به نام خدا

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده برق

گروه حل تمرین کنترل خطی

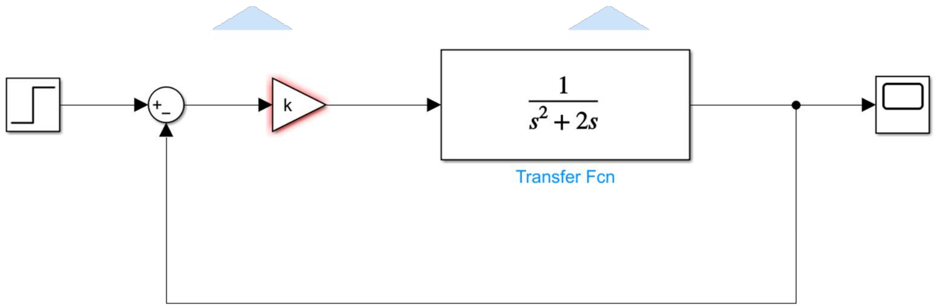
مکان هندسی ریشه‌ها

استاد : آقای دکتر تقی‌راد

آبان ۱۴۰۳

مکان هندسی ریشه‌ها

بعد از شناختن سیستم‌ها حال میخواهیم به طراحی کنترل کننده بپردازیم. در این فصل میخواهیم فقط با استفاده از یک گین و فیدبک سیستم را در حالت مطلوب قرار دهیم.



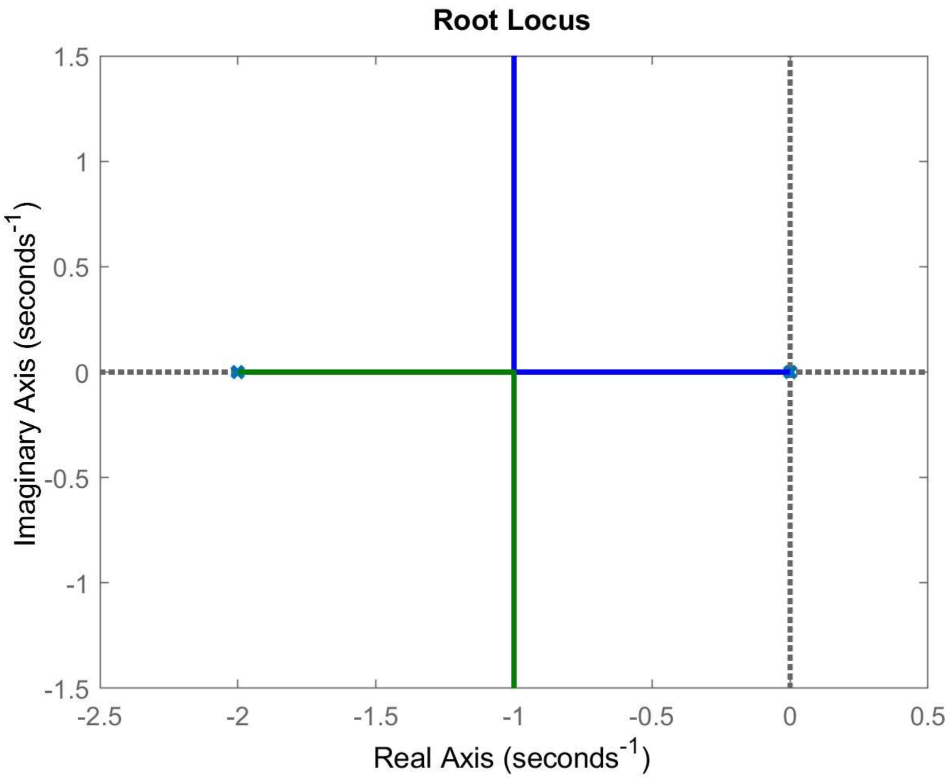
با توجه به شکل مقابل ما میخواهیم. با تعیین مقدار k مواردی اعم از پایداری فراجهش زمان نشست و ... سیستم را در حالت مطلوب قرار دهیم. هدف ما از طراحی این کنترل کننده ردیابی ورودی (پله) است. برای تحقق این امر از فیدبک منفی و یک گین می‌خواهیم استفاده کنیم. سیستم حلقه بسته سیستم ما به صوزت زیر است:

$$G(s) = \frac{k}{s^2 + 2s + k}$$

و قطب های سیستم حلقه بسته به صورت زیر خواهد بود:

$$s_{1.2} = -1 \pm \sqrt{1 - k}$$

که اگر مقدار k بزرگتر از ۱ باشد سیستم دو قطب حقیقی و منفی دارد. اگر مقدار k برابر با یک باشد سیستم قطب مضاعف دارد. و اگر مقدار k کمتر از ۱ باشده سیستم دو قطب مختلط دارد.



سیستم اکیدا سره زیر را به عنوان سیستم حلقه باز در نظر بگیرید.

$$G(s) = \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}$$

این سیستم m صفر و n قطب دارد و با توجه به اینکه سیستم اکیدا سره است m از n کوچک‌تر است به تعبیری دیگر تعداد صفرهای سیستم از قطب‌های آن کمتر است. زمانی تابع تبدیل سیستم حلقه بسته را تشکیل می‌دهیم به رابطه زیر میرسیم.

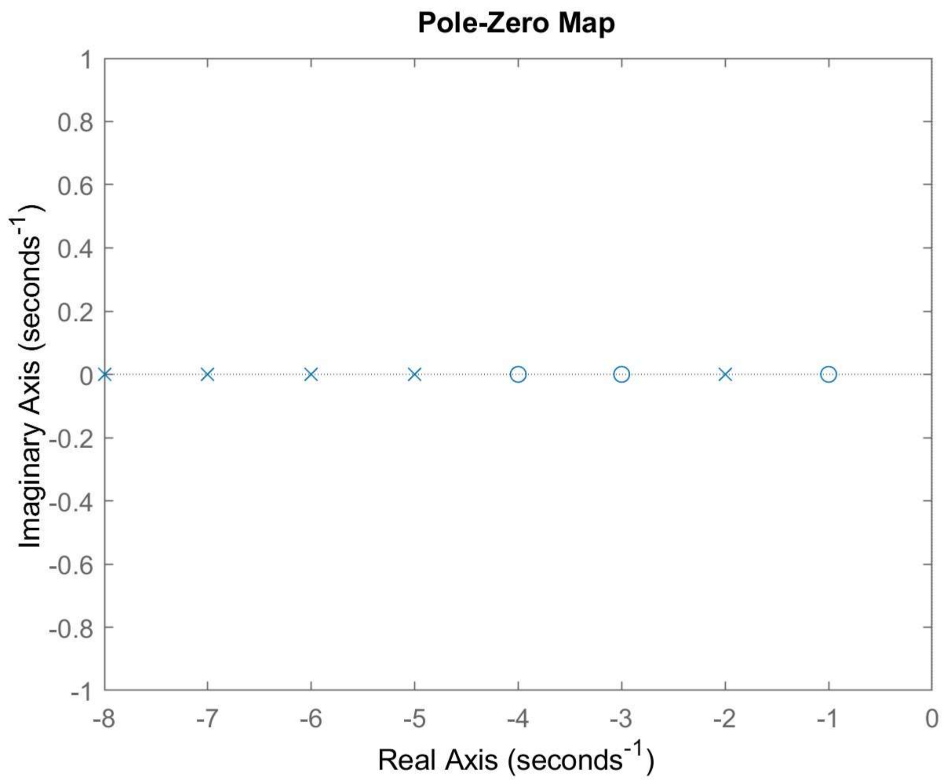
$$\frac{kG(s)}{1+kG(s)} \rightarrow 1 + kG(s) = 0 \rightarrow \text{معادله مشخصه سیستم}$$

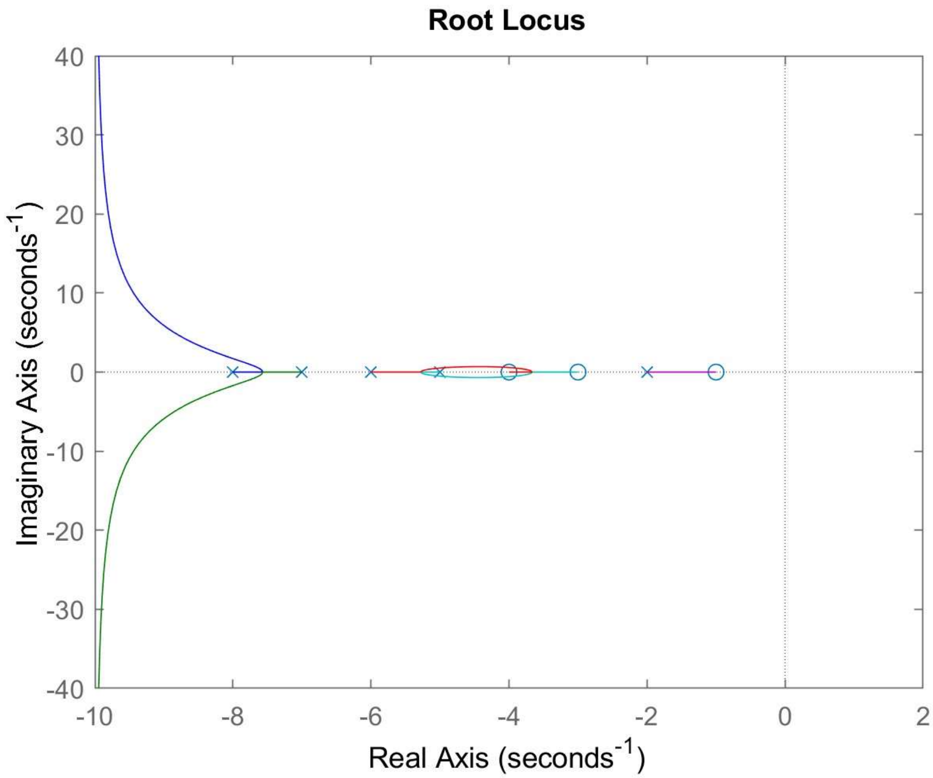
حال می‌خواهیم با بیان چند قاعده نشان دهیم با تغییر k قطب‌های سیستم چه تغییری خواهند کرد.

قاعده۱: تعداد شاخه‌های مکان ریشه برابر با درجه معادله مشخصه می‌باشد.

قاعده۲: برای بیان این قاعده باید این مورد را در نظر بگیریم که مکان هندسی ریشه‌ها از قطب‌های حلقه باز شروع شده و به صفرهای حلقه باز ختم می‌شود. این بدان معناست که در k کوچک قطب حلقه بسته نزدیک قطب حلقه باز است و در k خیلی بزرگ قطب حلقه بسته نزدیک صفر حلقه باز است.

قاعده ۳: مکان ریشه برای $k>0$ در جایی قرار می‌گیرند که در تعداد صفر و قطب‌های سمت راست آن عددی فرد باشد.





قاعده۴: رسم مجانب‌های مکان هندسی ریشه‌ها

مکان هندسی ریشه‌ها بر اساس صفر قطب‌مشخص می‌شود. برای تعیین مجانب‌های مکان هندسی ریشه‌ها باید دو پارامتر را مشخص کنیم. یکی نقطه تلاقی مجانب‌ها و دیگری زاویه‌ی خروج مجانب‌ها باید تعیین شوند. مجانب‌های مکان هندسی ریشه در فرکانس‌های بینهایت میل می‌کنند پس برای بدست آوردن آنها باید $s \to \infty$ در نظر بگیریم حال به معادله مشخصه توجه کنید:

$$1 + kG(s) = 0 \to kG(s) = -1 \to \lim_{s\to\infty} kG(s) = \frac{k}{s^{n-m}} = -1$$

$$s^{n-m} = -k \to \measuredangle -k = \measuredangle s^{n-m} = (1+2\boldsymbol{k})180° \to (n-m)\measuredangle s = (1+2\boldsymbol{k})180°$$

در نهایت به رابطه ساده شده مقابل می‌رسیم :

$$\theta = \frac{(1+2k)180°}{n-m}$$

حال باید محل تلاقی مجانب‌ها را با محور حقیقی بیابیم برای اینکار میتوانیم از رابطه زیر استفاده کنیم:

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n-m}$$

حال می‌خواهیم برای سیستم حلقه باز $G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s^2+4s+8)}$ مکان ریشه رسم کنیم.

پاسخ :

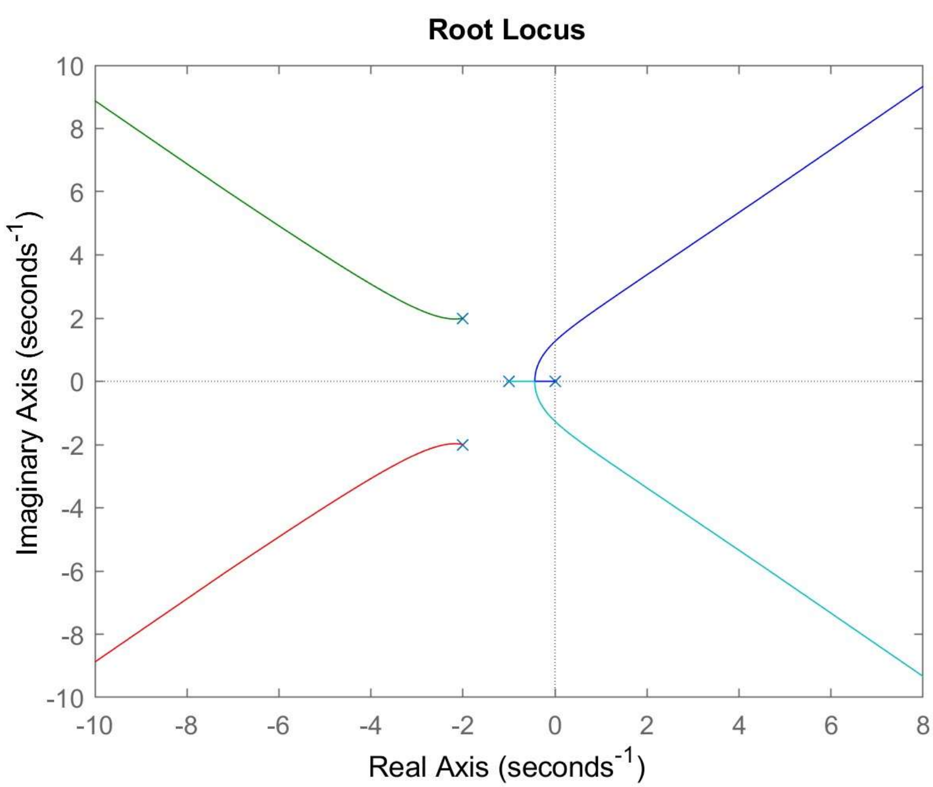
در ابتدا صفر و قطب سیستم را بدست می‌آوریم.

Zero = [] , Pole = [0 , 1 , -2+2j , -2-2j]

حال باید نقطه تلاقی و زاویه مجانب‌ها رابدست آوریم.

$$\theta = \frac{(1+2k)180°}{n-m} = \frac{(1+2k)180°}{4} = 45°.\,135°.\,225°.\,315°$$

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n-m} = \frac{-5}{4}$$



قاعده۵: در بعضی از موارد در که بین دو قطب قرار میگیرد نقطه‌ای وجود دارد در این بین که نقطه شکست نامیده می‌شود که در این نقطه مکان ریشه از نقطه‌ای خارج می‌شود. برای بدست آوردن این نقطه باید از ماعدله مشخصه کمک بگیریم.

$$1 + kG(s) = 0 \rightarrow k = -\frac{1}{G(s)} \rightarrow \frac{dk}{ds} = 0$$

در مثال یک نقطه شکست داریم که می‌خواهیم آن را محاسبه کنیم.

$$\frac{dk}{ds} = 0 \rightarrow \frac{1}{ds}\left(-\frac{1}{G(s)}\right) = 0 \rightarrow \frac{1}{ds}(s^4 + 5s^3 + 12s^2 + 8s) = 4s^3 + 15s^2 + 24s + 8 = 0$$

پس از حل این معادله به s=-0.44 خواهیم رسید.

درباره نقاط شکست باید به این نکته توجه کنیم که همه جواب‌های معادله بالا بر روی مکان هندسی ریشه‌ها نباشند، پس فقط باید نقاطی را رسم کنیم که در مکان هندسی ریشه‌ها قرار دارد.

قاعده۶: برای آنکه محل تلاقی مکان هندسی ریشه‌ها را با محور موهومی بدست آوریم باید از جدول راث هرویتز استفاده کنیم. همانطور که می‌دانید اگر در جدول راث هرویتز همه به سطر صفر برسیم این به این معناست که یک جفت قطب روی محور موهومی داریم پس برای آنکه محل برخورد را بیابیم باید برای سیستم حلقه بسته جدول راث هرویتز را برحسب پارامتر k شکل دهیم و یک سطر که امکان صفر شدن را دارد بدست بیاورید. به عنوان مثال به معادله مشخصه زیر توجه کنید .

$$\Delta(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + k = 0$$

s^3	1	2
s^2	3	k
s^1	$\frac{6-k}{3}$	

حال در اینجا می‌بینیم در سطر s^1 به یک معادله رسیدیم که آن را برابر با صفر می‌گذاریم تا نقطه مد نظر بدست آید. که با حل این سوال به مقدار k=6 می‌شود. حال باید مقدار s را به ازای این گین بدست آوریم. با توجه به اینکه حل معادله اصلی دشوار می‌باشد ما به حل معادله سطر s^2 می‌پردازیم.

$$3s^2 + 6 = 0 \rightarrow s = \pm\sqrt{2}j$$

با توجه به این معادله متجه این امر می‌شویم که مکان هندسی ریشه محور موهومی را در $\sqrt{2}$ قطع می‌کند.

قاعده ۷: موضوع دیگری که به آن خواهیم پرداخت زاویه‌ای است که مکان هندسی ریشه‌ها از قطب خارج می‌شود یا به صفر وارد می‌شود. همانطور که گفته شد نقاط مکان هندسی ریشه‌ها باید در دو شرط زاویه و اندازه صدق کنند. پس با تحقق شرط زاویه به ضابطه زیر خواهیم رسید.

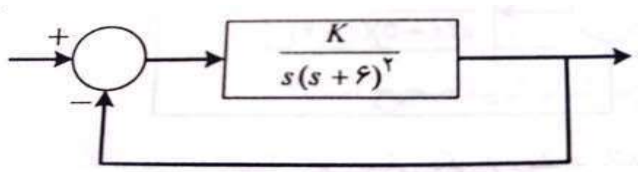
$$\sum_{i=1}^{m} \theta_{zi} - \sum_{j=1}^{n} \theta_{pj} = -180$$

حال تمامی قوانین حاک بر رسم مکان هندسی ریشه‌ها را می‌دانیم و می‌خواهیم با توجه به مکان ریشه‌ها قطب حلقه بسته را در جایی از صفحه s ببریم اما گین لازم برای محاسبه این گین را باید چگونه محاسبه بکنیم؟

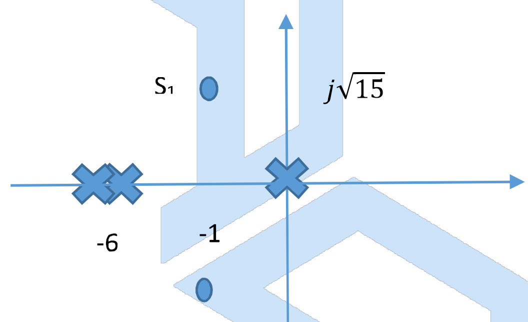
پاسخ: برای اینکار ابتدا باید فاصله صفرها d_{z_i} و قطب‌های d_{p_i} حلقه باز را با قطب هدف مقایسه کنیم. سپس می‌توانیم مقدار گین را از رابطه زیر محاسبه کنیم.

$$k = \frac{\prod_{i=1}^{n} d_{p_i}}{\prod_{j=1}^{m} d_{z_j}}$$

۴- به ازای کدام مقدار k مکان ریشه‌های سیستم کنترل حلقه بسته زیر از نقطه $-1 \pm j\sqrt{15}$ می‌گذرد؟



پاسخ:



برای بدست آوردن k در نقطه $s_1 = -1 \pm j\sqrt{15}$ داریم:

$$k = \frac{\text{حاصل ضرب فاصله قطب ها تا نقطه } s_1}{\text{حاصل ضرب فاصله صفر ها تا نقطه } s_1}$$

در این سوال، چون صفر نداریم، در مخرج عبارت فوق ۱ می‌گذاریم.

$$k = \frac{\sqrt{5^2 + \sqrt{15}^2} \times \sqrt{5^2 + \sqrt{15}^2} \times \sqrt{1^2 + \sqrt{15}^2}}{1} = 160$$