«به نام خدا»

حامد باستانی (۴۰۱۱۹۱۴۳)

سیستم‌های کنترل خطی - HW3

①

$$G(s)=\frac{K(s+a)}{(s+b)(s+2)^2(s+4)}$$

برای یافتن این رابطه می‌توان از معیار پایداری راث-هرویتز استفاده نمود. می دانیم درصورتی پایدار خواهد بود که ستون اول این جدول تغییر علامت نداشته باشد. برای این کار ابتدا معادله مشخصه را بدست می آوریم:

$$\frac{G(s)}{1+KG(s)}=\frac{\frac{s+a}{(s+b)(s+2)^2(s+4)}}{1+\frac{K(s+a)}{(s+b)(s+2)^2(s+4)}}=\frac{(s+a)}{(s+b)(s+2)^2(s+4)+K(s+a)}$$

$$\Delta=(s+b)(s^2+4s+4)(s+4)+Ks+Ka=0\Rightarrow\left(s^2+(4+b)s+4b\right)(s^2+4s+4)+Ks+Ka$$

$$s^4+4s^3+4s^2+(4+b)s^3+4(4+b)s^2+4(4+b)s+4bs^2+16bs+16b+Ks+Ka=0\Rightarrow$$

$$\Delta=s^4+(8+b)s^3+(20+8b)s^2+(16+K+20b)s+16b+Ka=0$$

s^4	1	$20+8b$	$16b+Ka$
s^3	$8+b$	$16+K+20b$	0
s^2	$\frac{-\begin{vmatrix}8+b & 16+K+20b\\ 1 & 20+8b\end{vmatrix}}{8+b}=\frac{8b^2+64b+144-K}{8+b}=A_1$	$16b+Ka$	0
s^1	$\frac{-\begin{vmatrix}\frac{8b^2+64b+144-K}{8+b} & 16b+Ka\\ 8+b & 16+K+20b\end{vmatrix}}{A_1}=\frac{A_3}{A_1}=A_2$	0	0
s^0	$\frac{-\begin{vmatrix}A_2 & 0\\ A_1 & 16b+Ka\end{vmatrix}}{A_2}=16b+Ka$	0	0

$$A_3=(2880b+128K-64aK+44bK+8Kb^2+1152b^2+144b^3-K^2-16abK-ab^2K+2304)/(b+8)$$

$$A_2=(\ \text{〃}\quad \text{〃}\quad \text{〃}\quad \text{〃}\quad \text{〃}\quad \text{〃}\ )/(8b^2+64b+144-K)$$

برای بررسی پایداری باید همه‌ی داده‌های ستون اول مثبت باشند:

$8+b>0\Rightarrow b>-8$ (۱)

$A_3>0$ (۳)

$8b^2+64b+144-K>0\Rightarrow K<8b^2+64b+144$ (۲)

$16b+Ka>0$ (۴)

از اشتراک موارد بالا، حدود K برحسب a و b بدست خواهد آمد.

۲

$K>0$ ← زاویه مربوط به آن $(2K+1)\pi$ می باشد.

$$G(s)=\frac{K(s+1)}{s^3+4s^2+5s}$$

$s^2+4s+5=0$

$\Delta=16-20=-4$

$s_{1,2}=\frac{-4\pm 2j}{2}=-2\pm j$

$$G_1(s)=\frac{s+1}{s^3+4s^2+5s}=\frac{s+1}{s(s^2+4s+5)}$$

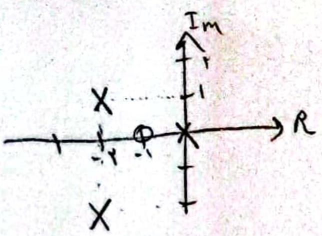
گام اول: تعیین نقاط ابتدایی و انتهایی

$K=0 \Rightarrow s=0\,,\ -2\pm j$ نقاط ابتدایی

$K\to\pm\infty \Rightarrow s=-1$ نقطه انتهایی

گام دوم: تعیین تعداد شاخه ها: 2 branch $\to\infty$

گام سوم: تقارن نسبت به محور حقیقی



گام چهارم: به ازای $K\to\pm\infty$، ۲ شاخه ها به سمت محورهایی مجانب خواهند شد.

- زاویه محورهای مجانب در RL:

$$\frac{(2K+1)\pi}{n-m}=\frac{(2K+1)\pi}{2}\begin{cases}\frac{\pi}{2}\\ \frac{3\pi}{2}\end{cases}$$

- زاویه محورهای مجانب در CRL:

$$\frac{2K\pi}{n-m}=\frac{2K\pi}{2}=K\pi\begin{cases}0\\ \pi\end{cases}$$

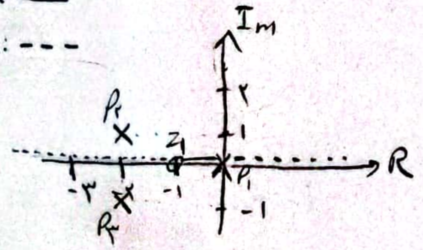
$$\sigma=\frac{0-2+j-2-j+1}{2}=-1.5$$

چون $n-m=2$ می باشد پس ۲ مجانب در RL و ۲ مجانب در CRL خواهیم داشت.
محل برخورد با مجانب ها در نقطه -1.5 اتفاق می افتد.

گام پنجم: تعیین RL و CRL:

RL: ——

CRL: - - -



گام ششم: نقاط جدایی شاخه ها:

$$\frac{dG(s)}{ds}=0 \rightarrow \frac{s^3+4s^2+5s-(s+1)(3s^2+8s+5)}{(s^3+4s^2+5s)^2}=0$$

$$\Rightarrow \frac{s^3+4s^2+5s-(3s^3+8s^2+5s+3s^2+8s+5)}{(s^3+4s^2+5s)^2}=0 \Rightarrow -2s^3-7s^2-8s-5=0$$

$$\Rightarrow 2s^3+7s^2+8s+5=0 \xrightarrow[\text{با کمک نرم افزار}]{} s_1=-2.197429 \quad \boxed{s_1\simeq-2.2} \qquad s_2=-0.651\mp 0.8452j$$

فقط مقدار حقیقی قابل قبول است. پس محل جدایی شاخه ها در $s_1=-2.197429$ اتفاق خواهد افتاد.

گام هفتم: پیدا کردن زاویه خروج از مبدأ (خروج از قطب) و زاویه های خروجی:

رادیان

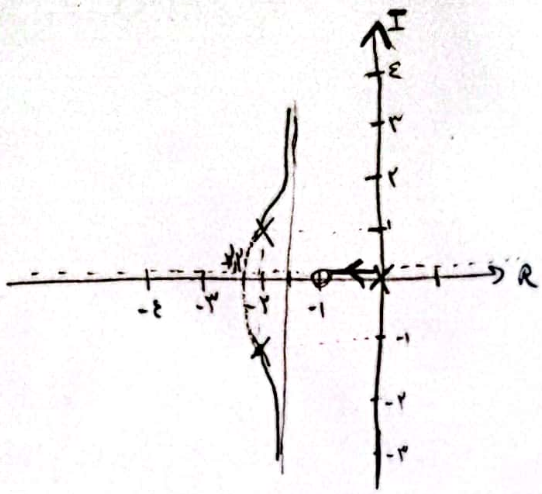
$\theta_{z_1}-(\theta_{p_1}+\theta_{p_2}+\theta_{p_3})=(2K+1)\pi \Rightarrow 0-(\theta_{p_1}+153.43-153.43)=-\pi \Rightarrow \theta_{p_1}=\pi$

$\theta_{z_1}-(\theta_{p_1}+\theta_{p_2}+\theta_{p_3})=(2K+1)\pi \Rightarrow 135-(153.43+\theta_{p_2}+90)=-\pi \Rightarrow -\theta_{p_2}=-71.57 \Rightarrow \theta_{p_2}=71.57$

$\theta_{z_1}-(\theta_{p_1}+\theta_{p_2}+\theta_{p_3})=(2K+1)\pi \Rightarrow -135-(-153.43-90+\theta_{p_3})=-\pi \Rightarrow \theta_{p_3}=288.43$ یا -71.57

در بالا زاویه خروج از تک تک قطب ها محاسبه شد.

$$\theta_{z_1} - (\theta_{p_1}+\theta_{p_2}+\theta_{p_3}) = \pi \Rightarrow \theta_{z_1} - (\pi + 153/43 - 153/43) = -\pi \Rightarrow \theta_{z_1} = 0$$ زاویه ورود به صفر :



$$s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2) + K(s+3) = 0$$

$$\frac{G(s)}{1+KG(s)}$$

۳

الف)

$$1+KG(s) = s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2) + K(s+3) \Rightarrow$$

$$1+KG(s) = 1 + \frac{K(s+3)}{s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2)} \Rightarrow G(s) = \frac{s+3}{s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2)}$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{s+3}{s(s+5)(s+6)(s^2+2s+2)} = \frac{s+3}{s^5+13s^4+54s^3+82s^2+60s}$$

گام اول: تعیین نقاط ابتدایی و انتهایی:

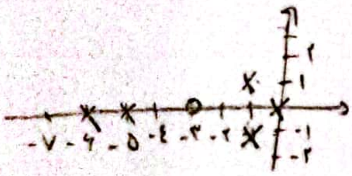
$K=0 \to s = 0, -5, -6, -1 \pm j$ نقاط ابتدایی

$K \to \pm\infty \Rightarrow s = -3$ نقطه انتهایی

4 branch $\to \infty$

گام دوم: تعیین تعداد شاخه:

گام سوم: فقط نسبت به محور حقیقی متقارن است.



گام چهارم: به ازای $K \to \pm\infty$ ۴ شاخه‌ها به سمت محورهای مجانب خواهد شد

- زاویه محورهای مجانب در RL:

$$\frac{(2K+1)\pi}{n-m} = \frac{(2K+1)\pi}{4} = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \frac{3\pi}{4} \\ \frac{5\pi}{4} & \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

- زاویه محورهای مجانب در CRL:

$$\frac{2K\pi}{n-m} = \frac{2K\pi}{4} = \frac{K\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \frac{\pi}{2} \\ \pi & \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

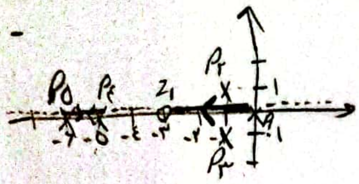
چون $n-m=4$ است پس ۴ مجانب در RL و ۴ مجانب در CRL خواهد داشت.

- محل برخورد مجانب‌ها:

$$\sigma = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} \Rightarrow \sigma = \frac{0-5-6-1+j1-1-j1-(-3)}{4} = \frac{-10}{4} = -2.5 \Rightarrow \boxed{\sigma = -2.5}$$

RL: ——
CRL: ---

گام پنجم: تعیین RL و CRL :



گام ششم: نقاط جدایی شاخه‌ها:

$$\frac{\partial G(s)}{\partial s} = 0 \Rightarrow \frac{s^5+13s^4+54s^3+82s^2+60s-(s+3)(5s^4+52s^3+162s^2+164s+60)}{(s^5+13s^4+54s^3+82s^2+60s)^2} = 0$$

$$\Rightarrow +4s^5+54s^4+264s^3+568s^2+492s+180 = 0$$ به کمک نرم‌افزار

$s_1 = -5.52573$ $\quad s_{2,3} = -3.33 \pm 1.204j$ $\quad s_{4,5} = -0.656 \pm 0.468j$

$\boxed{s_1 \simeq -5.53}$

چون $s_1 \simeq -5.53$ حقیقی است پس فقط این قابل قبول است و بنابراین محل جدایش شاخه‌ها نیز در همین نقطه رقم خواهد خورد.

گام هفتم: پیدا کردن زاویه خروج از قطب‌ها:

$\theta_{z_1} - (\theta_{p_1}+\theta_{p_2}+\theta_{p_3}+\theta_{p_4}+\theta_{p_5}) = (2k+1)\pi \rightarrow 0-(\theta_{p_1}+135-135+0+0) = -\pi \Rightarrow \theta_{p_1} = \pi$ رادیان

$\theta_{z_1} - (\theta_{p_1}+\theta_{p_2}+\theta_{p_3}+\theta_{p_4}+\theta_{p_5}) = (2k+1)\pi \rightarrow 26.56-(135+\theta_{p_2}+90+14.04+11.31) = -3\pi \Rightarrow \theta_{p_2} = 316.21$ یا -43.79 درجه

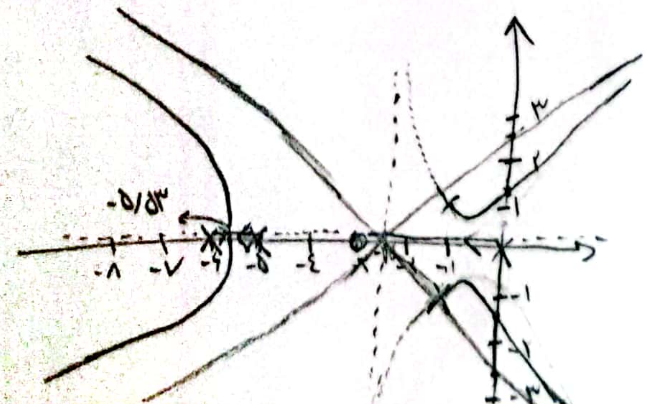
$\theta_{z_1} - (\theta_{p_1}+\theta_{p_2}+\theta_{p_3}+\theta_{p_4}+\theta_{p_5}) = (2k+1)\pi \rightarrow -26.56-(-135-90+\theta_{p_3}-14.04-11.31) = -\pi \Rightarrow \theta_{p_3} = -316.21$ یا 43.79 درجه

$\theta_{z_1} - (\theta_{p_1}+\theta_{p_2}+\theta_{p_3}+\theta_{p_4}+\theta_{p_5}) = (2k+1)\pi \rightarrow 180-(180+14.04-14.04+\theta_{p_4}+0) = -\pi \Rightarrow \theta_{p_4} = \pi$ رادیان

$\theta_{z_1} - (\theta_{p_1}+\theta_{p_2}+\theta_{p_3}+\theta_{p_4}+\theta_{p_5}) = (2k+1)\pi \rightarrow 180-(180+11.31-11.31+180+\theta_{p_5}) = -\pi \Rightarrow \theta_{p_5} = 0$ رادیان

- زاویه ورود به صفر:

$\theta_{z_1} - (\theta_{p_1}+\theta_{p_2}+\theta_{p_3}+\theta_{p_4}+\theta_{p_5}) = (2k+1)\pi \rightarrow \theta_{z_1}-(180+26.56-26.56+0+0) = +\pi \Rightarrow \theta_{z_1} = 360$ یا 0 درجه



* با تعیین معادله مشخصه و ترسیم جدول راث-هرویتز می‌توانیم محل برخورد شاخه‌ها با محور $j\omega$ را پیدا کنیم.

۴) مقدار خطای ماندگار به ورودی سهمی : ۰/۱

قطب های سیستم : ۰ ، ۰ ، ۲- ، ۵-

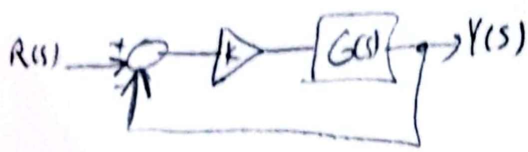
صفرهای سیستم : ۱-

با توجه به شکل مابین که زاویه خروج از قطب ۲- برابر صفر می باشد و به سمت صفر حرکت می کند پس در بازه (۱-،۲-) ، RL وجود دارد و بنابراین در صفحه دو قطب صفر خواهیم داشت

همچنین با توجه به نمودار خروجی، مقدار $n - m$ نمی تواند ۲ باشد چرا اگر در این صورت مجانب ها در زاویه $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ (RL) و دو جهت (RL) قرار می گیرند، بنابراین تعداد بیشتری قطب خواهیم داشت که با توجه به بازه (۱-،۲-) تعداد قطب های صفر آن از مرتبه زوج خواهد بود.

$$G(s) = \frac{(s+1)}{(s+5)(s+2)s^2} \qquad L(s) = KG(s) = \frac{K(s+1)}{(s+5)(s+2)s^2}$$

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} s\,e(s) = \lim s \times \frac{1}{1+L(s)} \times \frac{1}{s^3} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s^2 L(s)}$$



$$k_a = \lim_{s \to 0} s^2 L(s) \Rightarrow$$

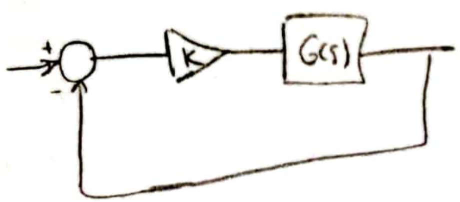
$$k_a = \lim_{s \to 0} s^2 \frac{K(s+1)}{s^2(s+5)(s+2)} = \frac{K}{10}$$

$$\xrightarrow{\text{داده سؤال}} e_{ss} = \frac{1}{k_a} = 0/1 \Rightarrow \frac{10}{K} = 0/1 \Rightarrow \boxed{K = 100}$$

۵) حل این بخش در متلب انجام شده و تمامی کدها و تصاویر و تحلیل ها در فایل LaTeX عنوان شده است.

$\zeta = 0.45$ $\quad K_v = 10$

$$G(s) = \frac{0.2}{s(s+1)}$$



$$H(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)} = \frac{0.2K}{s(s+1)+0.2K}$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{0.2K}{s^2+s+0.2K}$$

مخرج رابطه $H(s)$ را با عبارت $s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2$ مقایسه می‌کنیم.

$$2\zeta\omega_n = 1 \xrightarrow{\zeta=0.45} \omega_n = \frac{1}{0.9} \Rightarrow \omega_n = \frac{10}{9}$$

و $0.2K = \omega_n^2 \Rightarrow K = 6.17$

$$\boxed{L(s) = KG(s)}$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} sL(s) = \lim_{s\to 0} \frac{0.2\times K}{s+1} = \lim_{s\to 0} \frac{1.234}{s+1} = 1.234$$ ✗ مطلوب صورت سؤال نیست

$$\frac{K_{v\,\text{مطلوب}}}{K_{v\,\text{فعلی}}} = \frac{Z}{P} \Rightarrow \frac{10}{1.234} = \frac{Z}{P} \Rightarrow \frac{Z}{P} = 8.1 \simeq 8 \Rightarrow Z = 8P \quad \text{(I)}$$

$$K_v(\text{مطلوب}): \lim_{s\to 0} sL(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1.234}{s(s+1)} \times \frac{s+Z}{s+P} = 1.234\frac{Z}{P} \quad \text{(II)}$$

حال اگر نسبت (I) برقرار باشد و در رابطه (II) جایگذاری کنیم، همان $K_v=10$ بدست خواهد آمد که مطلوب سؤال است.

* می دانیم صفر و قطب در کنترلر پس فاز باید نزدیک به مبدأ باشد تا بقیه رفتار سیستم به هم نریزد:

$$\text{if} \quad Z = \frac{1}{125} \Rightarrow P = \frac{1}{1000}$$

$$\boxed{C(s) = 6.17\,\frac{s+0.008}{s+0.001}}$$