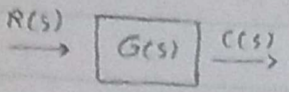
## تابع پاسخ فرکانسی




① سیستم LTI

② ورودی سینوسی $r(t) = A\sin(wt+\theta)$

تابع تبدیل

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} \xrightarrow{s=jw} G(jw) = \frac{C(jw)}{R(jw)}$$ → تابع پاسخ فرکانسی / تابع تبدیل سینوسی → تابع مختلط

Im ⇓ Re

$$G(jw) = |G(jw)|\, e^{j\measuredangle G(jw)} \xleftarrow[\text{فاز}]{\text{اندازه}} G(jw) = Re[G(jw)] + jIm[G(jw)]$$

اختصار → $Me^{j\phi}$

$$\begin{cases} M = |G(jw)| = \sqrt{(Re[G(jw)])^2 + (Im[G(jw)])^2} \\ \phi = \measuredangle G(jw) = \tan^{-1}\left(\dfrac{Im[G(jw)]}{Re[G(jw)]}\right) \end{cases}$$

بهره دامنه یا اندازه

فاز خروجی سینوسی

ex) پاسخ فرکانسی سیستم زیر را برای $w = ۰, ۲, ۱۰, \infty$ بدست آورید.

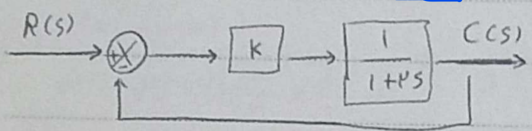
$$G(s) = \frac{3}{s+2} \xrightarrow{s=jw} G(jw) = \frac{3}{jw+2}$$

$$|G(jw)| = \frac{|3|}{|jw+2|} = \frac{3}{\sqrt{w^2+4}}$$

$\measuredangle G(jw) =$ فاز صورت - فاز مخرج $\rightsquigarrow 0 - \tan^{-1}\left(\frac{w}{2}\right)$

| $w$ | $\lvert G(jw)\rvert$ | $\measuredangle G(jw)$ |
|---|---|---|
| ۰ | ۱٫۵ | ۰ |
| ۲ | ۱٫۰۶۱ | -۴۵° |
| ۱۰ | ۰٫۲۹۴ | -۷۸٫۷° |
| ∞ | ۰ | -۹۰° |

ex) در سیستم فیدبک زیر به ازای چه مقدار k، سیستم حلقه بسته در پاسخ به ورودی $\sin t$ ($w=1$) در حالت ماندگار (پایدار) دارای دامنه ۰٫۵ است؟




① تابع تبدیل حلقه بسته: $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{k}{2s+1+k}$

② $\left|\frac{C(jw)}{R(jw)}\right| \overset{w=1}{=} \left|\frac{k}{2j+1+k}\right| = \frac{k}{\sqrt{4+(1+k)^2}} = ۰٫۵$

$$3k^2 - 2k - 5 = 0$$

$$k = \frac{5}{3}, -1 \xrightarrow{\text{حالت ماندگار}} \boxed{k = \frac{5}{3}}$$

Year Month Date

## نمودار بودی (Bode)

رسم اندازه و فاز در دو نمودار مجزا

اندازه ← بر حسب dB ، فاز ← درجه

به صورت لگاریتمی (بهره لگاریتمی)

$$L = 20 \log_{10} |H(j\omega)|$$

* در نمودارهای بود ، نسبت های فرکانسی بر حسب دهه (decade) $\log_{10}$ یا (octave) $\log_2$ بیان می‌شود.

← به طور کلی ، چهار عامل در صورت و مخرج یک تابع تبدیل تصور دارد که برای رسم کامل نمودار بودی استفاده می‌شود بدین صورت که نمودار دامنه و فاز بر حسب لگاریتم فرکانس هرکدام از این عوامل را رسم کرده و سپس با جمع و یا تفریق آن‌ها ، نمودار بودی کامل تابع تبدیل سیستم را رسم می‌کنیم.

① بهره ثابت $G(j\omega) = k$

$$L = 20 \log_{10} |G(j\omega)| = 20 \log_{10} |k| \xrightarrow[+k]{-k} 20 \log_{10} k$$

$$\measuredangle G(j\omega) = \begin{cases} 0^\circ & k \text{ مثبت} \\ 180^\circ & k \text{ منفی} \end{cases}$$

② قطب ـ صفر در مبدأ مضاعف با تکرار N $G(j\omega) = (j\omega)^{\pm N}$

ـ قطب $G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^N}$

$$\begin{cases} L = 20 \log_{10} |G(j\omega)| = -20 N \log \omega \\ \measuredangle G(j\omega) = -90 N^\circ \end{cases}$$

ـ صفر $G(j\omega) = (j\omega)^N$

$$\begin{cases} L = +20 N \log \omega \\ \measuredangle = +90^\circ N \end{cases}$$

Subject:
Year.  Month.  Date.  (  )

۳) قطب و صفر حقیقی با مرتبه تکرار N  $G(j\omega) = (1+j\omega T)^{\mp N}$  $\frac{1}{T}$

— قطب  $G(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega T)^N}$

$$L = 20\log|G(j\omega)| = 20N\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}\right) = -10\log(1+(\omega T)^2)$$

$$\measuredangle = -N\tan^{-1}(\omega T)$$

رسم دستی ← استفاده

— صفر  $G(j\omega) = (1+j\omega T)^N$

$$L = 10N\log(1+(\omega T)^2)$$

$$\measuredangle = +N\tan^{-1}(\omega T)$$

۴) عبارت درجه دوم  $G(j\omega) = (s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n)^{\pm 1}$  $T = \frac{1}{\omega_n}$  $\xi$ مهم

— قطب

$$L = 20\log|G(j\omega)| \cong \begin{cases} -20\log 1 = 0 & T\omega \ll 1 \\ -40\log(T\omega) & T\omega \gg 1 \end{cases}$$

$$\measuredangle = -10\tan^{-1}\frac{2\xi T\omega}{1-(T\omega)^2} \cong \begin{cases} 0 & T\omega < 0.1 \\ -180^\circ & T\omega \gg 10 \end{cases}$$

— صفر

$$L = \begin{cases} 0 & T\omega \ll 1 \\ 40\log(T\omega) & T\omega \gg 1 \end{cases}$$

ex) ۲) بودی  $\frac{s^2+1}{s(s+1)^2}$

$-\infty\ dB \leftarrow \omega_n = 1$ در $\Leftarrow \xi = 0,\ \omega_n = 1 \leftarrow s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n$ — $s^2+1$

$s$

$\xi = 1,\ \omega_n = 1 \longleftarrow (s+1)^2 = s^2+2s+1$

ex) ۱)

$$G(j\omega) = \frac{15(\frac{j\omega}{3}+1)}{j\omega(2j\omega+1)(\frac{j\omega^2}{2}+\frac{j\omega}{2}+1)} \leftarrow \frac{15(\frac{s}{3}+1)}{s(2s+1)(\frac{s^2}{2}+\frac{s}{2}+1)} \leftarrow G(s) = \frac{5(s+3)}{s(s+0.5)(s^2+s+2)}$$

← نمودارهای اندازه و فاز هرکدام از عوامل تابع تبدیل را رسم می‌کنیم.

## سیستم های مینیمم فاز و نامینیمم فاز

- تأخیر $e^{-Ts}$ نداشته
- صفر و قطب در RHP نداشته

← مینیمم فاز

(صفر و قطب ها همگی پایدار)

$e^{-Ts}$

صفر یا قطبی ناپایدار

← نامینیمم فاز

ex) $G_2(j\omega) = \dfrac{1-j\omega T}{1+j\omega T_1}$ , $G_1(j\omega) = \dfrac{1+j\omega T}{1+j\omega T_1}$

یک صفر ناپایدار ← نامینیمم فاز

فاز خیلی منفی میشه

صفر و قطب پایدار ← مینیمم فاز