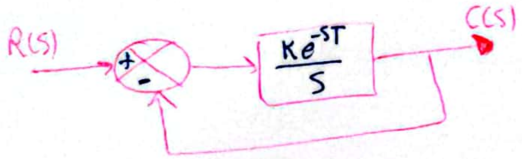
(به نام خدا)

سیستمهای کنترل خطی_HW5

حامد باستانی / ۴۰۱۱۶۱۴۳

پرسش یک)



برای یافتن GM، باید فرکانس گذر فاز (ω_p) را بدست آوریم. برای این کار باید زاویه تابع تبدیل حلقه باز عبارت بالا را برابر 180- قرار بدهیم.

$$G(s) = K\frac{e^{-sT}}{s} \rightarrow G(j\omega) = \frac{Ke^{-jT\omega}}{j\omega} \rightarrow \angle G(j\omega) = -T\omega - 90 = -180 \Rightarrow$$

$$-T\omega = -90 \rightarrow T\omega = 90 \rightarrow \omega = \frac{90}{T} = \frac{\pi}{2T}$$

$$|G(j\omega)| \xrightarrow{if\ \omega=\frac{90}{T}} \left|\frac{Ke^{-jT\frac{90}{T}}}{j\times\frac{90}{T}}\right| = \left|\frac{Ke^{-j90}}{j\times \frac{90}{T}}\right| = \left|\frac{Ke^{-j\frac{\pi}{2}}}{j\times\frac{\pi}{2T}}\right| = \frac{K}{\frac{\pi}{2T}} = \frac{2KT}{\pi}$$

$$GM = -20\log|G(j\omega)| = -20\log\frac{2KT}{\pi}$$

برای یافتن PM، باید فرکانس گذر بهره (ω_c) را بدست آوریم. برای این کار اندازه تابع تبدیل حلقه باز را برابر یک قرار می دهیم

$$|G(j\omega)| = 1 \rightarrow \frac{K}{\omega} = 1 \rightarrow \omega_c = K$$

$$PM = -T\omega - 90 + 180 \xrightarrow{\omega=\omega_c} PM = -KT + 90 \quad \text{یا} \quad PM = -KT + \frac{\pi}{2}$$

سیستم در صورتی پایدار است که حاشیه فاز و بهره آن مقدار مثبت داشته باشند:

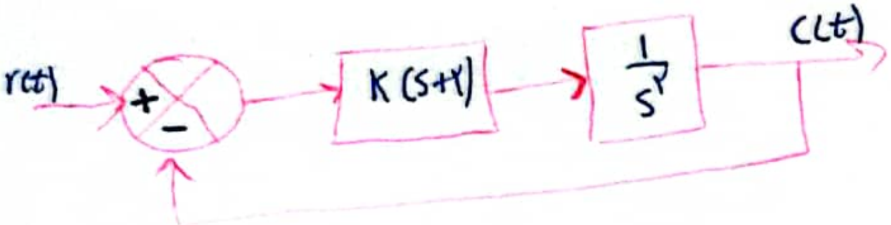
$$GM > 0 \rightarrow -20\log\frac{2KT}{\pi} > 0 \rightarrow 0 < \frac{2KT}{\pi} < 1 \rightarrow 0 < K < \frac{\pi}{2T} \quad (I)$$

$$PM > 0 \rightarrow -KT + \frac{\pi}{2} > 0 \rightarrow KT < \frac{\pi}{2} \rightarrow K < \frac{\pi}{2T} \quad (II)$$

$(I)\cap(II) \Rightarrow 0<K<\frac{\pi}{2T} \Rightarrow$ پس سیستم به ازای $0<K<\frac{\pi}{2T}$ یا $0<KT<\frac{\pi}{2}$ پایدار می باشد.

پرسش دوم)

$K = ? \rightarrow PM = 45^\circ$



ی بدست آوردن PM ، باید اندازه تابع G(s) را برابر یک قرار دهیم و فرکانس گذربهره را بدست آوریم .

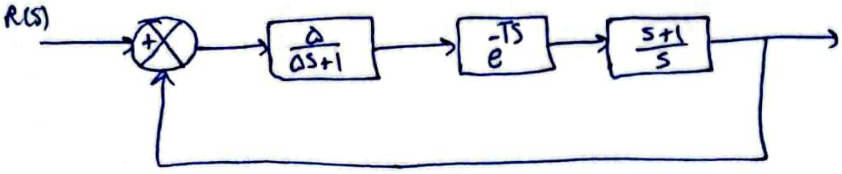
$$G(s) = \frac{K(S+2)}{S^2}$$

$$G(j\omega) = \frac{K(j\omega+2)}{(j\omega)^2} = \frac{K(j\omega+2)}{-\omega^2} \longrightarrow \left|G(j\omega)\right| = \frac{K\sqrt{\omega^2+4}}{\omega^2} = 1 \quad \text{I}$$

$$\arctan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) - 0 + 180 = 45 \rightarrow \arctan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) = -135 \rightarrow \frac{\omega_c}{2} = 1 \rightarrow \boxed{\omega_c = 2}$$

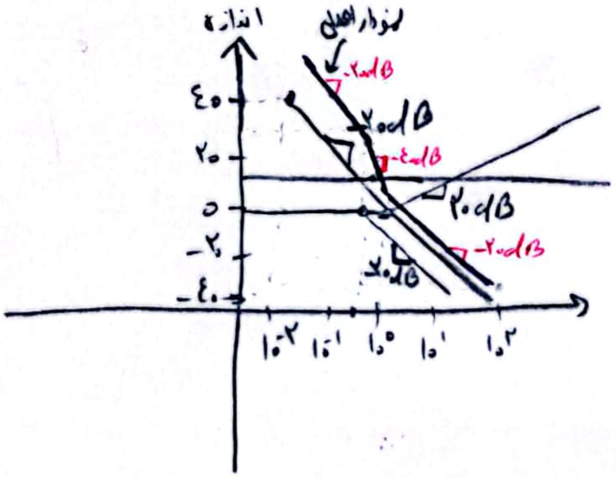
$$\text{I} \longrightarrow \frac{K\sqrt{4+4}}{4} = \frac{K\sqrt{8}}{4} = 1 \rightarrow K = \frac{4}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{K = \sqrt{2}}$$

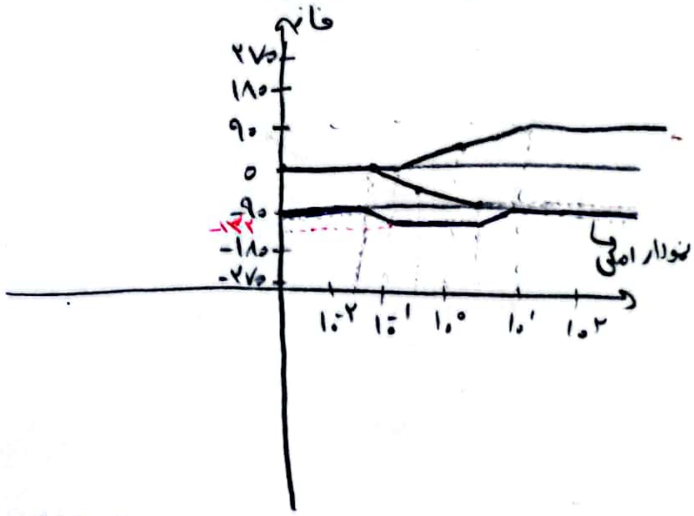
پرسش سه: $(T=2)$



$$G(S)=\frac{5(S+1)\,e^{-2S}}{(5S+1)\,S}\xrightarrow{\text{اویلر}}\frac{5(jw+1)}{(5\times jw+1)\,jw}\left(\cos(2w)-j\sin(2w)\right)$$

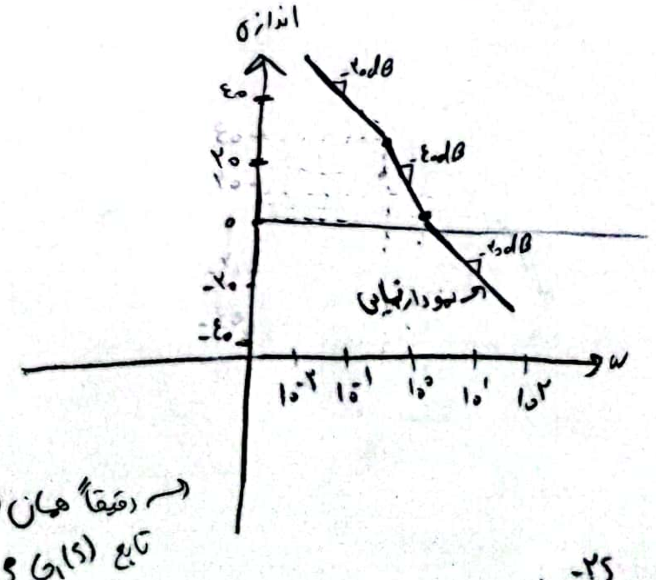
می دانیم $|e^{-TS}|$ برابر یک می باشد و چون ما نمودار بود را برحسب dB رسم می کنیم $(\log 1=0)$ بنابراین سیستم تأخیر در اندازه تأثیری نداده. اما این سیستم تأخیر روی فاز تأثیر قابل توجهی دارد. به طوری که به صورت یک خط با شیب $[-Tw]$ در نمودار فازی بود ظاهر می شود پس در فرکانس های خیلی کم، در فاز کلی سیستم تأثیر ندارد اما زمانی که $w\to\infty$ میل کند تأثیر زیادی را روی فاز سیستم خواهد گذاشت تا جایی که می تواند یک سیستم پایدار را ناپایدار کند. برای رسم نمودار بود سیستم $G(S)$، ابتدا نمودار بود $G_1(S)=\frac{5(S+1)}{S(5S+1)}$ را رسم و سپس از روی آن، نمودار بود $G(S)$ را ترسیم خواهیم کرد. $(20\log 5\approx 14)$

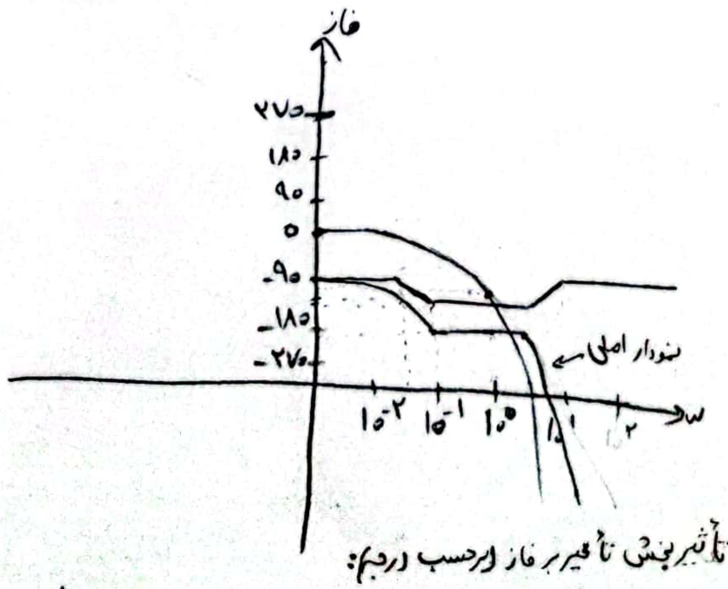




• $G_1(S)=\frac{5(S+1)}{S(5S+1)}$ نمودار بود •

با توجه به توضیحات قبل، نمودار بود $G(S)=\frac{5(S+1)\,e^{-2S}}{(5S+1)\,S}$ را رسم می کنیم

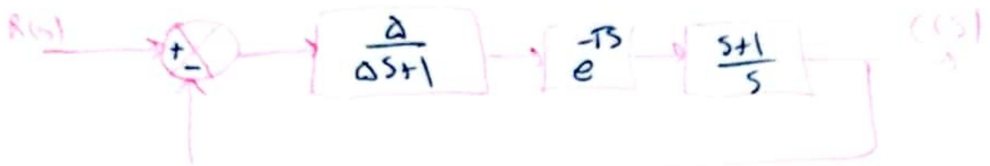




← دقیقاً همان نمودار اندازه تابع $G_1(S)$ می باشد

تأثیر بخش تأخیر بر فاز برحسب درجه: $-2\times w\times\frac{180}{\pi}$

• $G(S)=\frac{5(S+1)\,e^{-2S}}{S(5S+1)}$ نمودار بود •



$T=2s$

$$G(s)=\frac{5(s+1)e^{-2s}}{s(5s+1)}$$

برای محاسبه GM ، باید فاز G(s) را برابر ۱۸۰- درجه قرار بدهیم تا فرکانس گذر فاز (ω_p) را محاسبه کنیم و بعد از آن با جایگذاری مقدار GM را بدست می آوریم.

$$G(j\omega)=\frac{5(j\omega+1)e^{-j2\omega}}{j\omega(j5\omega+1)} \rightarrow \measuredangle G(j\omega)=\mathrm{arctg}(\omega)-2\omega-(90+\mathrm{arctg}(5\omega))=-180$$

$$\rightarrow \mathrm{arctg}(\omega)-\mathrm{arctg}(5\omega)-2\omega=-90$$

محاسبه به کمک نرم افزار: $\omega_p=0/421$

$$|G(j\omega_p)|=\left|\frac{5(j0/421+1)e^{-j2(0/421)}}{j(0/421)(j5(0/421)+1)}\right|=\frac{5\sqrt{(0/421)^2+1}\times 1}{0/421\left(\sqrt{(2/105)^2+1}\right)}\simeq 5/53$$

$GM=-20\log|G(j\omega_p)| \rightarrow GM=-20\log 5/53 \rightarrow GM=-14/85$ ٢٥

برای محاسبه ی PM ، باید اندازه تابع تبدیل حلقه باز سیستم را برابر یک قرار دهیم تا فرکانس گذر بهره (ω_c) را محاسبه و بعد از جایگذاری مقدار PM را بدست آوریم.

$$|G(j\omega)|=\frac{5\sqrt{\omega^2+1}\times 1}{\omega\left(\sqrt{25\omega^2+1}\right)}=1 \xrightarrow{\text{بکمک نرم افزار}} \omega_c=1/241$$

ادامه پرسش سوم :

$$PM = \arctan(\omega) - 2\omega - 90 - \arctan(5\omega)\Big|_{+180} \xrightarrow{\omega=\omega_c} PM = \arctan(1.241) - 2(1.241)\times\frac{180}{\pi} - 90 - \arctan(5\times 1.241)$$

$$+180 \Rightarrow PM = 51.58 - 142.5 - 90 - 80.99 + 180 = -83.91 < 0$$

با توجه به این که هم PM و هم GM منفی شده، بنابراین می توان گفت سیستم ناپایدار می باشد.

$$GH(s) = \frac{4a^2}{(s+a)^2}$$

پرسش چهارم

برای محاسبه GM ، باید فاز سیستم رو برابر -180 قرار بدیم و با بدست آوردن فرکانس گذر فاز (ω_p) و جایگذاری ، مقدار حد بهره را بدست آوریم.

$$G(j\omega) = \frac{4a^2}{(j\omega+a)^2} \rightarrow \angle G(j\omega) = 0 - 2\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right) = -180 \rightarrow \arctan\left(\frac{\omega}{a}\right) = 90$$

$$\rightarrow \frac{\omega}{a} = \infty \rightarrow \omega_p = \infty \rightarrow$$ بنابراین سیستم حد بهره (GM) ندارد.

$\omega_p = \infty \rightarrow$ (-180) را قطع نمی کند $\Rightarrow GM = \infty$

برای محاسبه PM ، باید اندازه تابع تبدیل سیستم را برابر یک ($0\,dB$) قرار داده و با بدست آوردن فرکانس گذر بهره (ω_c) و جایگذاری ، مقدار حد فاز را بدست آوریم.

$$|G(j\omega)| = \left|\frac{4a^2}{-\omega^2 + j2a\omega + a^2}\right| = \frac{4a^2}{\sqrt{(a^2-\omega^2)^2 + 4a^2\omega^2}} = 1 \rightarrow 4a^2 = \sqrt{(a^2-\omega^2)^2 + 4a^2\omega^2} \rightarrow$$

$$4a^2 = \sqrt{a^4+\omega^4-2a^2\omega^2+4a^2\omega^2} = \sqrt{a^4+2a^2\omega^2+\omega^4} \Rightarrow 4a^2 = \sqrt{(a^2+\omega^2)^2} \Rightarrow 4a^2 = a^2+\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = 3a^2 \rightarrow \boxed{\omega_c = \sqrt{3}a}$$

$$\rightarrow PM = 0 - 2\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)\Big|_{+180} = 0 - 2\arctan\left(\frac{\sqrt{3}a}{a}\right) + 180 \Rightarrow -2\times 60 + 180 = 60 \rightarrow PM > 0$$

$$\boxed{PM = 60^\circ}$$

سیستم به خاطر شیب بهره بزرگ و $PM>0$ پایدار است.