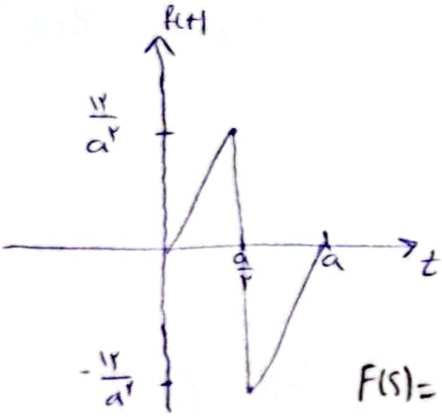
به نام خدا

تمرین ۱ سیستم‌های کنترل خطی

حامد بهستانی (۴۰۱۱۶۱۴۲)

۱)



$$f(t)=\begin{cases}\frac{24}{a^3}t & 0\le t\le \frac{a}{2}\\ \frac{24}{a^3}(t-a) & \frac{a}{2}\le t\le a\end{cases}$$

$$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$F(s)=\int_0^{a} f(t)e^{-st}dt=\int_0^{a/2}\frac{24}{a^3}t\,e^{-st}dt+\int_{a/2}^{a}\left(\frac{24}{a^3}t-\frac{24}{a^2}\right)e^{-st}dt$$

$$=\frac{24}{a^3}\int_0^{a/2}te^{-st}dt+\frac{24}{a^3}\int_{a/2}^{a}te^{-st}dt-\frac{24}{a^2}\int_{a/2}^{a}e^{-st}dt\Rightarrow$$

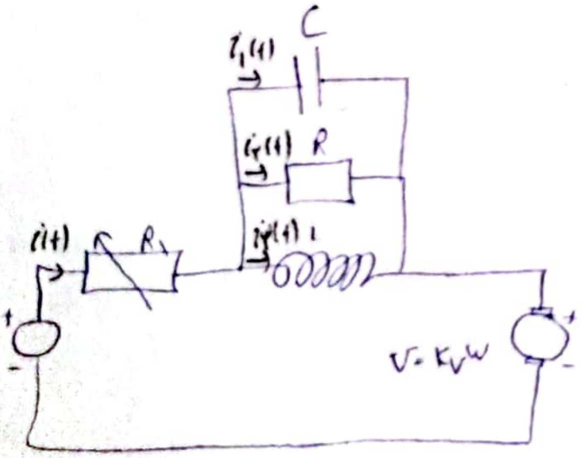
مشتق	انتگرال
t	e^{-st}
1	$-\frac{1}{s}e^{-st}$
0	$\frac{1}{s^2}e^{-st}$

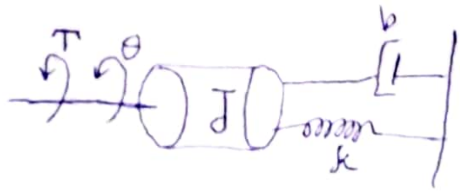
$$F(s)=\frac{24}{a^3}\left[-\frac{t}{s}e^{-st}-\frac{1}{s^2}e^{-st}\right]_0^{a/2}+\frac{24}{a^3}\left[-\frac{t}{s}e^{-st}-\frac{1}{s^2}e^{-st}\right]_{a/2}^{a}+\frac{24}{a^2}\times\frac{1}{s}\left(e^{-st}\right]_{a/2}^{a}$$

$$\Rightarrow F(s)=\frac{24}{a^3}\left(-\frac{a}{2s}e^{-s\frac{a}{2}}-\frac{1}{s^2}e^{-s\frac{a}{2}}+\frac{1}{s^2}\right)+\frac{24}{a^3}\left(-\frac{a}{s}e^{-as}-\frac{1}{s^2}e^{-as}+\frac{a}{2s}e^{-s\frac{a}{2}}+\frac{1}{s^2}e^{-s\frac{a}{2}}\right)+\frac{24}{a^2}\left(\frac{1}{s}e^{-sa}-\frac{1}{s}e^{-s\frac{a}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow F(s)=\frac{1}{s^2}\times\frac{24}{a^3}-\frac{1}{s^2}\times\frac{24}{a^3}e^{-as}-\frac{1}{s}\times\frac{24}{a^2}e^{-s\frac{a}{2}}\Rightarrow F(s)=\frac{24}{a^3}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2}e^{-as}-\frac{a}{s}e^{-\frac{as}{2}}\right)$$

۲)





$$v_C=v_L\Rightarrow\frac{1}{C}\int i_1(t)dt=L\frac{di_3(t)}{dt}\ \xRightarrow{\text{مشتق می‌گیریم}}$$

$$i(t)=i_1(t)+i_2(t)+i_3(t)$$

$$\frac{1}{C}i_1(t)=L\frac{d^2i_3(t)}{dt^2}\Rightarrow i_1(t)=LC\frac{d^2i_3(t)}{dt^2}$$

۳)

$$V_R=V_L\Rightarrow Ri_2(t)=L\frac{di_3(t)}{dt}\Rightarrow i_2(t)=\frac{L}{R}\frac{di_3(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow i(t)=LC\frac{d^2i_3(t)}{dt^2}+\frac{L}{R}\frac{di_3(t)}{dt}+i_3(t)\quad \text{I}$$

$$\text{KVL}:\ V(t)=R_1i(t)+L\frac{di_3(t)}{dt}+K_Vw(t)\ \xRightarrow{\text{I}}\ V(t)=R_1LC\frac{d^2i_3(t)}{dt^2}+\frac{LR_1}{R}\frac{di_3(t)}{dt}$$

$$+R_1i_3(t)+L\frac{di_3(t)}{dt}+K_Vw(t)$$

$T=J\ddot{\theta}$ برای جرم با گرانش دورانی داریم:

$T=K\theta$ داریم: برای فنر پیچشی θ_T

$T=B\dot{\theta}$ نکته: برای دمپرهای چرخشی داریم:

$T = J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + K\theta$ $\qquad\qquad T_m = K_m(i(s))$ (II)

$$\overset{II}{\Rightarrow} T = K_m i(t) = J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + K\theta \overset{\mathcal{L}}{\Rightarrow} K_m i(s) = JS^2\theta(s) + BS\theta(s) + K\theta(s)$$

$$\xrightarrow{\theta(s)=\frac{1}{s}w(s)} K_m i(s) = JSw(s) + Bw(s) + \frac{K}{s}w(s) \quad \text{(III)}$$

$$i(s) = \left(LCS^2 + \frac{L}{R}S + 1\right) i_3(s) \quad \text{(IV)}$$

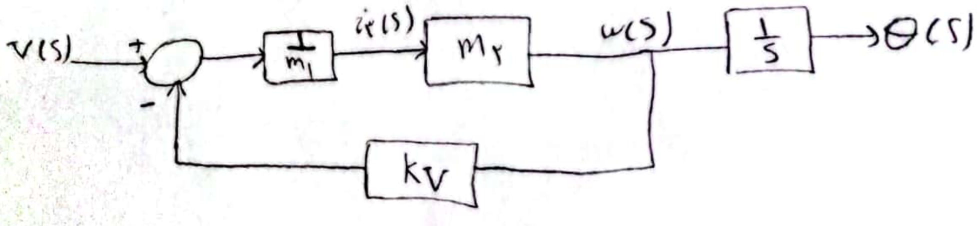
$$\xrightarrow{\text{III},\,\text{IV}} K_m\left(LCS^2 + \frac{L}{R}S + 1\right) i_3(s) = \left(JS + B + \frac{K}{S}\right) w(s) \Rightarrow$$

$$\underbrace{\frac{K_m S}{JS^2 + BS + K}\left(LCS^2 + \frac{L}{R}S + 1\right)}_{m_2} i_3(s) = w(s) \Rightarrow i_3(s) = \frac{1}{m_2} w(s) \quad (*)$$

$$v(s) = i_3(s)\ \underbrace{\left[R_1 LCS^2 + \frac{LR_1}{R}S + R_1 + LS\right]}_{m_1} + K_v w(s) \Rightarrow v(s) = m_1 i_3(s) + K_v w(s) \quad (**)$$

$$\begin{cases} i_3(s) = \frac{1}{m_2} w(s) \\ v(s) = m_1 i_3(s) + K_v w(s) \end{cases}$$

ب)



ضرایب m_1 و m_2 در بالا معرفی شده اند.

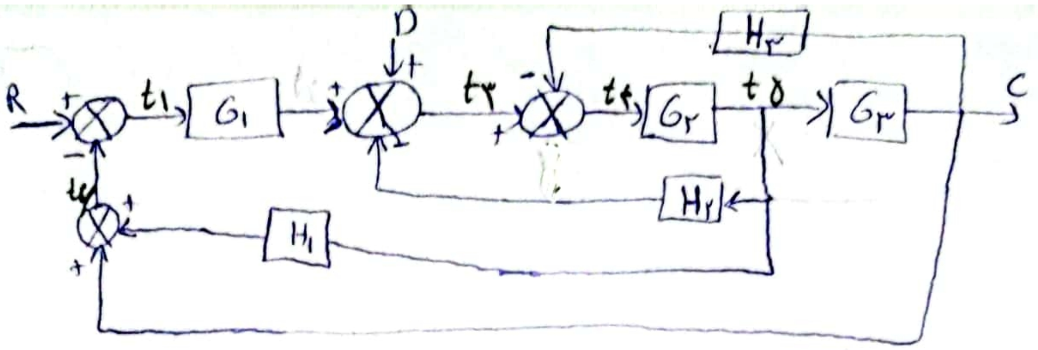
ج) اگر مقاومت متغیر باشد، آنگاه سیستم دیگر LTI نخواهد بود، بنابراین نمی توان برای آن تابع تبدیلی نوشت.

$$H(s) = \frac{\theta(s)}{v(s)} = \frac{\dfrac{K_m}{\left(R + \frac{RLS}{CLRS^2 + LS + R}\right)(JS^2 + bS + K)}}{1 + \dfrac{SK_v K_m}{\left(\frac{RLS}{CLRS^2 + LS + R}\right)(JS^2 + bS + K)}}$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{K_m}{\left(R_1 + \frac{RLS}{CLRS^2 + LS + R}\right)(JS^2 + bS + K) + (SK_v K_m)}$$

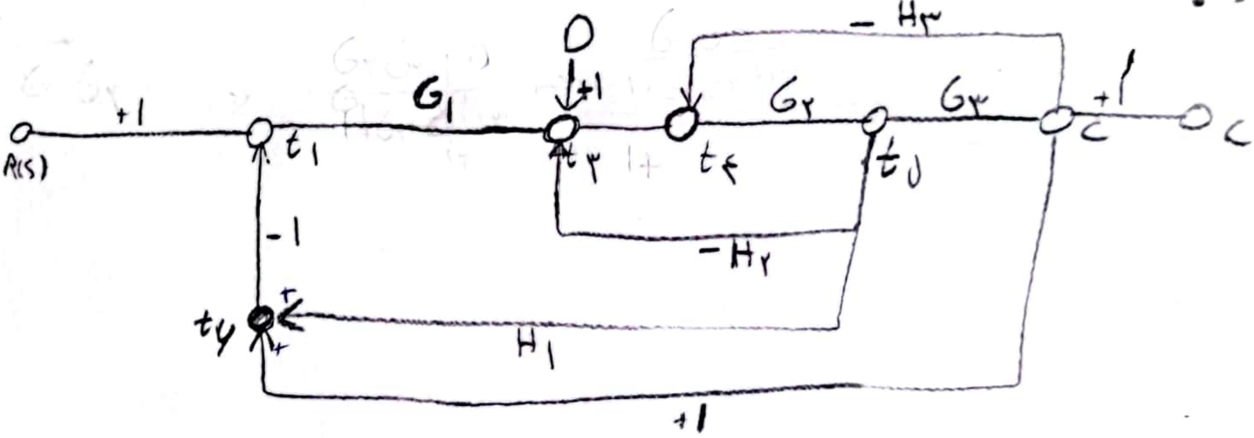
$$\frac{\theta(s)}{R_1(s)} = \frac{\theta(s)}{V(s)} \frac{V(s)}{R_1(s)} = \frac{K_M}{R_1 s\left(R_1 + \frac{RLs}{CLRs^2+Ls+R}\right)(Js^2+bs+K)+sK_V K_M}$$

(ب

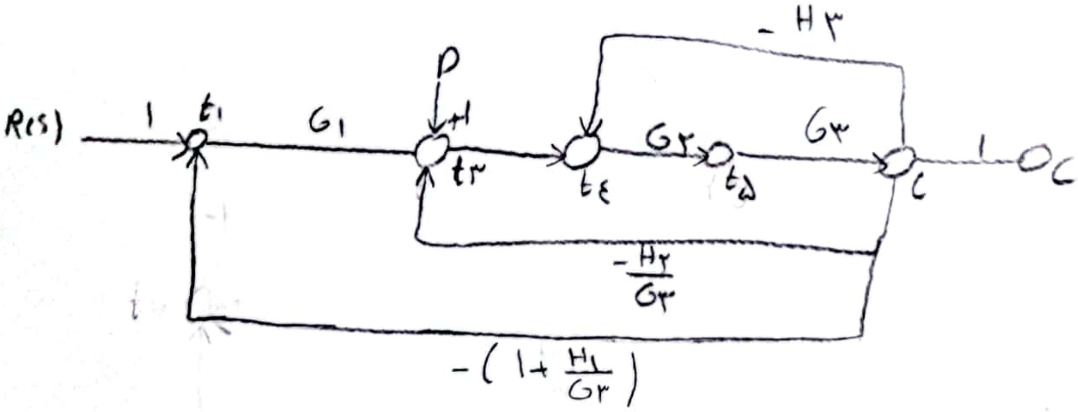


(آ

نمودار SFG :



ساده سازی :



یک مسیر پیشرو : $M_1 = G_1 G_2 G_3$

۳ حلقه مستقل : $L_{11} = -G_1 G_2 G_3 \left(1 + \frac{H_1}{G_3}\right) = -G_1 G_2 G_3 - G_1 G_2 H_1$

$$L_{22} = -G_2 G_3 \left(\frac{H_2}{G_3}\right) = -G_2 H_2 \qquad L_{33} = -G_2 G_3 H_3$$

فاقد جفت حلقه‌ی مستقل و ... می‌باشد

$$\Delta_1 = 1$$

$$\Delta = 1 - (L_{11} + L_{22} + L_{33}) \Rightarrow \Delta = 1 + G_1 G_2 G_3 + G_1 G_2 H_1 + G_2 H_2 + G_2 G_3 H_3$$

$$Y(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{M_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 G_3 + G_1 G_2 H_1 + G_2 H_2 + G_2 G_3 H_3}$$

ب)

حلقه های مستقل مشابه قسمت الف می‌باشد.

$$G(s) = \frac{C(s)}{D(s)}$$

یک مسیر پیشرو : $M_1' = G_2 G_3 \qquad \Delta_1 = 1$

$$G(s) = \frac{C(s)}{D(s)} = \frac{G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 G_3 + G_1 G_2 H_1 + G_2 H_2 + G_2 G_3 H_3}$$

باید حاصل عبارت $\frac{Y(s)}{G(s)}$ برابر ∞ شود:

$$\frac{Y(s)}{G(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3}{G_2 G_3} = G_1$$

پس G_1 باید افزایش یابد تا اثر اغتشاش از بین برود.

در واقع برای از بین بردن اثر اغتشاش هم می‌توان $G_2 G_3 = 0$ قرار داد یا G_1 را به اندازه کافی افزایش دهیم، راه حل اول یعنی صفر کردن $G_2 G_3 = 0$ نادرست می‌باشد چرا که در این صورت به طور کل ارتباط بین ورودی و خروجی قطع می‌شود. اما راه حل دوم منطقی است چرا که با افزایش مقدار G_1، تأثیر ورودی نیز به همین مقدار افزایش می‌یابد اما مقدار تأثیر اغتشاش تغییری نمی‌کند؛ پس با افزایش مقدار G_1 می‌توان تأثیر اغتشاش را از بین برد.