«به نام خدا»

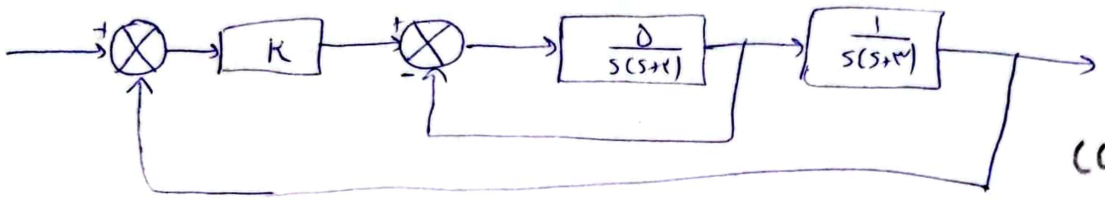
سیستم های کنترل خطی - HW6

حامد باغستانی (٤٠١١٦١٤٣)

$\% M_p = 11\%$ $\quad K = 2$

۱) خطا ۳ برابر بهتر شود

(برای حل از طراحی جبران ساز پس فاز استفاده می کنیم.)



$$C(s) = K\frac{Ts+1}{BTs+1} \quad , B>1$$

$$\% M_p = 100\, e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 11 \Rightarrow e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 0/11 \xrightarrow{\ln} -\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \ln(0/11) = -2/21$$

$$\Rightarrow \frac{+\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2/21}{\pi} \simeq 0/7 \Rightarrow \zeta = 0/7\sqrt{1-\zeta^2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \zeta^2 = 0/49\,(1-\zeta^2)$$

$$\Rightarrow \zeta^2 + 0/49\,\zeta^2 = 0/49 \Rightarrow \zeta^2 = \frac{0/49}{1/49} \begin{cases} \zeta = 0/57 \ \checkmark \\ \zeta = -0/57 \ \times \end{cases}$$

$$\zeta = \frac{PM}{100} \Rightarrow PM = 57^\circ$$

$$\text{if } K=2 \rightarrow G(s) = 2 \times \frac{\frac{5}{s^2+2s}}{1+\frac{5}{s^2+2s}} \times \frac{1}{s(s+3)} = \frac{10}{(s^2+2s+5)(s+3)\,s}$$

الگوریتم طراحی)

۱- یافتن K:

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0}\frac{10}{(s^2+2s+5)(s+3)} = \frac{10}{5\times 3} = \frac{2}{3}$$

$$\hat{K}_v = 30 \times \frac{2}{3} = 20 \qquad K = \frac{\hat{K}_v}{K_v} = 30$$

-2

$$G_1(s) = KG(s) = \frac{300}{s(s+3)(s^2+2s+5)} \rightarrow G_1(j\omega) = \frac{300}{j\omega(j\omega+3)(-\omega^2+5+j2\omega)}$$

3- یافتن فرکانس گذر بهره جدید : $\hat{\omega}_g$

$$|G_1(j\hat{\omega}_g)| = 1 \rightarrow \frac{300}{\hat{\omega}_g\left(\sqrt{9+\hat{\omega}_g^2}\right)\left(\sqrt{4\hat{\omega}_g^2+(5-\hat{\omega}_g^2)^2}\right)} = 1 \Rightarrow \hat{\omega}_{g_1} = 4/1083 \simeq 4/1$$

حل به کمک نرم افزار

$$\measuredangle G(j\hat{\omega}_g) = 0 - 90 - \tan^{-1}\left(\frac{\hat{\omega}_g}{3}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{2\hat{\omega}_g}{5-\hat{\omega}_g^2}\right) = -109/03$$

با فرض این که $PM = ۵۷^\circ$ حد بهره مطلوب که باشد ۱۱ را به گونه‌ای می‌یابیم که :

$$\measuredangle G_1(j\omega) = -۱۸۰ + ۵۷ + ۱۲ \Rightarrow -۹۰ - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{۳}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{۲\omega}{۵-\omega^۲}\right) = -۱۱۱$$

$$\rightarrow \hat{\omega}_{g_۲} \simeq ۰/۵۴۶ \qquad \begin{cases} \hat{\omega}_{g_۱} = ۴/۱ \\ \hat{\omega}_{g_۲} = ۰/۵۴۶ \end{cases}$$

۴) انتخاب T

$$\frac{\hat{\omega}_g}{۱۰} < \frac{1}{T} < \frac{\hat{\omega}_g}{۲}$$

$$\hat{\omega}_{g_۱} = ۴/۱ \Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{\hat{\omega}_g}{۱۰} \Rightarrow T = ۲/۴۴$$

$$\hat{\omega}_{g_۲} = ۰/۵۴۶ \Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{\hat{\omega}_g}{۱۰} \Rightarrow T = ۱۸/۳۲$$

۵) انتخاب β :

$$-۲۰ \log \beta + |G_1(j\hat{\omega}_g)|\Big|_{dB} = ۰ \Rightarrow$$

$$\text{if } \hat{\omega}_g = ۴/۱ \Rightarrow |G_1(j\hat{\omega}_g)| = ۱ \Rightarrow -۲۰ \log \beta = ۰ \Rightarrow \beta = ۱$$

β باید بزرگتر از 1 باشد پس این رد می‌شود.

$$\text{if } \hat{\omega}_g = ۰/۵۴۶ \Rightarrow |G_1(j\hat{\omega}_g)| = \frac{۳۰۰}{\hat{\omega}_g\left(\sqrt{۹+\hat{\omega}_g^۲}\right)\sqrt{۴\hat{\omega}_g^۲+(۵-\hat{\omega}_g^۲)^۲}} \simeq ۳۷/۳۳$$

$$-۲۰ \log \beta + ۲۰ \log |G_1(j\hat{\omega}_g)| = ۰ \Rightarrow ۲۰ \log \beta = ۲۰ \log |G_1(j\hat{\omega}_g)| \Rightarrow \beta = |G_1(j\hat{\omega}_g)|$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = ۳۷/۳۳}$$

$$C(s) = K \frac{Ts+1}{\beta Ts+1} = ۳۰ \, \frac{۱۸/۳۲s+1}{۶۸۳/۸۹s+1}$$

۶) حاشیه بهره سیستم و پاسخ حلقه بسته آن را بررسی می‌کنیم.

$$۳۰ \, \frac{۱۸/۳۲s+۱}{۶۸۳/۸۹s+۱} \times \frac{۱۵}{s(s+۳)(s^۲+۲s+۵)}$$

در مطلب محاسبه شده و نتایج آن نیز در فایل ارسالی قرار داده خواهد شد.

$PM = ۶۱/۵$ @ $\omega = ۰/۵۴۹$ تقریباً همان مورد نظر برآورده شده

$GM = ۹/۳۴\,dB$ @ $\omega = ۱/۷۱$ $\quad GM > ۰$ بنابراین سیستم پایدار است.

پرسش (۲)

در حال حاضر سیستم دارای $PM = 83^\circ$ و $GM = 40.2\,dB$ است

الف) از کنترلر پیش‌فاز باید استفاده کنیم زیرا افزایش پهنای باند به معنای افزایش پاسخ گذرا و بهبود آن می‌باشد که این کار به کمک یک کنترلر پیش‌فاز انجام می‌گیرد. یکی دیگر از کاربردهای کنترلر پیش‌فاز بهبود حاشیه فاز می‌باشد.

ب) با توجه به این که در ابتدا شیب نمودار اندازه بود، منفی است بنابراین سیستم حداقل یک قطب $s=0$ در مخرج دارد بنابراین ثابت خطای ماندگار آن به ورودی پله برابر صفر است. بنابراین از این بابت نگرانی نخواهیم داشت.

۱) تعیین K، چون نگرانی بابت خطای ماندگار نداریم پس $K=1$ فرض می‌کنیم

۲) $G_1(s) = K\,G(s) = G(s)$ ← نمودار بود این در صورت سوال موجود می‌باشد.

۳)

$$C(s) = \frac{K}{\sqrt{\alpha}}\,\frac{1+\alpha TS}{1+TS} \quad \text{و} \quad \alpha > 1 \qquad\qquad \hat{G}(j\omega) = \frac{K}{\sqrt{\alpha}} \times \frac{1+\alpha TS}{1+TS}\, G(j\omega)$$

۴)

برای اینکه پهنای باند بیشتر از $10\,rad/sec$ بشود، می‌توان فرکانس گذر بهره سیستم را روی $\omega_g = 10$ بیندازیم. در این حالت قطعاً پهنای باند قطعاً بزرگتر از ۱۰ خواهد بود:

$$|G(j10)|_{dB} = -40.2 \rightarrow -20\log|G(j10)| = -40.2 \rightarrow |G(j10)| = 102$$

$$G_1(s) = 102\,G(s) \Rightarrow \omega_g = 10 \rightarrow \measuredangle G(j\omega) = -168^\circ \rightarrow PM = 12^\circ$$

$$\varphi_m = \hat{P}M - PM + \underbrace{5^\circ}_{\text{ضریب ایمنی}} = 32 - 12 + 5 = 25 \qquad \alpha = \frac{1+\sin(\varphi_m)}{1-\sin(\varphi_m)} = 2.46$$

$$\omega_g = 10 \Rightarrow T = \frac{1}{\omega_g\sqrt{\alpha}} = 0.064$$

$$\Rightarrow C(s) = \frac{102}{\sqrt{2.46}} \times \frac{1+2.46\times 0.064\,S}{1+0.064\,S} = 65.03\,\frac{0.157\,S+1}{0.064\,S+1}$$

$$\Longrightarrow \hat{G}(s) = 65.03\,\frac{0.157\,S+1}{0.064\,S+1}\cdot G(s)$$

پرسش سوم

$$G(s) = \frac{e^{-2s}}{Ts+1} = \frac{e^{-0.2s}}{0.4s+1} \qquad G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s}$$

$$\%M_p < 10\%$$

$$\rightarrow G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} = K_p\frac{\left(s + \frac{K_I}{K_p}\right)}{s}$$

$$G(j\omega) = \frac{e^{-j0.2\omega}}{j0.4\omega+1} \rightarrow |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+0.16\omega^2}} \ , \ \measuredangle G(j\omega) = \frac{180}{\pi}\times(-0.2\omega) - \tan^{-1}(0.4\omega)$$

$$\rightarrow |G(j\omega)| = 1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+0.16\omega^2}} = 1 \Rightarrow 1+0.16\omega^2 = 1 \Rightarrow 0.16\omega^2 = 0 \rightarrow \omega_g = 0$$

$$\Rightarrow \measuredangle G(j\omega_g) = 0 - \tan^{-1}(0) = 0 \Rightarrow PM = 180^\circ$$

$$\measuredangle G(j\omega) = -180 \Rightarrow -0.2\omega\times\frac{180}{\pi} - \tan^{-1}(0.4\omega) = -180 \Rightarrow \omega_p = 9.18$$

$$\rightarrow |G(j\omega_p)| = 0.26 \Rightarrow GM = -20\log|G(j\omega_p)| = 11.7 > 0$$

$$\zeta = \frac{PM}{100} = \frac{180}{100} = 1.8 \rightarrow \%M_p = 0$$

چون $1 < \zeta$ پس سیستم اصلی اصلاً فراجهش ندارد.

$$\%M_p < 10\% \rightarrow 100\, e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} < 10 \Rightarrow \zeta > 0.6 \Rightarrow \frac{\hat{PM}}{100} > 0.6 \Rightarrow \hat{PM} > 60^\circ$$

$$\hat{PM} = 180 + \measuredangle G(j\hat\omega_g) = 60 \Rightarrow \measuredangle G(j\hat\omega_g) = -120 \Rightarrow$$

$$\frac{180}{\pi}\times(-0.2\hat\omega_g) - \tan^{-1}(0.4\hat\omega_g) = -120 \Rightarrow \hat\omega_g = 4.95$$

برای تقریب بهتر، $\hat\omega_g$ را عقب تر می بریم : $\hat\omega_g = 4.5$

$$K_p = \frac{1}{|G(j\hat\omega_g)|} = 2 \qquad K_I = \frac{K_p\hat\omega_g}{10} = \frac{2\times4.5}{10} = 0.9$$

$$\Rightarrow C(s) = K_p + \frac{K_I}{s} = 2 + \frac{0.9}{s}$$

سیستم نهایی : $G_2(s) = C(s)G(s) = \left(2+\frac{0.9}{s}\right)\left(\frac{e^{-0.2s}}{0.4s+1}\right) = \frac{(2s+0.9)e^{-0.2s}}{s(0.4s+1)} = \begin{cases} |G_2(j\omega)| = \frac{\sqrt{4\omega^2+0.81}}{\omega\sqrt{0.16\omega^2+1}} \\ \measuredangle G_2(j\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{2\omega}{0.9}\right) - 90 - \tan^{-1}(0.4\omega) - 0.2\times\frac{180}{\pi}\times\omega \end{cases}$

$$|G_2(j\omega_g)| = 1 \rightarrow \omega_g = 4.36 \Rightarrow \measuredangle G(j\omega_g) = 83.5-90-90-20 = -116.5 \Rightarrow PM = 63.5 \checkmark$$

$$\measuredangle G_2(j\omega_p) = -180 \rightarrow \omega_p = 8.94 \Rightarrow |G(j\omega_p)| = 0.54 \Rightarrow GM = -20\log|G(j\omega_p)| = 5.35\,dB \Rightarrow$$

چون از صفر بزرگتر است پس پایدار می باشد.

گزارش چهارم :

$$G(s)=\frac{2500K}{s(s+25)} \xrightarrow{\text{if } K=1} G(s)=\frac{2500}{s(s+25)}$$

- چون نوع سیستم یک می باشد، بنابراین خطای ماندگار به ورودی پله صفر می باشد و از این بابت نگرانی نداریم.

$PM>45^\circ$

$$e_{ss}=\frac{1}{\hat{K}_v}<0/01 \Rightarrow \hat{K}_v>100$$

برای بهبود خطای حالت ماندگار، بهتر است از جبران ساز پس فاز استفاده کنیم:

۱) تعیین K

$$G(s)=\frac{2500}{s(s+25)} \to K_v=\lim_{s\to 0} sG(s)=\frac{2500}{25}=100$$

فرض: $\hat{K}_v=200$

$$\Rightarrow K=\frac{\hat{K}_v}{K_v}=\frac{200}{100} \Rightarrow \boxed{K=2}$$

۲)

$$G_1(s)=KG(s)=2\times\frac{2500}{s(s+25)}=\frac{5000}{s(s+25)}$$

$$|G(j\omega_g)|=1 \to \frac{5000}{\omega_g\sqrt{625+\omega_g^2}}=1 \Rightarrow \omega_g=68/54 \text{ rad/sec} \Rightarrow \measuredangle G(j\omega_g)=0-90-\tan^{-1}\left(\frac{68/54}{25}\right)=-159/96 \Rightarrow$$

$PM=20/04$ ← نیاز به اصلاح دارد.

GM همچنان برابر ∞ می باشد و تغییری در آن نسبت به سیستم اصلی به وجود نمی آید: $GM=\infty$

۳)

$$\measuredangle G_1(j\hat{\omega}_g)=-180+45+\overset{\text{تقریب}}{12}=-123 \Rightarrow 0-90-\tan^{-1}\left(\frac{\hat{\omega}_g}{25}\right)=-123 \Rightarrow \hat{\omega}_g=16/24$$

۴) انتخاب T:

$$\frac{1}{T}=\frac{\hat{\omega}_g}{10} \Rightarrow \frac{1}{T}=1/624 \Rightarrow T=0/62$$

۵) انتخاب β:

$$-20\log\beta+|G_1(j\hat{\omega}_g)|_{dB}=0 \to -20\log\beta+20\log 10=0 \Rightarrow \boxed{\beta=10}$$

$$|G_1(j\hat{\omega}_g)|=\frac{5000}{\hat{\omega}_g\sqrt{\hat{\omega}_g^2+625}}\simeq 10/33\simeq 10$$

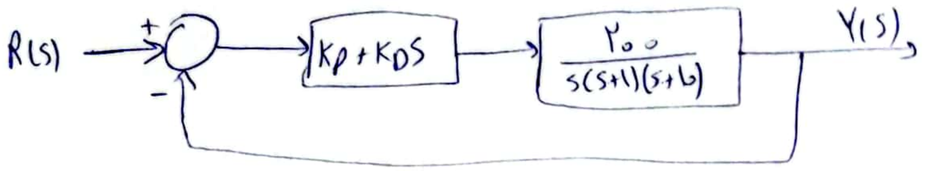
۶)

$$C(s)=K\frac{Ts+1}{\beta Ts+1}=2\,\frac{0/62s+1}{6/2s+1} \qquad G(s)=\frac{2500}{s(s+25)}$$

$$C(s)G(s)=\frac{5000(0/62s+1)}{s(s+25)(6/2s+1)}$$

7) با شبیه سازی در متلب می بینیم خواسته صورت سوال فراهم شده به طوری که $PM=51/3^\circ$ و $GM=\infty$ می باشد.

پرسش پنجم



الف) برای این که پاسخ، بدون نوسان باشد، باید ۱=ζ باشد.

$t_s = \frac{۴}{\zeta\omega}$

$G(s) = \frac{۲۰۰}{s(s+1)(s+10)}$

if $\zeta = 1 \to \zeta = \frac{\hat{PM}}{۱۰۰} \Rightarrow \hat{PM} = ۱۰۰$

$t_s = \frac{۴}{\zeta\hat{\omega}_g} = ۳ \Rightarrow \hat{\omega}_g = \frac{۴}{۳} = ۱/۳۳$

$C(s) = \frac{K_c}{\sqrt{\omega_g^2 T^2 + 1}}(Ts+1)$

$K_c = \frac{1}{|G(j\hat{\omega}_g)|} = ۰/۱۱ \Rightarrow G_1(j\omega) = K_c G(j\omega)$

$|G_1(j\omega_g)| = 1 \Rightarrow \frac{۲۲}{\omega\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+۱۰۰}} = 1 \Rightarrow \omega_g = ۱/۳۳ \to \measuredangle G_1(j\omega_g) = -۹۰ - \tan^{-1}(\omega_g) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega_g}{۱۰}\right)$

$\Rightarrow \measuredangle G_1(j\omega_g) = -۱۵۰/۳ \Rightarrow PM = ۲۹/۷$

$\phi_m = \hat{PM} - PM + x = ۱۰۵/۳ - ۲۹/۷ \simeq ۷۶ \Rightarrow T = \frac{\tan(\phi_m)}{\hat{\omega}_g} = ۳/۰۱۶$

$\Rightarrow C(s) = \frac{۰/۱۱}{\sqrt{۱۶/۰۹+1}}(۳/۰۱۶s+1) = \frac{۰/۱۱}{۴/۱۳}(۳/۰۱۶s+1) = ۰/۰۸۰۳۳s + ۰/۰۲۶۶۳$

با توجه به خروجی متلب، $t_s = ۸/۷$ می باشد که مطلوب سؤال نیست

if $\omega_g = ۱/۵ \xrightarrow{\text{با فرض عدم تغییر } \phi_m} C(s) = \frac{۰/۱۱}{\sqrt{۲۰/۴۷+1}}(۳/۰۱۶s+1) = \frac{۰/۱۱}{۴/۶۳}(۳/۰۱۶s+1) = ۰/۰۸۵۹۲۲ + ۰/۰۶۰۱$

← با توجه به خروجی متلب، $t_s = ۲/۹۳$ و $M_p = ۰$، که این مطلوب است

ب)

$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \frac{۲۰۰}{۱۰} = ۲۰$

$K_p = \frac{\hat{K}_v}{K_v} = \frac{1}{۲۰} = ۰/۰۵$

$۰ < K_D < ۰/۵$

$C(s) = K_P + K_D s$

* با توجه به خروجی متلب، به ازای $K_D = ۰/۱$، بیشترین مقدار حد فاز را خواهیم داشت: $PM = ۹۳/۵$