دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکدهٔ مهندسی برق

درس سیستم های کنترل خطی

استاد: دکتر حمیدرضا تقی راد

پاسخ تمرین سری چهارم

نام و نام خانوادگی	حامد باغستانی
شمارهٔ دانشجویی	۴۰۱۱۶۱۴۳
تاریخ	آذر ۱۴۰۳

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فهرست جداول

فهرست برنامه‌ها

۱ پرسش یک

با رسم نمودار Nyquist، نشان دهید یک سیستم با تابع تبدیل حلقه باز زیر ناپایدار است.

$$G(s) = \frac{k}{s(-1+Ts)} \tag{۱}$$

۱.۱ پاسخ پرسش یک

فرم استاندارد آن به صورت زیر می‌باشد:

$$G(s) = \frac{-k}{s(-Ts+1)} \tag{۲}$$

با قرار دادن s = jw داریم:

$$G'(jw) = \frac{-1}{(jw)(-Tjw+1)} = \frac{-1}{Tw^2+jw} \cdot \frac{Tw^2-jw}{Tw^2-jw} = \frac{-Tw^2+jw}{T^2w^4+w^2} \tag{۳}$$

بخش حقیقی و موهومی به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\mathrm{Re} = \frac{-Tw^2}{T^2w^4+w^2} = \frac{-T}{T^2w^2+1} \tag{۴}$$

$$\mathrm{Im} = \frac{w}{T^2w^4+w^2} = \frac{1}{T^2w^3+w} \tag{۵}$$

اگر $\omega \to 0$:

$$\mathrm{Re} = -T, \quad \mathrm{Im} \to \infty \tag{۶}$$

اگر $\omega \to \infty$:

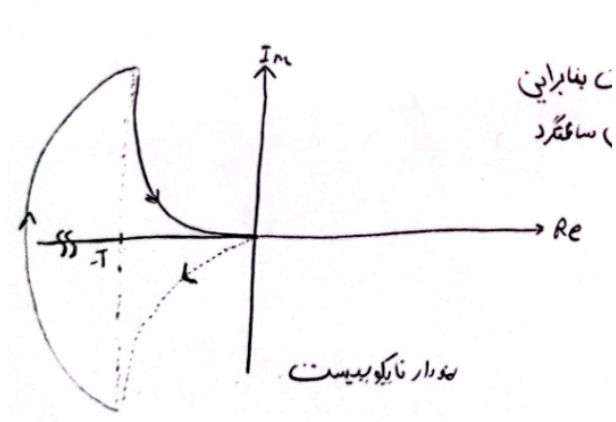
$$\mathrm{Re} = 0, \quad \mathrm{Im} = 0 \tag{۷}$$

برخورد با محور حقیقی:

$$\mathrm{Im} = 0 \implies \frac{1}{T^2w^3+w} = 0 \implies w = \infty \tag{۸}$$

در نتیجه در بی‌نهایت با محور حقیقی برخورد می‌کند (در واقع با محور حقیقی، برخوردی ندارد).

یک قطب در محور jw داریم و چون جهت حرکت آن پادساعتگرد است، نگاشت همدیس آن به صورت نیم‌دایره‌ای ساعتگرد خواهد بود.



شکل ۱: رسم نمودار نایکوییست با دست

با فرض $T > 0$، آنگاه یک قطب ناپایدار در سیستم حلقه باز خواهیم داشت، پس $P = 1$ می‌باشد.
برای این که حاصل عبارت

$$Z = N + P \tag{۹}$$

برابر صفر شود، باید نمودار Nyquist، نقطه $-\frac{1}{k}$ را به صورت پادساعتگرد دور بزند تا $N = -1$ باشد و حاصل Z را صفر کند و سیستم پایدار شود.
اما در شکل بالا، اگر نقطه $-\frac{1}{k}$ را در سمت چپ محور jw انتخاب کنیم، آنگاه نمودار Nyquist آن را به صورت ساعتگرد دور خواهد زد که در این صورت:

$$N = 1 \quad \text{و در نهایت} \quad Z = 2 \tag{۱۰}$$

که مطلوب نیست.
همچنین اگر نقطه $-\frac{1}{k}$ در سمت راست محور jw انتخاب کنیم، آنگاه نمودار Nyquist، آن را دور نخواهد زد که در این صورت:

$$N = 0 \quad \text{و در نهایت} \quad Z = 1 \tag{۱۱}$$

پس در هیچ حالتی سیستم $G(s)$ پایدار نخواهد شد.

۲ پرسش دو

اگر حد بهره در سیستمی با فیدبک واحد و سیستم حلقه باز زیر:

$$G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+10)} \tag{۱۲}$$

برابر 1.1 باشد، خطای حالت ماندگار این سیستم به ورودی $(t+1.1)u(t)$ چقدر خواهد بود؟

۱.۲ پاسخ پرسش دو

حد بهره: 1.1

$$G(s) = \frac{0.1k}{s(s+1)(0.1s+1)} \tag{۱۳}$$

قرار دادن $s = jw$:

$$G(jw) = \frac{0.1k}{jw(1+jw)(1+jw/10)} \tag{۱۴}$$

محاسبه حد بهره:

$$G(jw) = -180 \implies 0 - (\arctan(w/0) + \arctan(w) + \arctan(w/10)) \tag{۱۵}$$

$$90 = \arctan(w) + \arctan(w/10) \tag{۱۶}$$

با حدس و جایگذاری خواهیم داشت:

$$w = \sqrt{10} \approx 3.162 \tag{۱۷}$$

مقدار $|G(jw)|$ برای $w = 3.162$:

$$|G(jw)| = \frac{k}{3.162} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(3.162^2)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{100+(3.162^2)}} = A \tag{۱۸}$$

$$A = 0.0091k \implies GM = \frac{1}{A} = 1.1 \implies \frac{1}{0.0091k} = 1.1 \implies k = 99.90 \approx 100 \tag{۱۹}$$

پس برای داشتن حد بهره 1.1، باید $k = 100$ باشد:

$$G(s) = \frac{100}{s(s+1)(s+10)} \tag{۲۰}$$

ورودی اعمال شده شامل شیب و پله است، پس خطای ماندگار به هرکدام را به صورت جداگانه حساب و سپس باهم جمع می‌کنیم:

$$(t+1.1)u(t) = tu(t) + 1.1u(t) \tag{۲۱}$$

– خطای ماندگار به ورودی پله: چون سیستم تیپ یک است (به خاطر وجود s در مخرج)، خطای ماندگار به ورودی پله صفر می‌باشد:

$$\mathrm{ess}_1 = 0 \tag{۲۲}$$

– خطای ماندگار به ورودی شیب:

$$k_v = \lim_{s \to 0} sG(s) = \frac{100}{(1)(10)} = 10 \tag{۲۳}$$

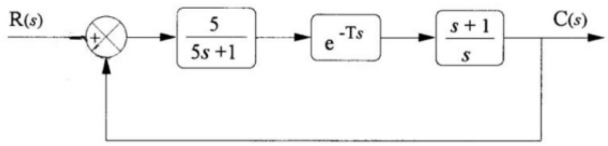
$$\mathrm{ess}_2 = \frac{1}{k_v} = 0.1 \tag{۲۴}$$

بنابراین خطای ماندگار به ورودی $(t+1.1)u(t)$:

$$\mathrm{ess} = \mathrm{ess}_1 + \mathrm{ess}_2 = 0 + 0.1 \implies \mathrm{ess} = 0.1 \tag{۲۵}$$

۳ پرسش سه

سیستم کنترلی نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. برای $T = 2s$، نمودار Bode تابع تبدیل سیستم را رسم کنید. پاسخ خود را با استفاده از MATLAB نیز رسم کنید.



شکل ۲: بلوک دیاگرام پرسش سه

۱.۳ پاسخ پرسش سه

$$G(s) = \frac{5(s+1)e^{-2s}}{(5s+1)s} \tag{۲۶}$$

:Euler

$$G(jw) = \frac{5(jw+1)}{(5jw+1)jw} \cdot (\cos(2w) - j\sin(2w)) \tag{۲۷}$$

می‌دانیم $|e^{-Ts}|$ برابر یک می‌باشد و چون نمودار اندازه Bode را بر حسب log رسم می‌کنیم ($\log(1) = 0$)، بنابراین سیستم تأخیر در اندازه تأثیری ندارد. اما این سیستم تأخیر روی فاز تأثیر قابل توجهی دارد؛ به طوری که به صورت یک خط با شیب $[-Tw]$ در نمودار فازی Bode ظاهر می‌شود.

پس در فرکانس‌های خیلی کم، در فاز کلی سیستم تأثیری ندارد، اما زمانی که $w \to \infty$ میل کند، تأثیر بسزایی روی فاز سیستم خواهد گذاشت تا جایی که می‌تواند یک سیستم پایدار را ناپایدار کند.

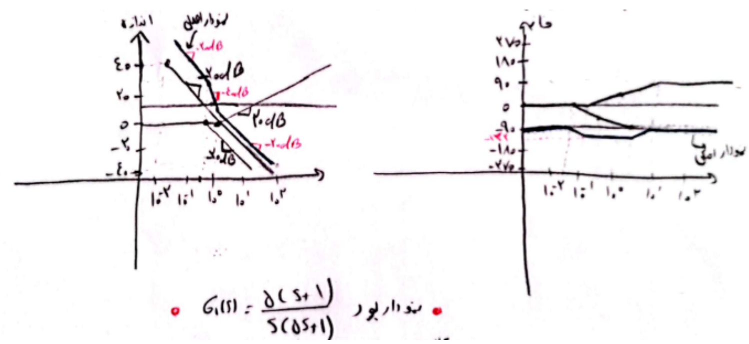
برای رسم نمودار Bode سیستم $G(s)$، ابتدا نمودار Bode تابع زیر را رسم می‌کنیم:

$$G_1(s) = \frac{5(s+1)}{s(5s+1)} \tag{۲۸}$$

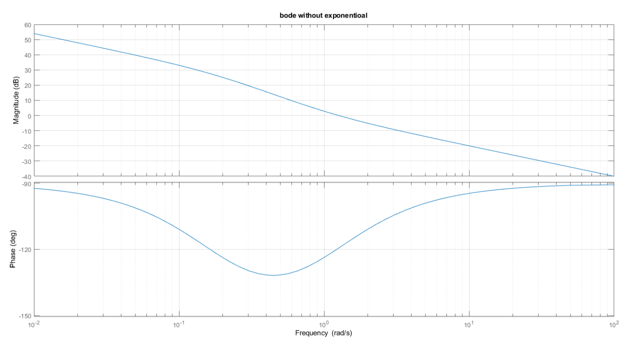
سپس از روی آن، نمودار Bode تابع $G(s)$ را ترسیم می‌کنیم. مقدار $20\log(5)$ تقریباً برابر 14 است.

با توجه به توضیحات قبل، نمودار Bode تابع $G(s) = \frac{5(s+1)e^{-2s}}{(5s+1)s}$ را رسم می‌کنیم. نکته: تأثیر بخش تأخیر بر فاز (بر حسب درجه) عبارت است از:

$$-2 \cdot w \cdot \frac{180}{\pi} \tag{۲۹}$$



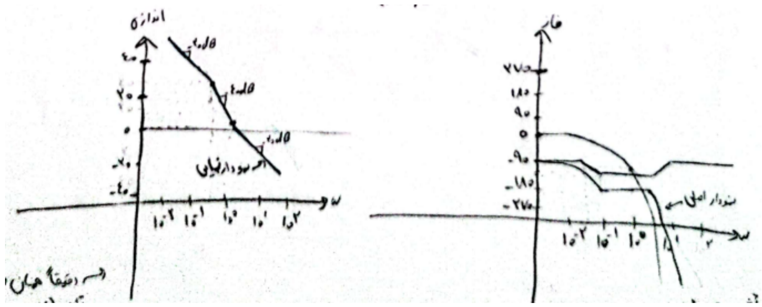
شکل ۳: نمودار بود رسم شده با دست پرسش سه



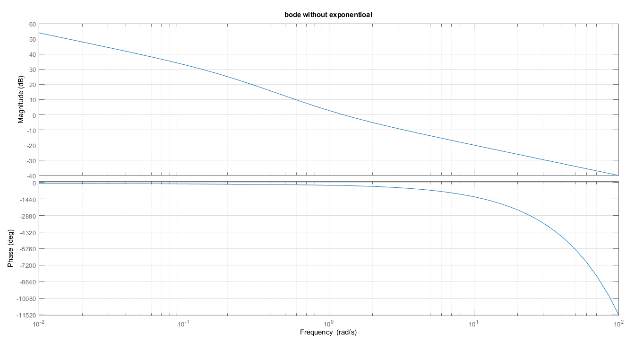
شکل ۴: نمودار بود رسم شده با متلب پرسش سه

کد آن در متلب به صورت زیر خواهد بود :

```
clc;
clear all;
close all;

s=tf('s');
num =5*(s+1)*exp(-2*s);
num1 =5*(s+1);
den=s*(5*s+1);
sys=num/den;
sys1=num1/den;
display(sys);
display(sys1);

figure
bode(sys);
```



شکل ۵: نمودار بود G(s) رسم شده با دست پرسش سه



شکل ۶: نمودار بود G(s) رسم شده با متلب پرسش سه

```
set(findall(figure(1),'type','line','linewidth',2))
title('bode with exponentioal');
grid on
figure
bode(sys1);
set(findall(figure(1),'type','line','linewidth',2))
title('bode without exponentioal');
grid on
% figure
% nyquist(sys);
% set(findall(figure(2),'type','line','linewidth',2))
% title('nyquist with exponentioal');
% figure
% nyquist(sys1);
% set(findall(figure(2),'type','line','linewidth',2))
% title('nyquist without exponentioal');
```

```
% grid on
```

Code 1: Complete code

۴ پرسش چهار

تابع تبدیل سیستمی به صورت زیر است:

$$G(s) = \frac{-(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}{s^3(s+100)} \quad (۳۰)$$

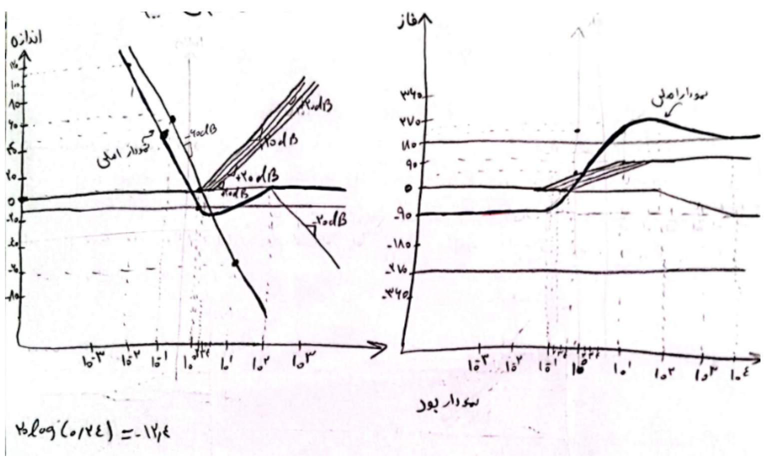
نمودار Nyquist این سیستم را رسم کنید. با استفاده از MATLAB نمودار را رسم کرده و درستی پاسخ خود را مقایسه کنید.

۱.۴ پاسخ پرسش چهار

ابتدا تابع تبدیل را به صورت فرم استاندارد می‌نویسیم:

$$G(s) = \frac{-0.24(s+1)(0.5s+1)(\frac{s}{3}+1)(0.25s+1)}{s^3(0.01s+1)} \quad (۳۱)$$

ابتدا نمودار Bode تابع بالا را رسم می‌کنیم و سپس از روی آن، نمودار Nyquist آن را ترسیم می‌کنیم. (مقدار $20\log(0.24)$ تقریباً برابر -12.4 است.)

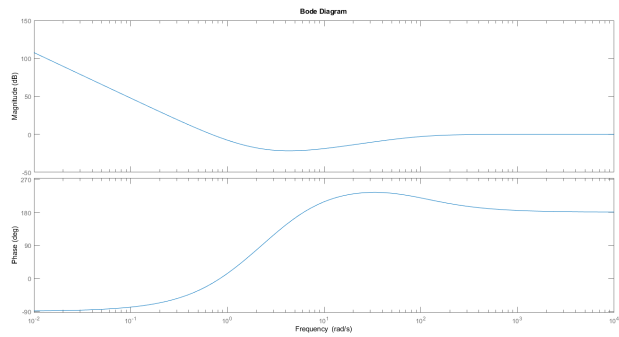


شکل ۷: نمودار بود رسم شده با دست پرسش چهار

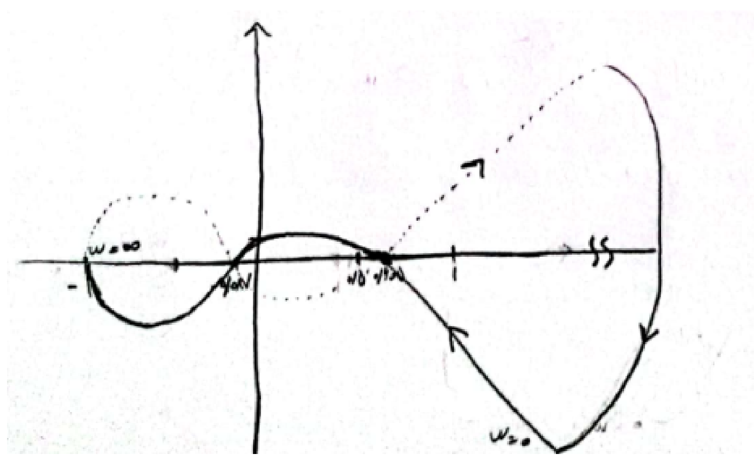
$$-2 \cdot w \cdot \frac{180}{\pi} \quad (۳۲)$$

$$G(jw) = \frac{-(jw+1)(jw+2)(jw+3)(jw+4)}{-jw^3(jw+100)} \quad (۳۳)$$

$$G(jw) = \frac{-w^4 + j10w^3 + 35w^2 - j50w - 24}{w^4 - j100w^3} \cdot \frac{w^4 + j100w^3}{w^4 + j100w^3} \quad (۳۴)$$



شکل ۸: نمودار بود رسم شده با متلب پرسش چهار



شکل ۹: نمودار نایکوییست رسم شده با دست پرسش چهار

$$G(jw)=\frac{-w^8-j90w^7-965w^6+j3450w^5+4976w^4-j2400w^3}{w^8+10^4w^6} \quad (۳۵)$$

$$G(jw)=\frac{-w^5-j90w^4-965w^3+j3450w^2+4976w-j2400}{w^5+10^4w^3} \quad (۳۶)$$

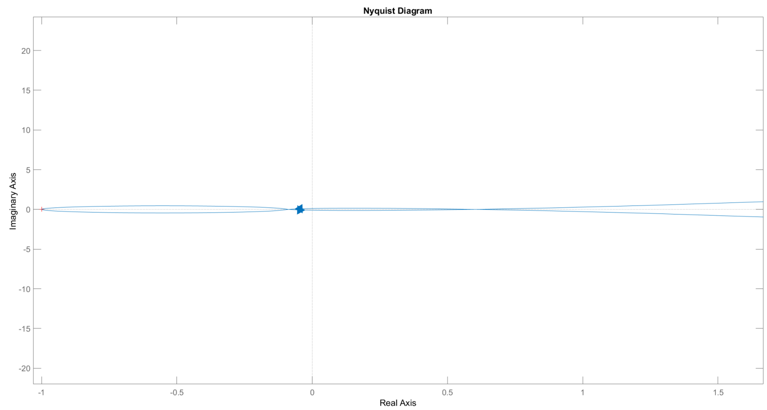
بنابراین:

$$G(jw)=\frac{-w^5-965w^3+4976w-j(+90w^4-3450w^2+2400)}{w^5+10^4w^3} \quad (۳۷)$$

حالت‌های حدی:

- اگر $w\to 0$:

$$Re=+\infty, \qquad Im=-\infty \quad (۳۸)$$



شکل ۱۰: نمودار نایکوییست رسم شده با متلب پرسش چهار

- اگر $w \to \infty$:

$$Re = -1, \quad Im = 0 \tag{۳۹}$$

محاسبه مقادیر حقیقی برای $Im = 0$:

$$+90w^4 - 3450w^2 + 2400 = 0 \tag{۴۰}$$

با استفاده از MATLAB مقادیر w به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$w_1 = -6.134, \quad w_2 = 6.134, \quad w_3 = -0.842, \quad w_4 = 0.842 \tag{۴۱}$$

مقادیر حقیقی متناظر:

$$Re_1 = -0.087, \quad Re_2 = -0.087, \quad Re_3 = 0.605, \quad Re_4 = 0.605 \tag{۴۲}$$

مقایسه پاسخ: در MATLAB نمی‌توان نمودارهای Nyquist درست و کاملی را برای زمان‌هایی که قطب روی محور jw داریم، ترسیم کرد. به همین دلیل، نمودارهای Nyquist به دلیل رسم نشدن بخش مربوط به بی‌نهایت کمی تفاوت دارند. با این حال، نمودارهای Bode مشابه یکدیگر هستند.

کد آن در متلب به صورت زیر خواهد بود :

```
%Hamed Baghestani
%40116143
%soal4
clc;
clear all;
```

```
close all;

s=tf('s');
num=-1*conv(conv([1 3],[1 4]),[1 3 2]);
den=[1 100 0 0 0];
 sys=tf(num,den);
display(sys);

figure
grid on
bode(sys);
set(findall(figure(1),'type','line','linewidth',2))
figure
nyquist(sys);
set(findall(figure(2),'type','line','linewidth',2))
grid off
```

Code 2: Complete code

کد مربوط به نحوه محاسبه محل برخورد با محور حقیقی :

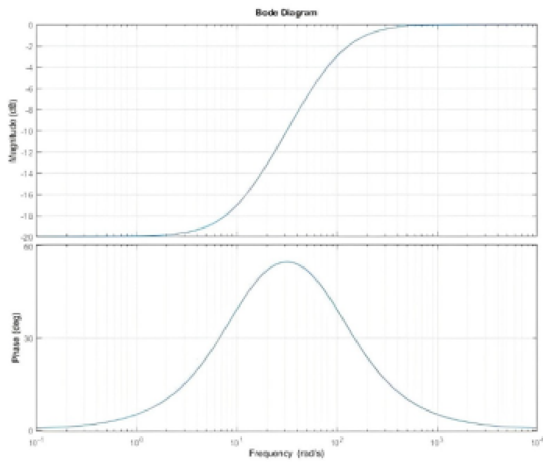
```
clc;
clear all;
close all;
s=tf('s');
num=-1*conv(conv(conv([i 3],[i 4]),[-1 3*i 2]),[1 100*i 0 0 0]);
den=[1];
sys = tf(num,den);

w=0.842;
% w=6.134;
```

```
y=(-1*w^5 -965*w^3 +4976*w)/(w^5 + 10000*w^3)
% y=-i*(90*w^4 -3450*w^2 +2400)/(w^5 + 10000*w^3)
% y=w^2+2*w+1
```

Code 3: Complete code

۵ پرسش پنجم

تابع تبدیل سیستمی که نمودار بودی آن در شکل زیر داده شده است را بیابید. تحلیل خود از نمودار را بنویسید. همچنین، رسم نمودار نایکوییست را بر اساس نمودار بود انجام دهید. مطمئن شوید جهت افزایش w —> 0+, 0-, +infinite, -infinite را نیز برچسب‌گذاری کنید.



شکل ۱۱: بلوک دیاگرام پرسش پنجم

۱.۵ پاسخ پرسش پنجم

تحلیل نمودار : در ابتدا احتمالا یک سیستم مرتبه اول PD داریم چرا که در ابتدا فاز افزایش یافته است. همچنین چون مقدار اندازه از -20 شروع شده، مقدار k می‌تواند 0.1 یا 10^{-1} باشد. با توجه به این که دو نقطه‌ی شکست در نمودار بود دیده می‌شود، پس تابع تبدیل ما نیز دارای ۲ عامل از مواردی که قبلا با آن آشنا شدیم، می‌باشد. چون از یک جایی به بعد مقدار دامنه و فاز کم شده است، پس یک سیستم lag پایدار نیز خواهیم داشت. به این دلیل که نمودار دامنه و هم فاز به اندازه 10 تا به راست شیفت پیدا کرده‌اند، پس هم سیستم PD و هم سیستم lag باید طوری ضریب‌دهی شوند که ثابت زمانی آن‌ها برابر 0.1 بوده تا نمودار به اندازه $1/\tau$ یا 10 تا به راست شیفت پیدا کند. از قبل نیز می‌دانیم که باتوجه به نمودارها، سیستم lag نسبت به PD، 10 ثانیه تاخیر دارد.

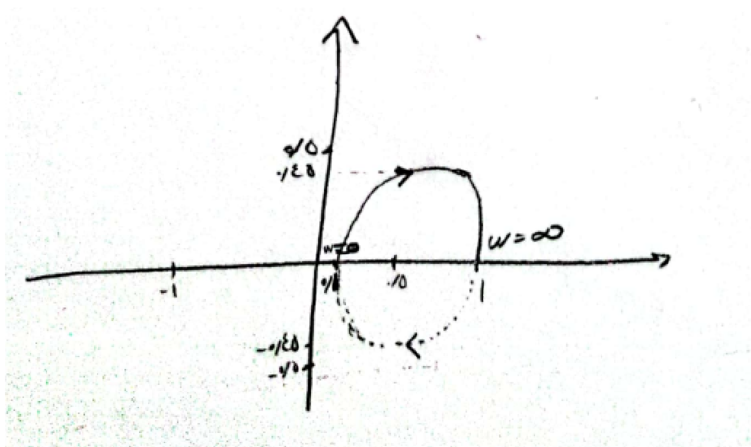
$$G(s) = \frac{0.1(s+10)}{0.1s+10} = \frac{s+10}{s+100} \tag{۴۳}$$

$$G(jw) = \frac{jw+10}{jw+100} \tag{۴۴}$$

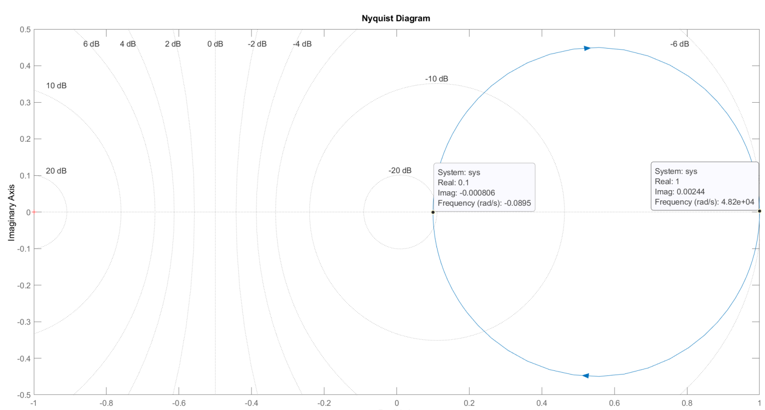
$$\text{if} w \to 0 \Rightarrow G(jw) = \frac{1}{10} \tag{۴۵}$$

$$\text{if} w \to \infty \Rightarrow G(jw) = 1 \tag{۴۶}$$

رسم نمودار نایکوییست :



شکل ۱۲: نمودار نایکوییست رسم شده با دست پرسش پنجم



شکل ۱۳: نمودار نایکوییست رسم شده با متلب پرسش پنجم

کد آن در متلب به صورت زیر خواهد بود :

```
%Hamed Baghestani
%40116143
%soal4clc;
clear all;
```

```
close all;

num=0.1*[1 10];
den=[0.1 10];
sys=tf(num,den);
display(sys);

figure
bode(sys);
set(findall(figure(1),'type','line','linewidth',2))
xlim([0.1 10000]);
grid on
figure
nyquist(sys);
set(findall(figure(2),'type','line','linewidth',2))
grid on
```

Code 4: Complete code