{i=4}\tilde{\Gamma}_i - 2b\bar{\omega}\sum_{i=1}^{i=4}\tilde{\omega}_i$

et on a aussi :

$$J_r\sum_{i=1}^{i=4}\dot{\tilde{\omega}}_i = \frac{K_m}{R_m}\sum_{i=1}^{i=4}(\tilde{u}_i - K_m\tilde{\omega}_i) - 2b\bar{\omega}\sum_{i=1}^{i=4}\tilde{\omega}_i$$

En posant $\omega_z = \sum_{i=1}^{i=4}\tilde{\omega}_i$, on obtient :

$$\ddot{z} = 2\bar{\omega}\frac{a}{M}\omega_z$$

et $J_r\dot{\omega}_z = \frac{K_m}{R_m}(u_z - K_m\omega_z) - 2b\bar{\omega}\omega_z$

En passant dans le domaine symbolique on obtient :

$$\left(J_rs + \left(2b\bar{\omega} + \frac{K_m^2}{R_m}\right)\right)\Omega_z = \frac{K_m}{R_m}U_z \text{ et } s^2Z = 2\bar{\omega}\frac{a}{M}\Omega_z$$

Ainsi :

$$\frac{Z}{U_*} = 2 \times \frac{\frac{\bar{\omega}_a K_m}{J_r M M_m}}{s^2 \left(s + \frac{2b\bar{D} + \frac{K_m^2}{R_m}}{J_r} \right)}$$

On pose alors

$$\alpha_z = \frac{2\bar{\omega}aK_m}{J_rMR_m}$$

et

$$\beta_z = \frac{2b\bar{\omega} + \frac{K_m^2}{R_m}}{J_r}$$

pour aboutir au résultat suivant :

$$V_z(s) = \frac{Z(s)}{U_z(s)} = \frac{\alpha_z}{s^2(s + \beta_z)} \quad (1)$$

4 Simulation du modèle sur Matlab simulink

Données numériques :

Constante générique

$$g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Caractéristique du drone

$$M = 0,9 \text{ kg (batterie incluse)}$$

Caractéristiques des hélices

$$a = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{s}^2$$

$$b = \frac{1}{375} \cdot 10^{-4} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$$

$$J_r = 3,4 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Caractéristiques des moteurs

$$R_m = 0,6\Omega$$

$$L_m = 40\mu H$$

$$K_m = 1 \cdot 10^{-2} \text{ V} \cdot \text{s} \cdot \text{rad}^{-1}$$

Caractéristiques de la batterie

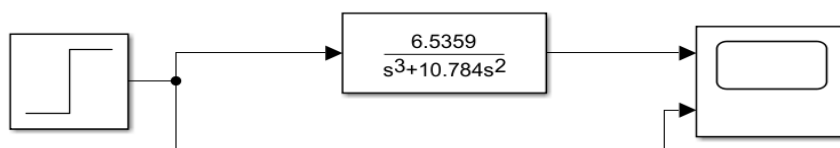
$$U_{batt} = 11 \text{ V}$$

$$C_{mass} = 200 \text{ Wh} \cdot \text{kg}^{-1}$$

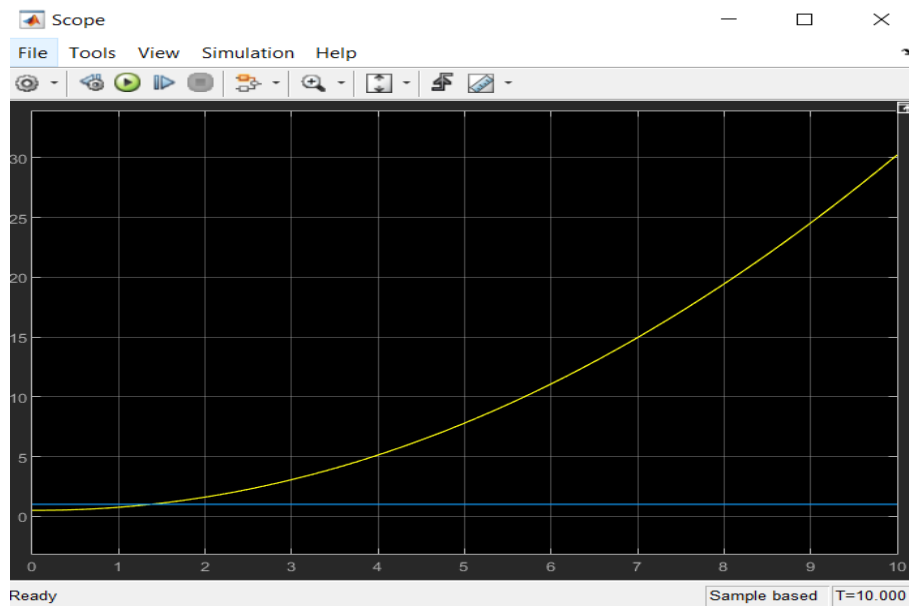
$$K' = 0,16 \text{ U.S.I.}$$

$$m' = 220 \text{ g}$$

4.1 Schéma bloc



4.2 Analyse temporelle :



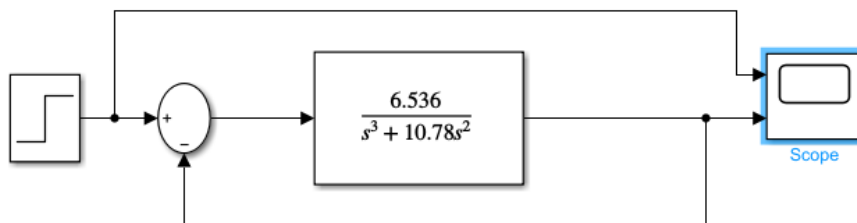
Remarque :

La réponse temporelle du notre système diverge, notre système est instable en boucle ouverte .

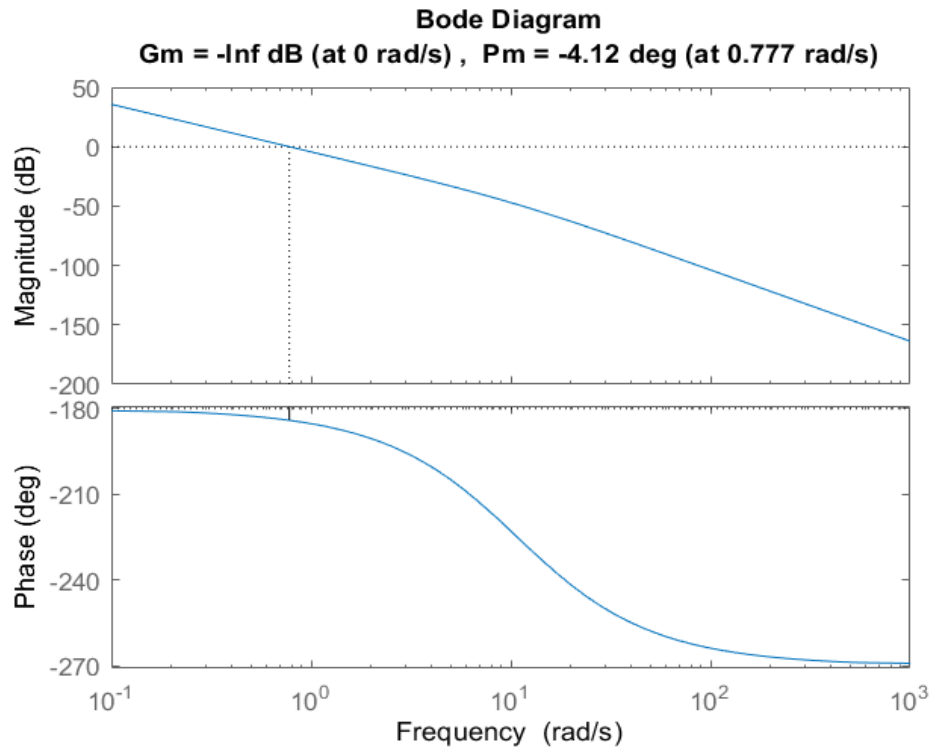
5 Élaboration de la commande

5.1 Réponse en boucle fermée sans correcteur :

5.1.1 Schéma fonctionnel du système asservi

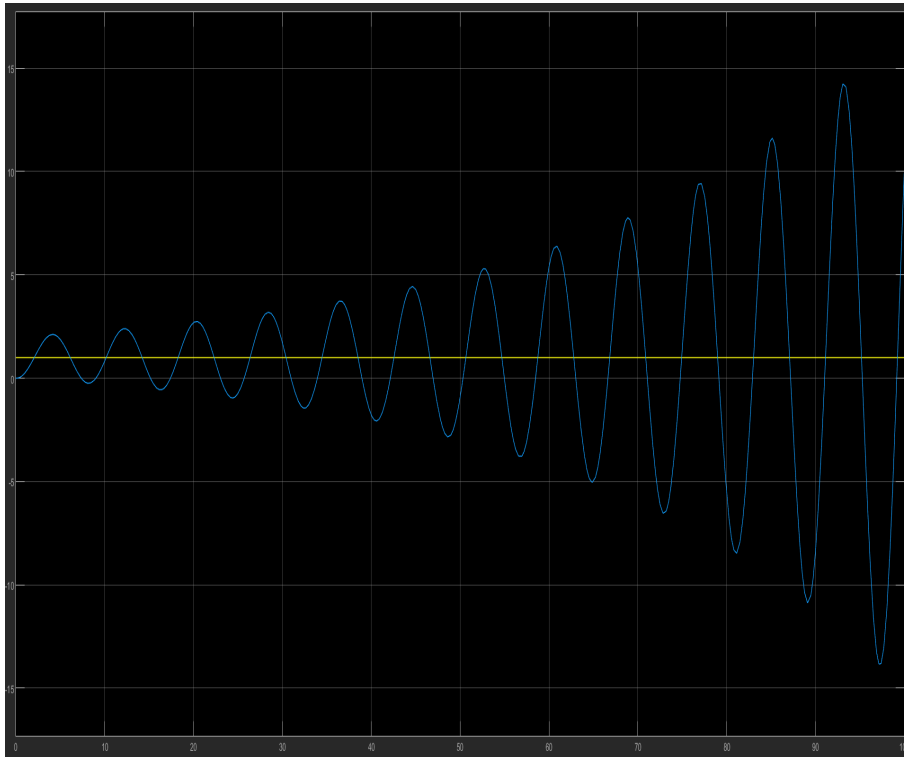


5.1.2 Analyse fréquentielle :

**Interprétation des marges de stabilités :**

La marge de phase est négative, donc le système n'est pas stable, on constate aussi que la marge de gain est à l'infinie et on sait que La marge de gain correspond au gain supplémentaire maximum que l'on peut donner au système en BO sans risquer de le rendre instable en BF, donc Plus cette marge est grande, plus robuste est la stabilité.

5.1.3 Réponse temporelle :



Conclusion :

notre système est instable en boucle fermée, il faut lui ajouter un correcteur

5.2 Choix du correcteur :

notre fonction de transfert est :

$$H(s) = \frac{6.536}{s^3 + 10.78^2} = \frac{0.606}{s^2} \times \frac{1}{1 + 0.0927s}$$

Le système est de classe 2 donc l'erreur statique est toujours nulle ce qui implique que l'action intégrale I n'est pas nécessaire, on a besoin d'un correcteur PD

$$C(s) = K_p \times (1 + T_d s)$$

mais réellement un correcteur PD apporte un gain très important à haute fréquence, ce qui amplifie le bruit de la mesure. On utilise donc à la place un correcteur à avance de phase qui n'a plus le terme dérivateur à haute fréquences (quand s est grand)

$$C(s) = K_c \times \frac{1+aTs}{1+Ts}$$

5.3 Réponse en boucle fermée avec un correcteur à avance de phase

5.3.1 Analyse du cahier de charge :

On désire réaliser un asservissement à retour unitaire permettant de satisfaire le cahier de charges suivant :

- réponse oscillatoire en boucle fermée
- dépassement en boucle fermée $D_{BF\%} \leq 5\%$
- temps de réponse à 5% de 0.6 s
- erreur statique nulle.

$$\begin{aligned} D_{BF\%} \leq 5\% &\Rightarrow \xi_{BF} = 0.7 \\ \xi_{BF} = 0.7 &\Rightarrow \omega_{n,BF} t_{r5\%} = 3 \Rightarrow \omega_{n,BF} = \frac{3}{t_{r5\%}} \\ &\Rightarrow \omega_{n,BF} = 5 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

Formules d'approximation Réponse oscillatoire désirée suppose un comportement du 2e ordre dominant pour le système en BF.

$$\begin{aligned} m_\varphi &= 100\xi_{BF} = 70^\circ \\ \omega_{c0} &= \omega_{n,BF} = 5 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

Marge de phase du système pour la valeur de $\omega_{c0} = 5 \text{ rad/s}$:

$$\begin{aligned} m_\varphi &= \pi + \varphi(\omega_{c0}) \\ m_\varphi &= -\arctan\left(\frac{\omega_{c0}}{10.78}\right) \\ \text{AN : } m_\varphi &= -24.88^\circ \end{aligned}$$

Remarque : la valeur ci-dessus est la marge de phase qu'aurait le système si sa fréquence de coupure à 0 dB est placée en $\omega_{c0} = 5 \text{ rad/s}$. Elle est différente de la marge de phase actuelle du système qui est de -4.12° à la pulsation $\omega_{c0} = 0.77 \text{ rad/s}$ (obtenue sous matlab).

5.3.2 Synthèse du correcteur

FT du correcteur

$$C(s) = K_c \frac{1 + aTs}{1 + Ts} \text{ avec } a > 1$$

Calcul du paramètre a :

Le système apporterait une marge de phase de -24.88° . Pour avoir la marge de phase de 70° , il faut que le correcteur apporte une phase supplémentaire de $\Delta m_\varphi = 94.88^\circ$.

$$\begin{aligned} \varphi_{c,\max} = \Delta m_\varphi &= \arcsin \frac{a-1}{a+1} \\ \Rightarrow a &= \frac{1 + \sin(\Delta m_\varphi)}{1 - \sin(\Delta m_\varphi)} \end{aligned}$$

Calcul du paramètre T :

L'avance de phase maximale est appliquée à la pulsation ω_{C0} , soit :

$$\begin{aligned} \omega_{c,\max} &= \frac{1}{T\sqrt{a}} = \omega_{C0} \\ \Rightarrow T &= \frac{1}{\omega_{C0}\sqrt{a}} \end{aligned}$$

Calcul du gain K_c

Le gain K_c permet de placer l'axe 0dB à la pulsation ω_{C0} . Or ω_{C0} vérifie la relation

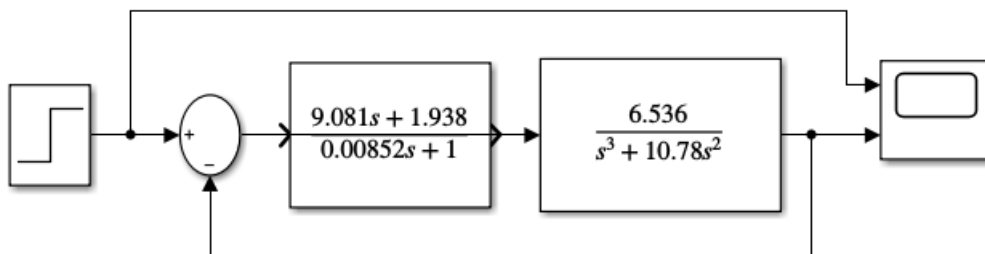
$$|H_{BOC}(j\omega_{C0})| = 1 \Rightarrow |C(j\omega_{C0})H(j\omega_{C0})| = 1$$

Sachant que $|C(j\omega_{C0})| = K_c\sqrt{a}$, on en déduit :

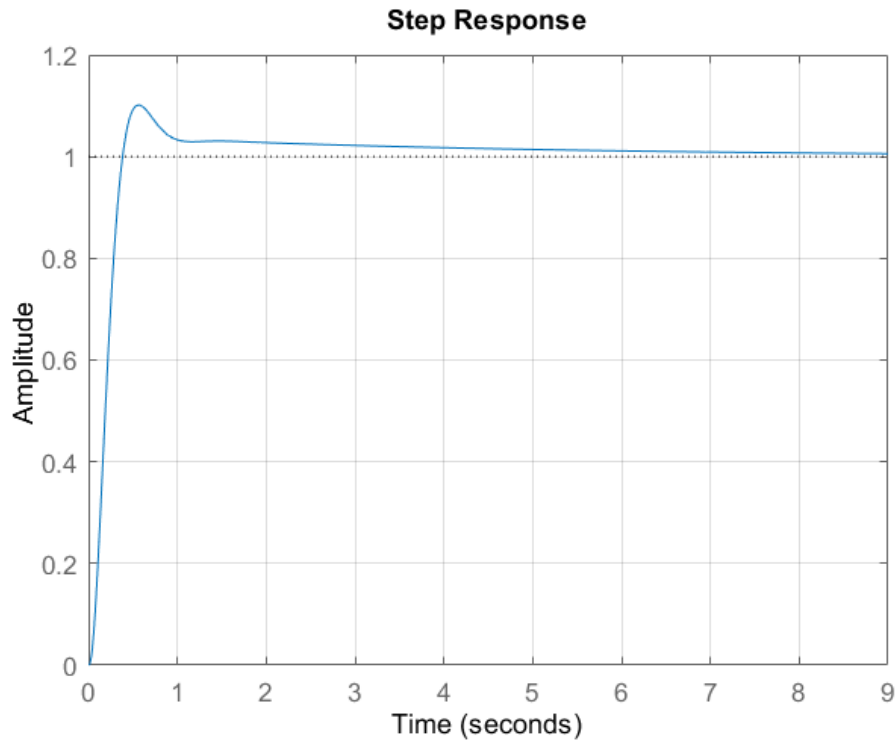
$$|H_{BOC}(j\omega_{C0})| = 1 \Rightarrow K_c\sqrt{a}|H(j\omega_{C0})| = 1$$

AN : $a = 550, T = 0.00852s, K_c = 1.938$.

5.3.3 Schéma bloc :



5.3.4 Analyse temporelle :



Interprétation :

notre système est maintenant stable, sa dynamique est caractérisé par un dépassement qui est égale à $D_{\%} = 10\%$

L'erreur statique est nulle à l'infini, concernant la rapidité du système on a obtenue un temps de réponse à 5% égale à $\tau_r = 1s$

Remarque :

Le résultat obtenue ne satisfait pas les contraintes qu'on a mis dans le cahier de charge dû au fait qu'on a approximé notre système à un du deuxième ordre

6 Analyse et commande du système dans l'espace d'état

6.1 Forme canonique de commandabilité

Les parties précédentes nous ont permis de proposer le modèle suivant :

$$H(s) = \frac{6.563}{s^3 + 10.78s^2}$$

dont son équation d'état est :

$$\begin{cases} \dot{X} = A_c X(t) + B_c U(t) \\ Y(t) = C_c X(t) \end{cases} \quad \begin{matrix} A_c \in \mathbb{R}^{3 \times 3} & C_c \in \mathbb{R}^{1 \times 3} & X(t) \in \mathbb{R}^3 \\ B_c \in \mathbb{R}^{3 \times 1} & U(t) \in \mathbb{R}^1 & Y(t) \in \mathbb{R}^1 \end{matrix}$$

on pose :

$$\begin{aligned} X_1(t) &= Z \\ X_2(t) &= \dot{Z} \\ X_3(t) &= \ddot{Z} \end{aligned}$$

on obtient donc :

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -10.78 \end{pmatrix} \quad B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C_c = (6.563 \quad 0 \quad 0)$$

la matrice de commandabilité est de la forme suivante :

$$C(A,B) = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix} \Rightarrow C(A,B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -10.78 \\ 1 & -10.78 & 116.2084 \end{pmatrix}$$

La matrice d'observabilité est de la forme suivante :

$$O(C,A) = \begin{pmatrix} C & CA & CA^2 \end{pmatrix} \Rightarrow O(C,A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculons le rang de ces deux matrices, on obtient :

$$\text{Rang } C(A, B) = \text{Rang } O(C, A) = 3$$

On conclut que notre système est commandable et observable, donc on peut le commander par retour d'état.

6.2 Commande par retour d'état

6.2.1 Présentation de la méthode

on a :

$$\begin{cases} \dot{X} = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) \end{cases}$$

on pose $U(t) = r(t) - kX(t)$ avec $r(t)$ est une consigne en échelon unitaire

$$\text{où } K = (k_1, k_2, k_3)$$

on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{X} = (A - BK)X(t) + Br(t) \\ Y(t) = CX(t) \end{cases}$$

La matrice en B.F est : $A_f = A - BK$

$$P(\lambda) = \det(\lambda I_3 - (A - BK))$$

$$P(\lambda) = \left(\lambda^2 + 2\zeta\lambda\omega_n + \omega_n^2 \right) \left(\lambda + \frac{1}{\tau} \right)$$

D'après le cahier de charge $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\omega_n = 5\text{rad.s}^{-1}$ et $\tau = 1\text{ s}$

Pour déterminer le vecteur K nous allons utiliser la méthode place prédéfini dans matlab. Elle prend comme paramètre A , B et un vecteur noté P qui présente les pôles du polynôme caractéristique.

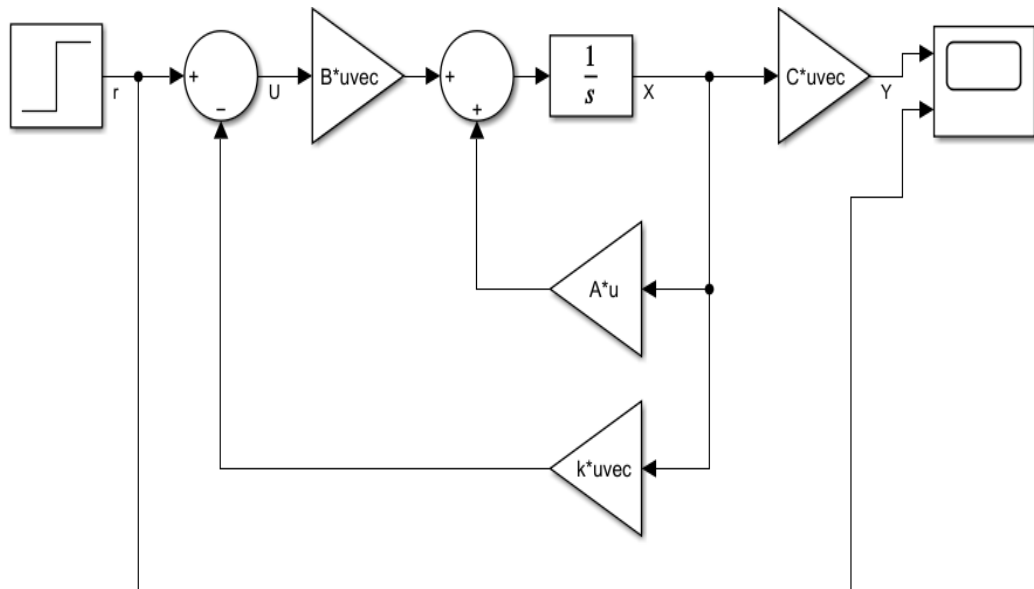
les racines du polynôme caractéristique sont :

$$X_1 = -3.5 + j3.57 \quad , \quad X_2 = -3.5 - j3.57 \quad , \quad X_3 = -1$$

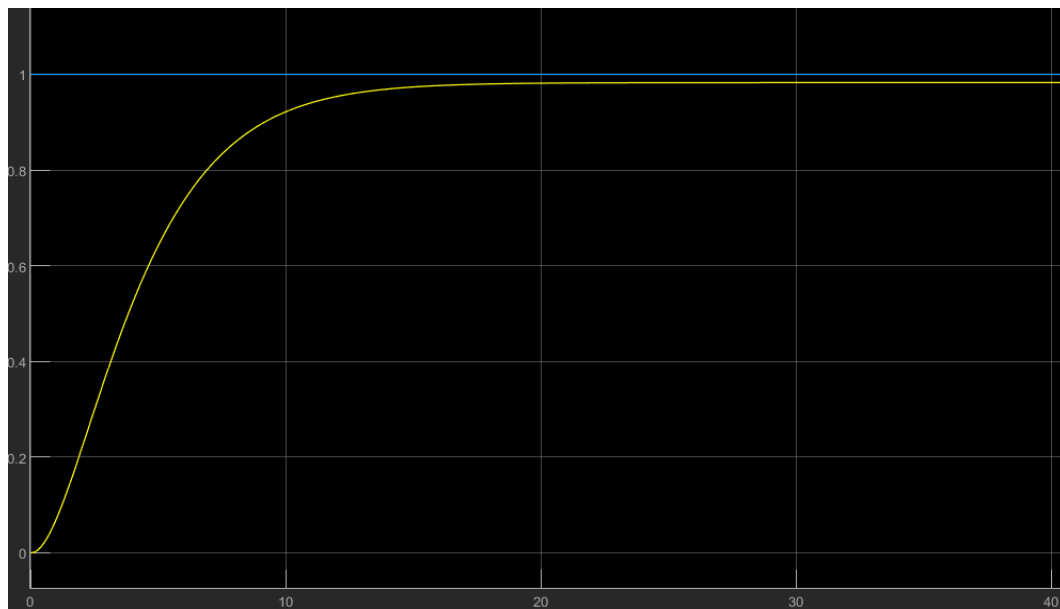
Le résultat est :

$$K = [6.6792 \quad 29.9024 \quad 23.1200]$$

6.2.2 Schéma bloc :



6.3 Résultat :



Interprétation :

On constate que notre système est encore stable avec un dépassement nul $D_{\%} = 0\%$ et une erreur statique ϵ_{∞} nulle à l'infini, d'autre part le temps de réponse à 5% $\tau_r = 12s$, le système est lent.

7 Commande numérique RST du système

7.1 Schéma bloc :

on a :

$$H(s) = \frac{6.563}{s^3 + 10.78s^2}$$

Sa transformée en Z est obtenue en utilisant la commande matlab (c2d) qui prend en comme paramètre H et la période d'échantillonnage T_e .

On choisit T_e telle qu'elle soit 8 fois plus petite que la pseudo-période, s'il s'agit de pôles complexes conjugués

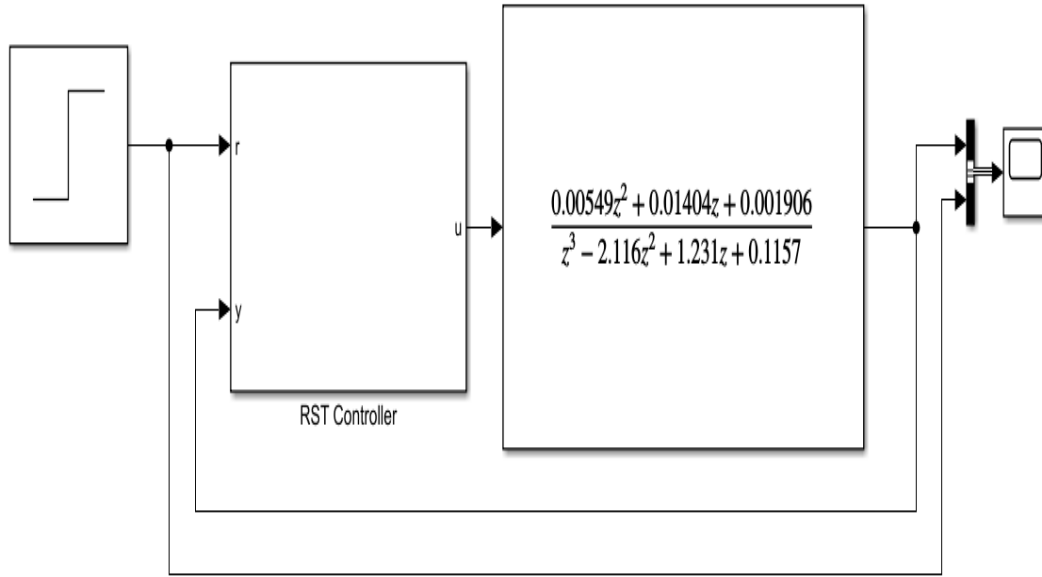
$$T_e \simeq \frac{1}{8} \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}$$

soit $T_e = 0.2s$

$$H(z) = \frac{0.00549Z^2 + 0.01404Z + 0.001906}{Z^3 - 2.116Z^2 + 1.231Z - 0.1157}$$

Donc

$$H(z^{-1}) = Z^{-1} \frac{0.00549 + 0.01404Z^{-1} + 0.001906Z^{-2}}{1 - 2.116Z^{-1} + 1.231Z^{-2} - 0.1157Z^{-3}} = Z^{-1} \frac{B(Z^{-1})}{A(Z^{-1})}$$



7.2 Détermination des polynômes R,S et T

Le polynôme caractéristique :

$$P(z^{-1}) = A(z^{-1})S(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1}) \cdot R(z^{-1})$$

avec $d = 2$ on a :

$$n_P < 3 + 2 + 1 - 1 = 5$$

$$n_S = 1 + 2 - 1 = 2$$

$$n_R = 3 - 1 = 2$$

prenant $P(z^{-1}) = 1 - 2\text{Re}(p_1)z^{-1} + |p_1|^2z^{-2}$

$$p_1 = e^{-\omega_n \xi} e^{i\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

$$p_2 = e^{-\omega_n \xi} e^{-i\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

avec $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}, \omega_n = 5 \text{ rad.s}^{-1}$

d'où

$$P(z^{-1}) = 1 + 0.05456z^{-1} + 0.0009z^{-2}$$

$$S(z^{-1}) = 1 + s_1z^{-1} + s_2z^{-2}$$

$$R(z^{-1}) = r_0 + r_1z^{-1} + r_2z^{-2}$$

Soit le système suivant $AX = B$ tel que :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.116 & 1 & 0 & 0.00549 & 0 & 0 \\ 1.231 & -2.116 & 1 & 0.01404 & 0.00549 & 0 \\ 0.01157 & 1.231 & -2.116 & 0.01906 & 0.01404 & 0.00549 \\ 0 & 0.01157 & 1.231 & 0 & 0.001906 & 0.01404 \\ 0 & 0 & 0.01157 & 0 & 0 & 0.001906 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ s_1 \\ s_2 \\ r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.05456 \\ 0.0009 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

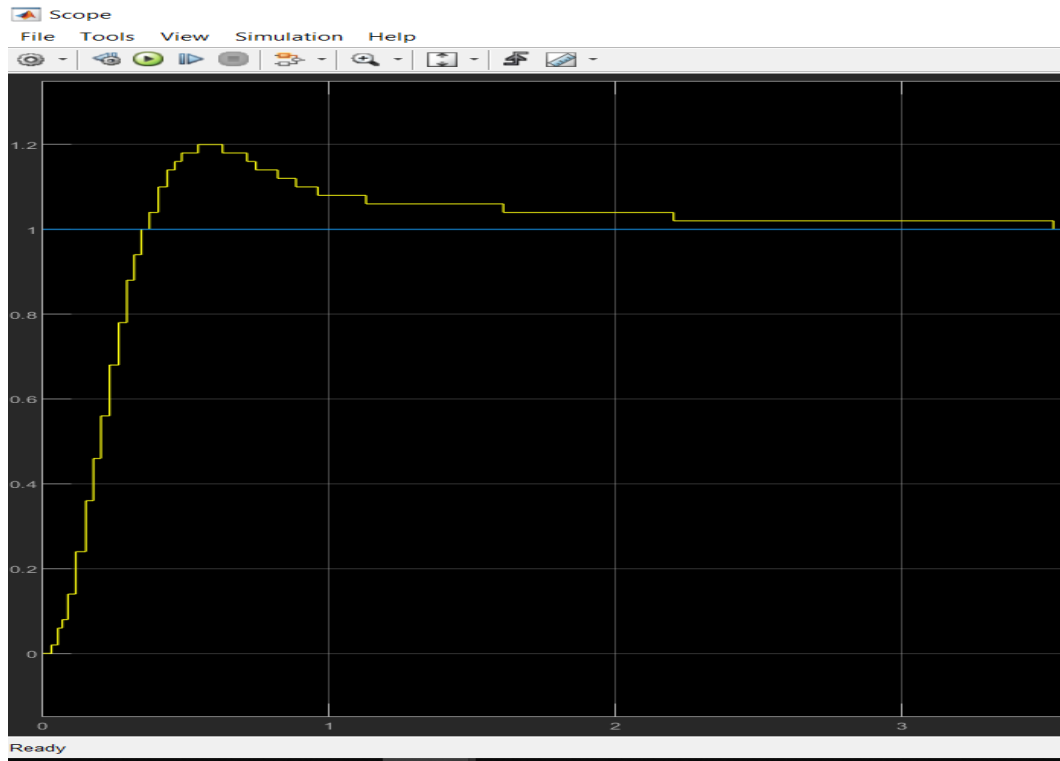
Tout calcul fait, on obtient :

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.2238 \\ 0.4439 \\ 172.4573 \\ -274.284 \\ -2.6947 \end{pmatrix}$$

Pour avoir une réponse pile la fonction de transfert du système en boucle fermée doit être un polynôme en z^{-1} de degré minimal :
on choisit donc

$$T(Z^{-1}) = \frac{P(Z^{-1})}{B(1)} \quad (2)$$

7.3 Résultat :



Interprétation :

On constate un dépassement $D\% = 20\%$, une erreur statique $\epsilon_\infty = 0$ et un temps de réponse à 5% de l'ordre de 1.5s

8 Interprétation des différentes structures de commande

La comparaison entre les correcteurs se résume dans ce tableau. Pour une entrée en échelon $u(t)$ on a :

	Temps de réponse	Dépassement	erreur statique	Stabilité
avance de phase	1 s	10%	nulle	stable
Par retour d'état	12 s	0%	nulle	stable
RST	1.5 s	20%	nulle	stable

9 Conclusion

En conclusion, nous devons avouer que rétrospectivement nous sommes satisfaits de ce travail puisque nous avons atteint des nouveaux objectifs. En effet, ce mini projet nous a permis de comprendre et apprendre à maîtriser le cours de la théorie de la commande à l'aide du logiciel matlab

Enfin nous ne prétendons pas avoir résoudre le problème posé dans son intégralité mais nous sommes par ailleurs convaincus que le travail élaboré n'est qu'une étape primaire aussi bien pour une carrière professionnelle que pour des études plus approfondies.