«به نام خدا»

HW2 - سیستم های کنترل خطی

حامد باستانی (۴۰۱۱۶۱۴۳)

1)

$T(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ ۲٪ : معیار زمان نشست ⇒ $t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$

$\%MP = 100 e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = 44.3 \Rightarrow e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.443 \xrightarrow{\ln} \frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.814 \Rightarrow$

$\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.259 \Rightarrow \frac{\zeta^2}{1-\zeta^2} = 0.067 \Rightarrow \zeta^2 + 0.067\zeta^2 = 0.067 \Rightarrow$

چون باید $0<\zeta<1$ قرار داشته باشد

$\zeta^2 = \frac{0.067}{1.067} \Rightarrow \zeta = \pm\sqrt{0.063}$

$\zeta = 0.251$ ✓

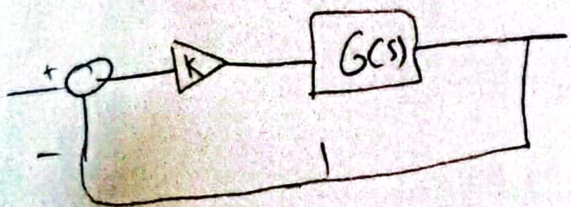
$\zeta = -0.251$ ✗

$\Rightarrow \boxed{\zeta \simeq 0.25}$

$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 1.41 \Rightarrow \frac{4}{0.25\omega_n} = 1.41 \Rightarrow \omega_n = \frac{16}{1.41}$

$\Rightarrow \boxed{\omega_n \simeq 11.348}$

نکته: اگر از روی زمان مراجعش (t_p) به محاسبه ω_n بپردازیم طبق رابطه $t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$ ، مقدار ω_n تقریباً 9.773 بدست خواهد آمد.



$\frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{k\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \Rightarrow$

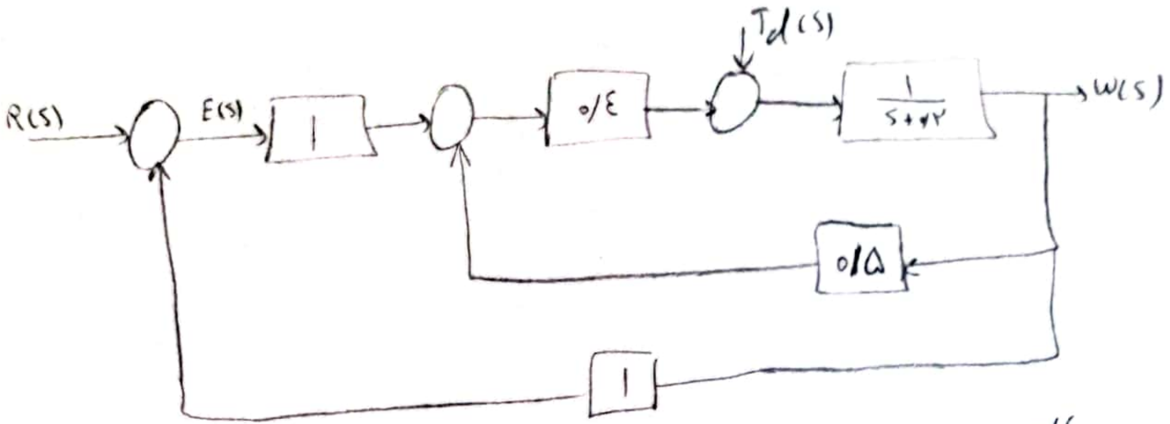
$k\omega_n^2 + L(s)k\omega_n^2 = (s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)L(s) \Rightarrow k\omega_n^2 = (s^2+2\zeta\omega_n s+(1-k)\omega_n^2)L(s)$

$\Rightarrow L(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+(1-k)\omega_n^2} = \frac{203.5}{s^2+5.67s-74.69}$

$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\times\frac{k\omega_n^2}{\cancel{s}[s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2]} = 1.58 \Rightarrow \frac{k\omega_n^2}{\omega_n^2} = \boxed{k=1.58}$

مقایسه سیستم حلقه باز و حلقه بسته: مطابق آنچه در شکل خروجی پاسخ پله هریک از توابع تبدیل می‌بینیم، متوجه می‌شویم پاسخ پله سیستم حلقه باز ناپایدار و اما پاسخ پله سیستم حلقه بسته پایدار است و در نهایت به یک مقدار ثابت میل خواهد کرد.

٢) الف)



حلقه باز : $\begin{cases} T_d(s)=0 \\ \frac{W(s)}{R(s)} \\ L(s) \end{cases}$

$$\text{step 1}: \frac{٠/٤}{S+٠/٢} \quad , \quad \text{Step 2}: \frac{\frac{٠/٤}{S+٠/٢}}{1+\frac{٠/٢}{S+٠/٢}} = \frac{٠/٤}{S+٠/٤}$$

$$\text{Step 3}: \frac{٠/٤}{S+٠/٤} \times 1 \qquad \underset{\text{حلقه باز}}{L(S)} = \frac{W(S)}{R(S)} = \frac{٠/٤}{S+٠/٤}$$

حلقه بسته $\begin{cases} T_d(S)=0 \\ \frac{W(S)}{R(S)} \\ T(S) \end{cases}$

step 1 and 2 and 3 are same with the steps that come recently.

$$\text{Step 4}: \frac{\frac{٠/٤}{S+٠/٤}}{1+\frac{٠/٤}{S+٠/٤}} = \frac{٠/٤}{S+٠/٨}$$

$$\Rightarrow T(S) = \frac{W(S)}{R(S)} = \frac{٠/٤}{S+٠/٨}$$

ب)

مقایسه خطای حالت ماندگار و ثابت زمانی و زمان تأخیر و زمان نشست : همهٔ موارد ذکرشده در سیستم حلقه باز طبق داده های بدست آمده از متلب ۲ برابر این پارامترهای نظیر در سیستم حلقه بسته می باشند که این موضوع دور از انتظار نبوده است.

$$L(s) = K\frac{1}{s(s+4)} \xrightarrow{if\ K=16} L(s) = \frac{16}{s(s+4)}$$

③ الف)

سیستم روبه‌رو به خاطر وجود s در مخرج از تیپ یک می‌باشد:

می‌دانیم ، خطای ماندگار سیستم تیپ یک به ورودی پله برابر صفر می‌باشد؟

$$e_{ss} = 0$$

$$T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{\frac{16}{s^2+4s}}{1+\frac{16}{s^2+4s}} = \frac{16}{s^2+4s+16} \quad \text{مقایسه با} \quad \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$\Rightarrow \omega_n^2 = 16 \Rightarrow \boxed{\omega_n = 4} \qquad \cancel{2}\zeta\cancel{\omega_n}s = \cancel{4}s \Rightarrow \boxed{\zeta = 0.5}$$

سیستم فرومیرا می‌باشد.

$$\%Mp = 100\, e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = 100\, e^{-0.5\pi/\sqrt{1-0.25}} = 16.3\%$$

درصد فراجهش

$$0<\zeta<0.9 \Rightarrow t_s = \frac{3.2}{\zeta\omega_n} = \frac{3.2}{0.5\times 4} = 1.6$$

زمان نشست

ب)

روش ۱

$$T(s) = \frac{\frac{K}{s^2+4s}}{1+\frac{K}{s^2+4s}} \Rightarrow T(s) = \frac{K}{s^2+4s+K}$$

$$\%Mp = 100\, e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = 5\% \Rightarrow \zeta = 0.707$$

می‌دانیم

$$T(s) = \frac{K}{s^2+4s+K} \qquad \cancel{4}\cancel{s} = 2\times\zeta\omega_n\times \cancel{s} \Rightarrow \omega_n = 2.829$$

$$K = \omega_n^2 \Rightarrow K = (2.829)^2 \Rightarrow K = 8.0032 \Rightarrow K \simeq 8$$

روش 2

$$\%Mp = 100\, e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} = 5 \Rightarrow 0.05 = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \xrightarrow{Ln} Ln(0.05) = -\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \zeta = \sqrt{\frac{8.6472}{8.9472+\pi^2}} = 0.6932 \quad (I)$$

$$\zeta = \frac{2}{\sqrt{K}} \Rightarrow \zeta^2 = \frac{4}{K} \Rightarrow K = \frac{4}{\zeta^2} \xrightarrow{(I)} \boxed{K = 8.3242}$$

ج) شبیه‌سازی در متلب

با شبیه‌سازی خواهیم دید که K=8 تقریباً خواسته مسئله را برآورده کرده و overshoot آن برابر 4.46% خواهد شد اما مقدار دقیق K برای overshoot خواسته شده در سؤال یعنی 5% ، برابر 8.4 می‌باشد که این مقدار اختلاف به خاطر تقریب‌هایی است که در هنگام محاسبه K استفاده کرده‌ایم. البته با توجه به محاسبات می‌فهمیم روش دوم دقیق‌تر می‌باشد.

د) K=4

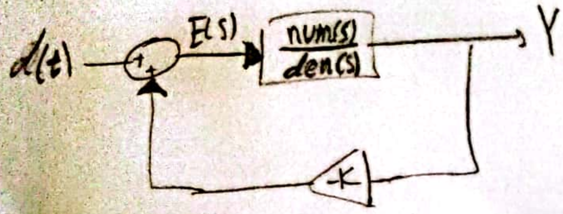
$$T(s) = \frac{\frac{4}{s^2+4s}}{1+\frac{4}{s^2+4s}} = \frac{4}{s^2+4s+4}$$

$$\omega_n^2 = 4 \Rightarrow \omega_n = 2$$

$$\cancel{4}\cancel{s} = 2\zeta\omega_n \cancel{s} \Rightarrow \zeta = 1$$

اگر ζ=1 باشد آنگاه میزان فراجهش برابر صفر خواهد بود چراکه در این صورت پاسخ از نوع میرایی مرزی است و بدون هیچ نوسانی به حالت ماندگار خود می‌رسد.

$R(t)=0$ ④ با توجه به اینکه خطای ماندگار آن به ورودی پله غیر صفر است پس سیستم تیپ صفر می باشد.



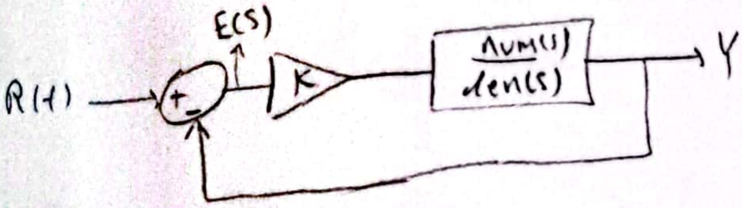
$$\frac{num(s)}{den(s)} = G(s) \qquad d(t) \xrightarrow{L} D(s)$$

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+KG(s)} \qquad E(s) = D(s) - KY(s)$$

$$E(s) = \frac{1}{s} - \frac{KG(s)}{s(1+KG(s))} = \frac{1+KG(s)-KG(s)}{s(1+KG(s))} = \frac{1}{s(1+KG(s))}$$

$$\underbrace{e_{ss}}_{\lim_{t\to\infty} e(t)} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+KG(s)} = -B$$

$d(t)=0$



$$L(s) = K\frac{num(s)}{den(s)} \qquad \frac{num(s)}{den(s)} = G(s)$$

$$T(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)} \qquad E(s) = R(s) - Y(s)$$

$$\rightarrow E(s) = \frac{1}{s} - \frac{KG(s)}{s(1+KG(s))} = \frac{1+KG(s)-KG(s)}{s(1+KG(s))} = \frac{1}{s(1+KG(s))}$$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s(1+KG(s))} = -B$$

⑤

$$e(t) \xrightarrow{L} E(s) \qquad \int_0^\infty e(t)\,dt \xrightarrow{L} \frac{1}{s}E(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t e(t)\,dt = \lim_{s\to 0} s\times\frac{1}{s}E(s) = E(0)$$

$$e(t) = u(t) - y(t) \xrightarrow{L} E(s) = \frac{1}{s} - Y(s)$$

$$Y(s) = T(s)X(s) = \frac{T(s)}{s} = \frac{\prod_{i=1}^{n}(A_i s+1)}{s\prod_{j=1}^{m}(B_j s+1)} \quad \text{if } m>n$$

$$E(s) = \frac{1}{s} - \frac{\prod_{i=1}^{n}(A_i s+1)}{s\prod_{j=1}^{m}(B_j s+1)} = \frac{\prod_{j=1}^{m}(B_j s+1) - \prod_{i=1}^{n}(A_i s+1)}{s\prod_{j=1}^{m}(B_j s+1)},$$

$$\rightarrow \lim_{s\to 0} E(s) = \lim_{s\to 0} \frac{(1+s\sum_{j=1}^{m}B_j+\cdots) - (1+s\sum_{i=1}^{n}A_i+\cdots)}{s(1+s\sum_{j=1}^{m}B_j+\cdots)} = \lim_{s\to 0} \frac{s(\sum_{j=1}^{m}B_j+\cdots - \sum_{i=1}^{n}A_i+\cdots)}{s(1+s\sum_{j=1}^{m}B_j+\cdots)} = \boxed{\sum_{j=1}^{m}B_j - \sum_{i=1}^{n}A_i}$$