« به نام خدا »

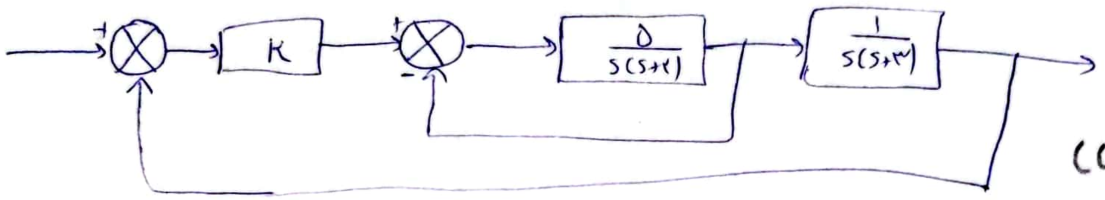
سیستم های کنترل خطی - HW6

حامد باستانی (٤٠١١٩١٤٣)

$\% M_p = 11\%$ $\quad K = 2$

۱) خطا ۳ برابر بهتر شود

(برای حل از طراحی جبران ساز پس فاز استفاده می کنیم.)



$C(s) = K\frac{Ts+1}{\beta Ts+1}$ و $\beta>1$

$$\% M_p = 100\, e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 11 \Rightarrow e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 0.11 \xrightarrow{\ln} -\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \ln(0.11) = -2.21$$

$$\Rightarrow \frac{+\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2.21}{\pi} \simeq 0.7 \Rightarrow \zeta = 0.7\sqrt{1-\zeta^2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \zeta^2 = 0.49(1-\zeta^2)$$

$$\Rightarrow \zeta^2 + 0.49\zeta^2 = 0.49 \Rightarrow \zeta^2 = \frac{0.49}{1.49} \begin{cases} \zeta = 0.57 \checkmark \\ \zeta = -0.57 \times \end{cases}$$

$$\zeta = \frac{PM}{100} \Rightarrow PM = 57^\circ$$

$$\text{if } K=2 \rightarrow G(s) = 2 \times \frac{\frac{5}{s^2+2s}}{1+\frac{5}{s^2+2s}} \times \frac{1}{s(s+3)} = \frac{10}{(s^2+2s+5)(s+3)s}$$

الگوریتم طراحی)

۱- یافتن K :

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} \frac{10}{(s^2+2s+5)(s+3)} = \frac{10}{5\times 3} = \frac{2}{3} \qquad K = \frac{\hat{K}_v}{K_v} = 30$$

$$\hat{K}_v = 30 \times \frac{2}{3} = 20$$

-2

$$G_1(s) = KG(s) = \frac{300}{s(s+3)(s^2+2s+5)} \rightarrow G_1(j\omega) = \frac{300}{j\omega(j\omega+3)(-\omega^2+5+j2\omega)}$$

3- یافتن فرکانس گذر بهره جدید : $\hat{\omega}_g$

$$|G_1(j\hat{\omega}_g)| = 1 \rightarrow \frac{300}{\hat{\omega}_g\left(\sqrt{9+\hat{\omega}_g^2}\right)\left(\sqrt{4\hat{\omega}_g^2+(5-\hat{\omega}_g^2)^2}\right)} = 1 \Rightarrow \hat{\omega}_{g_1} = 4.10183 \simeq 4.1$$

حل با کمک نرم افزار

$$\angle G(j\hat{\omega}_g) = 0 - 90 - \tan^{-1}\left(\frac{\hat{\omega}_g}{3}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{2\hat{\omega}_g}{5-\hat{\omega}_g^2}\right) = -109.03$$

با فرض این که $PM=57^\circ$ حد بهره مطلوب که باشد ω را به گونه‌ای می‌یابیم که:

$$\measuredangle G_1(j\omega) = -180+57+12 \Rightarrow -90-\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{3}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{2\omega}{5-\omega^2}\right) = -111$$

$$\rightarrow \hat{\omega}_{g_2} \simeq 0/546 \qquad \begin{cases} \hat{\omega}_{g_1} = 4/1 \\ \hat{\omega}_{g_2} = 0/546 \end{cases}$$

۴) انتخاب T

$$\frac{\hat{\omega}_g}{10} < \frac{1}{T} < \frac{\hat{\omega}_g}{2}$$

$$\hat{\omega}_{g_1} = 4/1 \Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{\hat{\omega}_g}{10} \Rightarrow T = 2/44$$

$$\hat{\omega}_{g_2} = 0/546 \Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{\hat{\omega}_g}{10} \Rightarrow T = 18/32$$

۵) انتخاب β :

$$-20\log\beta + |G_1(j\hat{\omega}_g)|_{dB} = 0 \Rightarrow$$

$$\text{if } \hat{\omega}_g = 4/1 \Rightarrow |G_1(j\hat{\omega}_g)| = 1 \Rightarrow -20\log\beta = 0 \Rightarrow \beta = 1$$

β باید بزرگتر از 1 باشد پس این رد می‌شود.

$$\text{if } \hat{\omega}_g = 0/546 \Rightarrow |G_1(j\hat{\omega}_g)| = \frac{30}{\hat{\omega}_g\left(\sqrt{9+\hat{\omega}_g^2}\right)\left(\sqrt{4\hat{\omega}_g^2+(5-\hat{\omega}_g^2)^2}\right)} \simeq 37/33$$

$$-20\log\beta + 20\log|G_1(j\hat{\omega}_g)| = 0 \Rightarrow 20\log\beta = 20\log|G_1(j\hat{\omega}_g)| \Rightarrow \beta = |G_1(j\hat{\omega}_g)|$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = 37/33}$$

$$C(s) = K\frac{Ts+1}{\beta Ts+1} = 30\,\frac{18/32s+1}{683/89s+1}$$

۶) حاشیه بهره سیستم و پاسخ حلقه بسته آن را بررسی می‌کنیم.

$$30\,\frac{18/32s+1}{683/89s+1} \times \frac{15}{s(s+3)(s^2+2s+5)}$$

در متلب محاسبه شده و نتایج آن نیز در فایل ارسالی قرار داده خواهد شد.

$PM = 61/5 \quad @\ \omega = 0/549$ تقریباً مقدار مورد نظر برآورده شده

$GM = 9/34\,dB \quad @\ \omega = 1/71 \qquad GM > 0$ بنابراین سیستم پایدار است.

پرسش (۲)

در حال حاضر سیستم دارای $PM=۸۳^\circ$ و $GM=۴۰٫۲dB$ است

الف) از کنترلر پیشفاز باید استفاده کنیم زیرا افزایش پهنای باند به معنای افزایش پاسخ گذرا و بهبود آن می باشد که این کار به کمک یک کنترلر پیشفاز انجام می گیرد. یکی دیگر از کاربردهای کنترلر پیشفاز ، بهبود حاشیه فاز می باشد.

ب) با توجه به این که در ابتدا شیب نمودار اندازه بود ، منفی است بنابراین سیستم حداقل یک قطب $s=0$ در مخرج دارد بنابراین ثابت خطای ماندگار آن به ورودی پله برابر صفر است . بنابراین از این بابت نگرانی نخواهیم داشت.

۱) تایین K ، چون نگرانی بابت خطای ماندگار نداریم یعنی $K=1$ فرض می کنیم

۲) $G_1(s)=KG(s)=G(s)$ ← نمودار بود این در صورت سوال موجود می باشد.

۳)

$$C(s)=\frac{K}{\sqrt{\alpha}}\frac{1+\alpha Ts}{1+Ts} \quad , \quad \alpha>1 \qquad \hat{G}(j\omega)=\frac{K}{\sqrt{\alpha}}\times\frac{1+\alpha Ts}{1+Ts}G(j\omega)$$

۴)

برای اینکه پهنای باند بیشتر از $10rad/sec$ بشود، می توان فرکانس گذر بهره سیستم را روی $\omega_g=10$ بندازیم. در این حالت قطعاً پهنای باند قطعاً بزرگتر از ۱۰ خواهد بود:

$$|G(j10)|_{dB}=-۴۰/۲ \rightarrow -۲۰\log|G(j10)|=-۴۰/۲ \rightarrow |G(j10)|=۱۰۲$$

$$G_1(s)=۱۰۲\,G(s) \Rightarrow \omega_g=10 \rightarrow \measuredangle G(j\omega)=-۱۶۸^\circ \rightarrow PM=۱۲^\circ$$

$$\varphi_m=\hat{PM}-PM+\underbrace{5^\circ}_{\text{تخریب بیشتر}}=۳۲-۱۲+۵=۲۵ \qquad \alpha=\frac{1+\sin(\varphi_m)}{1-\sin(\varphi_m)}=۲/۴۶$$

$$\omega_g=10 \Rightarrow T=\frac{1}{\omega_g\sqrt{\alpha}}=0/064$$

$$\Rightarrow C(s)=\frac{102}{\sqrt{2/46}}\times\frac{1+2/46\times0/064s}{1+0/064s}=65/03\,\frac{0/157s+1}{0/064s+1}$$

$$\Rightarrow \hat{G}(s)=65/03\,\frac{0/157s+1}{0/064s+1}\cdot G(s)$$

پرسش سوم

$$G(s)=\frac{e^{-\tau s}}{Ts+1}=\frac{e^{-0.2s}}{0.4s+1} \qquad G_C(s)=K_p+\frac{K_I}{s}$$

$\% M_p < 10\%$

$$\rightarrow G_C(s)=K_p+\frac{K_I}{s}=K_p\frac{(s+\frac{K_I}{K_p})}{s}$$

$$G(j\omega)=\frac{e^{-j0.2\omega}}{j0.4\omega+1}\rightarrow |G(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+0.16\omega^2}} , \quad \angle G(j\omega)=\frac{180}{\pi}\times(-0.2\omega)-\tan^{-1}(0.4\omega)$$

$$\rightarrow |G(j\omega)|=1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+0.16\omega^2}}=1 \Rightarrow 1+0.16\omega^2=1 \Rightarrow 0.16\omega^2=0 \rightarrow \omega_g=0$$

$$\Rightarrow \angle G(j\omega_g)=0-\tan^{-1}(0)=0 \Rightarrow PM=180^\circ$$

$$\angle G(j\omega)=-180 \Rightarrow -0.2\omega\times\frac{180}{\pi}-\tan^{-1}(0.4\omega)=-180 \Rightarrow \omega_p=9.18$$

$$\rightarrow |G(j\omega_p)|=0.26 \Rightarrow GM=-20\log|G(j\omega_p)|=11.7>0$$

$$\zeta=\frac{PM}{100}=\frac{180}{100}=1.8 \rightarrow \% M_p=0$$

چون $1<\zeta$ پس سیستم اصلی اصلاً فراجهش ندارد.

$$\% M_p<10\% \rightarrow 100e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}<10 \Rightarrow \zeta>0.6 \Rightarrow \frac{\hat{PM}}{100}>0.6 \Rightarrow \hat{PM}>60^\circ$$

$$\hat{PM}=180+\angle G(j\hat{\omega}_g)=60 \Rightarrow \angle G(j\hat{\omega}_g)=-120 \Rightarrow$$

$$\frac{180}{\pi}\times(-0.2\hat{\omega}_g)-\tan^{-1}(0.4\hat{\omega}_g)=-120 \Rightarrow \hat{\omega}_g=4.95$$

برای تقریب بهتر، $\hat{\omega}_g$ را عقب تر می بریم: $\hat{\omega}_g=4.5$

$$K_p=\frac{1}{|G(j\hat{\omega}_g)|}=2 \qquad K_I=\frac{K_p\hat{\omega}_g}{10}=\frac{2\times 4.5}{10}=0.9$$

$$\Rightarrow C(s)=K_p+\frac{K_I}{s}=2+\frac{0.9}{s}$$

سیستم نهایی: $G_2(s)=C(s)G(s)=(2+\frac{0.9}{s})(\frac{e^{-0.2s}}{0.4s+1})=\frac{(2s+0.9)e^{-0.2s}}{s(0.4s+1)}=\begin{cases}|G_2(j\omega)|=\frac{\sqrt{4\omega^2+0.81}}{\omega\sqrt{0.16\omega^2+1}}\\ \angle G(j\omega)=\tan^{-1}(\frac{2\omega}{0.9})-90-\tan^{-1}(0.4\omega)-0.2\times\frac{180}{\pi}\times\omega\end{cases}$

$$|G_2(j\omega_g)|=1 \rightarrow \omega_g=4.26 \Rightarrow \angle G(j\omega_g)=83.5-90-60-50=-116.5 \Rightarrow PM=63.5 \checkmark$$

$$\angle G_2(j\omega_p)=-180 \rightarrow \omega_p=8.96 \Rightarrow |G(j\omega_p)|=0.54 \Rightarrow GM=-20\log|G(j\omega_p)|=5.35\,dB$$

چون از صفر بزرگتر است پس پایدار می باشد.

پرسش چهارم :

$$G(s) = \frac{2500K}{s(s+25)} \xrightarrow{\text{if } K=1} G(s) = \frac{2500}{s(s+25)}$$

- چون نوع سیستم یک می‌باشد بنابراین خطای ماندگار به ورودی پله صفر می‌باشد و از این بابت نگرانی نداریم.

$PM > 45^\circ$

$$e_{ss} = \frac{1}{\hat{K}_v} < 0.01 \Rightarrow \hat{K}_v > 100$$

برای بهبود خطای حالت ماندگار، بهتر است از جبران‌ساز پس‌فاز استفاده کنیم:

۱) تعیین K

$$G(s) = \frac{2500}{s(s+25)} \to K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \frac{2500}{25} = 100$$

$$\text{فرض}: \hat{K}_v = 200 \Longrightarrow K = \frac{\hat{K}_v}{K_v} = \frac{200}{100} \Rightarrow \boxed{K=2}$$

۲)

$$G_1(s) = KG(s) = 2 \times \frac{2500}{s(s+25)} = \frac{5000}{s(s+25)}$$

$$|G(j\omega_g)| = 1 \to \frac{5000}{\omega_g\sqrt{625+\omega_g^2}} = 1 \Rightarrow \omega_g = 68.54 \text{ rad/sec} \Rightarrow \measuredangle G(j\omega_g) = 0 - 90 - \tan^{-1}\left(\cancel{\frac{68.54}{25}}\right) = -159.96 \Rightarrow PM = 20.04$$

← نیاز به اصلاح دارد.

GM همچنان برابر ∞ می‌باشد و تغییری در آن نسبت به سیستم اصلی به وجود نمی‌آید: $GM = \infty$

۳)

$$\measuredangle G_1(j\hat{\omega}_g) = -180 + 45 + \overset{\text{تقریب}}{12} = -123 \Rightarrow 0 - 90 - \tan^{-1}\left(\frac{\hat{\omega}_g}{25}\right) = -123 \Rightarrow \hat{\omega}_g = 16.24$$

۴) انتخاب T:

$$\frac{1}{T} = \frac{\hat{\omega}_g}{10} \Rightarrow \frac{1}{T} = 1.624 \Rightarrow T = 0.62$$

۵) انتخاب B:

$$-20\log B + |G_1(j\hat{\omega}_g)|_{dB} = 0 \to -20\log B + 20\log 10 = 0 \Rightarrow \boxed{B=10}$$

$$|G_1(j\hat{\omega}_g)| = \frac{5000}{\hat{\omega}_g\sqrt{\hat{\omega}_g^2+625}} \simeq 10.33 \simeq 10$$

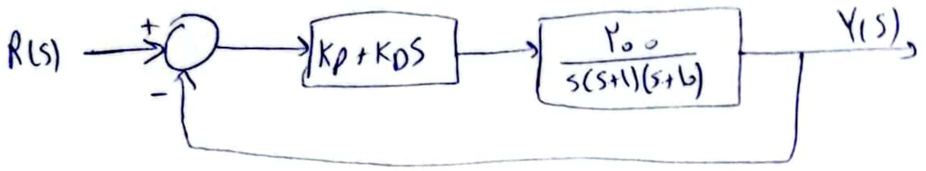
۶)

$$C(s) = K\frac{Ts+1}{BTs+1} = 2\,\frac{0.62s+1}{6.2s+1} \qquad G(s) = \frac{2500}{s(s+25)}$$

$$C(s)G(s) = \frac{5000(0.62s+1)}{s(s+25)(6.2s+1)}$$

7) با شبیه‌سازی در متلب می‌بینیم خواسته‌ی صورت سوال فراهم شده به طوری که $PM = 51.13$ و $GM = \infty$ می‌باشد.

پرسش پنجم



$$t_s = \frac{4}{\zeta \omega}$$

الف) برای این که پاسخ، بدون نوسان باشد، باید ۱=ζ باشد.

$$G(s) = \frac{200}{s(s+1)(s+10)}$$

$$\text{if } \zeta = 1 \rightarrow \zeta = \frac{\hat{PM}}{100} \Rightarrow \hat{PM} = 100$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta \hat{\omega}_g} = 3 \Rightarrow \hat{\omega}_g = \frac{4}{3} = 1.33$$

$$C(s) = \frac{K_C}{\sqrt{\omega_g^2 T^2 + 1}} (Ts+1)$$

$$K_C = \frac{1}{|G(j\hat{\omega}_g)|} = 0.11 \Rightarrow G_1(j\omega) = K_C\, G(j\omega)$$

$$|G_1(j\omega_g)| = 1 \Rightarrow \frac{22}{\omega \sqrt{\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+100}} = 1 \Rightarrow \omega_g = 1.33 \rightarrow \measuredangle G_1(j\omega_g) = -90 - \tan^{-1}(\omega_g) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega_g}{10}\right)$$

$$\Rightarrow \measuredangle G_1(j\omega_g) = -150.3 \Rightarrow PM = 29.7$$

$$\phi_m = \hat{PM} - PM + \alpha = 105.3 - 29.7 \simeq 76 \Rightarrow T = \frac{\tan(\phi_m)}{\hat{\omega}_g} = 3.014$$

$$\Rightarrow C(s) = \frac{0.11}{\sqrt{16.09+1}}(3.014s+1) = \frac{0.11}{4.13}(3.014s+1) = 0.08033\,s + 0.02663$$

با توجه به خروجی متلب، $t_s = 8.7$ می باشد که مطلوب سؤال نیست

$$\text{if } \omega_g = 1.5 \xrightarrow{\text{با فرض عدم تغییر } \phi_m} C(s) = \frac{0.11}{\sqrt{20.47+1}}(3.014s+1) = \frac{0.11}{4.63}(3.014s+1) = 0.085922 + 0.0601$$

که با توجه به خروجی متلب $t_s = 2.93$ و $Mp = 0$، که این مطلوب است

ب)

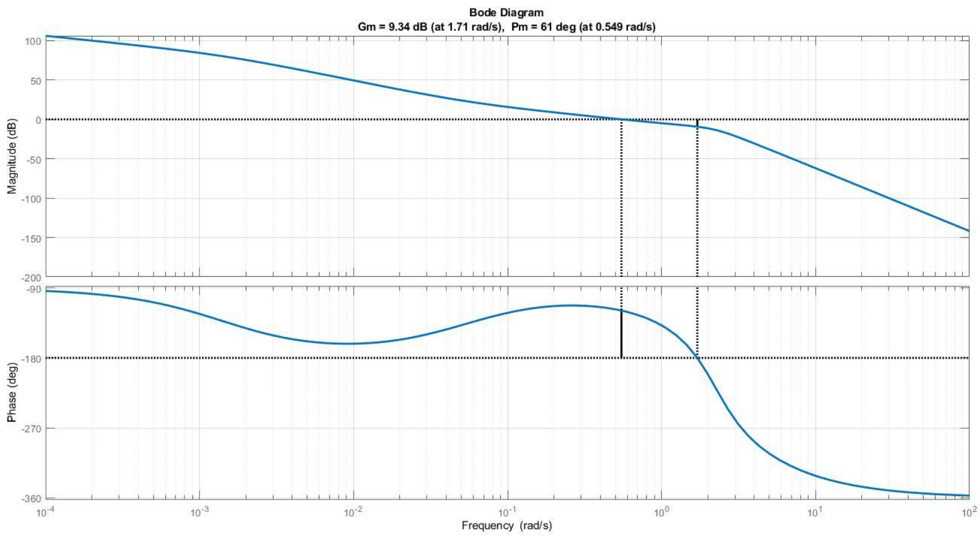
$$K_V = \lim_{s \to 0} s\,G(s) = \frac{200}{10} = 20 \qquad K_P = \frac{\hat{K_V}}{K_V} = \frac{1}{20} = 0.05$$

$$0 < KD < 0.5$$

$$C(s) = KP + KDs$$

* با توجه به خروجی متلب، به ازای $KD = 0.1$، بیشترین مقدار حد فاز را خواهیم داشت: $PM = 93.5$

(Q1



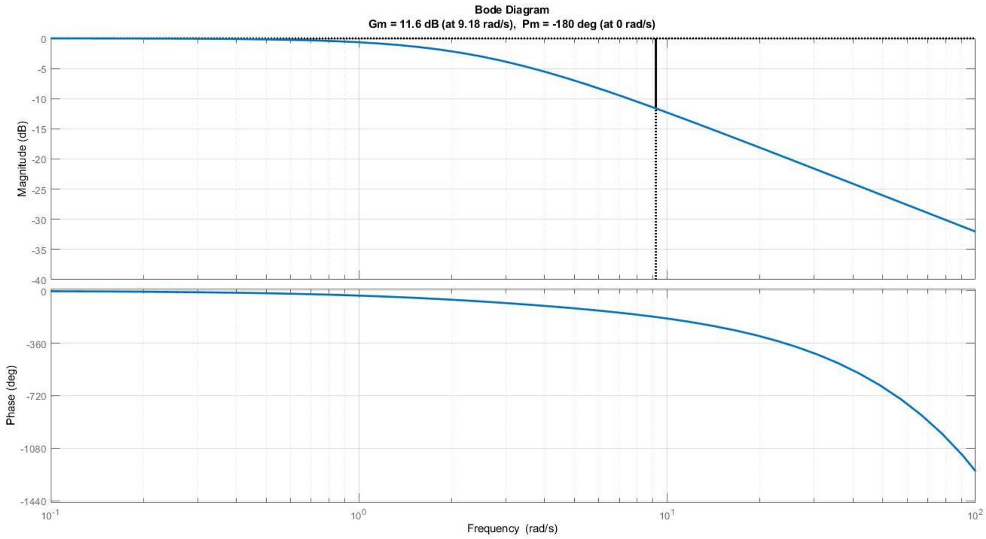
کد متلب سوال 1 :

```
clc;
clear all;
close all;


s=tf('s');
num =300*(18.32*s+1);
%num1 =5*(s+1);
den=(683.89*s+1)*(s)*(s+3)*(s^2+2*s+5);
sys=num/den;
%sys1=num1/den;
```

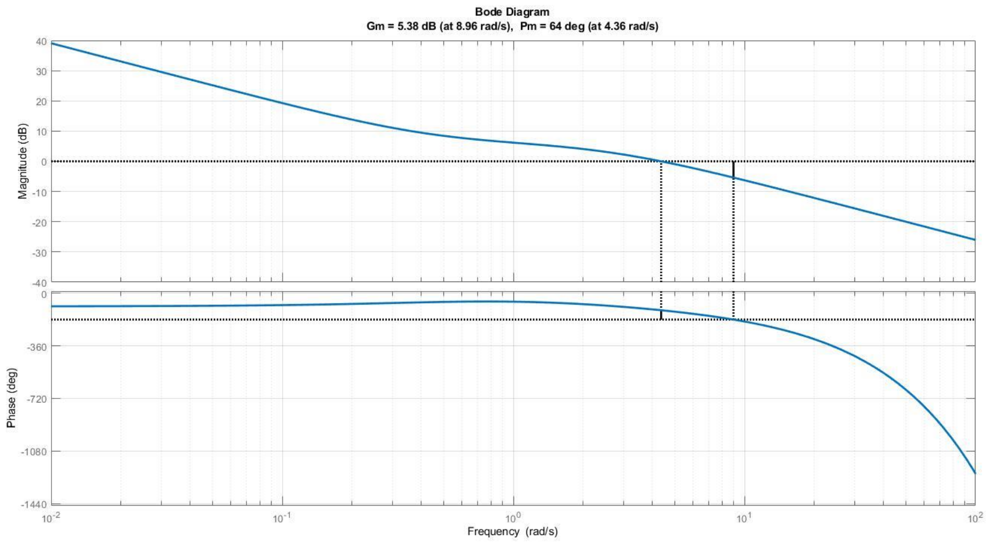
```
display(sys);
%display(sys1);

figure
bode(sys);
set(findall(figure(1),'type','line','linewidth',2))
title('bode with exponentioal');
margin(sys), grid
set(findall(figure(1),'type','line'),'linewidth',2)
grid on
```

(Q3

- پاسخ سیستم اصلی :



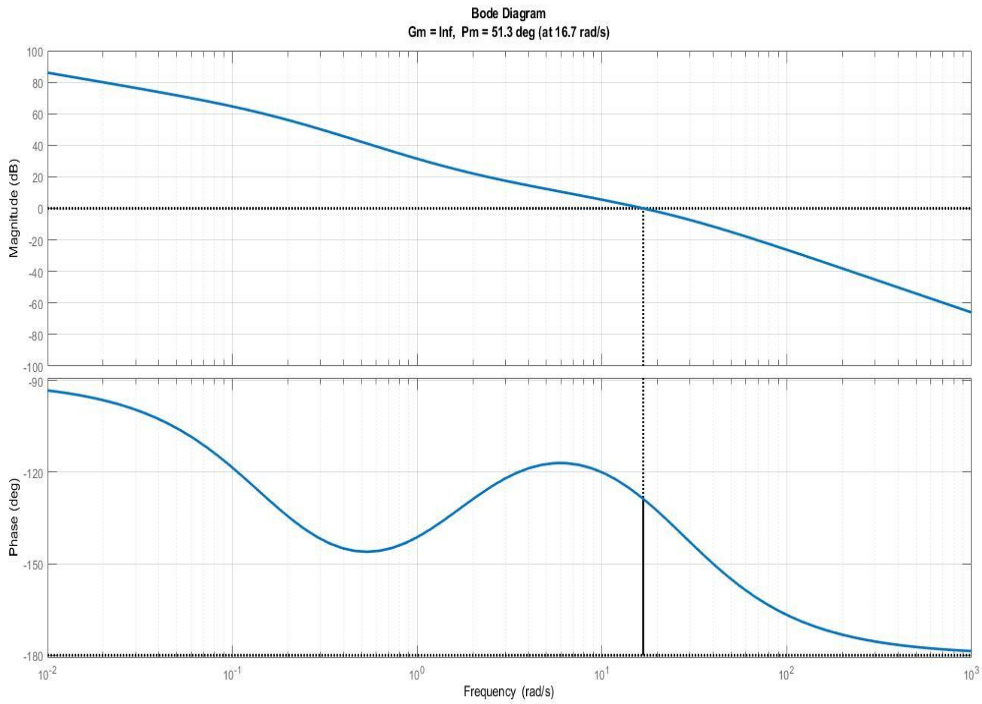
- پاسخ سیستم کنترل شده :



کد متلب سوال 3 :

```
clc;
clear all;
close all;

s=tf('s');
Cs=(2+0.9/s);
num =exp(-0.2*s);
num1 =Cs*num;
den=0.4*s+1;
sys=num/den;
sys1=num1/den;
%display(sys);
display(sys1);
figure
bode(sys1);
set(findall(figure(1),'type','line','linewidth',2))
title('bode with exponentioal');
margin(sys1), grid
set(findall(figure(1),'type','line'),'linewidth',2)
```

(Q4



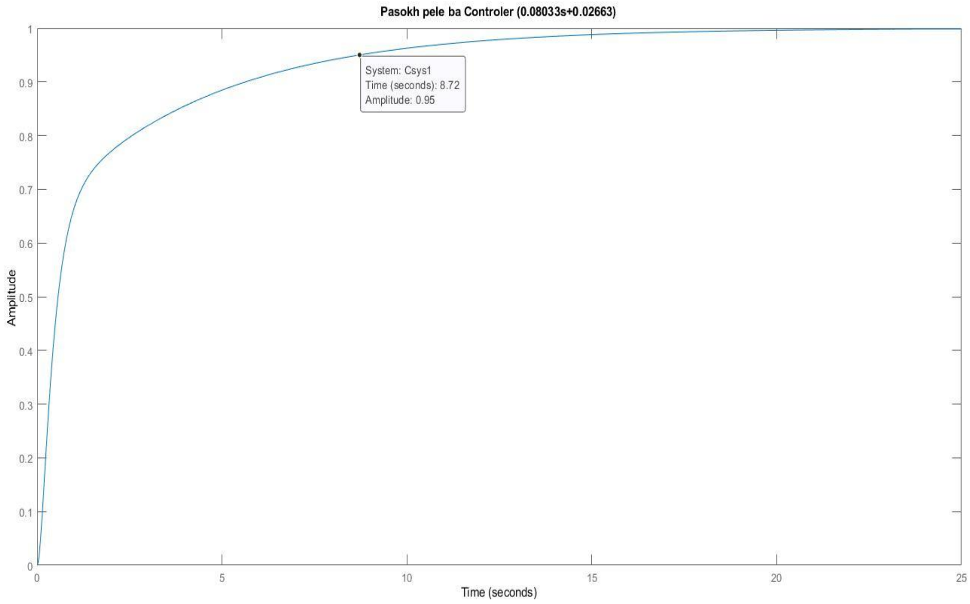
کد متلب سوال 4 :

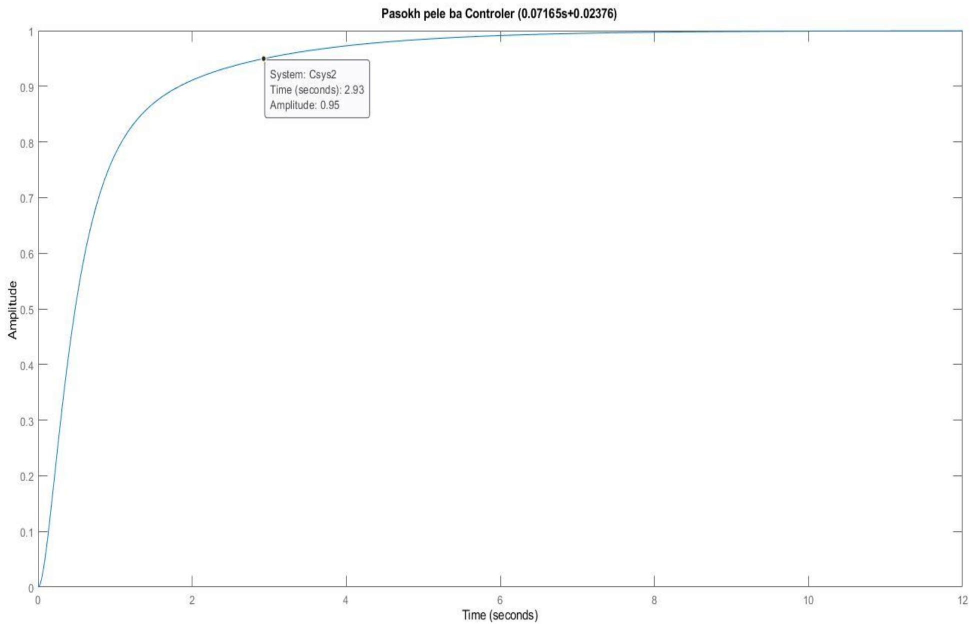
```
clc;
clear all;
close all;


s=tf('s');
num =5000*(0.62*s+1);
%num1 =5*(s+1);
den=s*(s+25)*(6.2*s+1);
sys=num/den;
%sys1=num1/den;
```

```
display(sys);
%display(sys1);

figure
bode(sys);
set(findall(figure(1),'type','line','linewidth',2))
title('bode with exponentioal');
margin(sys), grid
set(findall(figure(1),'type','line'),'linewidth',2)
grid on
```

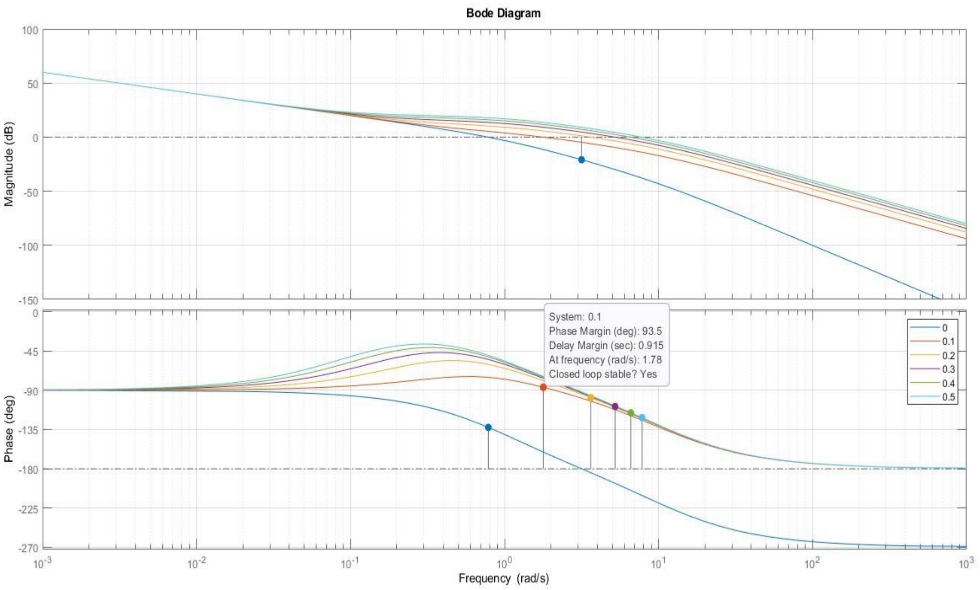
(Q5

الف) پاسخ پله :





ب)



کد متلب سوال 5 :

الف)

```
clc;
clear all;
close all;

s=tf('s');
Cs1=0.08033*s+0.02663;
Cs2=0.085922*s+0.0601;
num=Cs1*200;
num1=Cs2*200;
```

```
%num1 =5*(s+1);
den=s*(s+1)*(s+10);
sys=num/den;
sys1=num1/den;
%sys1=num1/den;
disp('Open loop with Controller (0.08033s + 0.02663):
');
sys
disp('Open loop with Controller (0.07165s + 0.02376):
');
sys1
%display(sys1);
Csys1=sys/(1+sys);
Csys2=sys1/(1+sys1);
disp('Closed loop with Controller (0.08033s + 0.02663):
');
Csys1
disp('Closed loop with Controller (0.07165s + 0.02376):
');
Csys2
```

```
figure
step(Csys1);
title('Pasokh pele ba Controler (0.08033s+0.02663)');

figure
step(Csys2)
title('Pasokh pele ba Controler (0.07165s+0.02376)');
```

ب)

```
clc;
clear all;
close all;

% define Controller
s=tf('s');
Cs1=0.05;
Cs2=0.05+0.1*s;
Cs3=0.05+0.2*s;
Cs4=0.05+0.3*s;
Cs5=0.05+0.4*s;
```

```
Cs6=0.05+0.5*s;

% define SYS
num1=Cs1*200;
num2=Cs2*200;
num3=Cs3*200;
num4=Cs4*200;
num5=Cs5*200;
num6=Cs6*200;
%num1 =5*(s+1);
den=s*(s+1)*(s+10);
sys1=num1/den;
sys2=num2/den;
sys3=num3/den;
sys4=num4/den;
sys5=num5/den;
sys6=num6/den;
%sys1=num1/den;
```

```
figure
hold on
bode(sys1);
bode(sys2);
bode(sys3);
bode(sys4);
bode(sys5);
bode(sys6);

legend('0','0.1','0.2','0.3','0.4','0.5');
grid on
```