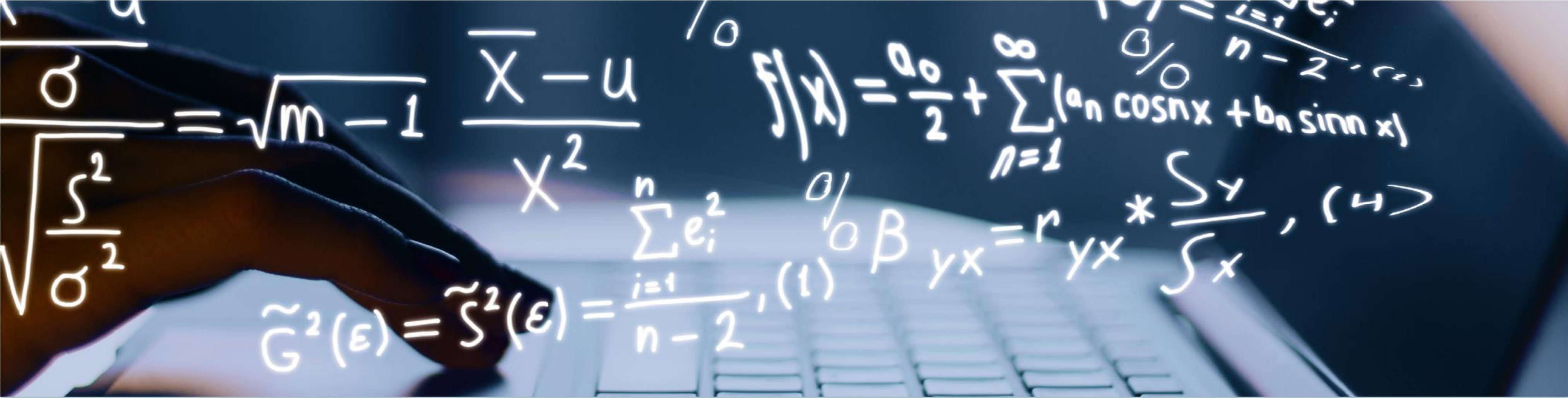
MATEMÁTICAS COMPUTACIONALES

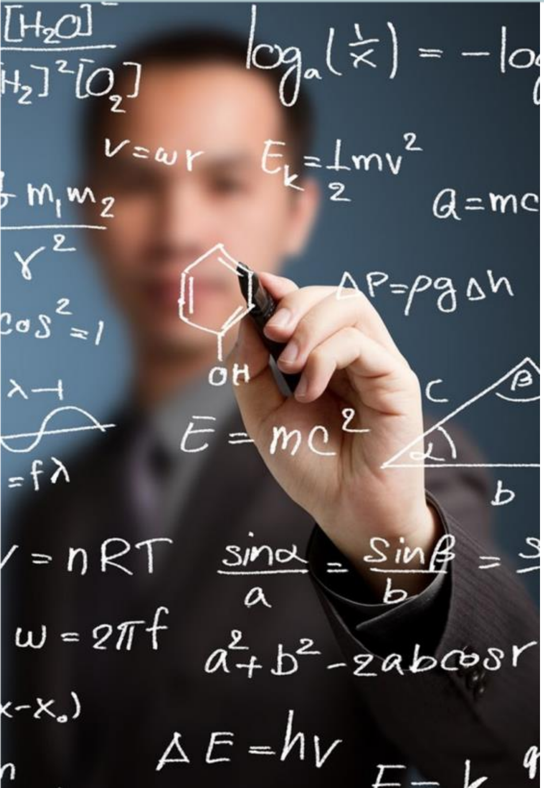


BIENVENIDA

La matemática discreta es la base en todo lo relacionado con los procesos digitales, es decir, la lógica de las computadoras, por ello es fundamental en la ciencia de la computación. El objetivo de esta asignatura es que entiendas esta disciplina y lo que estudia.

Te invitamos a leer el contenido del curso, de igual manera, puedes ampliar los temas aquí presentados explorando las lecturas complementarias u observando los videos propuestos, de tal forma que puedas aprovechar los elementos que existen en la web, con el fin de enriquecer los temas aquí expuestos.

LIBROS RECOMENDADOS



Vince, J. (2015) Foundation Mathematics for Computer Science: A Visual Approach. Springer.

Liben-Nowell, D. (2018) Discrete Mathematics for Computer Science.. Wiley.

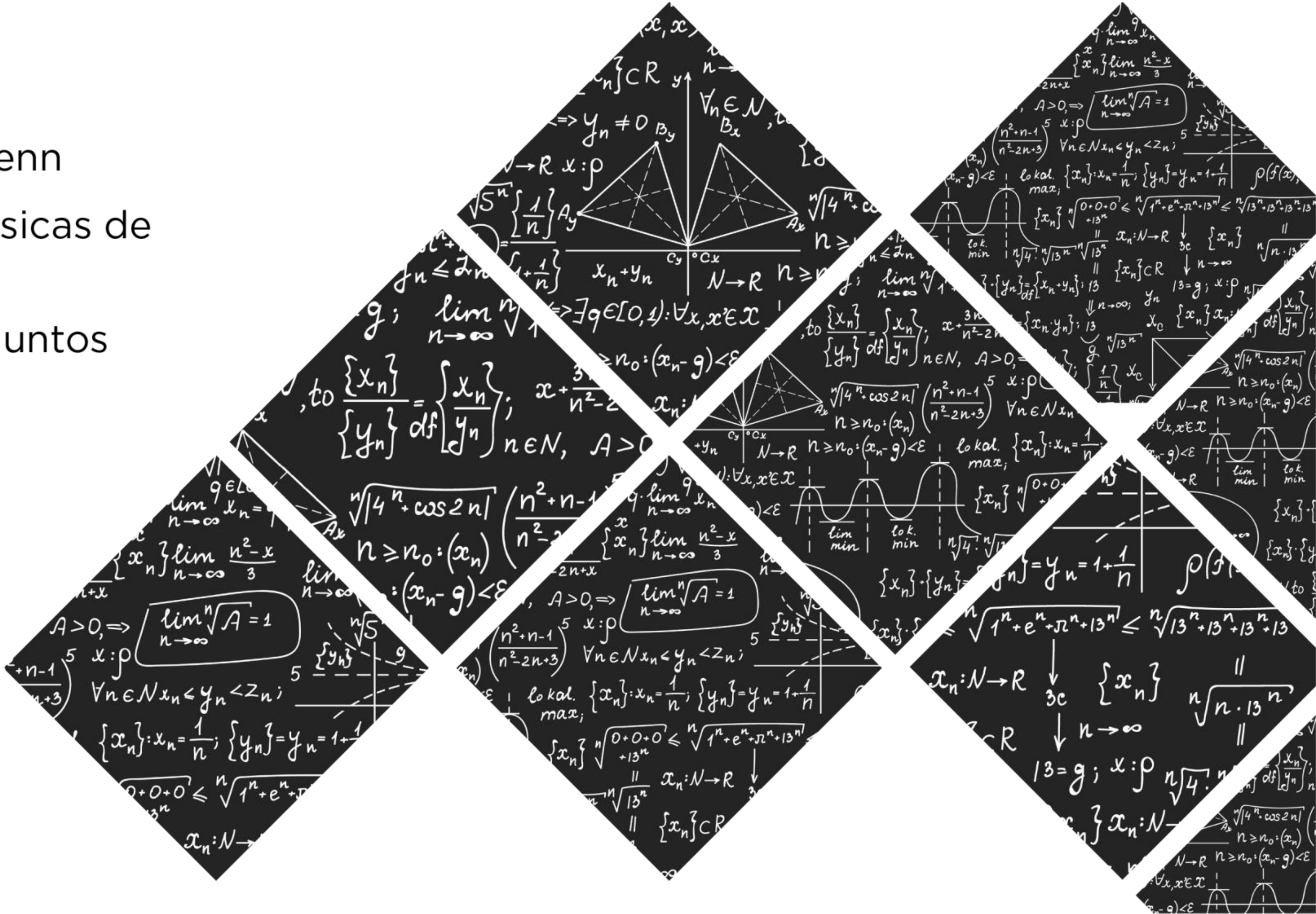
MATEMÁTICAS COMPUTACIONALES
UNIDAD 1
CONJUNTOS

TEMARIO

1. Diagramas de Venn

2. Operaciones básicas de conjuntos

3. Álgebra de conjuntos



INTRODUCCIÓN

Las matemáticas discretas son de gran utilidad para describir objetos y problemas reales, en modelos abstractos aptos para ser resueltos en las ciencias de la computación.

Surge como una disciplina que unifica diversas áreas tradicionales de las Matemáticas (combinatoria, probabilidad, geometría de polígonos, aritmética, grafos, ...), así como su interés en la informática y las telecomunicaciones: la información se manipula y almacena en los ordenadores en forma discreta (palabras formadas por ceros y unos), es necesario contar objetos (unidades de memorias, unidades de tiempo), se precisa estudiar relaciones entre conjuntos finitos (búsquedas en bases de datos) y analizar procesos que incluyan un número finito de pasos (algoritmos).

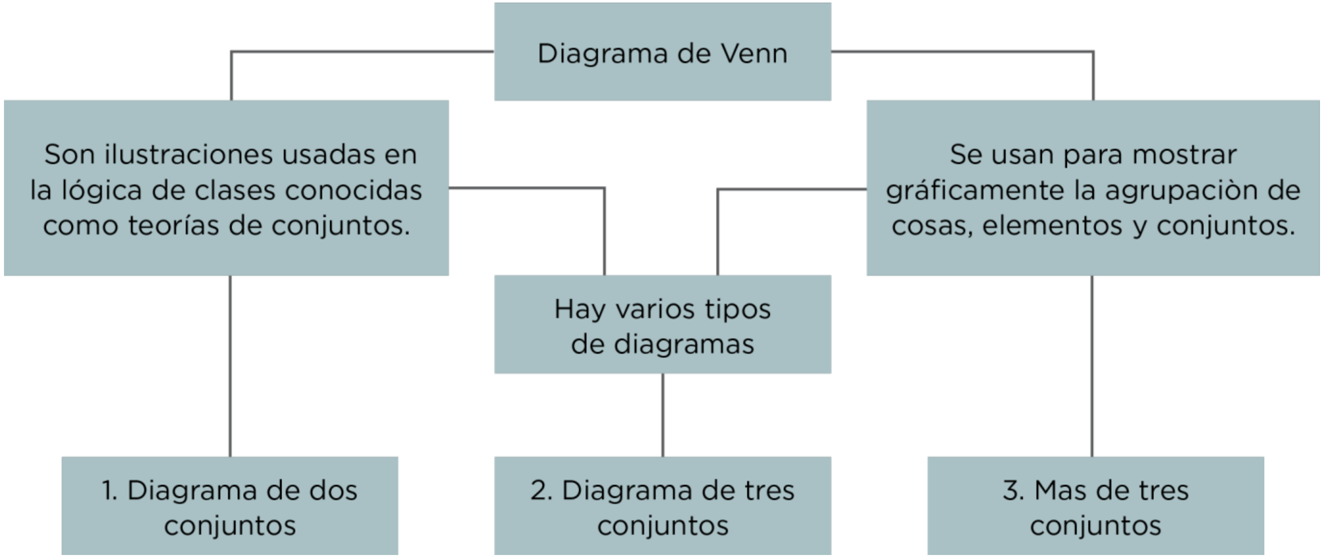
TEMA 1. DIAGRAMAS DE VENN

Ya estás acostumbrado a tratar con conjuntos: cuando escuchas un conjunto musical, te reúnes con un conjunto de amigos, y escribes haciendo uso de un conjunto de letras, por ejemplo.
Los conjuntos son una colección de objetos que pueden clasificarse gracias a las características que tienen en común (fichas, láminas, etc).

A los objetos que conforman los conjuntos los llamamos elementos.
En el conjunto de los planetas del sistema solar, los elementos de este conjunto serán precisamente Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno.

DIAGRAMAS DE VENN

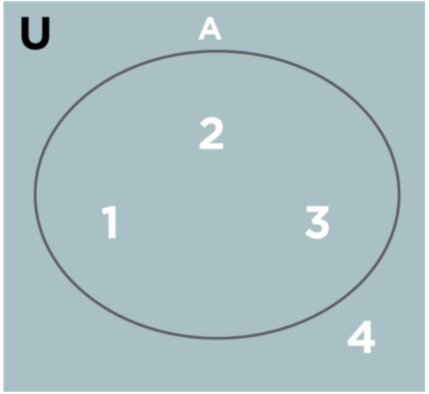
Para representar conjuntos gráficamente, puedes usar los diagramas de Venn. Este método se usa para explicar la teoría de conjuntos y consiste en representar los conjuntos por medio de círculos y dibujar en su interior los elementos que lo conforman.
Su creador, el matemático y lógico inglés John Venn (quien perfeccionó la idea del matemático suizo Leonardo Euler) deseaba presentar de una manera mecánica el razonamiento, es por ello que a las computadoras no les cuesta nada de trabajo realizarlos.



DIAGRAMAS DE VENN

Este método nos permite representar los conjuntos por medio de círculos y dibujar en su interior los elementos que lo conforman.

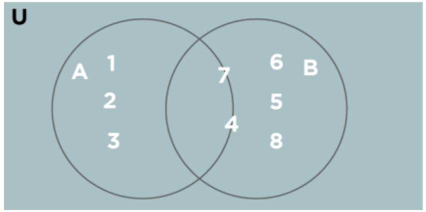
Por ejemplo, si el conjunto A está conformado por los elementos 1, 2 y 3 podemos representarlo como se muestra en la figura.



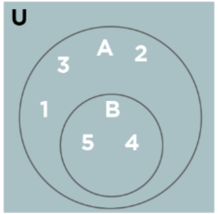
Tipos de Conjuntos
Universo.- Formado por la totalidad de elementos.

DIAGRAMAS DE VENN

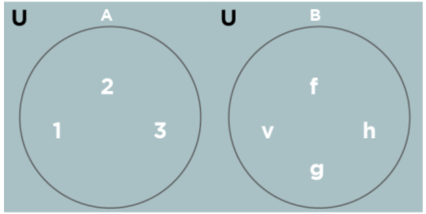
Conjuntos Ajenos. A y B no tienen elementos en común.



Subconjuntos. Todos los elementos de un conjunto pertenecen a otro conjunto.

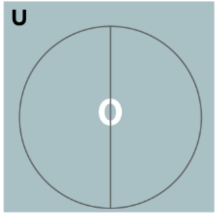


Subconjuntos propios. A y B tiene cada uno al menos un elemento que no comparten.

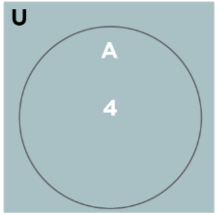


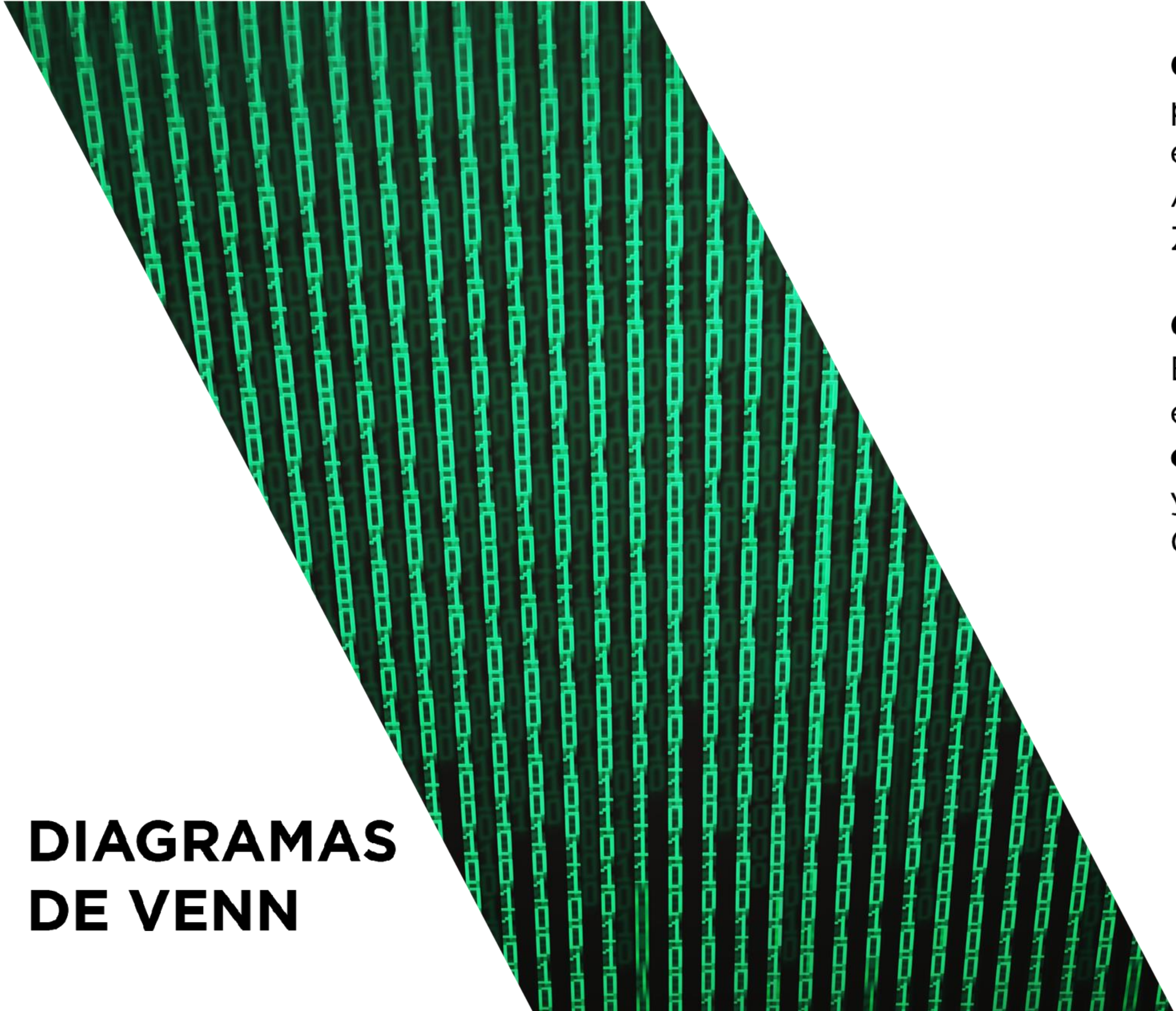
DIAGRAMAS DE VENN

Conjunto vacío. Cuando no tiene elementos.



Conjunto unitario. Se distingue por tener solo un elemento. A = { 4 }





DIAGRAMAS DE VENN

Conjuntos finitos. Es finito si podemos contar la cantidad de elementos que lo conforman.

A = {a,e,i,o,u}

Z = {x\x es una palabra}

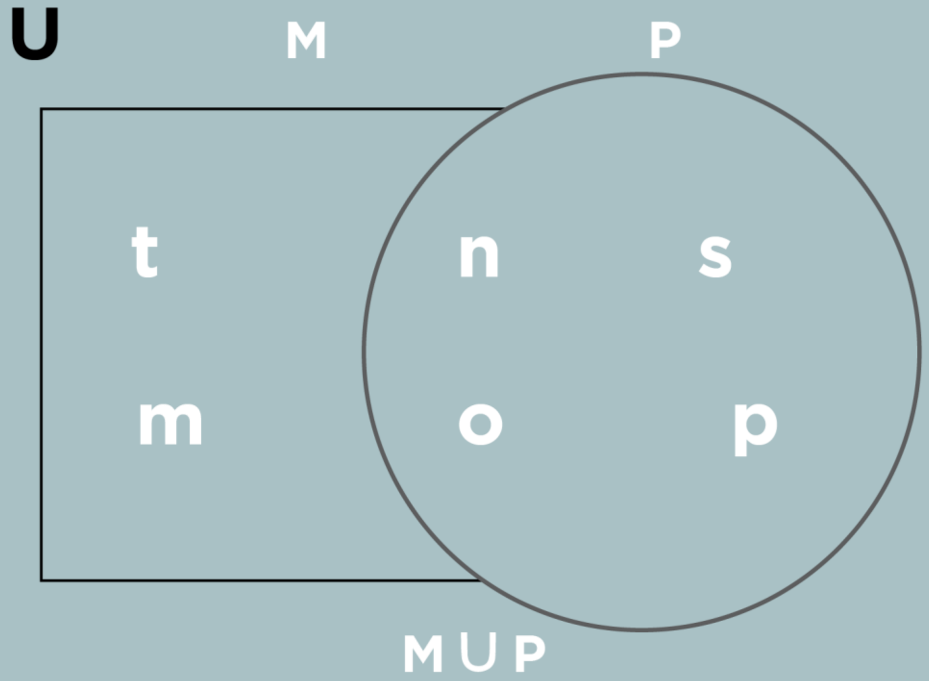
Conjuntos infinitos.

El método más fácil de representar este tipo de conjunto es por **comprensión**: T= {x\x es un número y termina en tres} o **por extensión**:

Q = {0,3,6,9,...}

DIAGRAMAS DE VENN

Veamos el conjunto **M**, conformado por las letras **m, n, o** y **t**, y el conjunto P, conformado por las letras **n, o ,q** y **s**. Como ves, los conjuntos **M** y **P** comparten los elementos n y o, como se observa en la figura.



Ejemplo. No todos los elementos se pueden considerar un conjunto:

1. Agrupemos a todas las personas bonitas.
   Incorrecto, la condición de ser una persona bonita no es una característica clara.

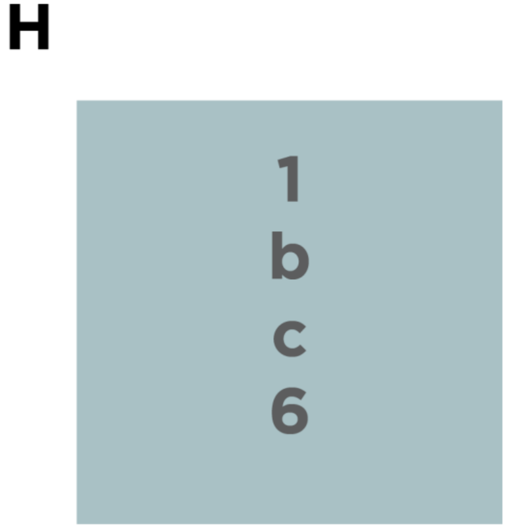
2. Agrupemos a los mamíferos del planeta tierra
   ¡Muy Bien! Las características que definen ser mamífero son claras.

DIAGRAMAS DE VENN

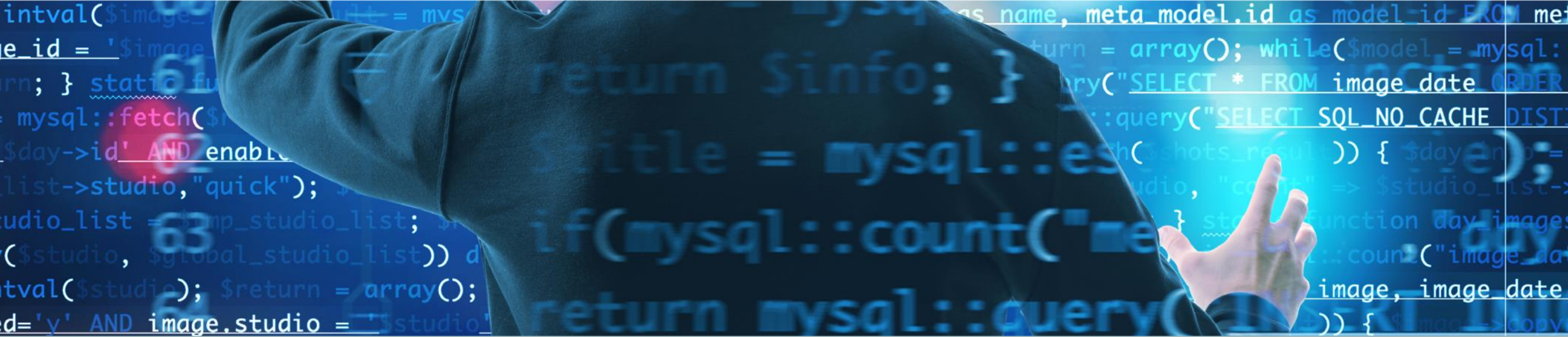
Dado que se pueden representar gráficamente los conjuntos a través de diagramas de Venn, también es posible con el lenguaje propio de la matemática.

Se usan los corchetes {} para representar y definir conjuntos. En el interior de los corchetes se ubican los elementos que integran el conjunto separados por comas. La representación escrita es equivalente a la representación gráfica de diagramas de Venn.

Por ejemplo, tenemos el conjunto H conformado por los Elementos 1, b, c y 6 se puede representar de la siguiente forma:



Es equivalente a H={1,b,c,6}



DIAGRAMAS DE VENN

Descripción de conjuntos por extensión
Para describir los elementos de un conjunto se mencionan uno a uno.

Ejemplo:
Q es conjunto conformado por los colores del arcoiris, podemos describir el conjunto Q por extensión así: **Q=**{rojo, naranja, amarillo, verde, azul, violeta}

Si un conjunto tiene muchos elementos puedes hacer uso de los puntos suspensivos para describirlos.
Ejemplo: W={1,2,3,… ,98,99,100}

Descripción de conjuntos por comprensión

Los conjuntos pueden tener una variada cantidad de elementos. Se pueden describir mencionando las características que comparten los elementos que los conforman.

Ejemplo, si **C** es el conjunto conformado por todos los países del mundo se puede escribir:

C={x|x es un país}

En donde la barra | se lee como "tal que". Así, la anterior expresión se lee: "C es el conjunto de x, tal que x es un país". En este caso el **símbolo** x es usado para representar los elementos del **conjunto C.**

DIAGRAMAS DE VENN

DIAGRAMAS DE VENN

Conectivos

En ocasiones los elementos que conforman un conjunto deben satisfacer más de una condición o una de varias. En tales casos se usan los conectivos **disyunción y conjunción.**

La disyunción

Ejemplo:

Sea A = {a|a es un animal mamífero o volador}. Aquí hay dos condiciones para los animales que forman el conjunto A: ser mamífero o volar. **La disyunción es la letra "o" que conecta y representa a los elementos del conjunto que cumplen alguna de las dos condiciones o ambas.**

Ejemplo, la abeja vuela, por lo cual puede ser del conjunto. El gato por ser mamífero, también puede ser de A. El murciélago tiene las dos condiciones, ya que es un mamífero que vuela, así que también pertenece a A.

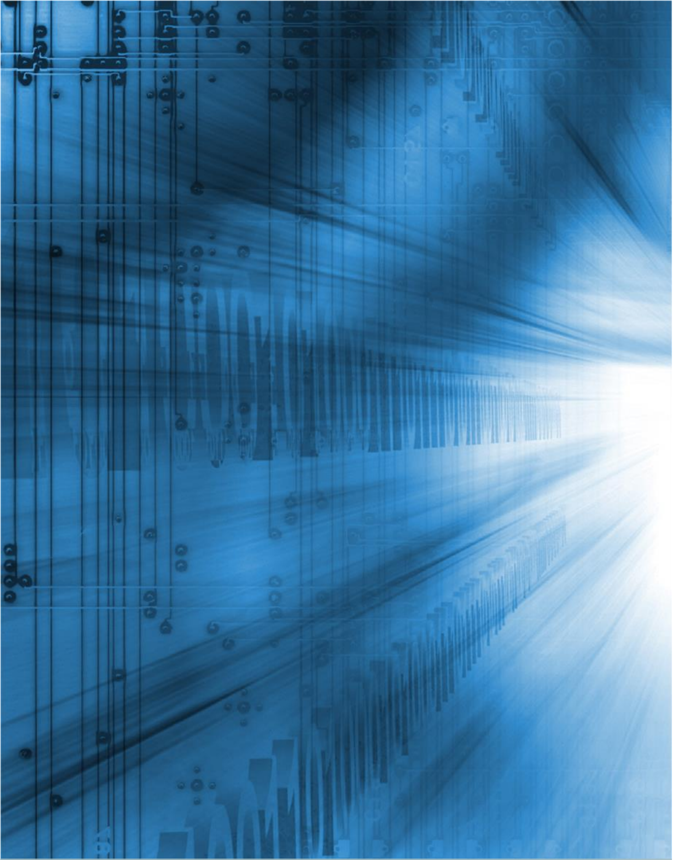
DIAGRAMAS DE VENN

La conjunción

Definamos el conjunto P así:

Sea **P=**{p|p es un número mayor que cero y menor que cero} En este caso también hay dos condiciones pero están unidas por la conjunción "y". E**sto es, que los elementos que pertenezcan al conjunto deben cumplir las dos condiciones simultáneamente**. Como no hay números que satisfagan las dos condiciones a la vez, se concluye que el conjunto P no tiene elementos.

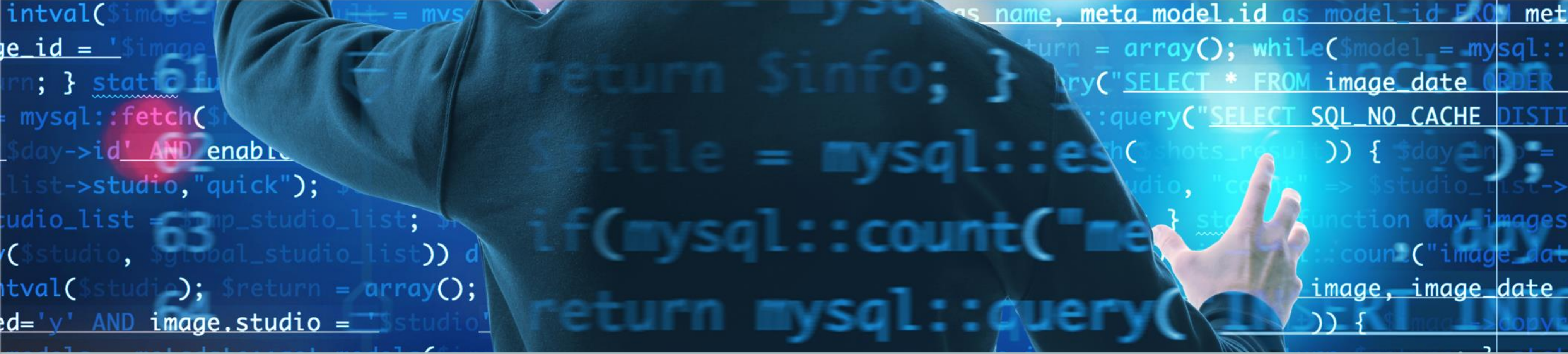
También es posible combinar los anteriores conectivos para establecer las condiciones que deben cumplir los elementos de un determinado conjunto.



DIAGRAMAS DE VENN

Por ejemplo:

sea K={k|k es un número mayor o igual que 4 y menor que 8}.



EJERCICIOS

Define si los siguientes elementos que se mencionan son un conjunto:

1.- El grupo de niños más divertidos de la escuela.

R: No es un conjunto. La propiedad ser divertido no es clara.

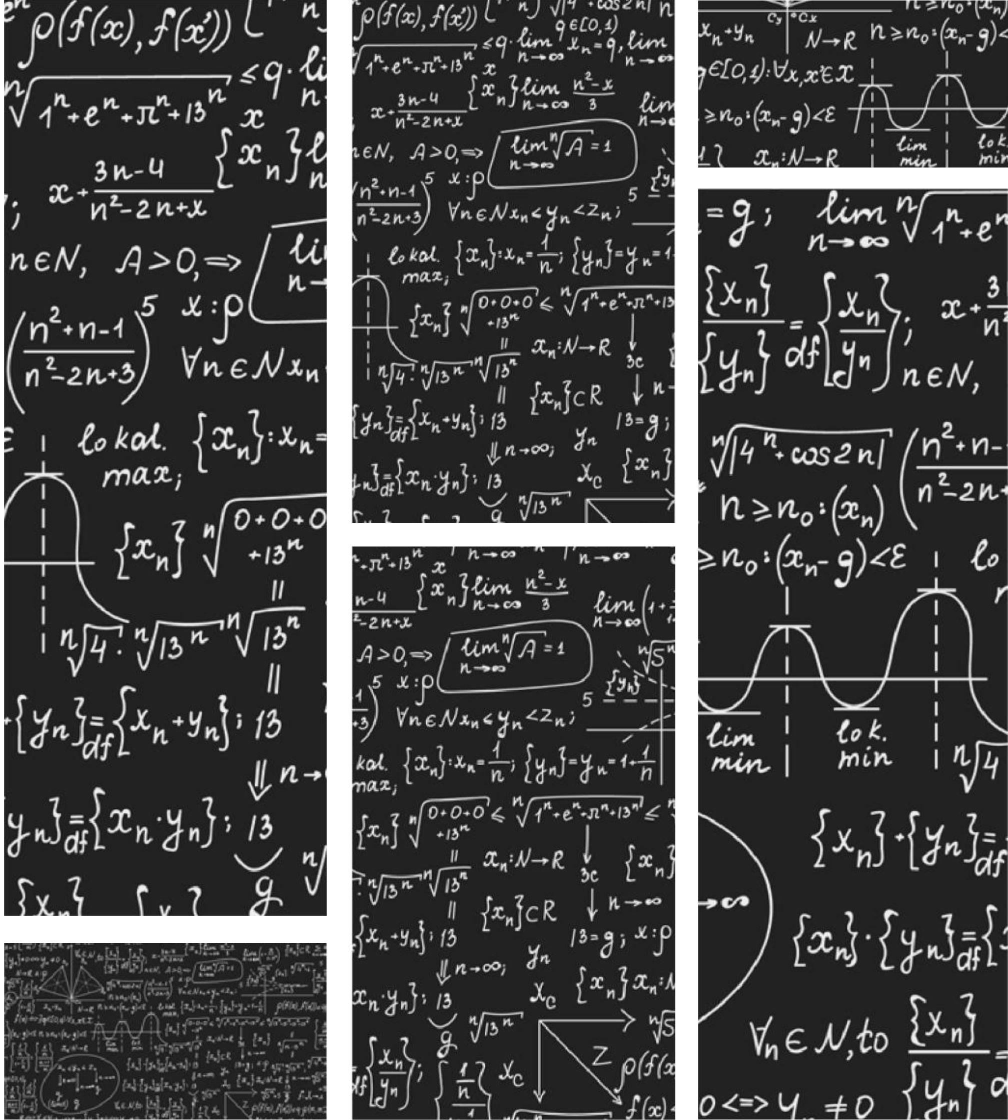
2.-El grupo de todos las personas mayores de 5 años.

R: Si es un conjunto. La condición mayor de 5 años es precisa.

Te invitamos a realizar la siguiente lectura:

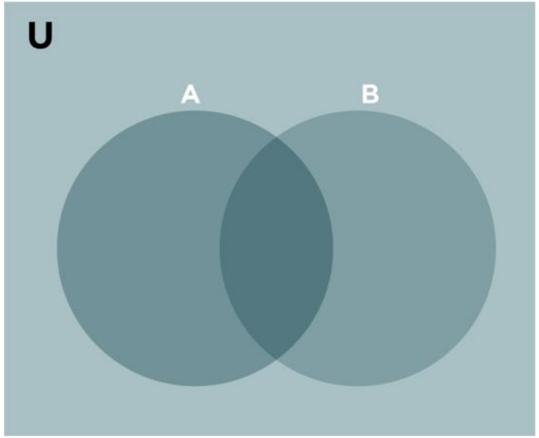
Conjuntos

CLIC AQUÍ



TEMA 2. OPERACIONES BÁSICAS DE CONJUNTOS

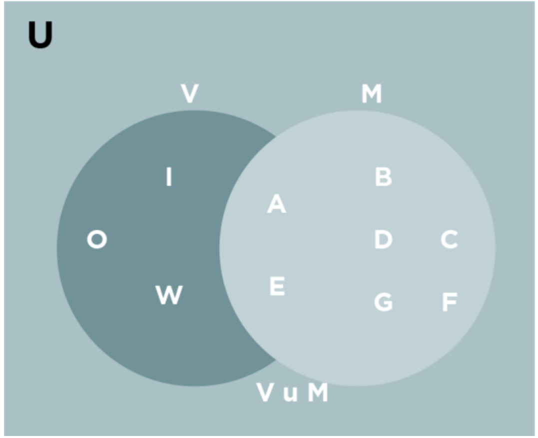
OPERACIONES BÁSICAS DE CONJUNTOS



En los conjuntos se pueden realizar algunas operaciones básicas, que parten de algunos conjuntos dados y se obtienen nuevos conjuntos.

Sean dos conjuntos, A y B del conjunto universal U
Las **operaciones básicas** que podemos definir entre conjuntos son:
1) Unión de conjuntos, 2) Intersección de conjuntos,
3) Diferencia de conjuntos, 4) Conjunto complementario,
5) Diferencia simétrica de conjuntos

1) Unión de conjuntos
La unión de los conjuntos **V** y **W** es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a V o a W. Se denota como **V** U **W.**

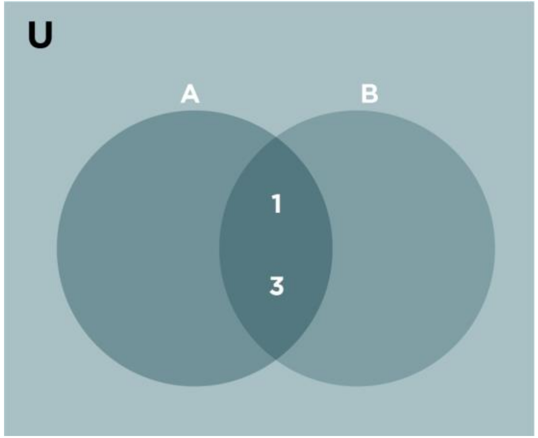


OPERACIONES BÁSICAS DE CONJUNTOS

Sean **V** y **W** conjuntos.
Se define la **unión** de V con W, como: **V U W =** $\{x \mid x \in v \text{ o } x \in W\}$
V **unión** W es igual al conjunto de las **x**, tales que **x pertenece** al conjunto **V** o **x pertenece** al conjunto **W.**

2) Intersección de conjuntos

La **intersección** de los conjuntos **A** y **B** es el conjunto de los elementos que son **comunes** a **A** y **B**, como ves, son elementos que **pertenecen** a **A** y que también a B. Se denota como $A \cap B$



$\mathbf{A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}}$

A **intersección** B es igual al conjunto de las **x**, tales que **x pertenece** al conjunto **A** y **x pertenece** al conjunto B.

OPERACIONES BÁSICAS DE CONJUNTOS

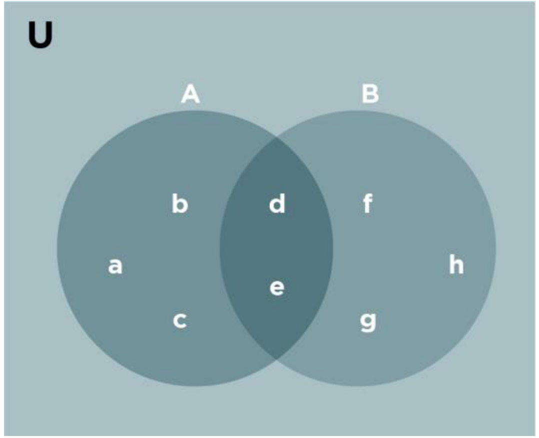
3) Diferencia de conjuntos

La **diferencia** de los conjuntos **A** y **B** es el conjunto de los elementos de **A que no pertenecen a B**.
Se denota como **A – B** o **A \ B**

A y B son dos conjuntos, se define la diferencia de A con B´´ («A menos B»)

A - B = {x | x ϵ A y x ∉ B}

A menos B es igual al conjunto de las **x**, tales que **x pertenece** al conjunto **A** y x **no pertenece** al conjunto **B**.



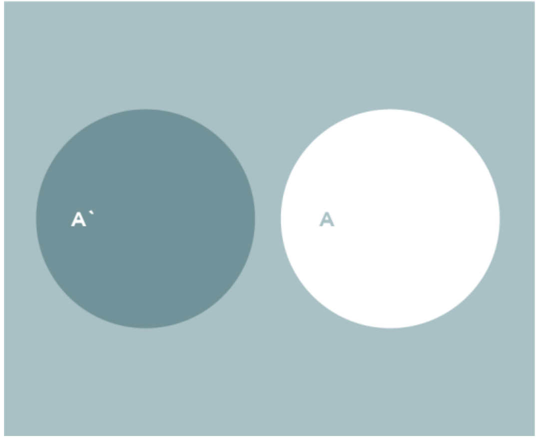
OPERACIONES BÁSICAS DE CONJUNTOS

4) Conjunto complementario

Es el conjunto de elementos que **no pertenecen** a **A** y que **están** en el conjunto **universo**, es la diferencia del conjunto universal U y del conjunto A.
Se denota como $\mathbf{A}^c$

Sea A un conjunto y A C U se define el complemento de A como:
$\mathbf{A}^c = U \setminus A = \{x \in U \text{ y } x \notin A\}$ o sea: $\mathbf{A}^c = U - A$

El complemento de A es igual al conjunto universo U menos A e igual al conjunto de las x, tales que x pertenece al conjunto universo U y x no pertenece al conjunto A.

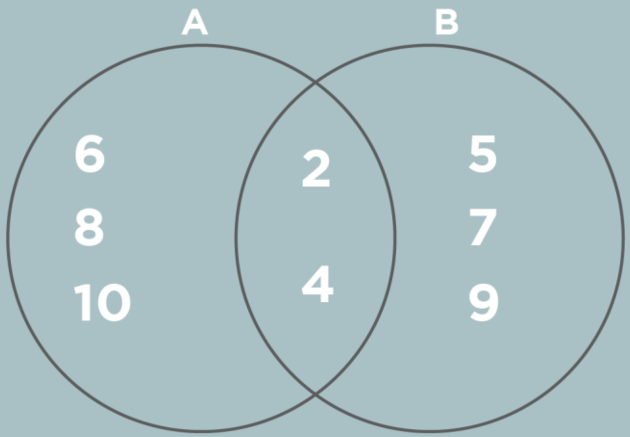


OPERACIONES BÁSICAS DE CONJUNTOS

5) Diferencia simétrica de conjuntos

La diferencia simétrica de dos conjuntos A y B, es la diferencia de A U B y A   B.

Se denota como A △ B



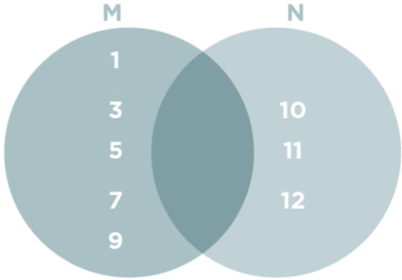
A △ B= {5;6;7;8;9;10}
Esto es:
A △ B= (A-B) U (B-A)
A △ B= (AUB) - (B∩A)

EJERCICIO INTERACTIVO

1.-Sean los conjuntos M={ 1, 3, 5, 7, 9 } y N={ 10, 11, 12 } Realiza la unión U

Respuesta:

MU N ={ 1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 12 }



2.- Una fábrica tiene 350 trabajadores, 160 obtuvieron un aumento de salario, 100 fueron promovidos y 60 fueron promovidos y obtuvieron un aumento de salario. Cuántos no obtuvieron ni aumento ni fueron promovidos.

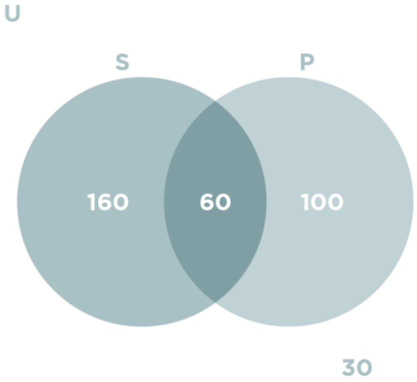
Respuesta:

S={160 obtuvieron aumento}

P={100 fueron promovidos}

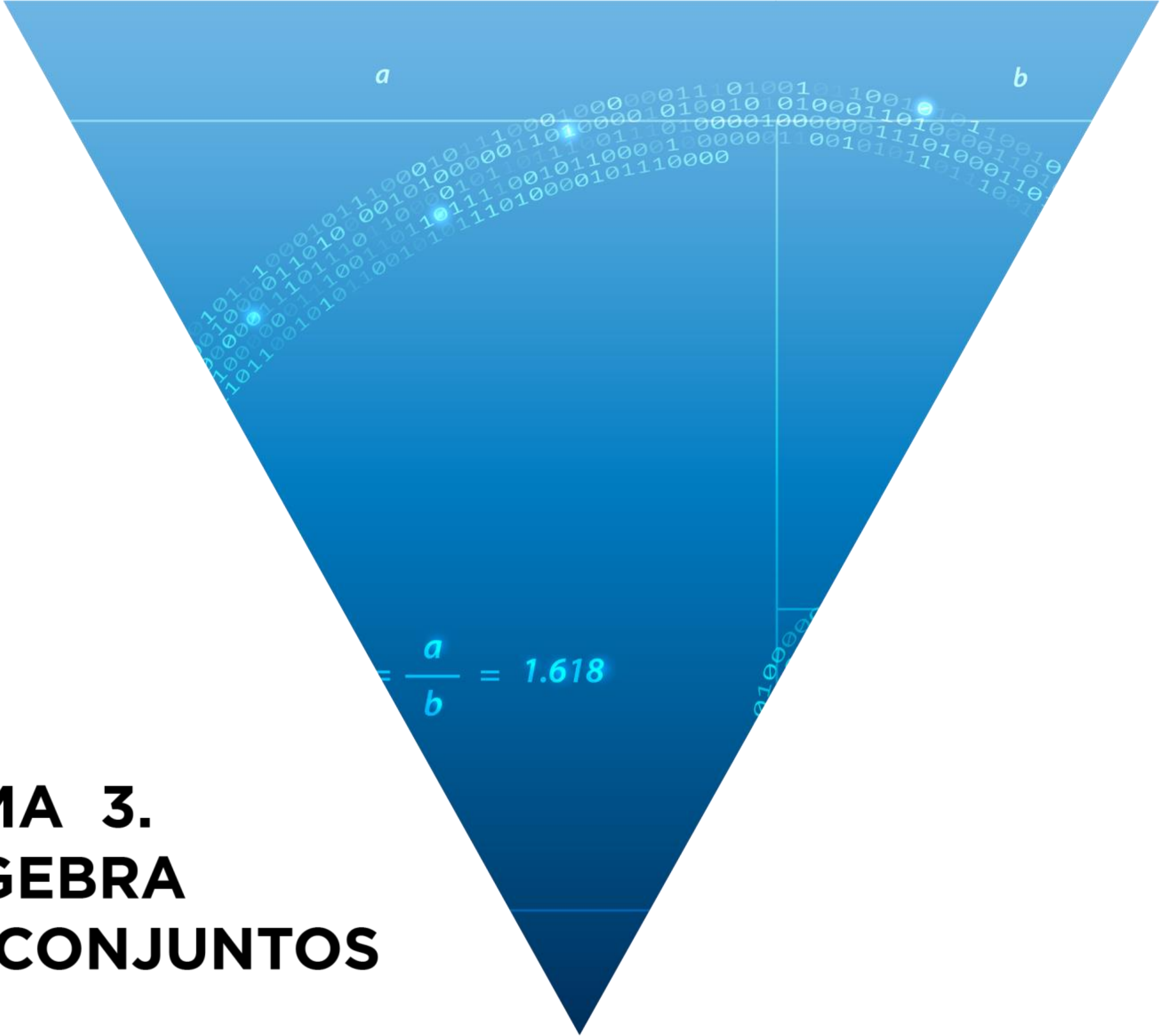
$S \cap P$ = {60 tuvieron aumentos y promovidos}

160 + 100 + 60 – 350=30



VIDEO UNIDAD 1

Te invitamos a ver el siguiente video:



TEMA 3. ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

El **álgebra de conjuntos,** es el estudio de las operaciones básicas que pueden realizarse con conjuntos, como la unión, **intersección y complementación.**

Los conjuntos pueden ser representados mediante diagramas de Venn, que pueden ser círculos, cuadrados, rectángulos, entre otros.

Para resolver ejercicios del álgebra de conjuntos, es necesario utilizar las diferentes reglas y propiedades que nos ofrece cada operación. A un conjunto, cualquiera que sea, lo nombraremos con una letra mayúscula.

Adicionalmente a las operaciones básicas, debemos saber que existen **diferentes tipos de conjuntos** que podemos encontrar, siendo los siguientes:

ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

El **conjunto universal** es aquel que contiene a todos los conjuntos de los que estemos relacionando, lo designaremos con la letra U mayúscula.

El elemento de un conjunto es un objeto individual que forma parte de ese conjunto a ϵ A (el elemento a pertenece al conjunto A).

Dos conjuntos son iguales si están formados por los mismos elementos.

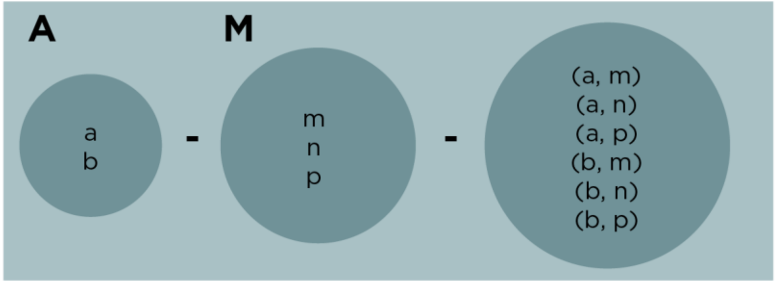
El conjunto vacío es aquel que no tiene ningún elemento, con el símbolo ϕ. Si no hay ningún elemento, no tenemos un conjunto

ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

Se dice que A es subconjunto de B, y se representa A U B, si todos los elementos de A pertenecen a B. Diremos también que A se incluye en B.

Producto cartesiano

Constituye una operación del Álgebra de Conjuntos, en donde se produce otro conjunto A x M en donde se anotan todos los pares posibles, donde siempre el primer elemento provendrá del conjunto A, y el segundo elemento siempre provendrá del conjunto B.



A-M= {(a, m), (a, n), (a, p), (b, m), (b, n), (b, p)}

VIDEO UNIDAD 1

Te invitamos a ver el siguiente video:

ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

Por ejemplo, si se tiene un conjunto A que esté conformado por los siguientes números:
A = {1, 2, 4, 6, 7}
Y un segundo conjunto M, en donde se puedan distinguir los siguientes elementos:
M = {a, b, c}
Una operación de Producto Cartesiano originaría un conjunto A x M donde se podrían ver los siguientes elementos:
A x M = {(1,a), (1,b), (1,c),(2,a),(2,b),(2,c),(4,a),(4,b), (4,c), (6,a), (6,b), (6,c), (7, a), (7,b), (7, c)}

Veremos a continuación una tabla con las propiedades del álgebra de conjuntos, en la cual observaremos algunas conocidas propiedades tales como: la Distributiva, Asociativa y Conmutativa, entre otras.

ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

Leyes de Álgebra de Conjuntos

1. Asociatividad:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

2. Conmutatividad

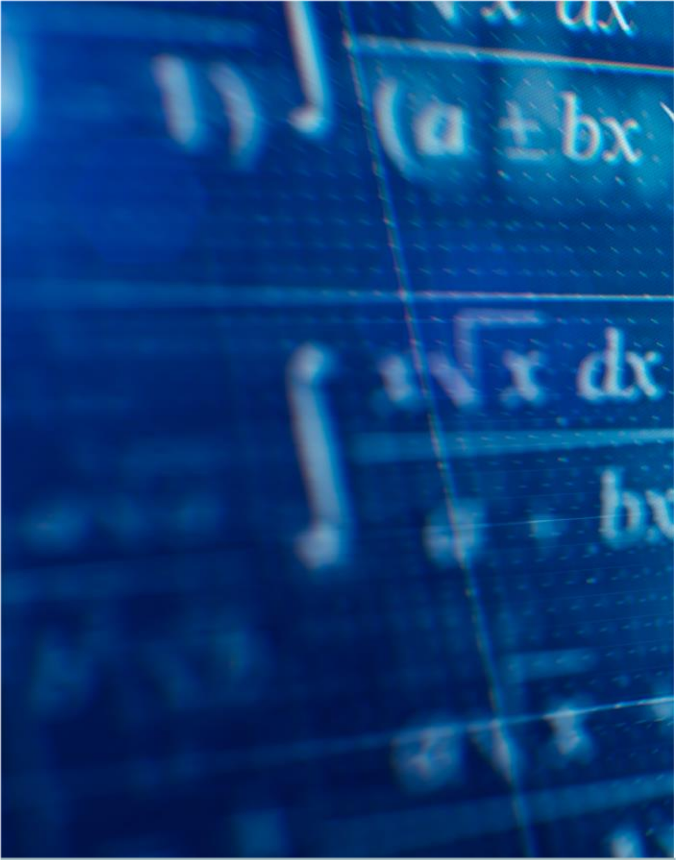
$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

3. Distributividad:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

4. Absorción:

$$A \cup (A \cap B) = A$$
$$A \cap (A \cup B) = A$$



ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

5. Idempotencia:

AUA=A

B ∩ B=B

6. Identidad:

AU ϕ =A

AUU=U

A ∩ U = A

A ∩ ϕ = ϕ

7. Complemento:

AUAc=U

A. ϕ, ϕ' = U

A ∩ Ac = ϕ

8. Ley de Morgan:

(AUB)c = AcÇBc

(A ∩ B)c = AcUBc

A – B = A ∩ Bc

ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

Leyes de Álgebra de conjuntos representadas como variables matemáticas

Si 1 designa al conjunto universal y 0 al conjunto vacío, las siguientes identidades son válidas en el álgebra de conjuntos para conjuntos arbitrarios X, Y, Z.

Leyes conmutativas

$XY = YX$	$X+Y=Y+X$

Leyes asociativas

$X(YZ) = (XY)Z$	$X+(Y+Z) = (X+Y)+Z$

Leyes distributivas

$X(Y + Z) = XY + XZ$	$X+YZ=(X+Y)(X+Z)$

Leyes de idempotencia

$XX = X$	$X+X=X$

Leyes de complementación

$XX' = 0$	$X+X'=1$

Leyes de absorción

$X (X + Y) = X X + XY = X.$	$X+XY=X$

ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

Leyes de D'Morgan

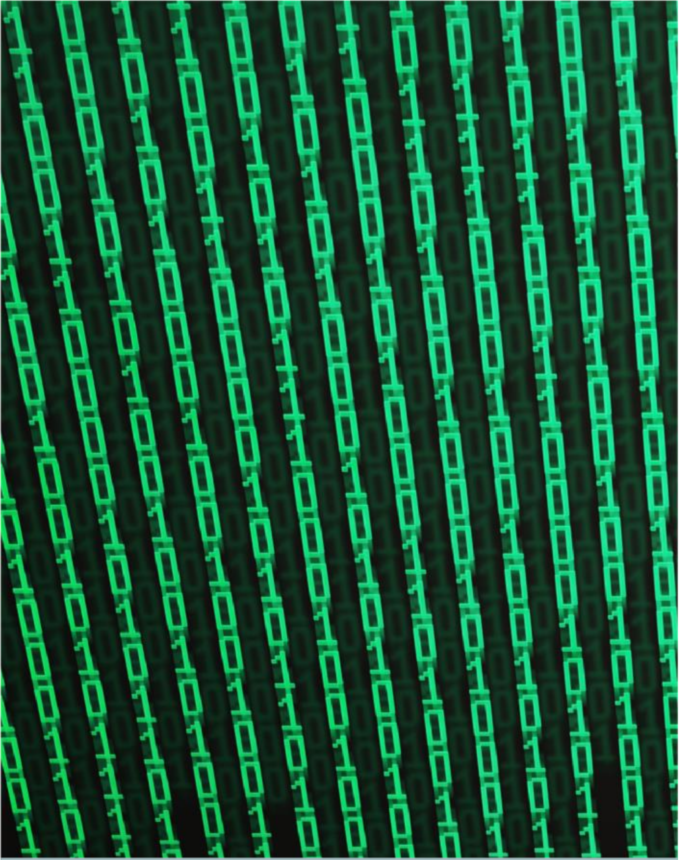
$(XY)' = (X' + Y')$ $(X + Y)' = X'Y'$.

Leyes con 0 y 1

$X\,1 = X$ $X + 0 = X$
$X\,0 = 0$ $X + 1 = 1$
$0' = 1$ $1' = 0$

Ley de complemento doble $(X')' = X$.

Es importante destacar la dualidad dada en estas leyes, es decir, si en cualquiera de las identidades, cada unión se reemplaza por una intersección, cada intersección por una unión, cada 0 por 1 y cada 1 por 0, la expresión resultante es también una identidad.



EJERCICIO

1. Enuncia con palabras los siguientes incisos con el método de extensión:

a) A={ x | x2 = 4}

Respuesta: A es el conjunto de los x tales que x al cuadrado es igual a cuatro.

Los únicos números que elevados al cuadrado dan cuatro son 2 y - 2, así que A={2,-2}

b) B={x| x-2=5}

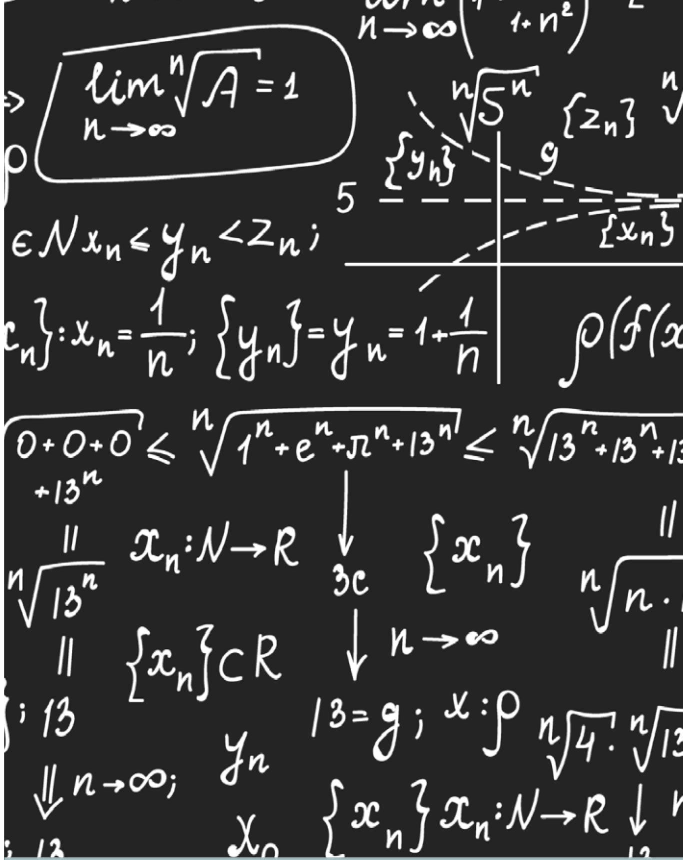
Respuesta: Se lee "B es el conjunto de los x tales que x menos 2 es igual a 5". La única solución es 7, de modo que B ={7}

2. Sean W={Juan, Josué, Ernesto} y V={María, Carmen}.
Hallar W x V.

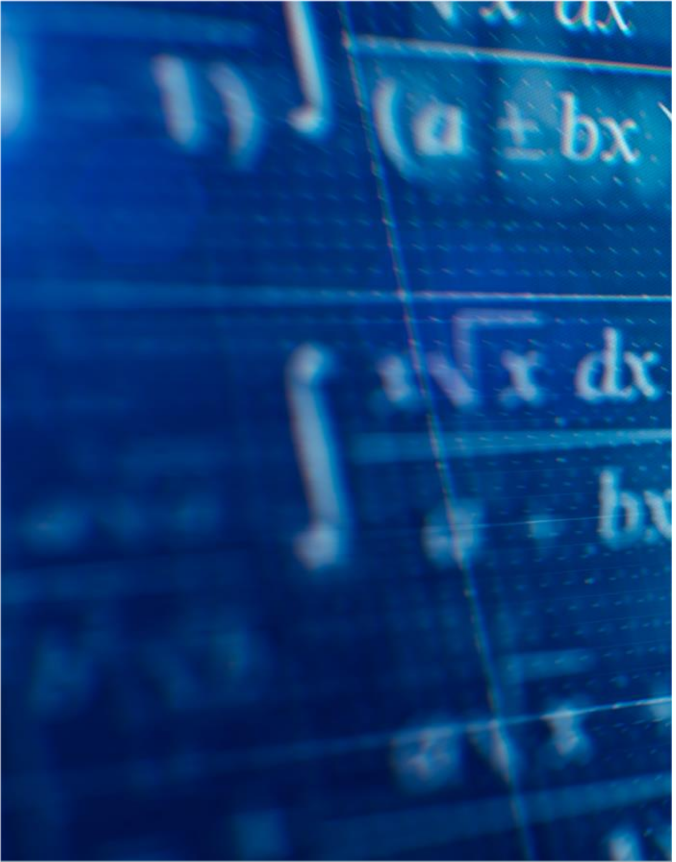
Respuesta:
W x V consiste en todos los pares ordenados (a, b) en los que a ε W y b ε V. Por tanto:
WxV=(Juan, María), (Juan, Carmen), (Josué, María), (Josué, Carmen), (Ernesto, María), (Ernesto, Carmen)

3. Sean A={a,b}, B={2,3}, C={3,4} Hallar: A x (B u C)

Respuesta:
Se averigua primero B u C={2,3,4}. Entonces: A x (B u C) = {(a,2),(a,3),(a,4),(b,2),(b,3),(b,4)}



EJERCICIO



EJERCICIO

4. Dados los conjuntos
A={2,3,5}, B={3,6,8}, C{4,5}, U={1,2,3,4,5,6,7,8} Obtener la diferencia simétrica

Respuesta:(Ac - Bc)- C={6,8} C-{Ac - Bc}={5,4}
(Ac-Bc) △ C={4,5,6,8}

5. Dado los conjuntos M={1,2,3,4,5},P={-3}, T={-3,3,4} Calcular M – (T - P)
T .- P={-3,3,4} – {3}
T – P = {3,4}
M – (T - P)]= {1,2,5}

Ejemplos: Indica en orden las leyes que justifican los pasos indicados

6. $A - (A \cap E) = A \cap (A \cap E)^c$

$= A \cap (A^c \cup E^c)$	por Ley de Diferencia
$= (A \cap A^c) \cup (A \cap E^c)$	por Ley De Morgan
$= \phi \cup (A \cap E^c)$	
$= (A \cap E^c) \cup \phi$	
$= A \cap E^c = A - E$	

7. $A - (A \cap E) = A \cap (A \cap E)^c$	por Ley de Diferencia
$= A \cap (A^c \cup E^c)$	por Ley De Morgan
$= (A \cap A^c) \cup (A \cap E^c)$	por Ley Distributiva
$= \phi \cup (A \cap E^c)$	por Ley de Complemento
$= (A \cap E^c) \cup \phi$	
$= A \cap E^c$	
$= A - E$	

EJERCICIO

FORO 1. UNIDAD 1.

Entorno de trabajo

Participa en el foro enviando imágenes que demuestren que ya tienes acceso a las siguientes herramientas en su versión de prueba:

- http://logicaunad.com/jtruth/

Presiona el botón para participar en el foro.

¡ FELICIDADES !

Acabas de concluir la **primera unidad** de tu curso **Matemáticas Computacionales**. Te invitamos a finalizar este esfuerzo realizando el examen parcial correspondiente. Para ello debes regresar a la pantalla principal y dar clic en Presentar examen.

MATEMÁTICAS COMPUTACIONALES
UNIDAD 2
LÓGICA PROPOSICIONAL

TEMARIO

1. Introducción al cálculo de proposiciones.

2. Concepto de argumento y tipos de proposiciones lógicas.

3. Conexiones lógicas y jerárquicas.

4. Cálculo de predicados.

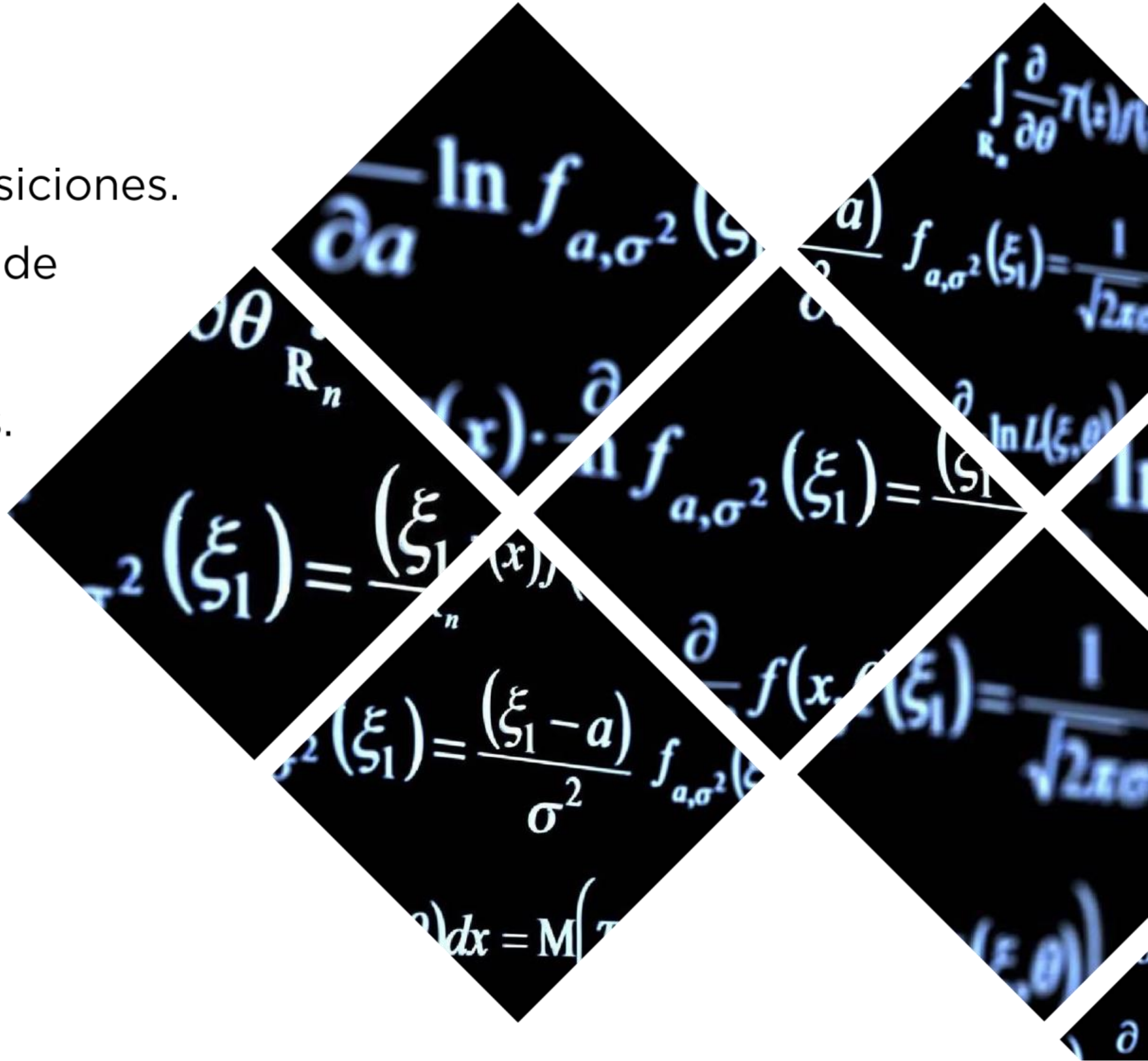
5. Álgebra declarativa.

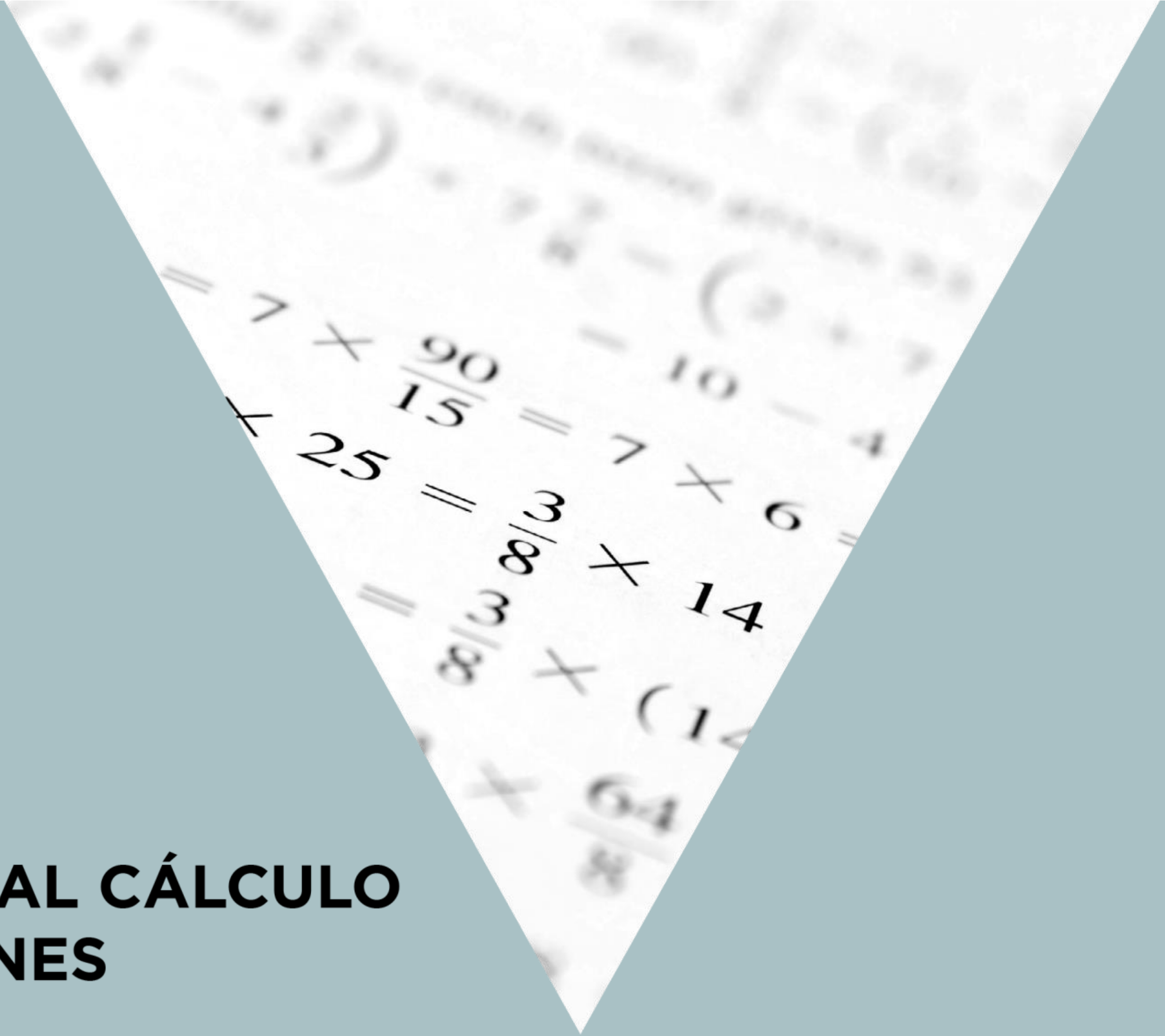
6. Inducción matemática.

7. Reglas de inferencia.

8. Evaluación de expresiones.

9. Tautologías y contradicciones.





TEMA 1
INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DE PROPOSICIONES

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DE PROPOSICIONES

Lógica

Es el estudio del razonamiento. Se centra en la relación entre las afirmaciones y no en el contenido en particular, nos ayuda como principal arma de deducción.

Ejemplo:

Todos los matemáticos usan sandalias
Cualquiera que use sandalias es un algebrista
Por lo tanto, todos los matemáticos son algebristas

En el sentido técnico, la lógica no ayuda a determinar si alguna de estas afirmaciones es cierta; sin embargo, si las primeras dos afirmaciones son ciertas, la lógica asegura que la afirmación "todos los matemáticos son algebristas" también es cierta.

Los métodos lógicos se usan en matemáticas para demostrar teoremas y, en las ciencias de la computación, para probar que los programas hacen lo que deben hacer.

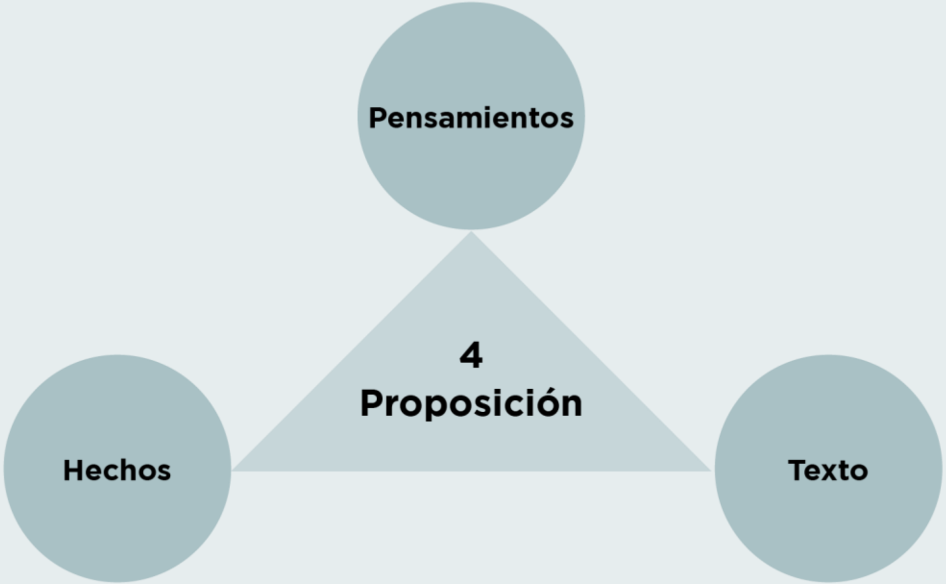
INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DE PROPOSICIONES

El argumento puede ser informal o formal; pero se requerirá un argumento lógico. Por ello, existe la lógica informal y formal:

Lógica informal: Se dedica al análisis de los procedimientos para poder elaborar conclusiones. Su fundamento es que el pensamiento humano puede ser falso en ocasiones. Así, la lógica informal separa los razonamientos correctos de los equivocados.

Lógica formal: Estudia argumentos racionales mediante un procedimiento organizado y esquematizado. Es estricta comparada con la lógica informal.

Proposición: Es una oración con valor referencial o informativo, es decir, que puede ser falsa o verdadera pero no ambas a la vez.



INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DE PROPOSICIONES

Un cálculo es una estructura pura; un sistema de relaciones y se compone de lo siguiente:

Un conjunto de elementos primitivos (símbolos elementales).
Un conjunto de reglas de formación o de construcción.
Un conjunto de reglas de transformación.

El cálculo proposicional es el estudio de las relaciones lógicas entre objetos llamados proposiciones, pueden interpretarse como afirmaciones que tienen algún significado en contextos de la vida real. Una proposición es cualquier frase que tenga un valor de verdad bien definido, es decir, que sea verdadera o falsa.

Proposiciones	No son proposiciones
China está en Asia	Inserte el CD
2x2 es igual a 4	¿Qué día es hoy?

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DE PROPOSICIONES

Las proposiciones son los bloques básicos de construcción de cualquier teoría de lógica. Se usan variables con letras minúsculas, como p, q y r, para representar las proposiciones.

La validez de las proposiciones depende más bien de las relaciones entre ellas tomando cada una como un todo. Para analizar esta inferencia debemos ver cuáles son las relaciones entre estas proposiciones.

Esto se consigue formalizando nuestra inferencia como:

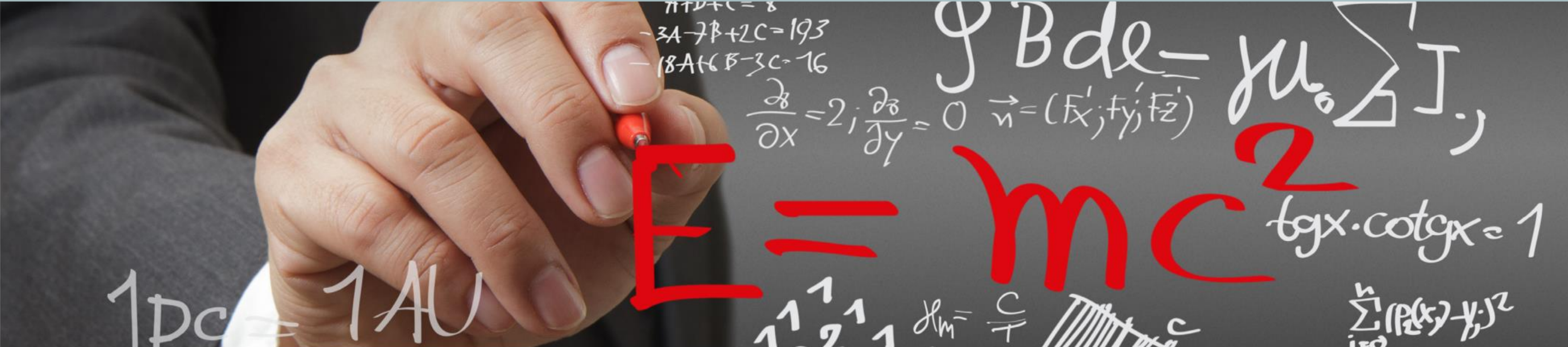
> Si p entonces **q**:
> Y **p**.
> Por tanto **q**.

El modo en que la proposición que se sustituye por "p" se divida, todas las inferencias cuyas proposiciones tengan entre sí las mismas relaciones que tienen las proposiciones de nuestro ejemplo, serán también válidas. Se alude a esto diciendo que las inferencias que tengan esa forma son necesariamente válidas.

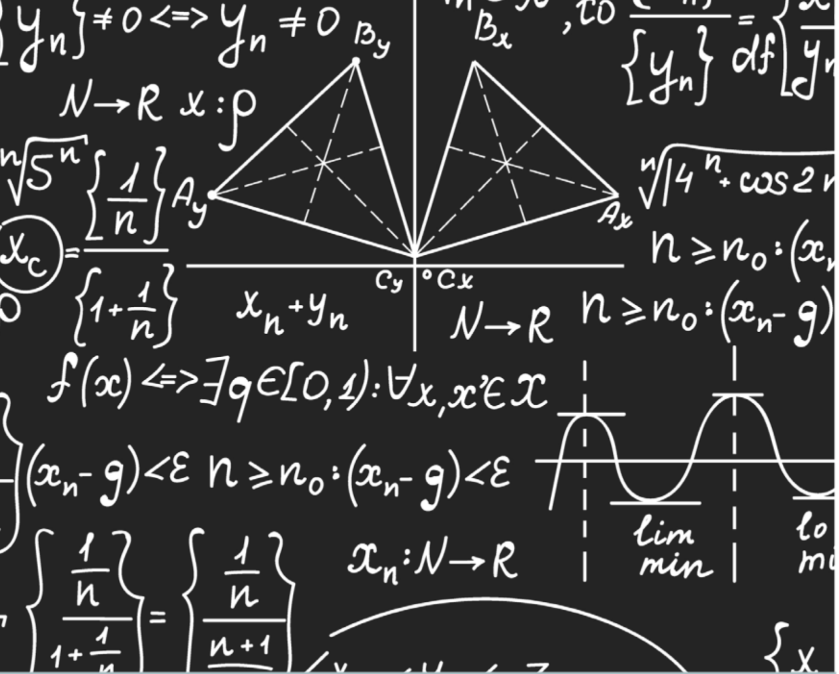
Te invitamos a que revises la lectura, ejercicio y el video que aparecen en los siguientes botones, con el fin de que reafirmes los conocimientos vistos hasta ahora.

Video

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DE PROPOSICIONES



TEMA 2
CONCEPTO DE ARGUMENTO Y TIPOS DE PROPOSICIONES LÓGICAS



CONCEPTO DE ARGUMENTO Y TIPOS DE PROPOSICIONES LÓGICAS

Argumento

La argumentación es parte de nuestra vida y existe con el propósito de ofrecer razones en favor o en contra de una propuesta. Un argumento se compone de un conjunto de proposiciones, de las cuales unas se denominan premisas y otra conclusión.

Las premisas son las razones que se ofrecen como fundamento o apoyo, a fin de que puedan aceptar racionalmente la conclusión.

La conclusión, por su parte, es la proposición que se defiende sobre la base de las premisas.

Un requisito importante para que exista un argumento es que debe existir al menos una premisa y una conclusión, pero puede haber más de una premisa.

CONCEPTO DE ARGUMENTO Y TIPOS DE PROPOSICIONES LÓGICAS

Existen dos tipos de proposiciones lógicas:

Proposiciones Simples

No tienen oraciones componentes afectadas por negaciones (“no”) o términos de enlace como conjunciones (“y”), disyunciones (“o”) o implicaciones (“si . . . entonces”).

Pueden aparecer términos de enlace en el sujeto o en el predicado, pero no entre oraciones componentes.

Las proposiciones individuales se llaman proposiciones primitivas ya que no es posible descomponerlas en elementos más sencillos.

Ejemplo:
La ballena es roja. La raíz cuadrada de 16 es 4. Teresa va a la escuela...

CONCEPTO DE ARGUMENTO Y TIPOS DE PROPOSICIONES LÓGICAS

Proposiciones compuestas

Son oraciones que sí están afectadas por negaciones o términos de enlace entre oraciones componentes.

También es posible combinarlas para crear estructuras más complejas.

Ejemplo:
Mi carro es rojo / El elefante es grande.

Proposición compuesta: Mi carro es rojo y el elefante / Si el elefante es grande entonces mi carro es rojo / No es cierto que mi carro es rojo o que el elefante es grande.

¿SABÍAS QUE?

Existen proposiciones, sean simples o compuestas, que están formuladas en términos de una o más variables.

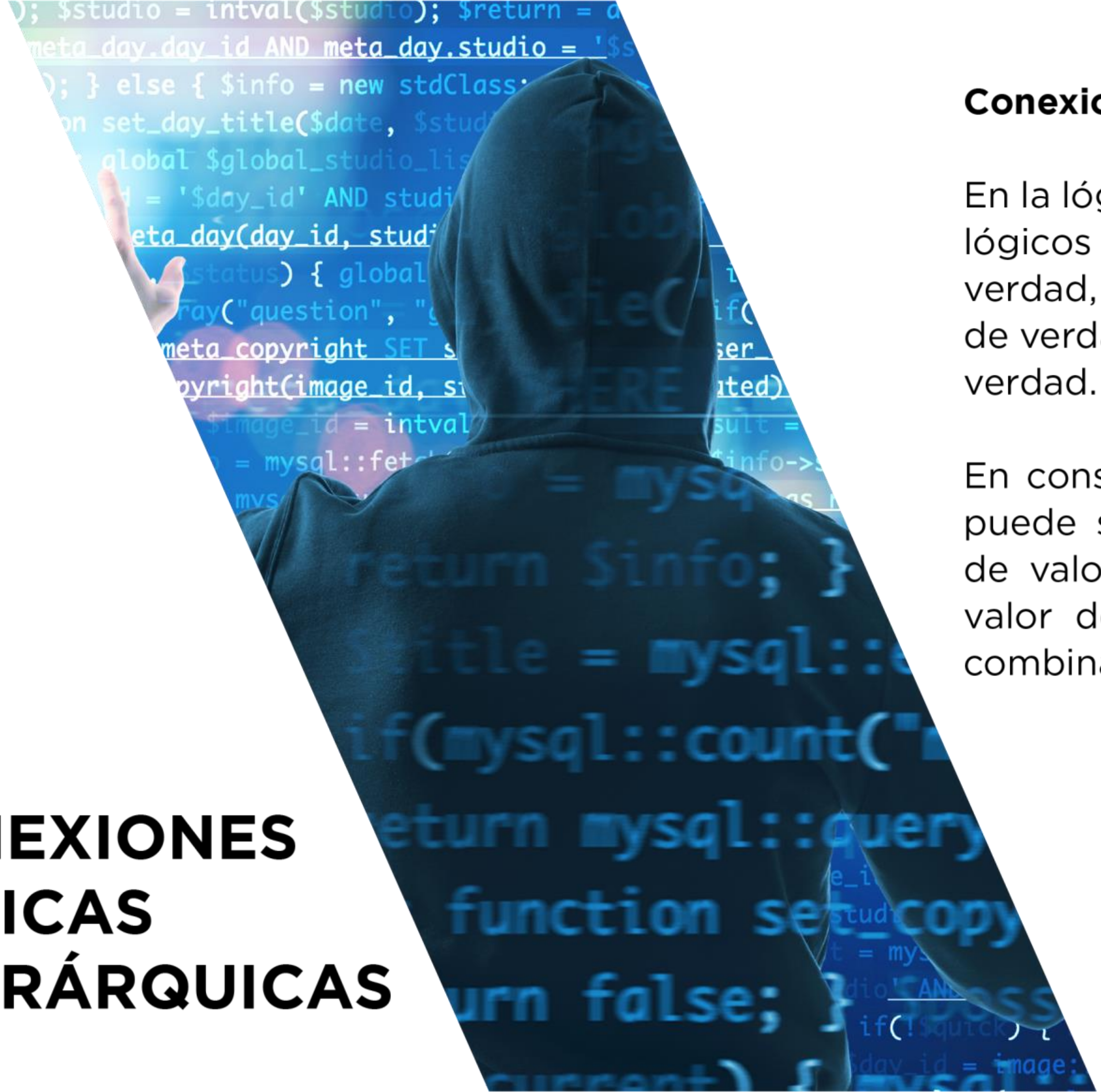
Por ejemplo:

1) Si $x > 2$, entonces $5x - 27 > 5$.
2) $\operatorname{sen}(x)$ no es un número mayor que 0.5.
3) Si $x > 5$, entonces $2x - 3 > 16$.
4) $\operatorname{sen}(x+y) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(y)$.

A este tipo de proposiciones se les conoce como abiertas dado que son falsas o verdaderas, dependiendo del valor de la(s) variable(s).

TEMA 3
CONEXIONES LÓGICAS Y JERÁRQUICAS

CONEXIONES LÓGICAS Y JERÁRQUICAS



Conexiones lógicas

En la lógica proposicional, los conectivos lógicos son tratados como funciones de verdad, esto es, toman uno o dos valores de verdad, y devuelven un único valor de verdad.

En consecuencia, cada conectiva lógica puede ser definida mediante una tabla de valores de verdad que indique qué valor devuelve la conectiva para cada combinación de valores de verdad.

CONEXIONES LÓGICAS Y JERÁRQUICAS

Conectivas más usuales mediante tablas de verdad:

Negación	No	Luis no es rubio	$\neg$ $\sim$
Conjución	Y	Luis es rubio y Lupe morena	$\cap$ $\wedge$
Disyunción	O	Si Luis es rubio o Lupe es morena	$\cup$ $\vee$
Implicación	Si… entonces	Si Luis es rubio entonces Lupe	$\Rightarrow$$\rightarrow$

En la lógica, las tablas de verdad pueden tener como resultado una afirmación verdadera o falsa (V,F), pero en la lógica matemática, estas afirmaciones se representan como: F = 0, V= 1.

CONEXIONES LÓGICAS Y JERÁRQUICAS

Jerarquía de los Conectores Lógicos (operadores)
Es el orden en el que se resolverá una expresión compuesta (proposiciones), y el orden es el siguiente. Primero los operadores del mismo orden se resuelven de izquierda a derecha.

1. Paréntesis 2. Operadores unarios. 3. Operadores binarios.
Entonces, los cuadros sintácticos quedarían así

$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$					
p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$
V	V	F	V	F	V
V	F	V	F	V	V
F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F

CONEXIONES LÓGICAS Y JERÁRQUICAS

Conjunción:
Se denota "y" $\wedge$ ($\cap$) y se define con la siguiente tabla: siempre la "y" solo puede ser verdadera cuando ambas son verdaderas.

Conjunción		
p	**q**	**p$\vee$q**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Conjunción		
q	$\lceil$	**p=q $\wedge$ $\lceil$**
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Disyunción:
se denota V (U) "O" y se define con la siguiente tabla: A diferencia de la "y", la "O" es verdadera solo cuando una de las proposiciones sea verdadera.

Disyunción		
p	**q**	**p$\vee$q**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Disyunción		
q	$\lceil$	**p=q$\vee$$\lceil$**
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

CONEXIONES LÓGICAS Y JERÁRQUICAS

Negación:
En informática se simboliza como ⌉, o bien con el símbolo NOT y es solo el contrario de cualquier función.

Negación	
p	**¬p**
V	F
F	V

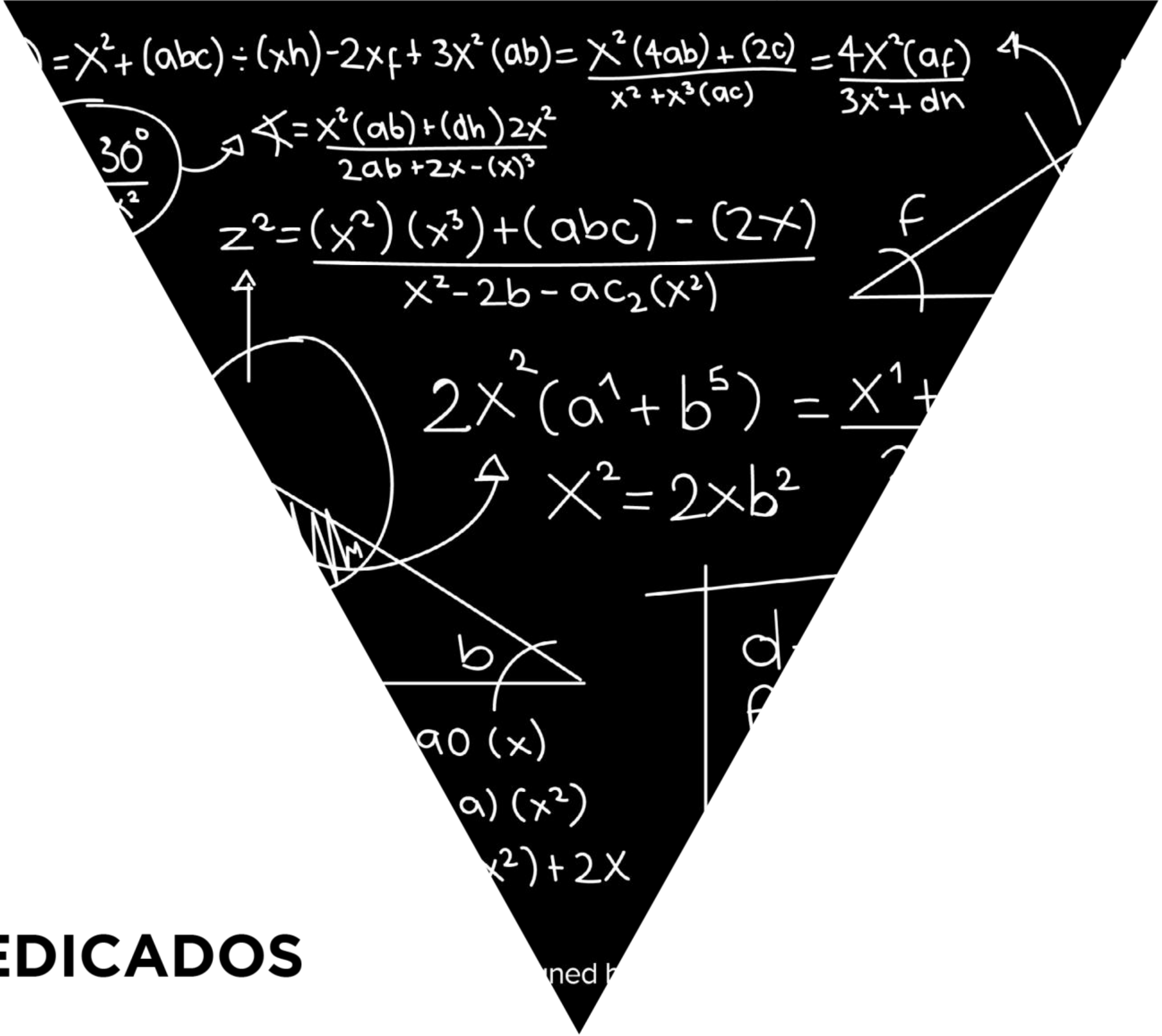
Negación	
p	**p~**
1	0
0	1

Condicional:
Si p entonces q , es verdadera si ambas proposiciones son verdaderas o falsas se representa por $p \rightarrow q$:

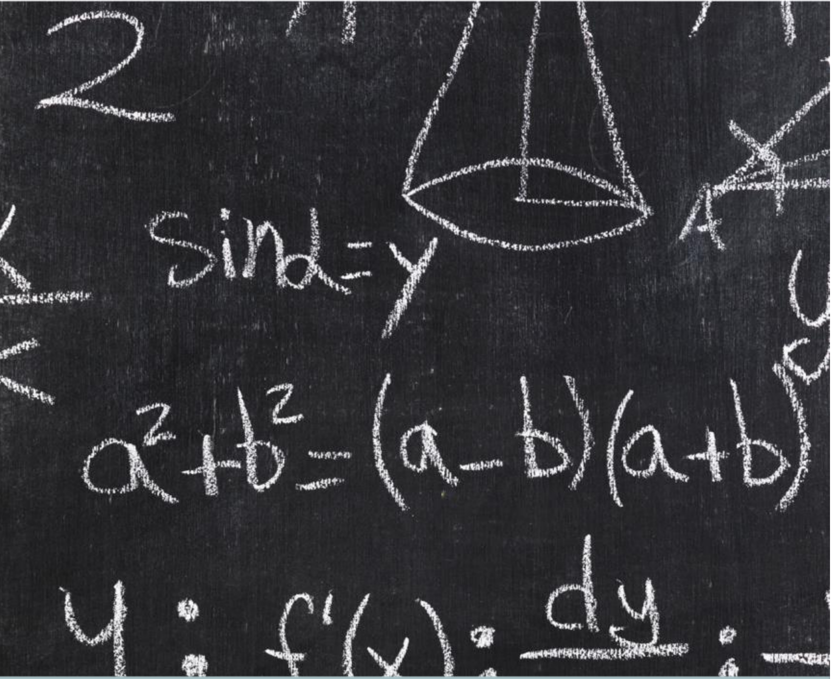
Condicional		
p	**q**	**$p \Rightarrow q$**
V	V	V
V	F	F
F	V	V

Bicondicional:
Es verdadera cuando ambas proposiciones p y q son verdaderas.

Bicondicional		
P	**q**	**$p \Longleftrightarrow q$**
V	V	V
V	F	F
F	V	F



TEMA 4
CÁLCULO DE PREDICADOS



CÁLCULO DE PREDICADOS

La lógica proposicional trata de las proposiciones y de sus combinaciones, pero desde la estructura (interior) de las proposiciones.

Ejemplo:

p:Todos los hombres son mortales
q: Sócrates es un hombre
r: Por lo tanto, Sócrates es mortal

No hay un forma correcta de expresar este argumento con cálculo proposicional.

Es decir, en lógica proposicional lo realizaría así:

Todos los hombres son mortales. Sócrates es un hombre. Por lo tanto, Sócrates es mortal.

p, q por lo tanto **r** no es correcto pero puede haber más de una premisa.

CÁLCULO DE PREDICADOS

Un predicado es una proposición en la que se afirma o se niega algo de uno o varios objetos (variables) que son los términos del predicado. Se puede decir que un predicado puede tener una o más variables y estas pueden tomar valores de un conjunto específico llamado **DOMINIO.**

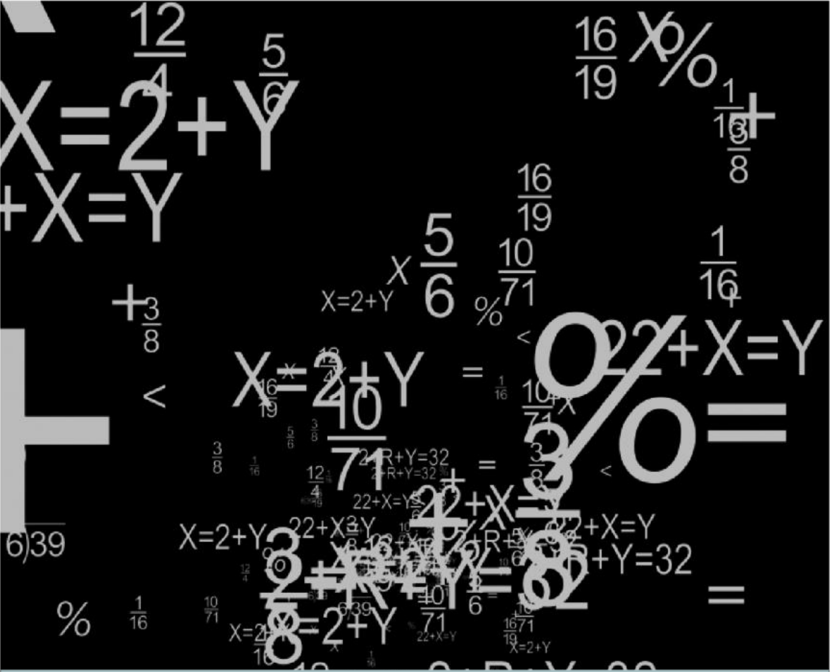
Así, la expresión mencionada en la página anterior es de la forma p(x,y) donde el **predicado** p representa "es padre de" y el domino es el conjunto de las personas.

Ejemplos:

1. El libro es rojo **Sol**.AZ(x),AR es el predicado: es de color rojo, el **dominio** de objetos.

2. Carmen compra mercancía los lunes en Almacenes A. Sol. A(x,y), A es el predicado: comprar en los almacenes cierto día, el dominio para el primer argumento es el de personas, el dominio del segundo son los días de la semana.

3. Ella tiene más años que Raúl en el trabajo. **Sol**. T(x,y), T es el predicado: tiene menos tiempo trabajando que, el dominio de las personas.



CÁLCULO DE PREDICADOS

La lógica de predicados (también llamada lógica de primer orden) es una extensión de la lógica proposicional que usa variables para los objetos.

Si usamos x para representar a algún humano, la afirmación "cada persona es hombre omujer" se puede representar como:

$\forall x(H(x) \forall M(x))$ donde $H(x)=$ "x es hombre", $M(x)=$ "x es mujer"

Estas variables se pueden combinar con símbolos de función para representar objetos nuevos y con símbolos de predicado para describir relaciones entre objetos.

Ejemplo:
Si $s(x)$ representa "el padre de x", y $M(x,y)$ representa "x es menor que y", entonces "toda persona es menor que su padre" se representa por $\forall x\ M(x,s(x))$.

CÁLCULO DE PREDICADOS

Conectivos usados en el cálculo de predicados

$\wedge$= CONECTIVA ¨O¨
$\vee$= CONECTIVA ¨Y¨
~ = NEGACIÓN
$\rightarrow$ = IMPLICACIÓN
<=> DOBLE IMPLICACIÓN

Ejemplos:
P= Todas las palomas vuelan
Q= Todas las aves tiene plumas
R=Luego todas las palomas son aves

$$(P \wedge Q) \rightarrow R$$

Delimitadores
Se utilizan paréntesis y separadores como la coma, ejemplo:

a) AMA(ROMEO,JULIETA) $\wedge$ AMA(JULIETA,ROMEO) esto se interpreta así: *Romeo y Julieta se aman, o mejor , dado el tiempo pasado en que sucedió, Romeo y Julieta se amaron.* (Nota: La lógica de predicados puede hacer abstracción del tiempo).

b) CULTURA(CIENCIA) $\rightarrow$ **APOYAR(CIENCIA):**
Si la ciencia es cultura, entonces la ciencia debe apoyarse.

CÁLCULO DE PREDICADOS

Símbolos
Los símbolos que introduce la **lógica de predicados** son:

Variables individuales, representan individuos indeterminados.
Se usan las últimas minúsculas del alfabeto: x, y, z.

Constantes individuales, representan individuos determinados.
Se usan las primeras letras minúsculas del alfabeto: a, b, c, d.

Variables predicativas, representan predicados indeterminados.
Se usan estas letras mayúsculas: F, G, H

Cuantificadores (los símbolos "∀" y "∃" se llaman **cuantificadores**), hacen referencia a la totalidad o a una parte de los miembros de un conjunto. Son de dos tipos:
(∀...) también con (∧): **cuantificador universal**
(∃...) también con (∨): **cuantificador existencial o particular**

CÁLCULO DE PREDICADOS

Los símbolos "∀" y "∃" se llaman cuantificadores.
En el espacio vacío que le sigue dentro del paréntesis se colocan variables individuales (∀x) y (∃x), y entonces estamos en el ámbito de la lógica de predicados de primer orden; o bien, variables predicativas como (∀F) y (∃F) situándonos, con esto, en el contexto de la lógica de predicados de segundo orden.

Expresión en fórmula
Una fórmula en lógica de predicados es una expresión que se puede obtener mediante alguna de las formas siguientes:

Universales	Existenciales
Todo	Algún
Ninguno	Alguno
Cada	Hay no
Cualquiera	Cierto

Universales	Existenciales
$\forall(X)$	$\exists(X)$
$\wedge(X)$	$\wedge(X)$

CÁLCULO DE PREDICADOS

i) p(x1, x2, … ,xn) donde p es un símbolo que representa un predicado y x1, x2, … ,xn son símbolos de variable.

ii) ($\neg$ F) donde F es una fórmula de lógica de predicados.

iii) (F <OP> G) donde F y G son fórmulas de lógica de predicados y <OP> es cualquiera de los operadores ^, v, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

iv) ($\forall$ x) F, donde F es un fórmula en lógica de predicados.

v) ($\exists$ x) F, donde F es un fórmula en lógica de predicados.
Los lenguajes de primer orden (cálculo de predicados), son lenguajes formales con cuantificadores que alcanzan solo a variables de individuo (sujeto, objeto) y con predicado, y funciones cuyos argumentos son sólo constantes o variables de individuo. La lógica de primer orden tiene el poder expresivo suficiente para definir a prácticamente todas las matemáticas.

CÁLCULO DE PREDICADOS

El cuantificador existencial (Existe al menos un...)

Se utiliza para indicar que existen uno o más elementos en el conjunto A que cumple(n) con una condición o propiedad determinada.

$$(\exists x \in A)p(x) \text{ o } \exists x \in A{:}p(x) \text{ o bien } \{x \in A | P(x)\} \neq \varnothing$$

$\exists x \in A{:}P(x)$Existe x en A que cumple P(x)

Esta afirmación suele interpretarse como la equivalente de la proposición siguiente: $\{x \in A{:}P(x)\} \neq \varnothing$
El conjunto de los elementos x de A, que cumplen P(x) es distinto del conjunto vacío.

La disyunción $\vee$ es simétrica, asociativa y su elemento neutro es falso. Por lo tanto puede considerarse una operación válida para definir la expresión cuantificada.

CÁLCULO DE PREDICADOS

Cuantificación existencial única
Se usa para indicar que hay un único elemento de un conjunto A que cumple una determinadapropiedad. $\exists ! x \in A : P(x)$
Se lee: Existe una única x elementos de A, que cumple P(x).
El lenguaje formal de la lógica de predicados está formado por tres elementos: términos, predicados y conectivos.

Cuantificadores

Existen cuatro maneras de unir términos con predicados para obtener proposiciones:
• A **(universal afirmativo):** Término universal con cópula afirmativa
"Todo…es…"
• E **(universal negativo):** Término universal con cópula negativa
"Ninguno… es…"
• I **(existencia afirmativo):** Término existencial con cópula afirmativa
"Alguno… es…"
• O **(existencial negativo)**: Término existencial con cópula negativa
"Algún… no es…

Ejemplo:
M (x): es mortal (predicado) en el dominio D: todas las personas.

A: Todas las personas son mortales $\forall x M(x)$

E: Ninguna persona es mortal $\forall x \neg M(x)$ **negación**

I: Alguna persona es mortal $\exists x M(x)$

O: Alguna persona no es mortal $\exists x \neg M(x)$ **negación**

Ejercicio Cuantificador existencial:
Sean las proposiciones siguientes, escriba su interpretación correcta:

a) "existe un político que es honesto"

Sol. $\exists x[PxHx]$

b) existe al menos un x, tal que x es animal y x es carnívoro.

Sol. $(\exists x)(Ax \wedge Cx)$.

CÁLCULO DE PREDICADOS

VIDEO UNIDAD 2

Te invitamos a ver el siguiente video:

TEMA 5
ÁLGEBRA DECLARATIVA

ÁLGEBRA DECLARATIVA

Álgebra declarativa es cuando se manipulan expresiones lógicas donde las variables y las constantes representan valores de verdad, para demostrar que un argumento particular es válido o no. Eso se muestra por la imposibilidad de que todas las premisas sean verdaderas, y que a la vez la conclusión sea falsa.

Cómo se construye una fórmula en lógica
A una expresión sintácticamente correcta se le llama fórmula bien formada (fbf) o simplemente fórmula. Una fórmula en lógica de proposiciones se obtiene al aplicar una o más veces las siguientes reglas:

Equivalencias Lógicas
Sirve para simplificar en lógica:

(B) si p es una proposición lógica, es una fbf.(R) si F es una fórmula bien formada (fbf) también lo es (¬F).(R) si p,q son fbf entonces también lo es (p*q) donde * es uno de los operadores binarios, ^ v → ↔.

ÁLGEBRA DECLARATIVA

Ejemplo:

A continuación se presenta una proposición, que comprueba si es cierta:

$[(p \rightarrow q) \vee (q' \wedge r)] \leftrightarrow (r \rightarrow q)$

P	Q	r	q^1	$p \rightarrow q$	$(p^1 \wedge r)$	$(p \rightarrow q) \vee (q^1 \wedge r)$	$r \rightarrow q$	$[(p \rightarrow q) \vee (q^1 \wedge r)] \leftrightarrow (r \rightarrow q)$
0	0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1	1	1

El número de líneas de la tabla de verdad depende del número de variables de la expresión y se puede calcular por medio de la siguiente fórmula. No de líneas = 2n

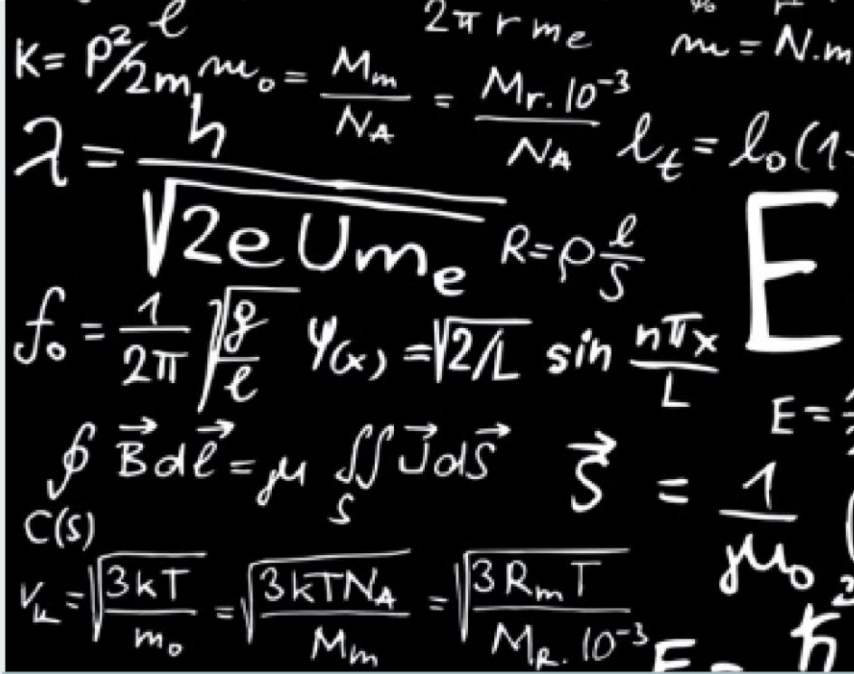
Donde n = número de variables distintas.

Ejemplo:
Demostrar que una vez p ^ q esta establecida, se puede concluir q. Esta demostración se puede hacer de dos formas:

a) Se demuestra que (p ^ q) ^¬q <=> F lo que nos lleva a que (p ^ q) ^¬q→F debe ser una tautológica.

Leyes fundamentales del álgebra proposicional en Teoría de conjuntos.

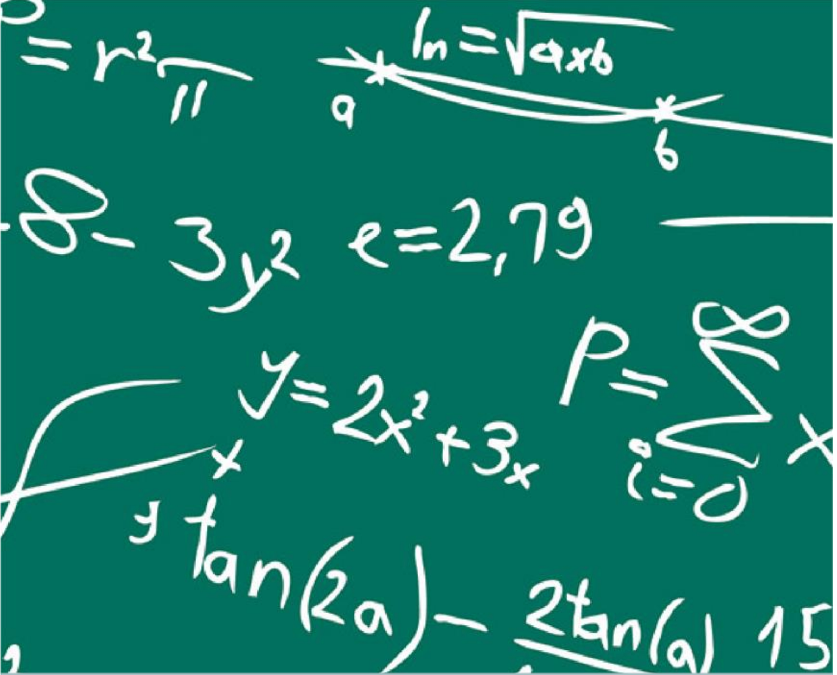
La lógica clásica y la Teoría de conjuntos poseen similitudes estructurales y de aplicación, por este motivo es posible aplicar las leyes del álgebra proposicional en la teoría de conjuntos. Es posible hacer una relación entre Unión (U) y Disyunción (∨) como también entre Intersección (∩) y Conjunción (∧).



ÁLGEBRA DECLARATIVA

Propiedades	Unión	Intersección
Idempotencia	$A \cup A = A$	$A \cup A = A$
Conmutativa o simetría	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asociativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Absorción	$A \cup (A \cup B) = A$	$A \cap (A \cap B) = A$
Distributiva	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Complementariedad	$A \cup A' = U$	$A \cap A' = \varnothing$
Identidad	$A \cup \varnothing = A$	$A \cap U = A$

Propiedades del elemento	Conjuntos	Lógica proposicional
	$(A')c' = A$	$\rightarrow (A) \Leftrightarrow A$
	$\varnothing' = U$	$\rightarrow$ (falso) $\Leftrightarrow$ verdadero
	$U' = \varnothing$	$\rightarrow$ (verdadero) $\Leftrightarrow$ falso
Unicidad de $\varnothing$:	$\varnothing$ es único	



ÁLGEBRA DECLARATIVA

Ejercicios:

Mediante las leyes del álgebra de proposiciones y sin utilizar la ley de absorción, simplificar las siguientes expresiones:

a) (pÚq) Ù(¬pÚ f)

	(p∨q) Ù(¬p∧f)	Identidad
=	(p∨q) ∧ ¬p	Conmutativa
=	¬p ∧ (p∨q)	Distributiva
=	(¬p∧p) ∨ (¬ p∧ q)	Complementación
=	f ∨ (¬ p∧ q)	Identidad
=	¬ p ∧ q	

b)	p ∨ [(p ∧ q) ∨ f]	Identidad
=	p∨ (p∧ q)	Identidad
=	(p∧ v) ∨ (p∧ q)	Distributiva
=	(p ∧ (v ∨ q)	Identidad
=	p∧ v	Identidad
=	p	Identidad

ÁLGEBRA DECLARATIVA

Ejercicio:

Determine la validez del siguiente argumento

P1: Estudio o voy a la fiesta

P2: Si estudio aprobaré el examen

P3: Fui a la fiesta

Q: Reprobé el examen

Sea p estudio: q voy a la fiesta; r aprobé el examen

Estudio o voy a la fiesta	$p \vee q$
Si estudio a probaré el examen	$p \rightarrow r$
Fui a la fiesta	q
Reprobé el examen	$\neg r$

ÁLGEBRA DECLARATIVA

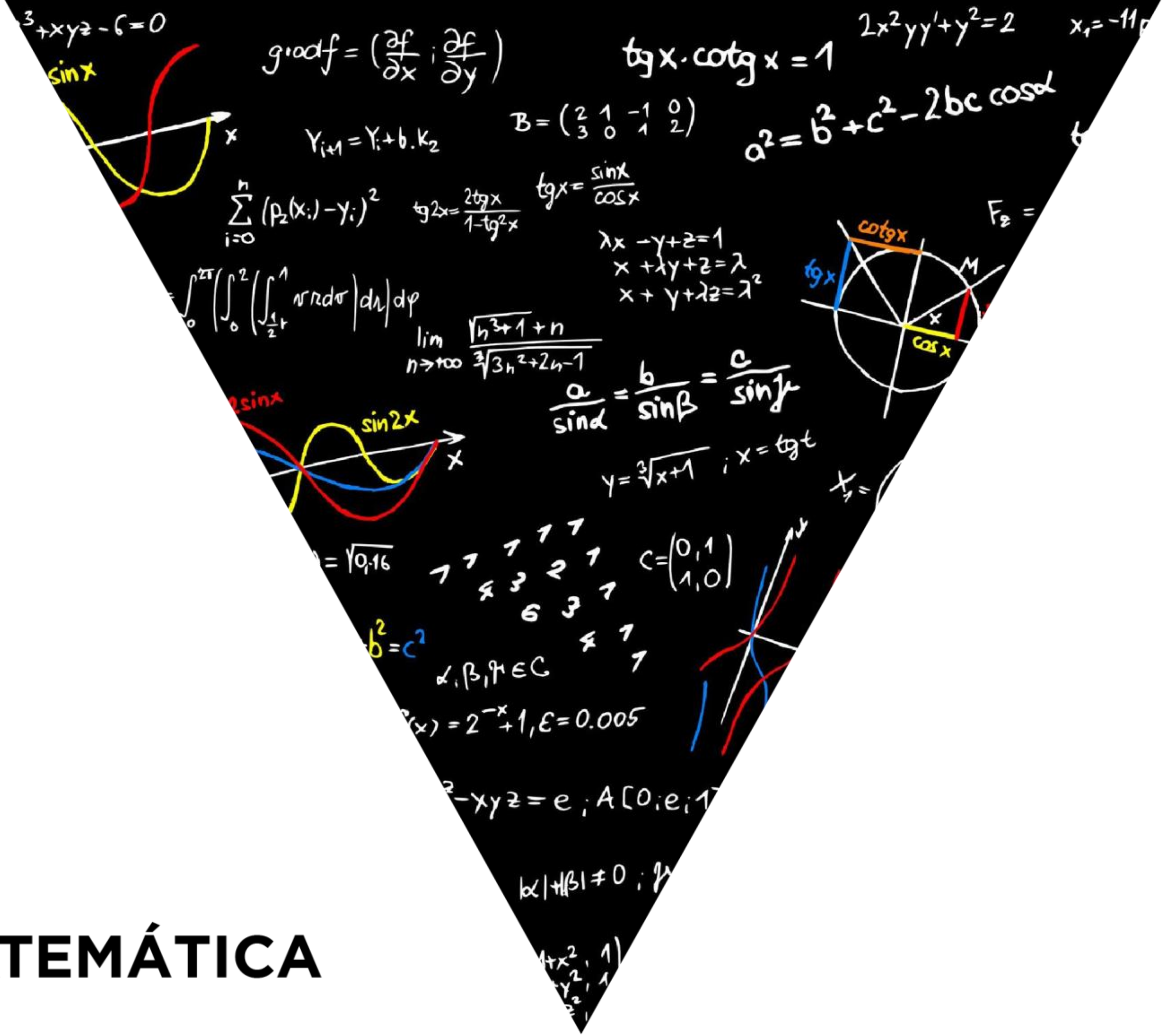
$(p \vee q)$			;	$(p \rightarrow r)$			;	q	$\vdash$	$\sim r$
V	V	V		V	V	V		V		V
V	V	V		V	F	F		V		V
V	F	F		V	V	V		F		F
V	F	F		V	F	F		F		F
F	F	V		F	V	V		V		V
F	F	V		F	V	F		V		V
F	F	F		F	V	V		F		F
F	F	F		F	V	F		F		F

Solamente en la primera fila las premisas son verdaderas y la conclusión es falsa, por lo tanto, el argumento no es válido.

También es posible determinar la validez del argumento construyendo la siguiente tabla de verdad:

$[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow \sim r$										
V	V	V	V	V	V	V	V	V	**F**	F
V	V	V	F	V	F	F	V	F	**V**	V
V	F	F	F	V	V	V	F	F	**V**	F
V	F	F	F	V	F	F	F	F	**V**	V
F	F	V	F	F	V	V	F	F	**V**	F
F	F	V	F	F	V	F	F	F	**V**	V
F	F	F	F	F	V	V	F	F	**V**	F
F	F	F	F	F	V	F	F	F	**V**	V

Como la tabla de verdad no es una tautología, entonces el argumento no es válido.



TEMA 6
INDUCCIÓN MATEMÁTICA

INDUCCIÓN MATEMÁTICA

La inducción matemática es un **método de demostración** que suele ser muy útil en problemas en los que se trata de probar que todos los números naturales (1, 2, 3...) cumplen una cierta propiedad.

Principio de Inducción Matemática
Para probar que una propiedad P se cumple en los números naturales, usando el principio de inducción matemática, se siguen los siguientes pasos:

1° Se comprueba para $n = 1$ **(Comprobación)**.
2° Se asume que se cumple para $n = k$ **(Hipótesis de inducción)**.
3° Se predice que se cumple para $n = k + 1$ **(Tesis).**
4° Se demuestra que si se cumple para $n = k$, entonces se cumple para $n = k + 1$ **(Demostración)**.

Observación: En algunos casos la propiedad se cumple a partir de un cierto natural $m > 1$.
Dada esa situación, en el primer paso se comprueba para $n = m$.

EXPLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN

Primero, se demuestra que el 1 cumple la propiedad.

A continuación, se supone que la propiedad es verdadera para un cierto número n (arbitrario) y se demuestra para el número siguiente, el k+1.

Si se consigue, esto demuestra la propiedad que queríamos para todos los números naturales, de forma parecida a las filas de fichas de dominó cuando caen: hemos demostrado que la primera ficha (el 1) cae (primer paso), y que si cae una ficha también debe caer la siguiente (si es cierta para n, debe serlo para k+1). La idea de la inducción es muy clara: si un número cumple algo, y si cuando un número lo cumple el siguiente tiene que cumplirlo, entonces todos los números lo cumplen. Se utiliza para demostrar propiedades,conceptos, definiciones

TEMA 7
REGLAS DE INFERENCIA

REGLAS DE INFERENCIA

Modus Tollendo Ponens (MTP):

Si una disyunción es verdadera y una de sus proposiciones simples es falsa, entonces necesariamente la otra proposición será verdadera; de manera simbólica se expresa así: $[(p \vee q) \wedge \sim p] \rightarrow q$ o $[(p \vee q) \wedge \sim p] \rightarrow p$

Un argumento es válido si de la conjunción ($\wedge$) de las premisas se implica la conclusión, es decir, siempre que todas las premisas sean verdaderas, la conclusión será también verdadera.

Un argumento es un raciocinio que se hace con el objeto de aceptar o rechazar una tesis; es la aseveración de una proposición, llamada conclusión o tesis, obtenida de otros enunciados denominados premisas o hipótesis.

La demostración es un razonamiento que prueba la validez de un nuevo conocimiento; es el enlace entre los conocimientos adquiridos y los conocimientos anteriores.

REGLAS DE INFERENCIA

Los procedimientos de demostración permiten establecer la conexión lógica entre las proposiciones fundamentales de la teoría, sus consecuencias sucesivas, hasta deducir la conclusión o tesis que así se demuestra.

	Universales	Existenciales
28.	$\dfrac{P}{\therefore P \vee Q}$	Adición
29.	$\dfrac{P \wedge Q}{\therefore P}$	Simplificación
30.	$\begin{array}{c} P \,.\, Q \\ \underline{P \to Q} \\ \therefore Q \end{array}$	Modus ponens
31.	$\begin{array}{c} P \,.\, Q \\ \underline{\sim Q} \\ \therefore \sim P \end{array}$	Modus tollens
32.	$\begin{array}{c} P \vee Q \\ \underline{\sim P} \\ \therefore Q \end{array}$	Silogismo disyuntivo
33.	$\begin{array}{c} P \to Q \\ \underline{P \to R} \\ \therefore P \to R \end{array}$	Silogismo hipotético
34.	$\begin{array}{c} P \\ \underline{Q} \\ \therefore P \wedge Q \end{array}$	Conjución

REGLAS DE INFERENCIA

Principales tipos de demostración:

1.Directa: Conjunto de proposiciones o premisas que son postulados o proposiciones de validez aceptada, y de las cuales se infiere como consecuencia inmediata.

2.Indirecta: Se establece la validez de una proposición probando que las consecuencias de su contraria son falsas.

3.Por recursión: Cuando la proposición se prueba por medio de inducción matemática.

A estos tipos de demostración se oponen dos métodos de refutación, que es el razonamiento que prueba la falsedad de una hipótesis o la inconsecuencia de su supuesta demostración.

Los métodos de refutación son: contradicción y **contra ejemplo.**

REGLAS DE INFERENCIA

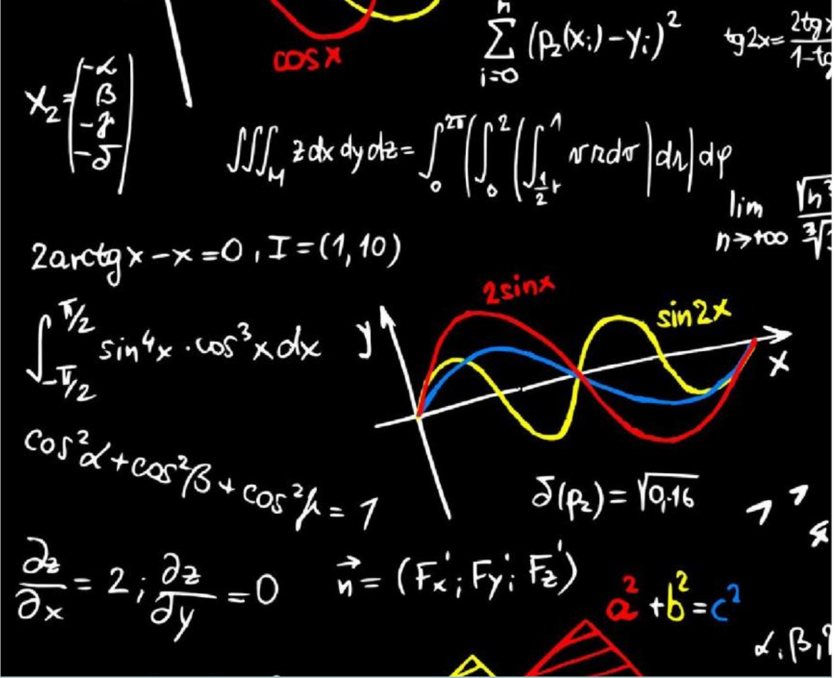
Ejercicio

Sean las hipótesis H={$a \wedge b$, $a \rightarrow c$}, y la conclusión $C = b \wedge c$. Se desea saber si se trata de un teorema válido.

Representemos las hipótesis de la siguiente manera:

1) $a \wedge b$ (hipótesis)
2) $a \rightarrow c$ (hipótesis)
   Aplicando la regla de simplificación (regla 29) a (1), tenemos:
3) a (por simplificación de (1), regla 29)
4) c (por modus ponens de (2) y (3), regla 30)
5) $b \wedge a$ (por regla conmutativa en (1), regla 2b)
6) b (por simplificación de (5), regla 29)
7) $b \wedge c$ (por conjunción de (6) y (4), regla 34)

Dado que llegamos a la conclusión por medio de transformaciones válidas de las hipótesis, demostramos que el teorema es **verdadero.**



REGLAS DE INFERENCIA

Es decir, debemos demostrar que el siguiente teorema es válido o es una falso: $H = [s \vee g \rightarrow p,\ p \rightarrow a]$, $C = \sim a \rightarrow \sim g$

Empezamos la demostración enunciando las hipótesis:

1) $s \vee g \rightarrow p$ (hipótesis)
2) $p \rightarrow a$ (hipótesis)

Ahora debemos aplicar las reglas de equivalencia, de implicación lógica y de inferencia, hasta llegar a la conclusión o a una proposición no válida, en cuyo caso, el argumento sería falso.

3) $g \rightarrow g \vee s$ (adición, regla 16)
4) $g \rightarrow s \vee g$ (ley conmutativa, regla 2a)
5) $g \rightarrow p$ (silogismo hipotético a (4) y (1), regla 33)
6) $g \rightarrow a$ (silogismo hipotético a (5) y (2), regla 33)
7) $\sim a \rightarrow \sim g$ (contrapositiva de (6), regla 9)

TEMA 8
EVALUACIÓN DE EXPRESIONES

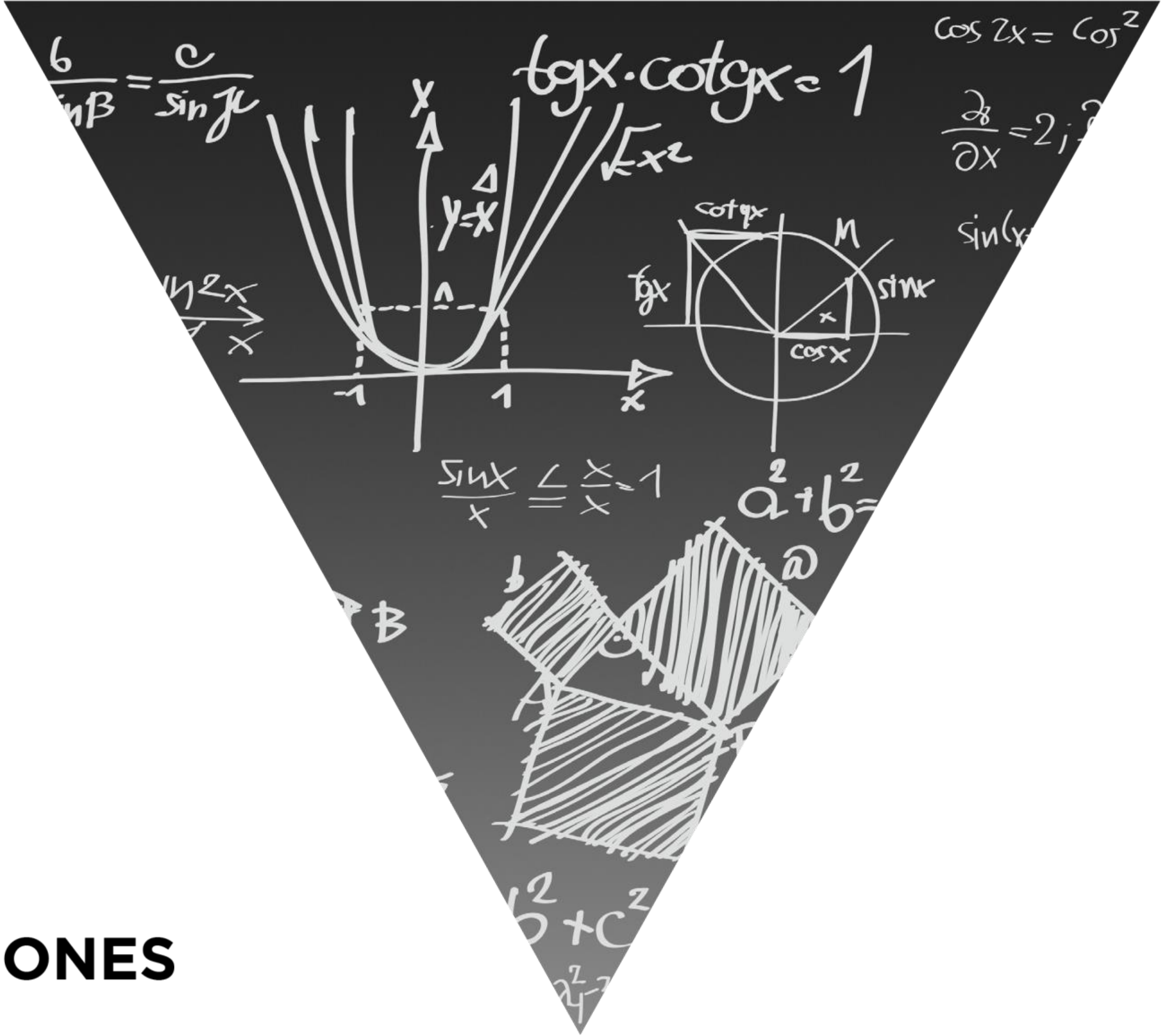
EVALUACIÓN DE EXPRESIONES

¿Qué son las expresiones?
Son el método fundamental que tiene el programador de expresar computaciones. Las expresiones están compuestas de operadores, operandos, paréntesis y llamadas a funciones.

Los operadores pueden ser:
Unarios: Solo tienen un operando. Son operadores prefijos.
Binarios: 2 operandos. Son operadores infijos.
Ternarios: 3 operandos.

Orden de la evaluación de los operadores
El orden en que se evalúan los operandos viene dado por una regla: **Reglas de Procedencia, Reglas de Asociatividad y Uso de Paréntesis.**

Evaluación de expresiones
Toda expresión regresa un valor. Si hay más de un operador, se evalúan primero operadores de mayor precedencia, en caso de empate, se aplica la regla de asociatividad. Para evaluar una expresión se determina qué número es mayor.



TEMA 9
TAUTOLOGÍAS Y CONTRADICCIONES

TAUTOLOGÍAS Y CONTRADICCIONES

Una **tautología** es una proposición cuya tabla de verdad **siempre toma el valor verdadero.** Siempre da el valor de verdad V en todos los casos posibles de los valores de verdad (V, F) de cada una de las proposiciones que la integran.

Ejemplo: "existe el calor porque lo provoca el calórico". Tautología: en todos los casos la forma del argumento ofrece un resultado verdadero, por lo que el argumento es válido.

Ejemplo: ¬p Ù p (Tercer excluido) [(p → q) Ù p] → q

Ejemplo:

p	**q**	**$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$**				
V	V	V	**V**	V	V	V
V	F	F	**V**	F	F	V
F	V	F	**V**	V	F	F
F	F	V	**V**	V	V	V
		1		2	**3**	3

TAUTOLOGÍAS Y CONTRADICCIONES

Una **contradicción** es una proposición que **siempre es falsa** para todos los valores de verdad. Para cualquier valor de verdad de las proposiciones, sea cual sea, el resultado de la fórmula lógica estudiada siempre va a ser falso.

p Ú¬p

V	F	V
F	V	V

Ejemplo:

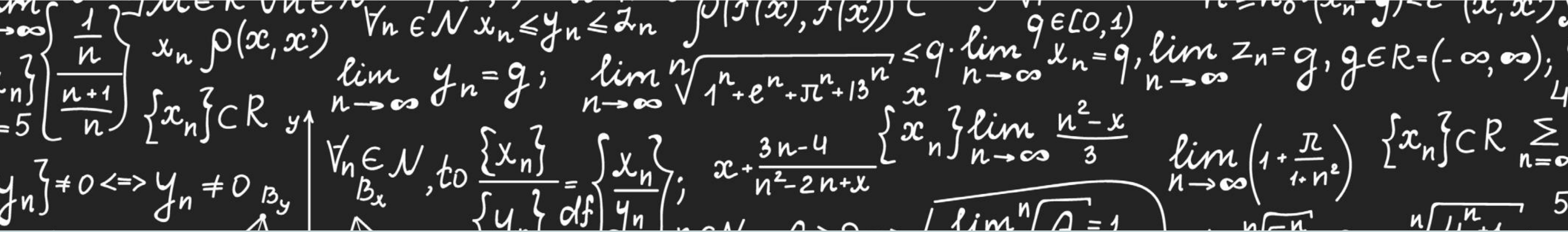
p	q	$(p\Leftrightarrow q) \Leftrightarrow - [(p\Rightarrow q) \wedge (q\Rightarrow p)]$					
V	V	V	**F**	F	V	V	V
V	F	F	**F**	V	F	F	F
F	V	F	**F**	V	V	F	F
F	F	V	**F**	F	V	V	V
		1		**4**	1	3	2

ACTIVIDAD 1. UNIDAD 2.

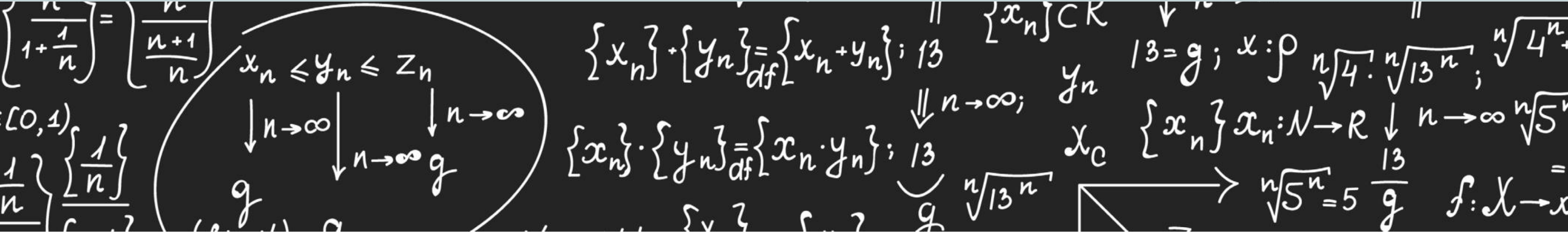
Te invitamos a realizar la siguiente actividad:

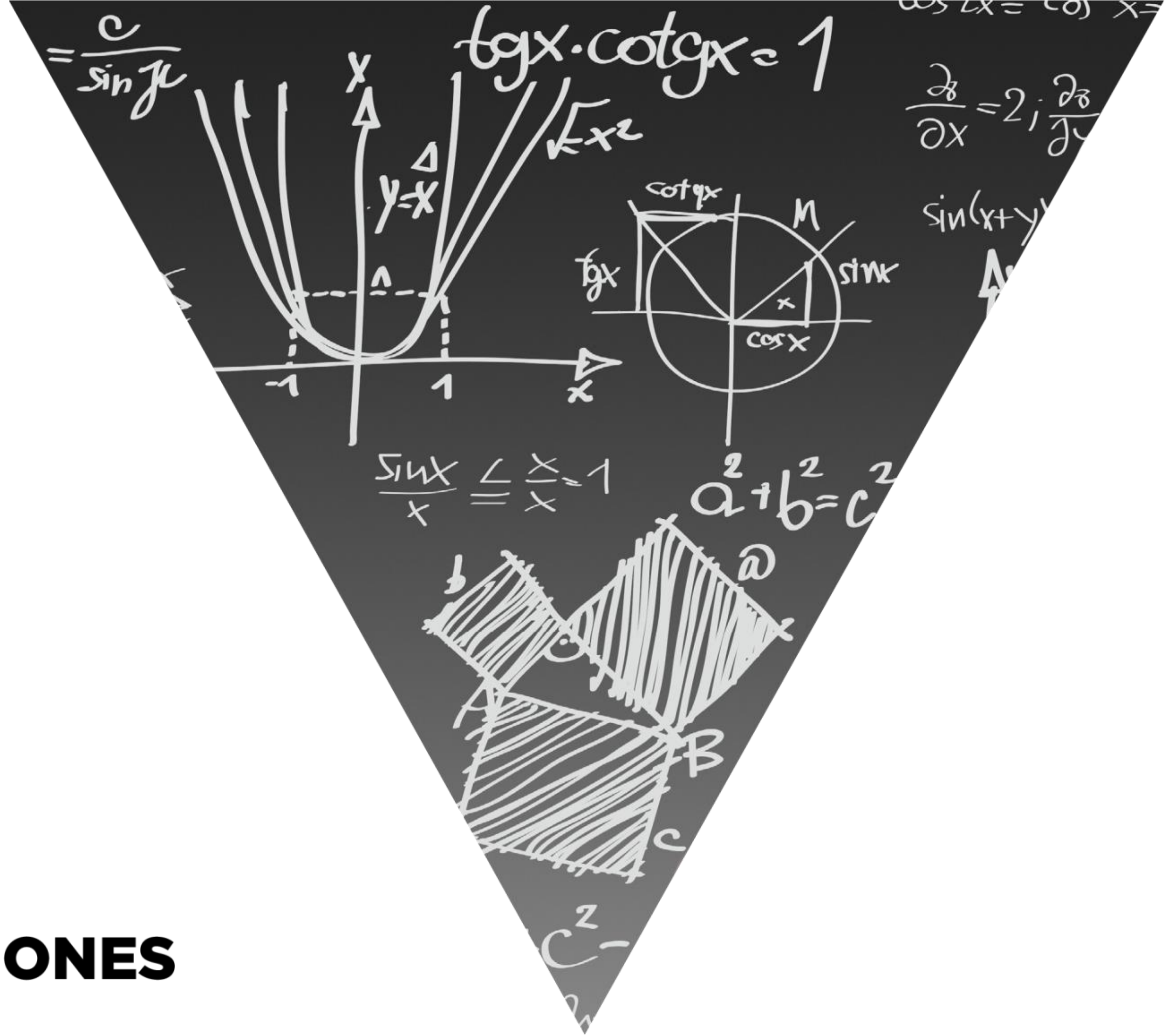
Presiona el botón para descargar la actividad:

Presiona el botón para entregar la actividad:



MATEMÁTICAS COMPUTACIONALES
UNIDAD 3
RELACIONES Y FUNCIONES





TEMA 1
PROPIEDADES DE LAS RELACIONES

TEMARIO

1. Propiedades de las relaciones.

2. Cerradura.

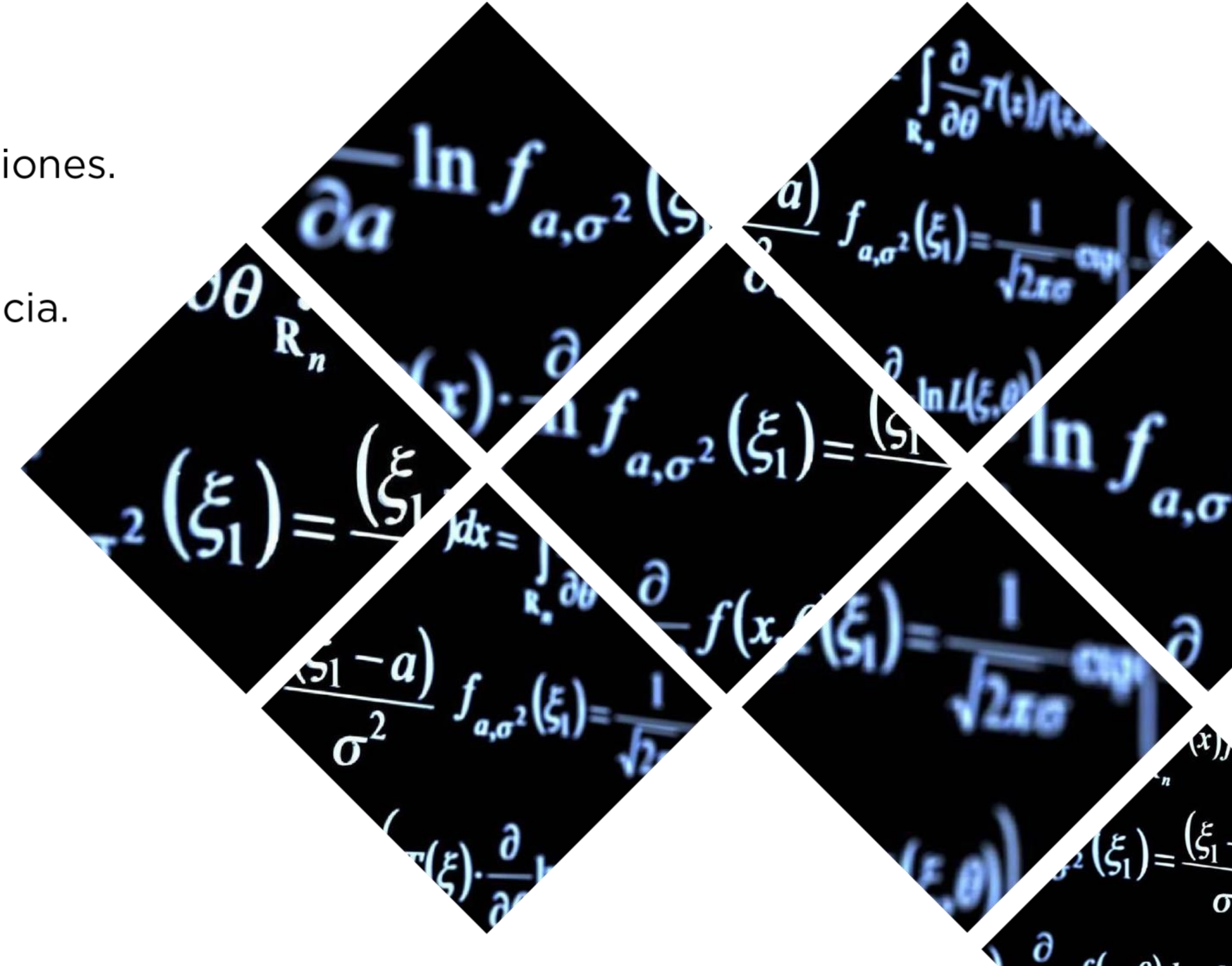
3. Relaciones de equivalencia.

4. Órdenes parciales.

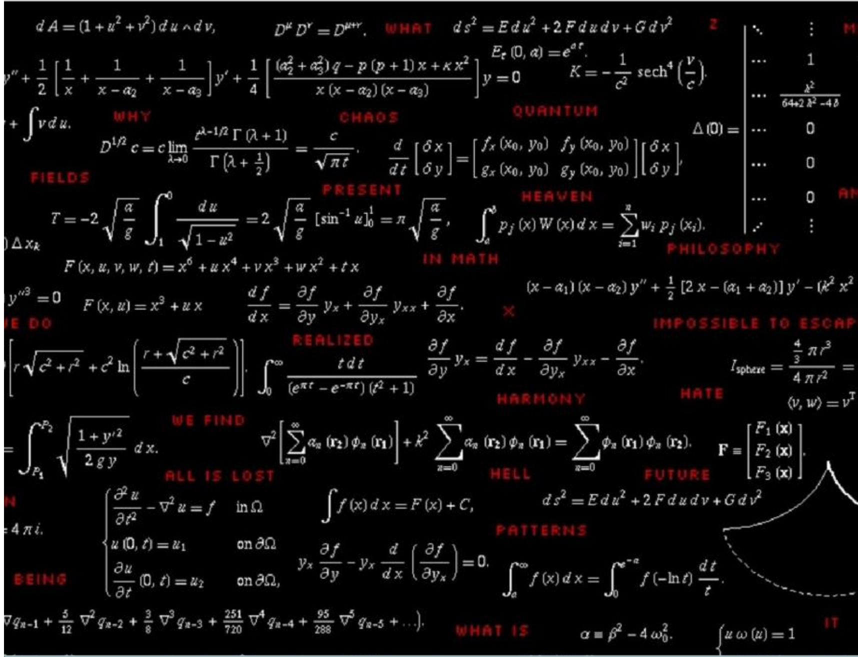
5. Diagramas de Hasse.

6. Tipos de funciones.

.



PROPIEDADES DE LAS RELACIONES



Es común encontrarnos con parejas de conjuntos cuyos elementos están relacionados de una u otra forma; por ejemplo:

- Cada casa de una ciudad tiene asociado un número y así, tenemos entonces una relación entre el conjunto de casas de la cuidad y el conjunto de números.

- Si llamamos N al conjunto de los números naturales y V al conjunto de las vocales, relacionar estos conjuntos es asociar la a con el 1, la e con el 2, la i con el 3, la o con el 4 y la u con el 5.

VIDEO UNIDAD 3

Te invitamos a ver el siguiente video:

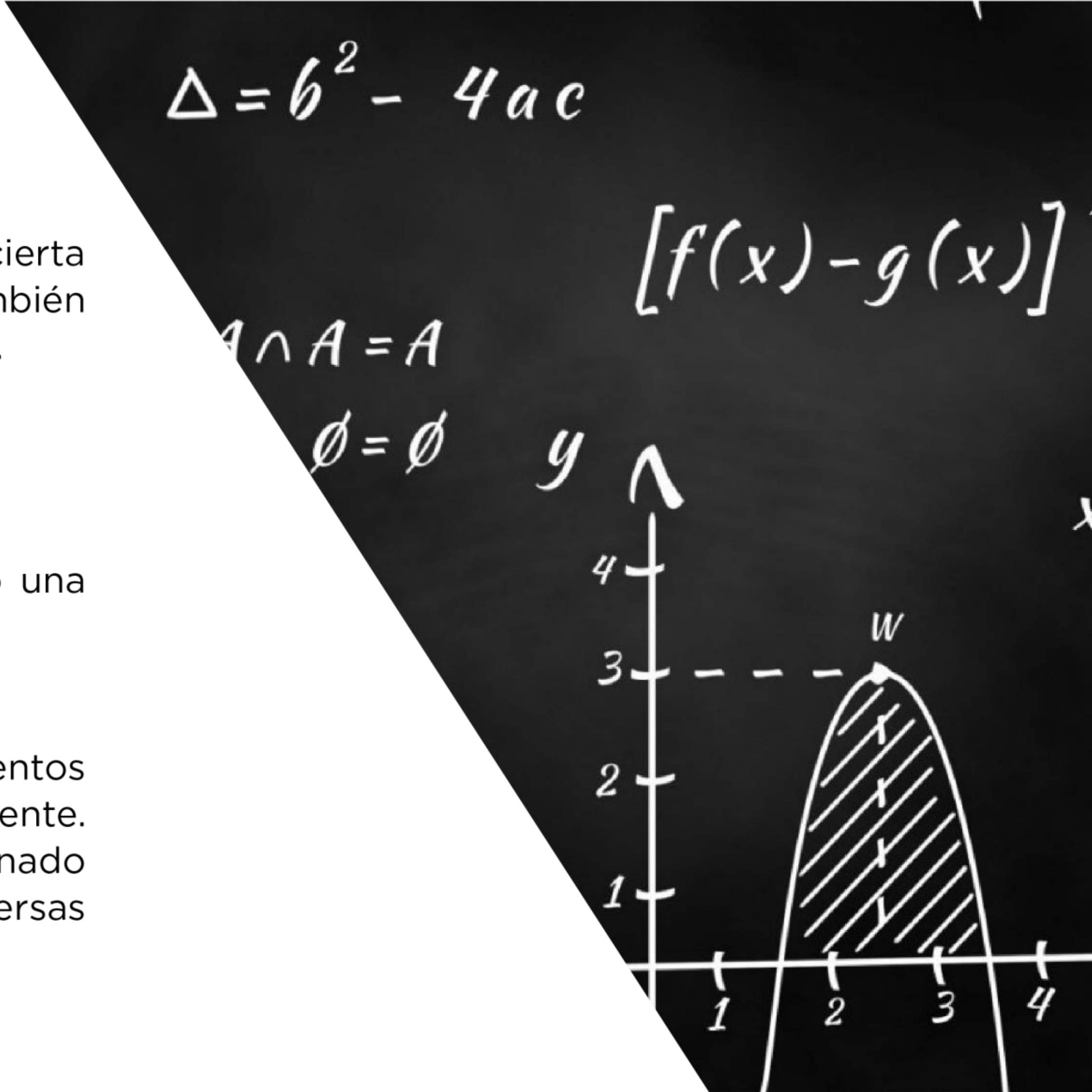
La relación se indica como aRb:
R = {(a, b) | a $\in$ A y b $\in$ B}

Las relaciones se forman si se cumple cierta proposición, puede ser textual, pero también puede ser planteada en lenguaje matemático.
Ejemplo: Si X = {a; b; c} y Y = {1; 2; 3; 4; 5}

G = {(a; 1);(a; 2);(c; 1);(c; 5)}

es un **subconjunto** de X x Y y por lo tanto una relación con dominio X y contradictorio Y.

Relación binaria
Es la relación R existente entre dos elementos a y b, de dos conjuntos A y B respectivamente. Indicando que el elemento a está relacionado con b. Esta relación se puede denotar de diversas formas:

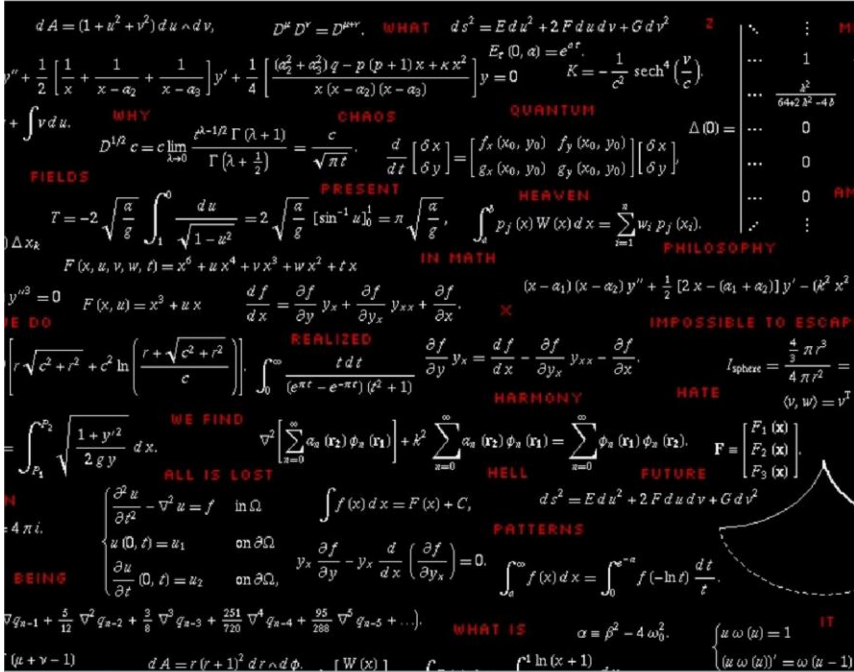


1- Como pares ordenados (a, b).
2- Indicando que aRb.
3- Como una mezcla entre los dos anteriores R(a,b).
Al conjunto de todos los elementos relacionados mediante la relación R en un conjunto lo denotamos como R(M).

Ejemplo:
Sea A = {1, 2, 3, 4} ¿Cuáles pares ordenados están en la siguiente relación? R = {(a, b) | a divide a b}
Recuerda: La división debe ser entera.
R= {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2),(2, 4), (3, 3), (4, 4)},
en ese caso R es una relación binaria sobre A.

Nota: En el caso de no estar relacionados escribiremos a no está relacionado con b tachando la R, es decir que (a, b) $\notin$ R (No existe una relación).

Un ejemplo de dos elementos que no están relacionados con esta relación son 3 y 5.



PROPIEDADES DE LAS RELACIONES

PROPIEDADES DE LAS RELACIONES

Observación: El conjunto R(AxB) de todos los elementos que están relacionados en el **subconjunto del producto cartesiano AxB.**

Definición:
Si R c (A B) es una relación de A en B, el dominio de R, se escribe Dom(R), y es el conjunto de los elementos de A que están relacionados con B, es decir:

$$Dom(R) = \{a \ \varepsilon \ A \mid (a, b) \ \varepsilon \ R, \text{ para algún } b \ \varepsilon \ B\}$$

Ejemplo:
Sean A = {1, 2, 3, 4} y B = {r, s} y sea R = {(1, r), (1, s), (2, s), (3, s)},
entonces Dom(R) = {1, 2, 3}

Definición:
Si R c (A X B) es una relación de A en B. El codominio (rango, imagen o recorrido) de R, se escribe Cod(R) o Ran(R) y es el conjunto de los elementos de B, que están relacionados con algún elemento de A, es decir:

$$Cod(R) = \{b \ \varepsilon \ B \mid (a, b) \ \varepsilon \ R, \text{ para algún } a \ \varepsilon \ A\}$$

Ejemplo:
Sea A = {1, 2, 3, 4} y B = {r, s} además R = {(1, r),(2, s),(3, r)} entonces Cod(R) = {r, s}

PROPIEDADES DE LAS RELACIONES

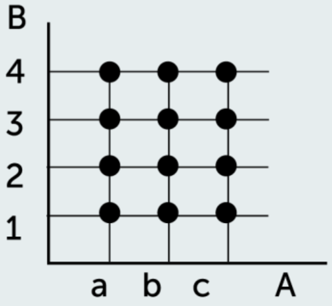
Otras Representaciones de las Relaciones
Las relaciones además de ser representadas como conjuntos de pares ordenados, se pueden representar de las siguientes maneras: En producto cartesiano, tablas, diagramas, matriz de relación, grafos dirigidos (digrafos).

Producto Cartesiano
Se llama producto cartesiano de dos conjuntos A y B y se representa A x B, al conjunto de pares ordenados (a, b), tales que el primer elemento pertenece al primer conjunto y el segundo elemento al segundo conjunto. Es decir: $A \times B = \{(a, b) / a \in A, b \in B\}$

Ejemplo:
Si $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$, el producto cartesiano es:
$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (a, 4), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (b, 4), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4)\}$

PROPIEDADES DE LAS RELACIONES

Se puede representar gráficamente por medio de puntos en un plano. Aquí, cada punto P representa una pareja ordenada (a, b) de números reales y viceversa; la línea vertical a través de P encuentra al eje x en a, y la línea horizontal a través de P encuentra el eje y en b. A esta representación se le conoce como diagrama cartesiano.



Ejemplo:

Sean A = {1, 2, 3} y B = {r, s} y sea = {(1, r), (1, s), (2, r), (3, s)}
La representaremos en
a) Tablas, b) Diagramas y c) Matriz de Relación:

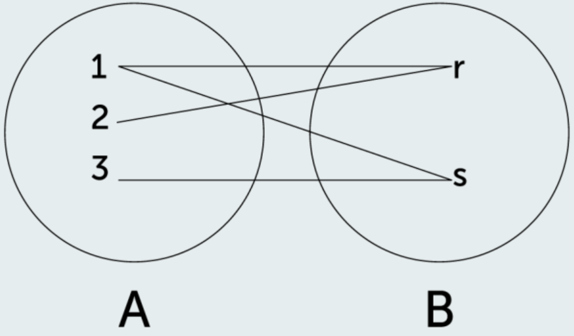
a)

R	r	s
1	√	√
2	√	
2		√

ó

A	B
1	r
1	s
2	r
3	s

b)



c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PROPIEDADES DE LAS RELACIONES

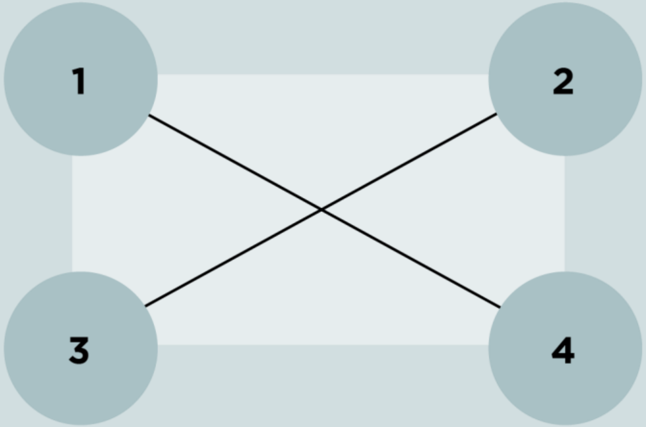
La representación por medio de grafos dirigidos, se utiliza cuando R es relación binaria sobre A.

Ejemplo:

Sea R la relación sobre A = {1, 2, 3, 4}definida como sigue:

$$(x, y) \in R \text{ si } x \leq y, \text{ si } x, y \in A$$

Por lo que R = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)} y su representación como digrafo es:



Propiedades de las Relaciones

Las relaciones binarias pueden cumplir las siguientes propiedades (no es necesario cumplir todas, pueden cumplir sólo algunas e incluso ninguna). Dado el conjunto M, y una relación R sobre el conjunto MxM.

PROPIEDADES DE LAS RELACIONES

1. Propiedad reflexiva: Si en un conjunto A si y sólo si R es una relación en A y todo elemento de A está relacionado consigo mismo.

Es decir **R es reflexiva en A si y solo si,**

$$R \subset A \times A \wedge (\forall\ x \in A)\ ((x, x) \in R).$$

R no es reflexiva en A si y solo si,

$$R \not\subset A \times B \vee (\exists\ x \in A)\ ((x, x) \notin R).$$

Ejemplo: Sea A = {1, 3, 5}.
R1 = {(1, 3), (3, 5), (1, 1), (5, 1), (5, 5), (3, 1), (3, 3)} es reflexiva en A.
R2 = {(1, 1), (5, 3), (5, 5), (3, 1)} no es reflexiva en A.

Ejemplos:
1) En **N** la relación R definida por: "x R y $\Leftrightarrow$ x divide a y"
es reflexiva ya que $\forall x \in N$, x R x porque x divide a x.
2) En **N** la relación R definida por:

"a R b $\Leftrightarrow$ a es el doble de b".

no es reflexiva ya que (1, 1) $\notin$R puesto que 1 no es el doble de 1.

PROPIEDADES DE LAS RELACIONES

Representación en Matriz

Si la relación R es simétrica sobre A entonces los pares relacionados se reflejan respecto a la diagonal principal, en la matriz asociada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Simétrica

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

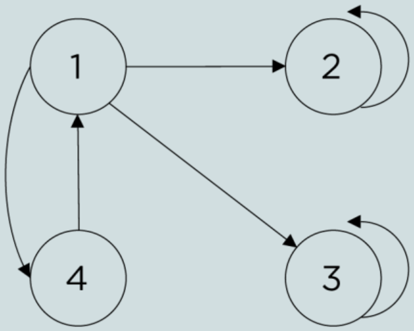
Asimétrica

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

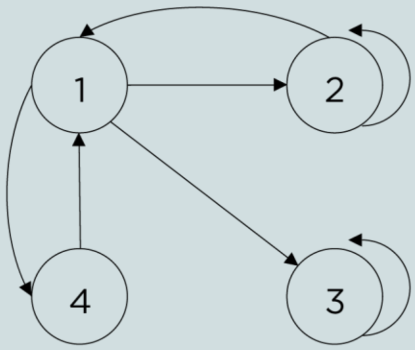
Antisimétrica

En el grafo de una relación simétrica, todos los arcos son bidireccionales.

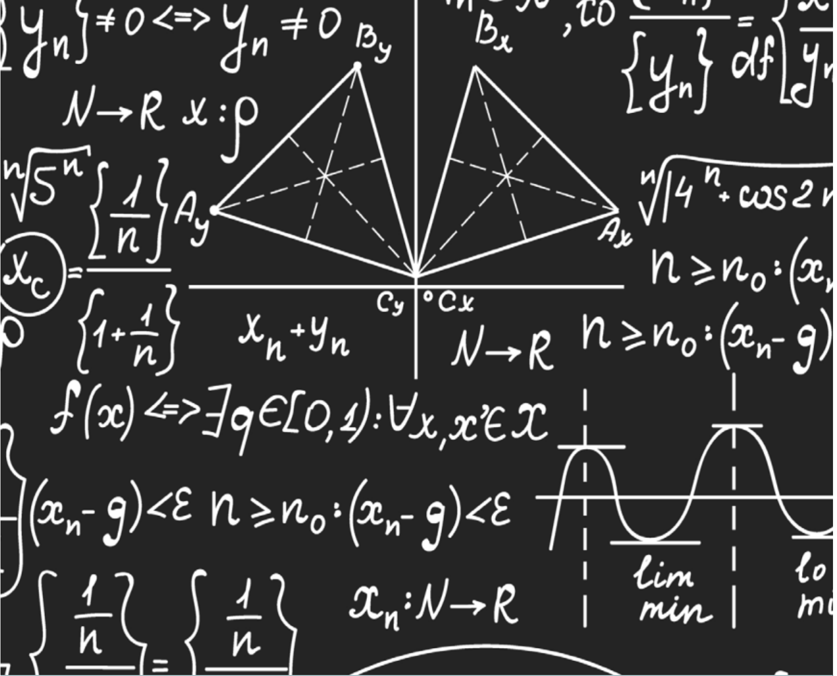
• En el grafo de una relación antisimétrica, ningún arco tiene un compañero en dirección opuesta.



Relación no simétrica



Relación Simétrica



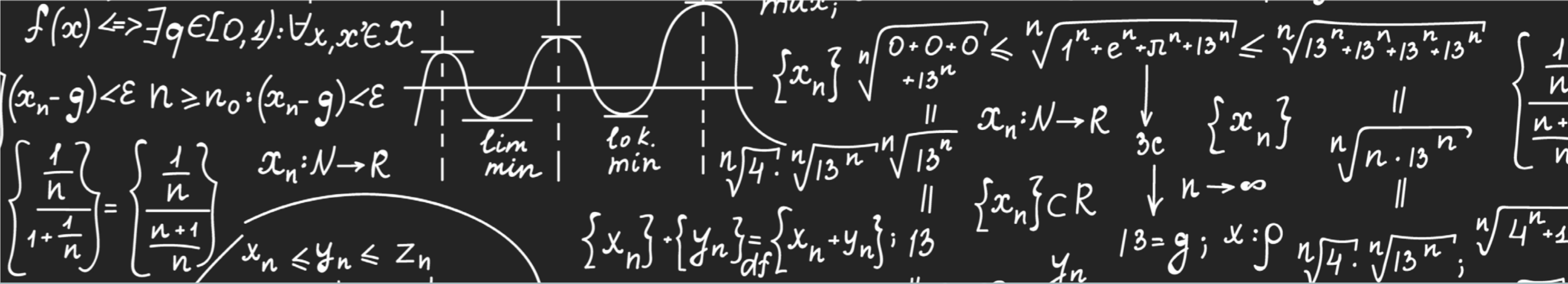
PROPIEDADES DE LAS RELACIONES

2. Propiedad simétrica: Dados dos elementos cualesquiera del conjunto M se cumple que si el primer elemento está relacionado con el segundo, entonces se cumple también la relación al contrario, es decir, el segundo está relacionado con el primero: si $xRy \rightarrow yRx$.

R es simétrica en A $\Leftrightarrow R \subset A \times A \wedge (\forall\ x)(\forall\ y)\ (\ x\ R\ y \Rightarrow y\ R\ x)$.

R no es simétrica en A $\Leftrightarrow R \not\subset A \times A \vee (\exists\ x)(\exists\ y)\ (x\ R\ y \wedge y\ x)$.

3. Propiedad antisimétrica: Dados dos elementos del conjunto si el primer elemento está relacionado con el segundo, entonces, el segundo no está relacionado con el primero: **si $xRy \rightarrow$ y noR x**.



PROPIEDADES DE LAS RELACIONES

Ejemplo:

R = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)}
"La relación R sobre el conjunto X es antisimétrica", por cuanto cumple la definición que dice para toda: "x, y X, si (x, y) $\in$ R y x $\in$ y, entonces (x, y) $\in$ R".

Específicamente tenemos (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4) pertenecen a R, pero (2, 1), (3, 1), (4, 1), (3, 2), (4, 2), (4, 3) no pertenecen a R. Dicho de otra manera, no existen los elementos a, b distintos, y que a esté relacionado con b y b esté relacionado con a.

PROPIEDADES DE LAS RELACIONES

4. Propiedad transitiva: Dados tres elementos del conjunto, si el primer elemento está relacionado con el segundo, y el segundo relacionado con el tercero, entonces el primero también está relacionado con el tercero: si xRy e yRz $\rightarrow$ xRz.

Sí $x \; R \; y \wedge y \; R \; z$, entonces $x \; R \; z$. En consecuencia:

R es transitiva en A equivale a decir:

$$R \subset A \times A \wedge (\forall\, x)(\forall\, y)(\forall\, z)\ (x \; R \; y \wedge y \; R \; z \Rightarrow x \; R \; z).$$

R no es transitiva en A equivale a decir:

$$R \not\subset A \times A \vee (\exists\, x)(\exists\, y)(\exists\, z)\ (x \; R \; y \wedge y \; R \; z \wedge x \; z).$$

R3	1	2	3	4
1	√	√		√
2	√	√		
3			√	
4	√			√

PROPIEDADES DE LAS RELACIONES

Ejemplo:
I A es transitiva en A.

Ejemplo:
Sea = {2, 4, 6, 3} entonces:
R = {(2, 2), (2, 3), (4, 6), (6, 2), (4, 2), (4, 3), (6, 3)} es transitiva en A.

S = {(2, 2), (4, 4), (4, 2), (2, 6), (6, 4), (6, 2)} no es transitiva en A.

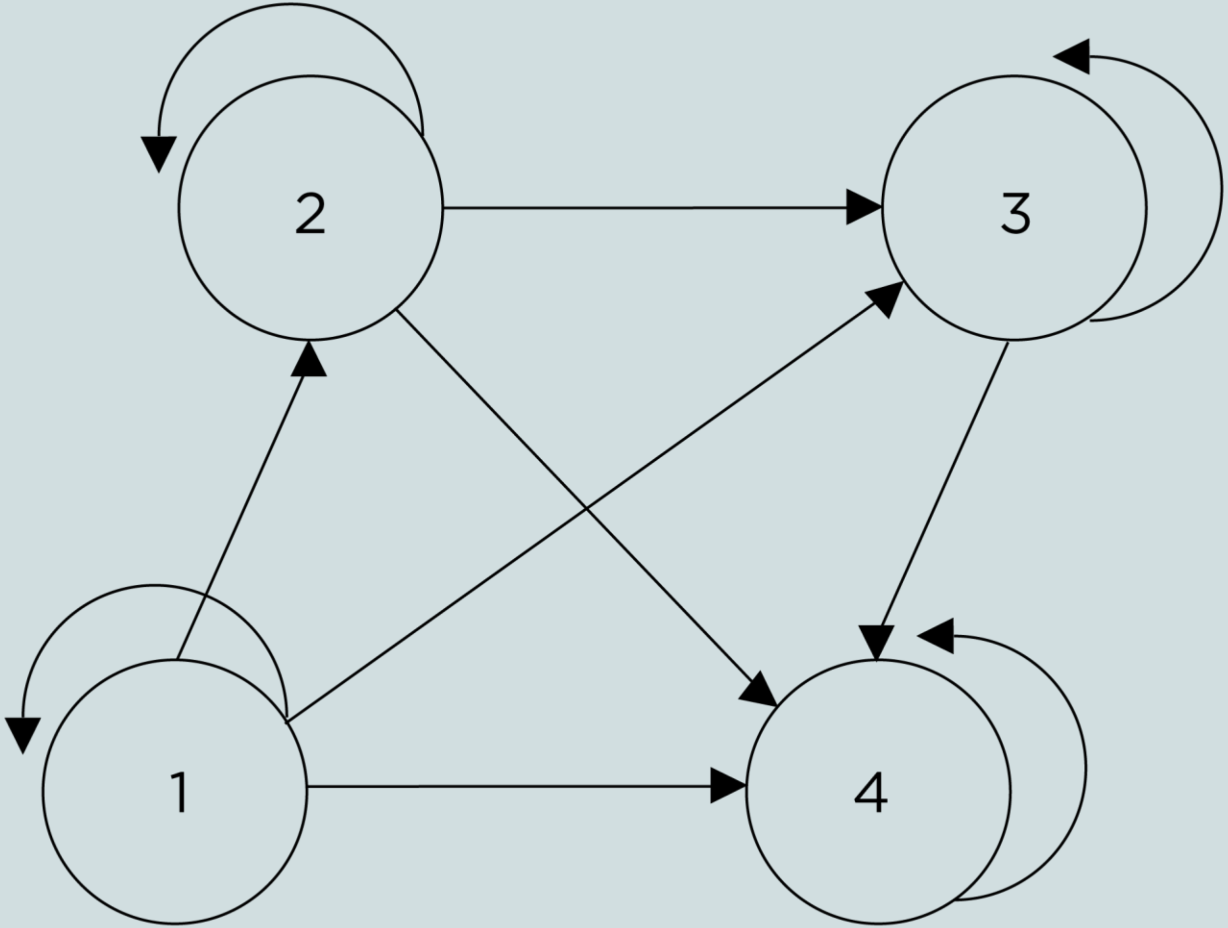
Ejemplo:
La relación T = {(x, y) / x $\in$ N, y $\in$ N $\wedge$ x | y} es transitiva en N.

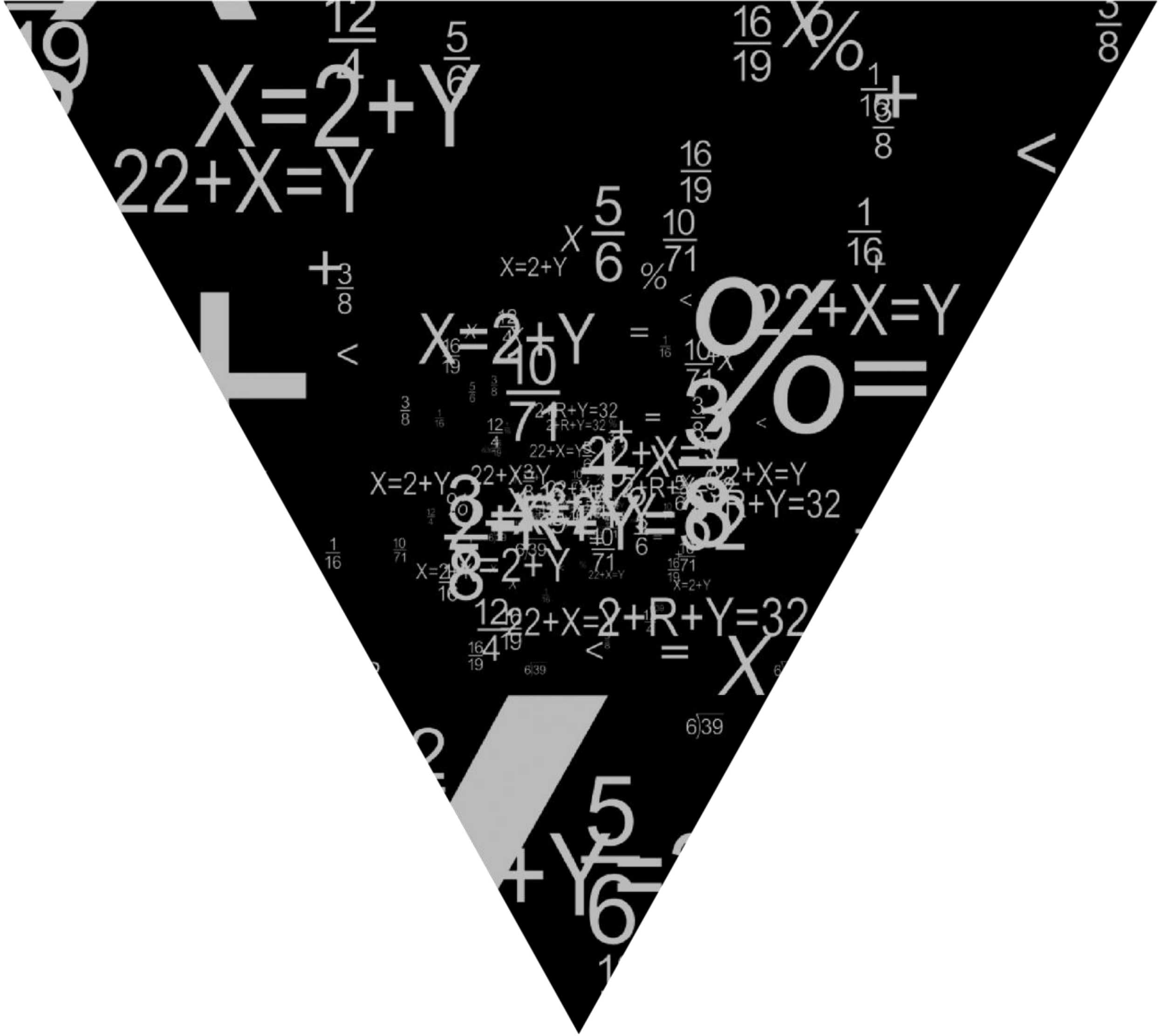
Ejemplo:
Tomando la relación R:R = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)} "es transitiva R sobre el conjunto X". Específicamente tenemos (1, 2), (2, 3) se tiene (1, 3); (1, 3), (3, 4) se tiene (1, 4); (2, 3), (3, 4) se tiene (2, 4) todos pertenecen a R.

PROPIEDADES DE LAS RELACIONES

R4	1	2	3	4
1				
2	√			
3	√	√		
4	√	√	√	

Relación Transitiva





TEMA 2
CERRADURA

CERRADURA

En algunas ocasiones una relación no cumple alguna de las propiedades de equivalencia, pero hay relaciones que la incluyen y que sí cumplen la propiedad. De todas las relaciones la menor posible se llama **Cerradura.**

Definición.- Sea R una relación en un conjunto A.
Una cerradura reflexiva ref (R) de R en A es la "menor" relación que la incluye y que es reflexiva, con símbolos: ($\leq R'$ reflexiva)

$$(A \leq R' \leq ref(R)) \Rightarrow R' = ref(R))$$

Una cerradura simétrica sim(R) de R en A es la "menor" relación que la incluye y que es simétrica con símbolos: ($\forall R'$ reflexiva)

$$(A \leq R' \leq ref(R)) \Rightarrow R' = sim(R))$$

Una cerradura transitiva trans (R) de R en A es la "menor" relación que la incluye y que es transitiva, con símbolos: ($\forall R'$ reflexiva)

$$(A \leq R' \leq ref(R)) \Rightarrow R' = trans(R))$$

VIDEO UNIDAD 3

Te invitamos a ver el siguiente video:

CERRADURA

La cerradura transitiva reflexiva y la cerradura simétrica de una relación es muy simple de encontrar, solamente se le agregan los pares necesarios (tan pocos como sea posible) de una forma directa. Cuando conocemos la matriz asociada a la relación, la forma de encontrar las cerraduras anteriores es muy simple.

Ejemplo:
Sea A = { a , b , c , d } y R = { (a;a) , (a; b) , (b;b) , (a;c) , (c;a) , (d;d) , (b;d) }
Se ve que R no es reflexiva pues (c; c) no pertenece a R. Si se lo agregamos, la nueva relación será reflexiva:
Rf = R ƒ{ (c; c) } es la clausura reflexiva de R.
R tampoco es simétrica, pero podemos hallar:
Rs = R ƒ { (b; a) , (d; b) } que es la clausura simétrica de R.
Uniendo las dos obtenemos:
Rfs = Rf ƒ Rs = Rƒ{ (c; c) , (b; a) , (d; b) } la clausura reflexiva y simétrica.
En este ejemplo, R tampoco es transitiva, pues por ejemplo, (a; b) y (b; d) pertenecen a R y sin embargo, (a; d) no pertenece.

CERRADURA

Teorema: Sea R una relación en A y MR su matriz asociada. La cerradura reflexiva y la cerradura simétrica de R son únicas y pueden obtener mediante las matrices siguientes Mref(R) MRUIn, donde In es la matriz identidad de orden |A|.

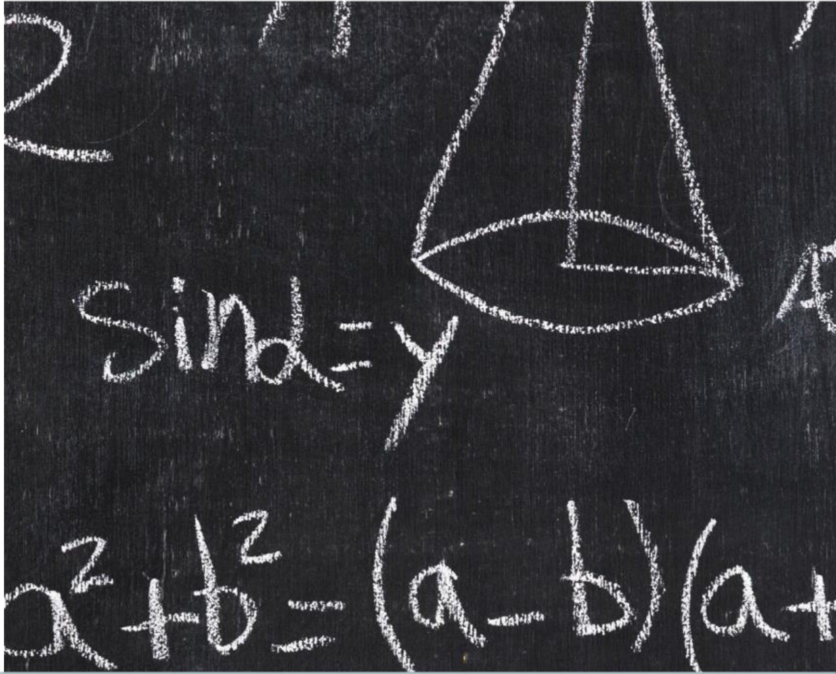
Msim(R) = [aij], donde aji = 1 si aji = 1 en MR

La matriz identidad de orden n es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Simétrica

O sea que para lograr la cerradura reflexiva debemos agregar 1's en la diagonal, para la cerradura simétrica debemos agregar 1's en lugares simétricos a la diagonal principal donde existan.



CERRADURA

Algoritmo Warshall o Cerradura Transitiva

Sea R una relación no reflexiva sobre el conjunto A. La relación reflexiva R1 más pequeña que contenga R, es R unida a la relación diagonal de A (□A).

Ejemplo: Sea R = {(1,3), (1,4), (2,1), (3,2)} en el conjunto A = {1, 2, 3,4}. R1 = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4),(3,1), (3,2), (3,3), (3,4)} R1 se forma añadiendo todos los pares de la forma (a,c) tales que (a,b) y (b,c) ya están en R.

Sea R una relación sobre un conjunto A. entonces R∞ es la cerradura transitiva de R.

Nota: La relación de conectividad R∞ se define por: a R∞ b si y sólo si hay una trayectoria en R de “a” hasta “b”.

TEMA 3
RELACIONES DE EQUIVALENCIA

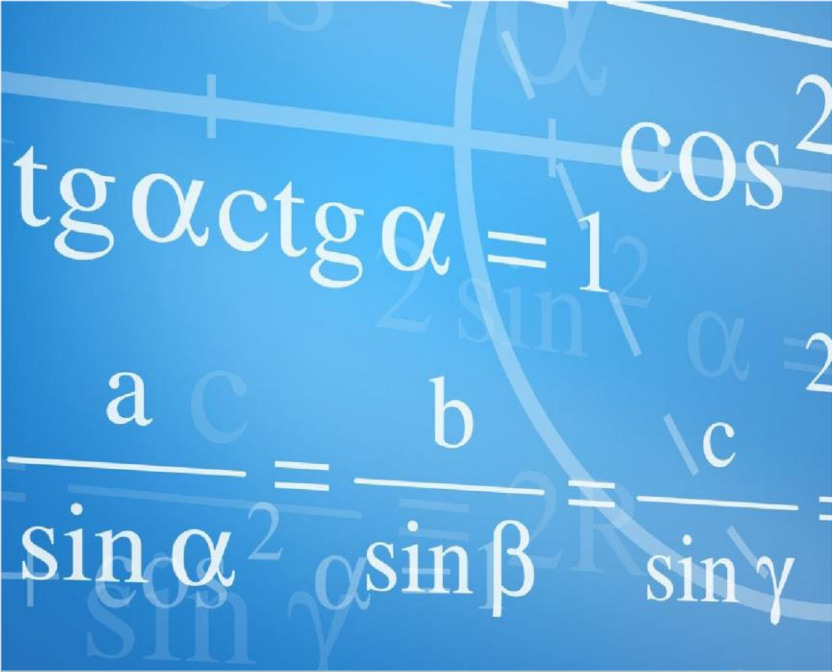
RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Una relación binaria sobre A, es de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva. Las relaciones de equivalencia suelen representarse (no necesariamente) con el símbolo: ~
Sea (A ; ~), se define como clase de equivalencia del elemento $a \in A$: $a = [\, a \,] = Cl\,(a) = \{\, x \in A \,/\, x \sim a \,\}$

La relación de equivalencia más importante es la relación de igualdad.

Tipo de relación	**Porque**
Reflexiva	x=x para todo x
Simétrica	x=y e y=x
Transitiva	x=y e y=z, x=z

Ejemplo: En un conjunto AA formado por bolas de colores, demostrar que la relación xRy si y sólo si x tiene el mismo color que y, es de equivalencia. Solución: En efecto, toda bola tiene el mismo color que ella misma (reflexiva). Si x tiene el mismo color que y, entonces y tiene el mismo color que x (simétrica). Si x tiene el mismo color que y e y tiene el mismo color que z, entonces x tiene el mismo color que z (transitiva).



RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Ejemplo:

Sea A un conjunto formado por siete bolas numeradas del 1 al 7 y tales que las bolas 1,2,3 son rojas, la 4 y 5 azules, y la 6 y 7 verdes. Se considera en A la relación de equivalencia xRy, si y solo si x e y tienen el mismo color. Determinar las clases de equivalencia y el conjunto cociente.

Solución

Las clases de equivalencia son:

C[1]=C[2]=C[3]={1,2,3}

C[4]=C[5]={4,5}

C[6]=C[7]={6,7},

y por tanto, el conjunto cociente es:

A/R={{1,2,3},{4,5},{6,7}}.

Nota: A veces se identifica cada clase de equivalencia, con lo que tienen en común los elementos de la clase. En la relación de equivalencia de este problema sería A/R=(rojo, azul, verde).

VIDEO UNIDAD 3

Te invitamos a ver el siguiente video:

RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Ejemplo:
Congruencia Módulo n: En el conjunto de los enteros se define la relación: $a \, R \, b \iff a \equiv b \, (n) \iff n \mid a - b$, $n \in N$. Se lee "a es congruente con b módulo n".

Solución

Reflexiva: $\forall x \in Z : x - x = 0 \Rightarrow x - x = 0 \times n \Rightarrow n \mid x - x \Rightarrow x \equiv x \, (n)$

Simétrica: $\forall x, y \in Z : x \, R \, y \Rightarrow x \equiv y \, (n) \Rightarrow n \mid x - y \Rightarrow x - y = n \times k \wedge k \in Z \Rightarrow -(x - y) = -n \, k \Rightarrow y - x = n \times (-k) \wedge -k \in Z \Rightarrow n \mid y - x \Rightarrow y \equiv x \, (n) \Rightarrow y \, R \, x$

Transitiva:
$\forall x, y, z \in Z : x \, R \, y \wedge y \, R \, z \Rightarrow x \equiv y \, (n) \wedge y \equiv z \, (n) \Rightarrow n \mid x - y \wedge n \mid y - z \Rightarrow x - y = n \times k \wedge k \in Z \wedge y - z = n \times t \wedge t \in Z \Rightarrow$ sumando miembro a miembro
$x - y + y - z = n \times k + n \times t \Rightarrow x - z = n \times (k + t) \wedge k+t \in Z$
$\Rightarrow n \mid x - z \Rightarrow x \equiv z \, (n) \Rightarrow x \, R \, z$

TEMA 4
ÓRDENES PARCIALES

ÓRDENES PARCIALES

Una relación R en A, es de orden parcial, si R es **reflexiva, antisimétrica y transitiva** (RAT).

Se dice entonces que, el conjunto A es un conjunto parcialmente ordenado, y se denota por: (A,R) o (A, $\leq$) o A (Observar que $\leq$ es lo mismo que R) R-1 también es un orden parcial llamado el dual del orden parcial R.

Si a y b son elementos de (A, $\leq$), se dice que:

$a < b$ si ($a \leq b$ y $a \neq b$)

a y b son comparables si: $a \leq b$ o $b \leq a$

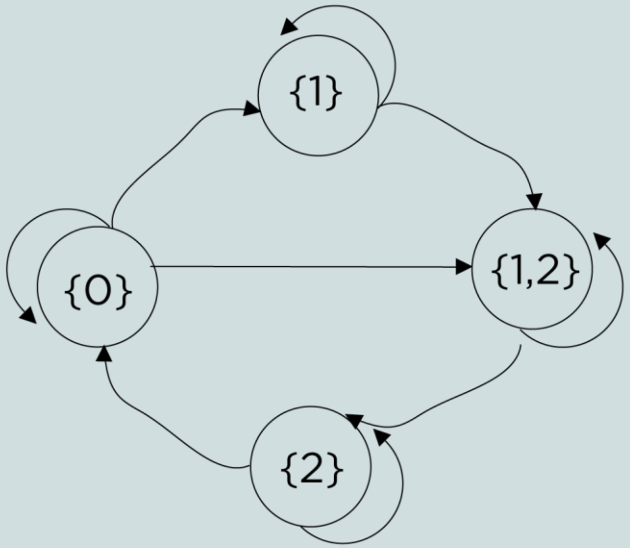
Si cada par de elementos de A son comparables, entonces, A es un conjunto totalmente ordenado.

VIDEO UNIDAD 3

Te invitamos a ver el siguiente video:

ÓRDENES PARCIALES

Ejemplo: A es el conjunto de todos los subconjuntos del conjunto $S \neq \emptyset$, la relación R de inclusión de conjuntos, $\subset$ es una relación de orden parcial:



S= {1,2} A={Ø, {1}, {2}, {1,2}}
Obsérvese que la relación R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.
Ejemplo: Sea A= Z+ , y sea R la relación ≤: $a \leq b \leftrightarrow (b-a)$ es un número natural
Obsérvese que cualquier par de números a y b, cumplen, o bien $a \leq b$ o bien $b \leq a$
Luego cada par de números a y b son comparables, por lo tanto, esta relación es un orden total, o A es un conjunto totalmente ordenado.

ÓRDENES PARCIALES

La relación de divisibilidad R, definida por:
$a\ R\ b \leftrightarrow a \mid b \leftrightarrow$ a es divisor de b

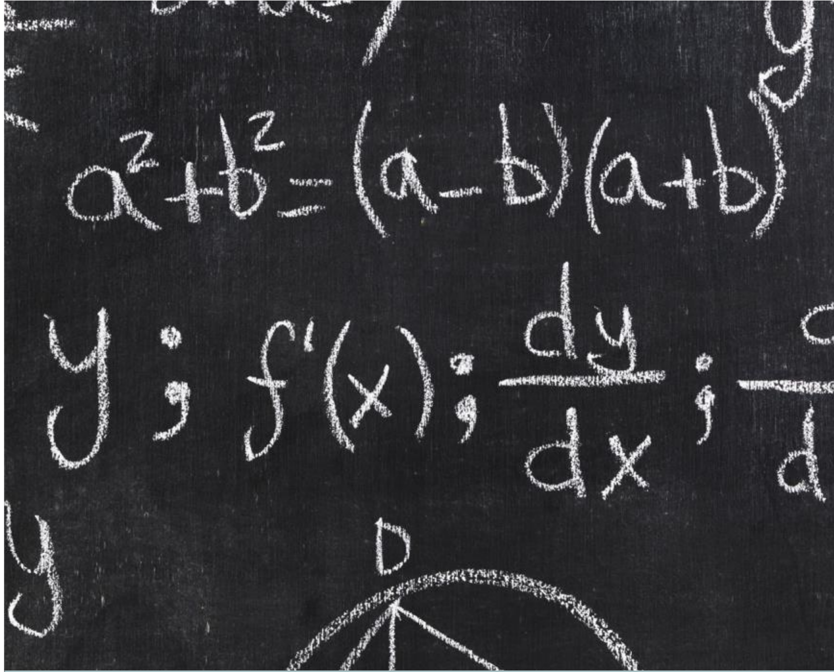
R si es una relación de orden (reflexiva antisimétrica y transitiva).
Es una relación de orden parcial.

R no es un orden total, ya que no todas las parejas de números son comparables, por ejemplo, 3 y 4 no son comparables, ya que no cumplen ni $3 \mid 4$, ni $4 \mid 3$

El dual de R (es divisor de), R-1 (es múltiplo de) también es un orden parcial.

Ejemplo Rel (A)= {(a,a),(a,b),(b,b)} donde A={a,b} ¿es relación de equivalencia o de orden parcial?
Una relación de equivalencia cumple:

1) idéntica. Es decir (a,a) y (b,b) tienen que pertenecer a la relación.
2) recíproca. Si (a,b) pertenece también lo debe de hacer (b,a). Pero esto no es el caso.



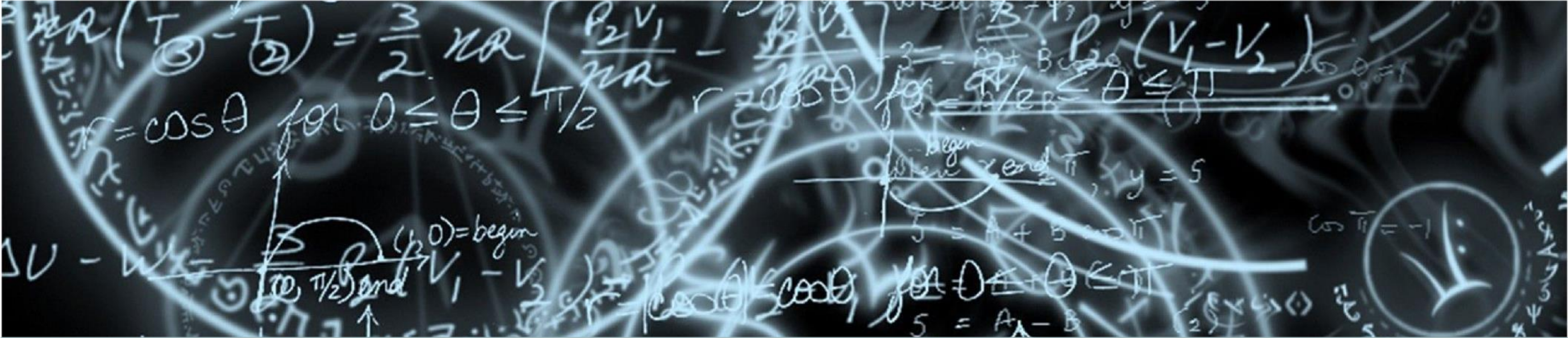
ÓRDENES PARCIALES

3) transitiva. Dados 2 parejas que pertenezcan, (a,b) y (b,c) (si hubiera un c), entonces (a,c) tiene que pertenecer. Por ahora no la vamos a estudiar porque ya sabemos que la relación no es de equivalencia.

Para que una relación sea de orden estricto, se tiene que cumplir la propiedad transitiva y la inidéntica, es decir, a no puede estar relacionado con a. Por ejemplo, la relación < , a no puede ser menor que a. O sea que esta relación no es de orden estricto. Vamos a ver si es de orden amplio.

Para esto debes tener:

1) idéntica. Ya vimos que se cumple
2) antisimétrica. Esto significa que, si (a, b) y (b, a) pertenecen a la relación, entonces a = b. Piensa en el caso de : Si a <=b y b<=a, => a=b.

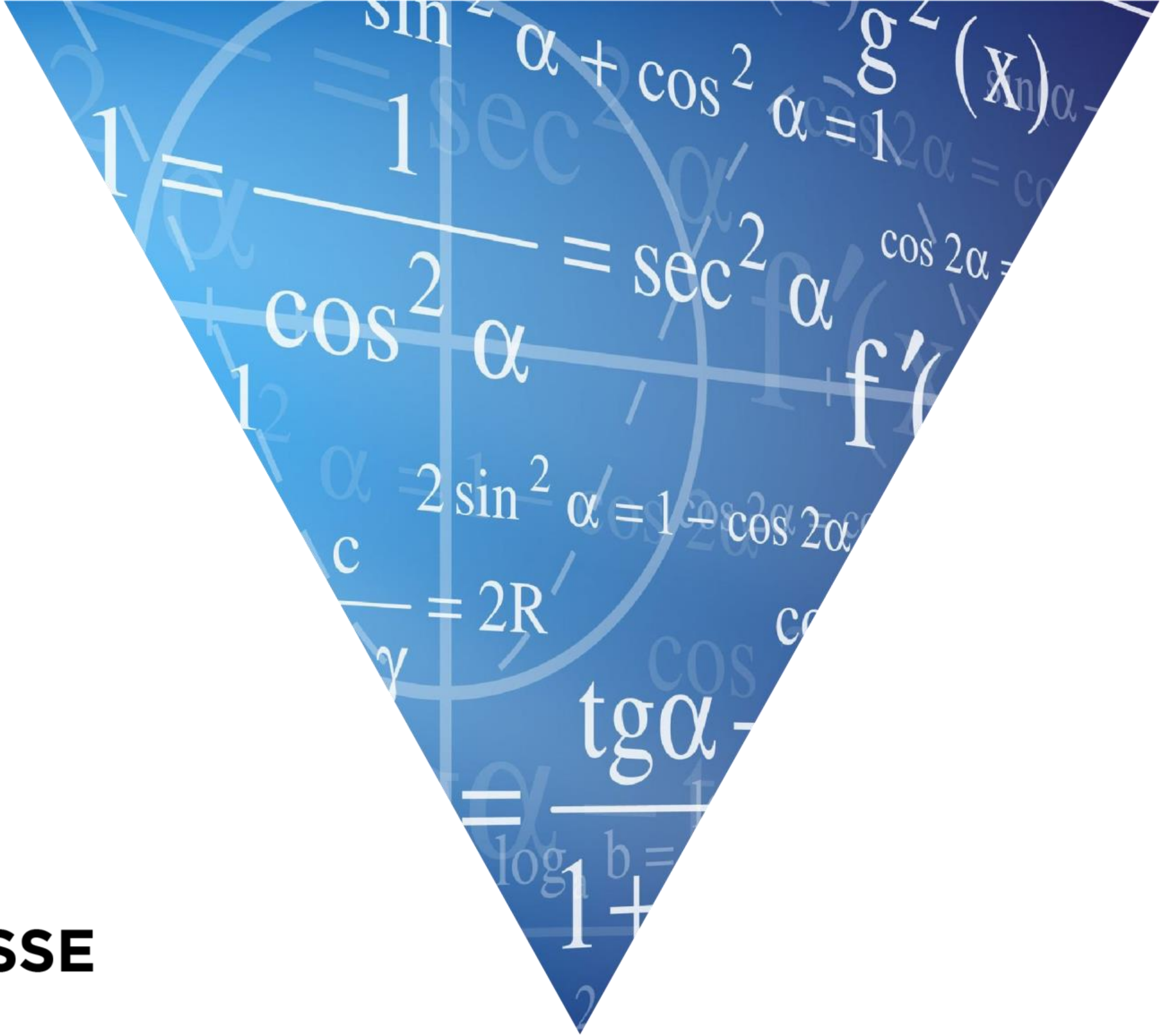


ÓRDENES PARCIALES

3) Transitiva. Ahora sí vamos a estudiar esto.

Te puse este esquema para que veas que la relación es transitiva. Si 2 elementos están relacionados, sean iguales o diferentes, el primero y el tercero lo están.

Por lo tanto, la relación es de orden amplio. Para saber si es de orden total, me tiene que pasar que, dados 2 elementos de A, o (a,b) pertenece, o (b,a) pertenece, lo que es el caso.



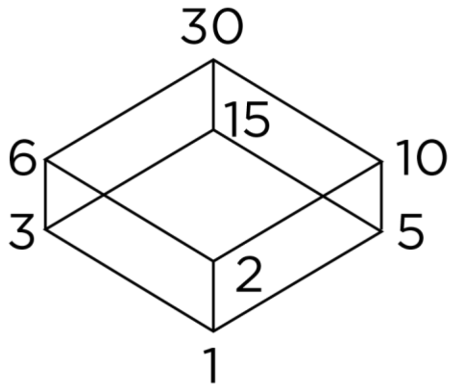
TEMA 5
DIAGRAMAS DE HASSE

DIAGRAMAS DE HASSE

Un diagrama de Hasse (en el plano) es una representación gráfica (simplificada) de un conjunto finito parcialmente ordenado. Dicho diagrama se consigue eliminando información redundante. Para ello, se dibuja una arista ascendente entre dos elementos solo si uno sigue a otro sin haber otros elementos intermedios (sucesor inmediato). Esto es, en un diagrama de Hasse se elimina la necesidad de representar a los ciclos de un elemento (inducidos por la propiedad reflexiva), y a las aristas que se deducen de la transitividad de la relación de orden.

La primera condición es que si dos elementos están relacionados, digamos $(a,b) \in R$ entonces dibujamos b a un nivel superior de a.

Un diagrama de Hasse elimina la necesidad de representar lazos, puesto que se tiene que la relación parcialmente ordenada es reflexiva.



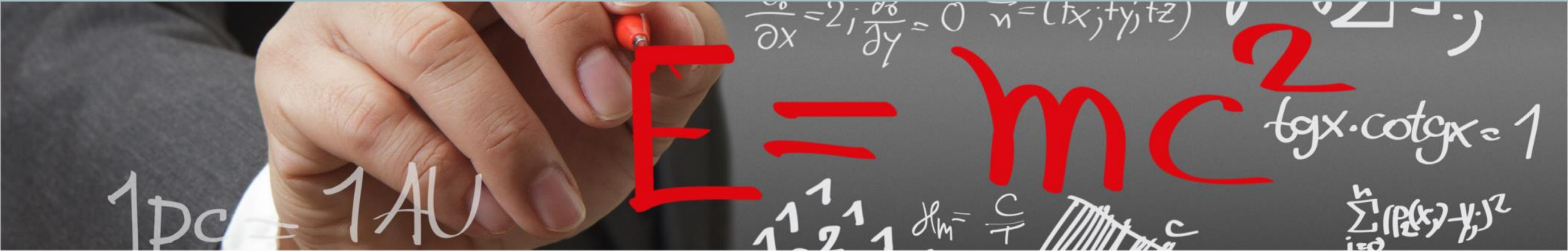
Definición

Supongamos a, b y c tres elementos distintos de un conjunto y R una relación de orden sobre este conjunto. Se dice que b está entre a y c en el orden si existen los pares aRb y bRc. Se dice que b sigue a a en el orden si existe el par aRb, pero no hay ningún elemento c entre a y b (es decir, no existen aRc ni cRb).

Dada una relación de orden R, se puede hacer un subconjunto de esta en el que solo se tengan lo pares aRb, donde b sigue a a.

La relación R que se obtiene es un subconjunto de un orden estricto, por lo que se puede utilizar para obtener las propiedades de R. El diagrama de Hasse es la representación gráfica de este subconjunto de R.

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DE PROPOSICIONES



DIAGRAMAS DE HASSE

Ejemplo:

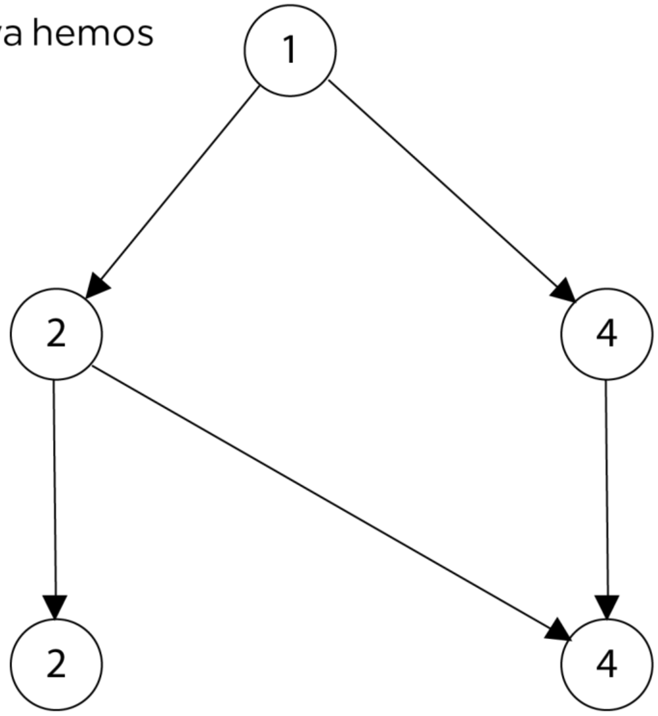
Dado el conjunto A={1,2,3,4,5}, tenemos una relación binaria, que ya hemos visto anteriormente que es de orden, sobre A, definida como
R={(a,b)/a,b $\in$ A y a<=b }

Conteniendo los siguientes pares

R= <= ={(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),
(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5)}

Obtener el diagrama de Hasse

Rs={(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)}
Los pares de la relación identidad no cumplen
la definición para pertenecer a Rs
(1,3) no está pues existe (1,2) y (2,3)
(1,5) no está pues existe (1,2) y (2,5)
Y su diagrama de Hasse el elemento maximal (el 1) y los elementos minimales (3 y 5), así como su orden parcial.



TEMA 6
TIPOS DE FUNCIONES

TIPOS DE FUNCIONES

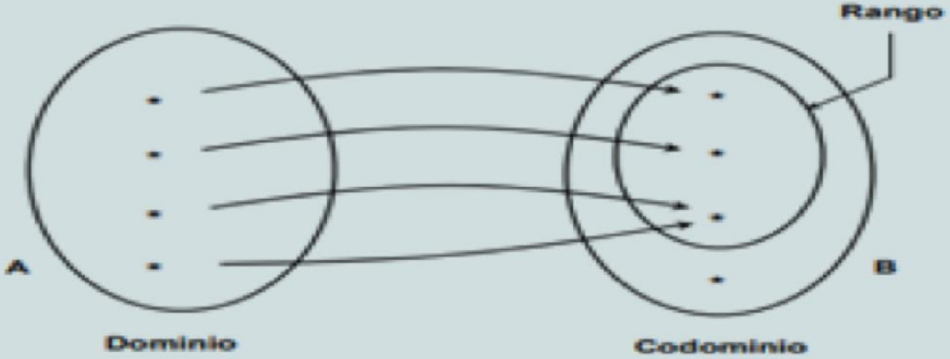
Una función es una asignación o correspondencia de un conjunto a otro. Su definición formal es la siguiente:

Una función es una terna constituida por:

1. Un conjunto A llamado dominio de la función.
2. Un conjunto B llamado codominio de la función.
3. Una regla de correspondencia que posee tres características:
    a) A todo elemento del dominio se le puede asociar un elemento del codominio.
    b) Ningún elemento del dominio puede quedarse sin un asociado en el codominio.
    c) Ningún elemento del dominio puede tener más de un asociado en el codominio.

Rango

Se denota como: **f : A → B**



TIPOS DE FUNCIONES

El dominio, denotado por Df , de una función, es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente, es decir, son todos aquellos números para los cuales la función tiene sentido (también se conoce como campo de variación). Al elemento que se obtiene en el codominio después de aplicar la regla de correspondencia a un elemento del dominio recibe el nombre de imagen. Al conjunto de todas las imágenes se le conoce como rango1, denotado por Rf. Al rango también se le conoce como recorrido.

Ejemplo. Sea un conjunto de siete muchachos y otro conjunto sus edades respectivas en años.

NOMBRE	EDAD
Alberto	17
Clarissa	16
Diana	19
Ernesto	17
Fabiola	16
Karen	19
Manuel	15

TIPOS DE FUNCIONES

Como ves, la tabla muestra que a cada muchacho le corresponde una edad y cumple con las condiciones de función, por lo que su dominio es: { Alberto, Clarissa, Diana, Ernesto, Fabiola, Karen, Manuel } y el rango es { 15,16,17,19 }.

Si se denota a x como un elemento en el dominio de la función, entonces el elemento en el recorrido que f asocia con x, es la imagen de x bajo la función f. Esto es:

f (Manuel) = 15, f (Clarissa) = f (Fabiola) = 16, f (Alberto) = f (Ernesto) = 17 y f (Diana) = f (Karen) = 19.
En términos de variables, una función también se puede definir de la siguiente forma:

Se dice que una variable y es función de otra x, cuando ambas están relacionadas de forma que para cada valor de x perteneciente a su campo de variación, le corresponde sólo uno de y. La variable y recibe el nombre de variable dependiente, mientras que x es la variable independiente.

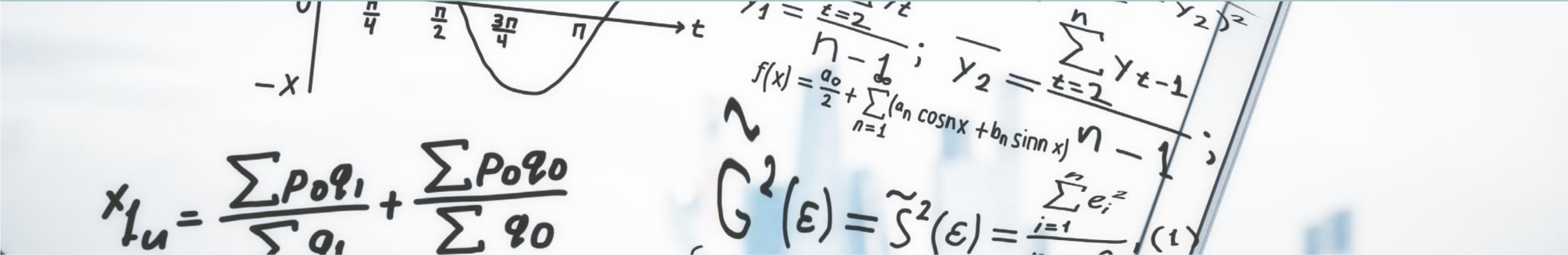
Lo anterior puede expresarse simbólicamente de la siguiente forma: $y = f(x)$

Esta manera de representar una función es especialmente útil, pues se puede saber con certeza el valor que toma la variable dependiente para cualquier valor que tome la variable independiente.

Esto posibilita la construcción de una tabla de valores de la misma y su respectiva gráfica, debido a que cada pareja de valores (x, y) de la tabla que se calcule representa un punto del plano cartesiano.

Por tanto, una función puede ser presentada de múltiples maneras: una expresión matemática del tipo $y = f(x)$, una tabla de valores, una gráfica o incluso una frase que exprese la relación entre ambas variables.

TIPOS DE FUNCIONES



Para encontrar el dominio y el rango de una función es necesario revisar su comportamiento, para lo cual se recomienda: para el dominio, que esté despejada la variable dependiente y para el rango que lo esté la variable independiente. A partir de esas expresiones, se efectúa un análisis que consiste básicamente en determinar los valores reales de la variable no despejada que hacen reales los valores de la variable despejada, obteniendo así el dominio y el rango respectivamente.

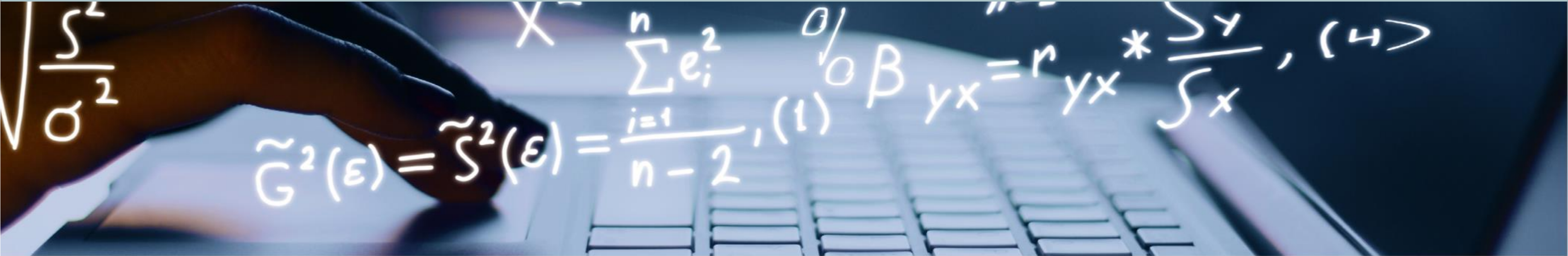
Ejemplo. Determinar el dominio y el rango de las siguiente función:

$$f(x) = x2 +5$$

Solución: La función está definida para todo valor de x, es decir, su dominio son todos los números reales.

No todas las funciones son de una sola variable independiente. En realidad, el concepto de función es más general. La definición más completa de función es la siguiente:

TIPOS DE FUNCIONES



TIPOS DE FUNCIONES

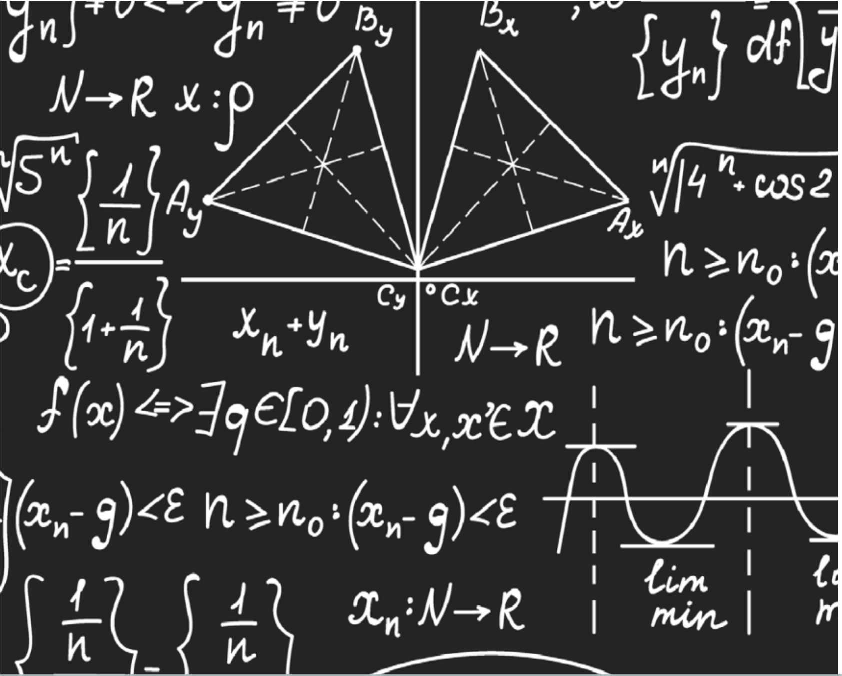
Una función es una ley que relaciona una o más variables independientes con otra variable dependiente de forma unívoca, es decir, que a cada conjunto de valores formado por un valor de cada una de las variables independientes le corresponde sólo un valor de la variable dependiente. Una función de varias variables tendría este aspecto: y= f (x1 , x2 , x3 . , xn) .En este caso, sólo se analizarán funciones de una variable.

Funciones Inyectivas, Suprayectivas y Biyectivas

Una función es inyectiva cuando a diferentes elementos del dominio le corresponden distintos elementos del codominio, y recíprocamente, a distintos elementos del codominio se le asocian diferentes elementos del dominio. También se le conoce como función uno a uno.

Ejemplo

La función $y=2^x$ tiene como dominio al conjunto de los números reales y su rango son los números reales positivos (por tanto excluye a todos los reales negativos al cero.)



TIPOS DE FUNCIONES

Una **función es suprayectiva** si cualquier elemento del codominio es imagen de por lo menos un elemento del dominio de la función. También se le conoce como sobreyectiva

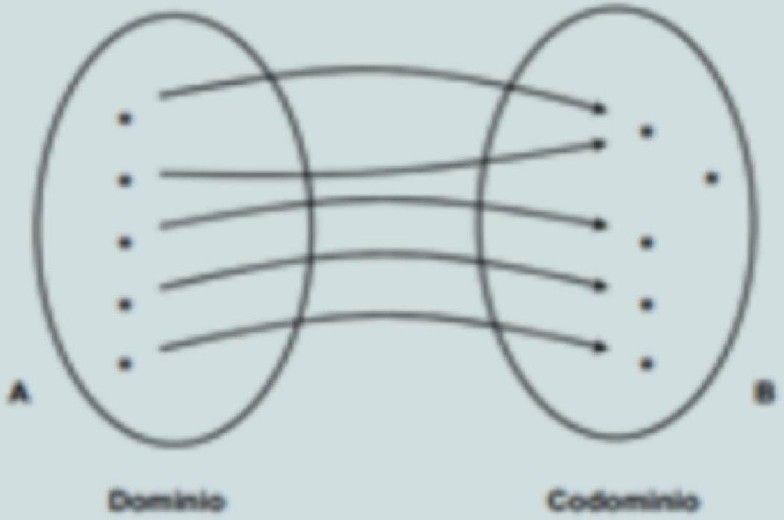
Ejemplo:
La función $y=x^{3-}\,3x$ tiene como dominio al conjunto de números reales y su rango también son los números reales. Pero la función presenta un crecimiento hasta llegar a $y = 2$, después un decrecimiento hasta $y = -2$ y vuelve a crecer. Por lo tanto, existe un intervalo cuyos valores del dominio tienen la misma imagen, por lo tanto no es una función uno a uno.

Una **función es biyectiva** si cumple con ser inyectiva y suprayectiva. La regla de correspondencia es biunívoca.

Ejemplo:
La función $y = 6x - 2$ tiene como dominio y rango al conjunto de los números reales. Cumple con el inyectiva y suprayectiva.

TIPOS DE FUNCIONES

Pueden existir funciones que no sean ni inyectivas ni suprayectivas, es decir, en donde la asociación no sea uno a uno y además que no cumplan que el rango y el codominio sean iguales, como por ejemplo:



En general, se pueden efectuar innumerables correspondencias entre dos conjuntos, sin embargo, sólo serán funciones aquellas que cumplan con las condiciones definidas. Las que no las cumplan sólo serán relaciones.

Función constante
Es una función en que siempre toma el valor k, que es una constante: $f(x) = k$

Su dominio son todos los números reales **Funciones polinómicas**

Son funciones de la forma:
$\mathbf{f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_\delta x^p}$ donde a_0, a_1, a_2, a_3, a_δ son números reales y los exponentes son números naturales. El dominio de todas las funciones polinómicas son todos los números reales.

Funciones lineales
Son funciones polinómicas de la forma:
$\mathbf{f(x) = mx + b}$ la representación gráfica de una función lineal es una recta donde m representa la pendiente (grado de inclinación) y b representa la ordenada al origen (cruce de la recta en el eje y). Por ser también una función polinómica, su dominio son todos los números reales.

TIPOS DE FUNCIONES

ACTIVIDAD 2. UNIDAD 3.

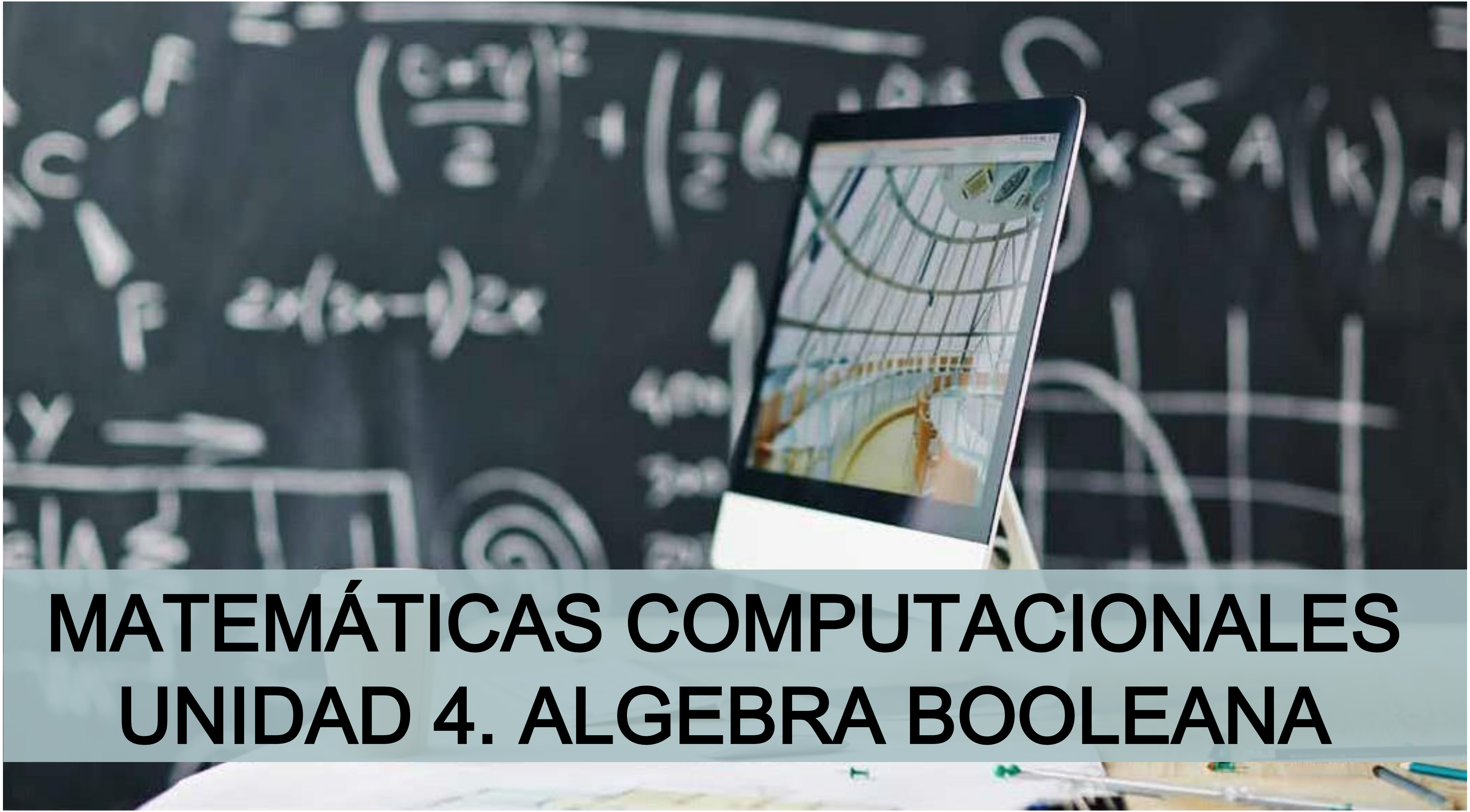
Te invitamos a realizar la siguiente actividad:

Presiona el botón para descargar la actividad:

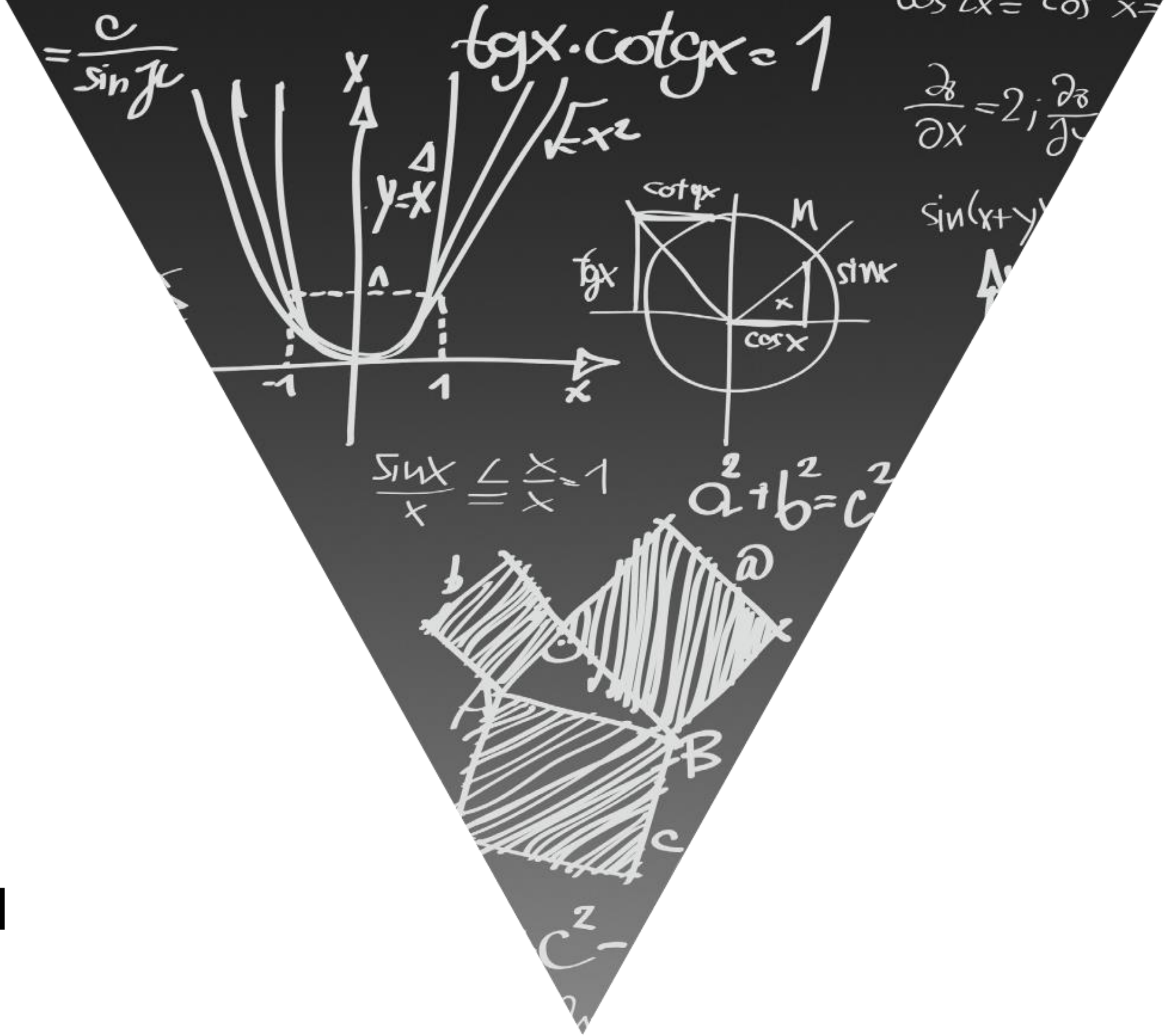
Presiona el botón para entregar la actividad:

¡ FELICIDADES !

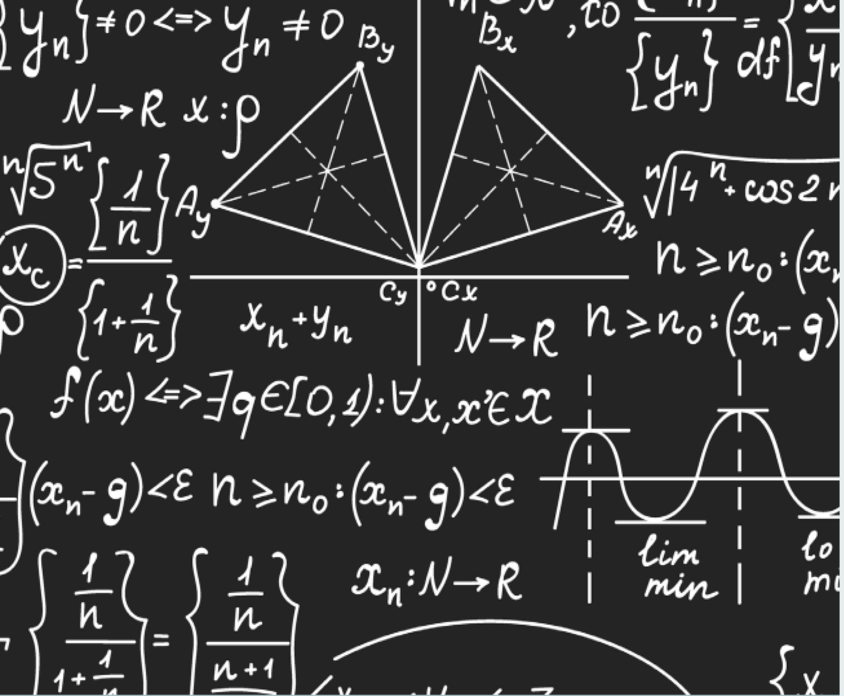
Acabas de concluir la **tercera unidad** de tu curso **Matemáticas Computacionales**. Te invitamos a finalizar este esfuerzo realizando el examen parcial correspondiente. Para ello debes regresar a la pantalla principal y dar clic en Presentar examen.



MATEMÁTICAS COMPUTACIONALES
UNIDAD 4. ALGEBRA BOOLEANA



TEMA 1
INTRODUCCIÓN

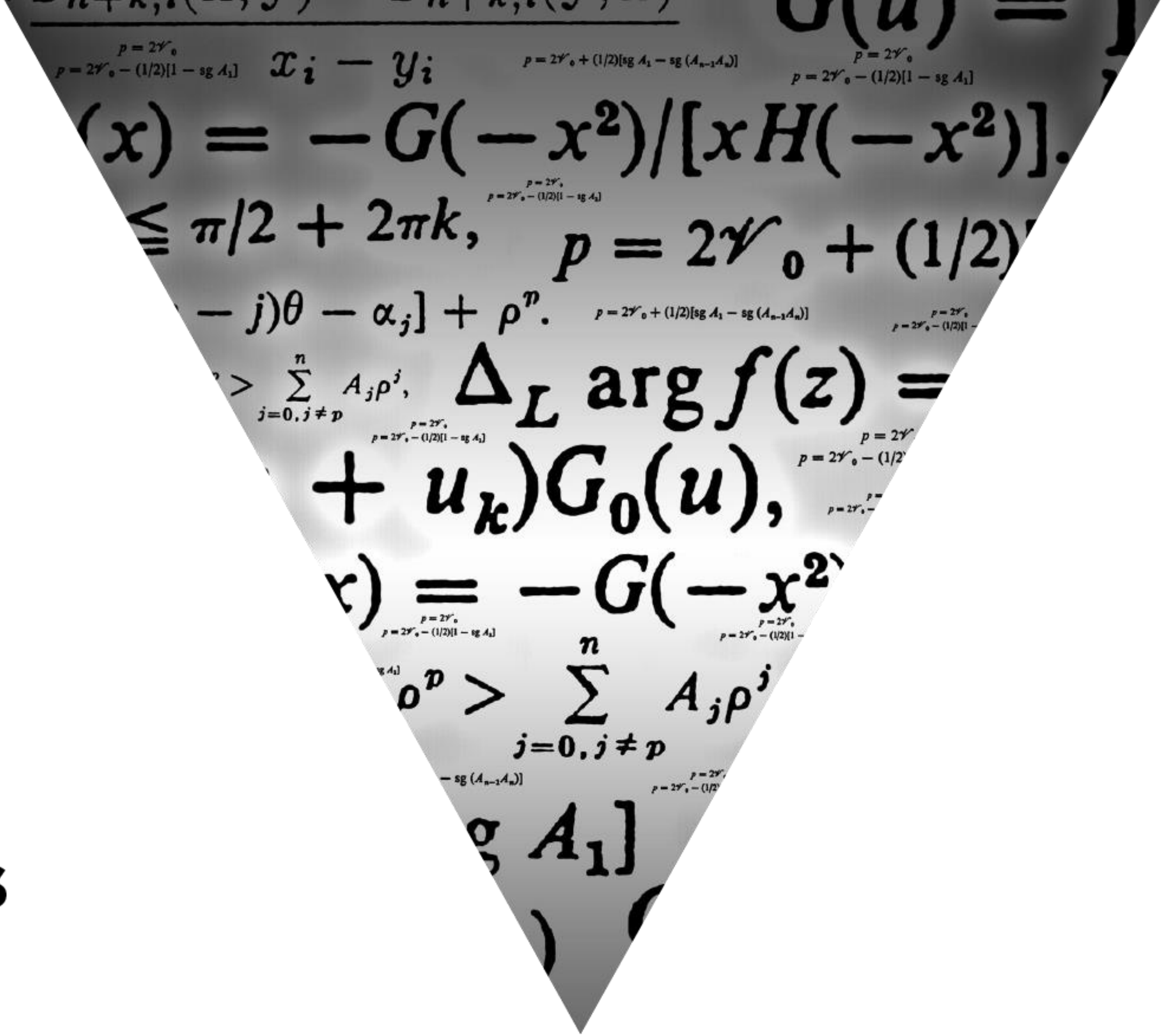


INTRODUCCIÓN

La tecnología nos permite construir compuertas digitales a través de transistores y mediante las compuertas diseñamos los circuitos digitales empleados en las computadoras. Sin embargo el empleo de esta tecnología no determina por sí sola la aparición de principios lógicos y algebraicos que nos permitan manipular, con rigor matemático, variables mediante dispositivos electrónicos.

La forma en que las computadoras realizan operaciones lógicas es mediante el álgebra de Boole aplicada a los circuitos electrónicos.

El álgebra booleana es importante pues permite la sistematización y representación matemática del funcionamiento de los circuitos electrónicos digitales.

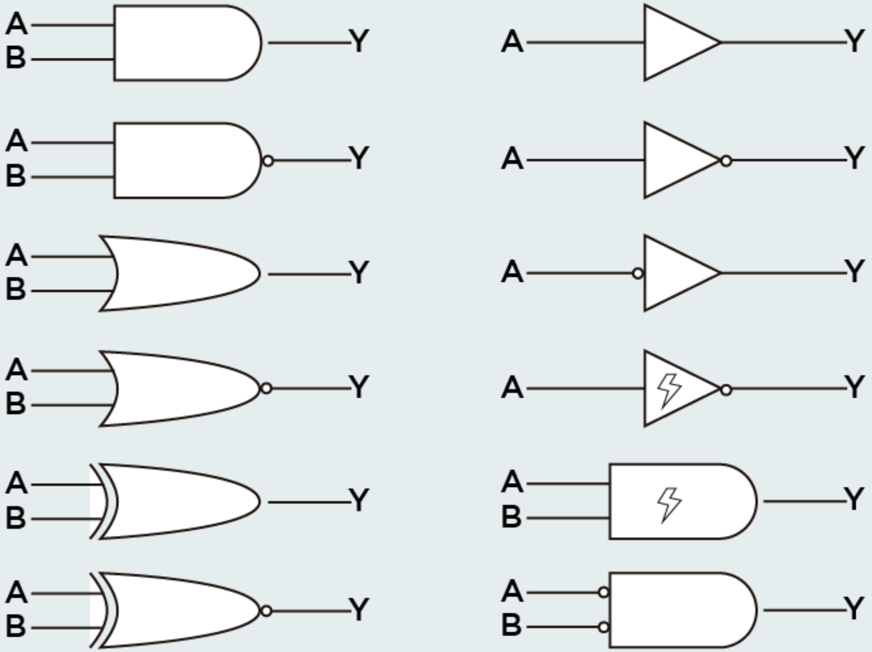


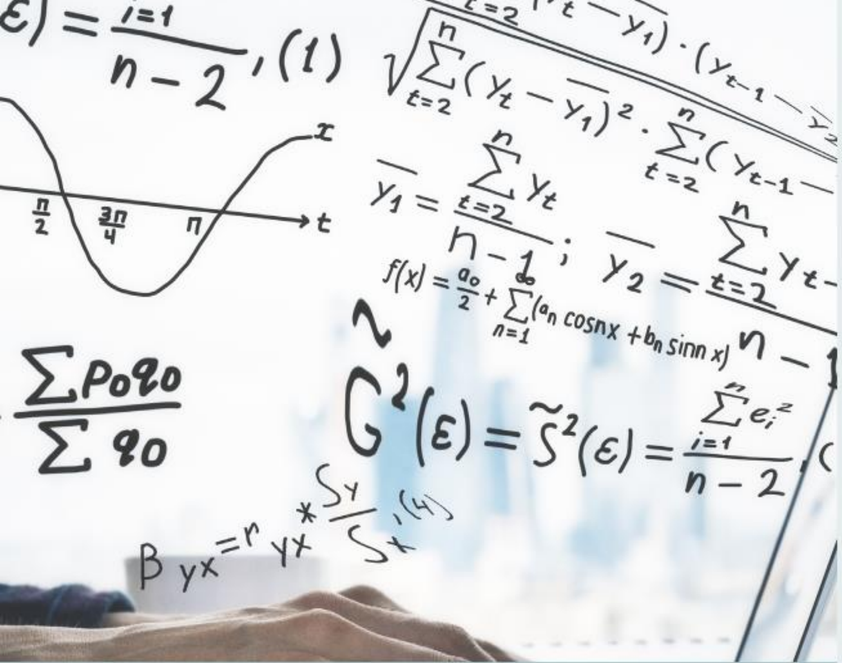
TEMA 2. EXPRESIONES BOOLEANAS

EXPRESIONES BOOLEANAS

Ya comentamos que el álgebra booleana trabaja con señales binarias.

Para resolver un problema práctico en el cual se desea automatizar un proceso, es necesario realizar un análisis detallado de lo que se quiere lograr así como de los tipos de sensores necesarios para obtener las señales. Una vez que se conoce esto se plantea el funcionamiento del circuito lógico en una expresión matemática, la cual recibe el nombre de función booleana (expresión booleana), y cada una de las variables de las que está integrada esta función representa un sensor que provee al circuito de una señal de entrada.





EXPRESIONES BOOLEANAS

Una expresión booleana es una sucesión de símbolos que **incluye 0,1, algunas variables y las operaciones booleanas.**

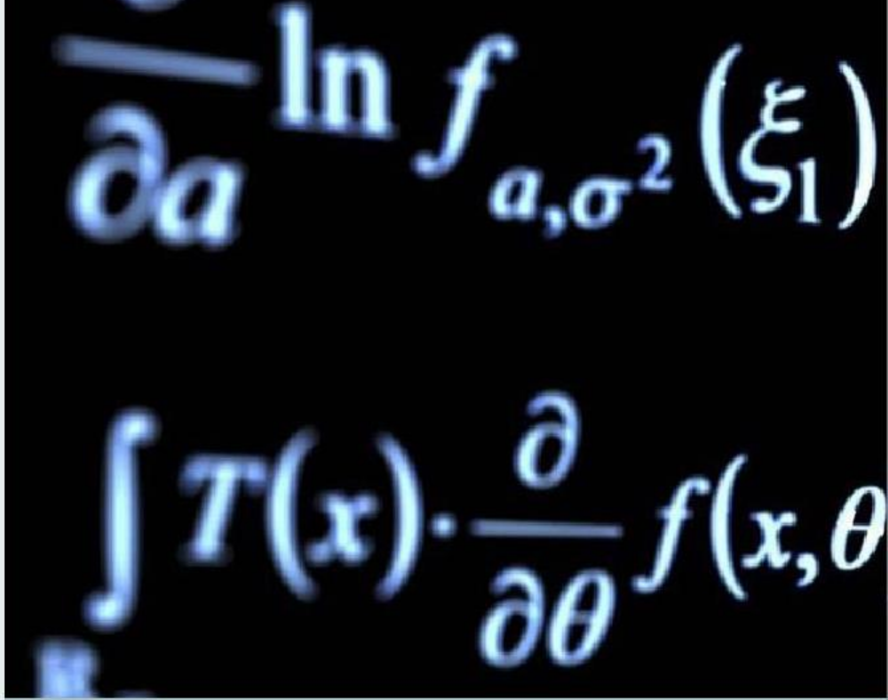
Complemento: Inverso de la variable. Se representa A o A´

Literal: Es una variable o el complemento de una variable.

Para ser más claros, definamos una expresión booleana en n variables x1, x2..., xn recursivamente como:

Los símbolos 0 y 1 y x1, x2,..., xn **son expresiones booleanas en x1, x2,... xn.**

Si E1 y E2 son expresiones booleanas en x1, x2,... xn también lo son E1 + E2; E1 E2 y E1’.



EXPRESIONES BOOLEANAS

Ejemplo:

Las siguientes son cuatro expresiones booleanas en las tres variables x, y, z:

$(x + y)(x + z).1.$	$x + y.$
$x'z + x'y + z'.$	$z.$

Es obvio que las expresiones del lado izquierdo involucran las tres variables, las del lado derecho dos y una variable respectivamente. Las expresiones booleanas 0 y 1 pueden verse como expresiones en cualquier número de variables.

El número de variables de una expresión booleana es el número de letras distintas que aparecen en la expresión, sin tener en cuenta si están o no complementadas.

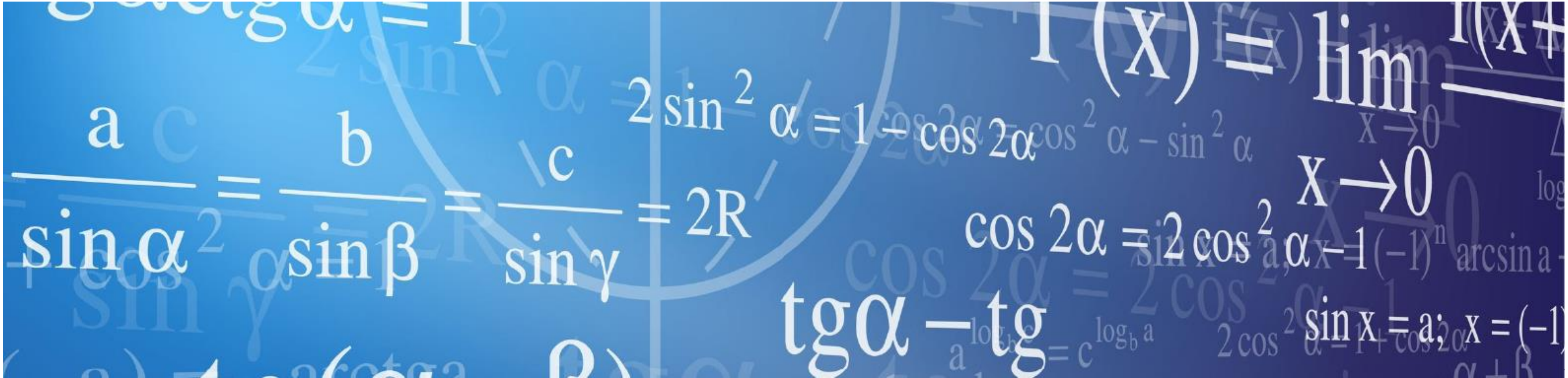
EXPRESIONES BOOLEANAS

Ejemplo: En la siguiente expresión se muestra la forma en que se representan los operadores:

$F=A'BD1+AB'CD+0$

$=A'B\wedge D\wedge 1\wedge A\wedge B'\wedge C\wedge D\wedge 0$

Nota: Es posible obtener el valor de una expresión booleana sustituyendo en cada una de las literales el valor de 0 o 1, teniendo en cuenta el comportamiento de los operadores lógicos. En las siguientes tablas se muestra la manera en la que se aplica la propiedad del AND, OR, NOT.



EXPRESIONES BOOLEANAS

Asimilación de los Operadores principales del Álgebra Booleana
Hay que tener presente que en álgebra booleana:

1+1=1
1+1+1=1
0+1=1
0+0=0

A	B	$A \wedge B = AB$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

AND

A	B	$(A \wedge B) = A + B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

OR

A	A
1	0
0	1

NOT

EXPRESIONES BOOLEANAS

Suma +
Producto ·
Complemento χ''

A	B	A+B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

A	B	A·B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

A	A″
1	0
0	1

A″·B
A″+B

A	B	A″+B
1	1	0
1	0	0
0	1	1
0	0	0

A	B	A⁻+B
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

EXPRESIONES BOOLEANAS

Ejemplo:

En una empresa de yogurt se desea tener un sistema automático que saque de la banda de transportación el yogurt que no cumple con los requisitos mínimos de calidad, y para esto se cuenta con cuatro sensores en diferentes puntos del sistema de transportación para revisar aspectos importantes de calidad. Suponiendo que los sensores son A, B, C, D y que el sistema F sacará el yogurt si los sensores emiten el siguiente grupo de señales.

A	B	C	D	E
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

EXPRESIONES BOOLEANAS

La función booleana que equivale a la tabla de verdad anterior es:
F= A'B'C'D + A'B'CD + AB'CD + AB'CD'

Esto implica que el yogurt será extraído de la banda de transportación en cualquiera de los siguientes casos, ya que para cualquiera de ellos se tiene que F = 1:

$$A = 0, B = 0, C = 0, D = 1$$

$$A = 0, B = 0, C = 1, D = 1$$

$$A = 1, B = 0, C = 0, D = 1$$

$$A = 1, B = 0, C = 1, D = 1$$

$$A = 1, B = 0, C = 1, D = 0$$

La función booleana indica solamente los casos en donde el yogurt será extraído, pero existen varios casos más en donde se dejará pasar porque cumple con los requisitos mínimos de calidad.

EXPRESIONES BOOLEANAS

Minitérmino

Es un producto booleano en la que cada variable aparece sólo una vez; es decir, es una expresión lógica que se compone de variables y los operadores lógicos AND y NOT. P.

Ejemplos:
ABC y AB′C
ab, a′b, ab′, a′b′

Maxitérmino

Es una expresión lógica que se compone de variables y los operadores lógicos OR y NOT. P.

Ejemplos:
A+B′+C y A′ + B + C
a+b a′+b, a′+b′

EXPRESIONES BOOLEANAS

En álgebra booleana, se conoce como f**orma canónica (Forma Normal Disyuntuva FND)** de una expresión, a todo producto o suma en la cual aparecen todas sus variables en su forma directa o inversa.

Ejemplos

$a'bc+abc+abc'$

$xyzw+x'yzw'+x'yzw+xy'zw'$

Expresión Dual a $(a' + b)$, $(x+y'+z)$,$(y'+x)(a+b+c')(a+a')$

Es una expresión booleana de n elementos $f(x1, x2 ,...xn)$ que se obtiene al intercambiar en las variables los símbolos + y *, así como los elementos neutros 0 y 1.

Ejemplos

$(a' + b) c+cd'$ con dual $(a'b+c)(c+d)'$

$x+yz+x'z$ con dual $x(y+z)(x'+z)$

$0+ (ad)' +a'b'c$ con dual $1(a+d)'(a'+b'+c)$

EXPRESIONES BOOLEANAS

Todas las expresiones lógicas son expresables en forma canónica como una "suma de minitérminos" o como un "producto de maxitérminos".

Ejemplo:

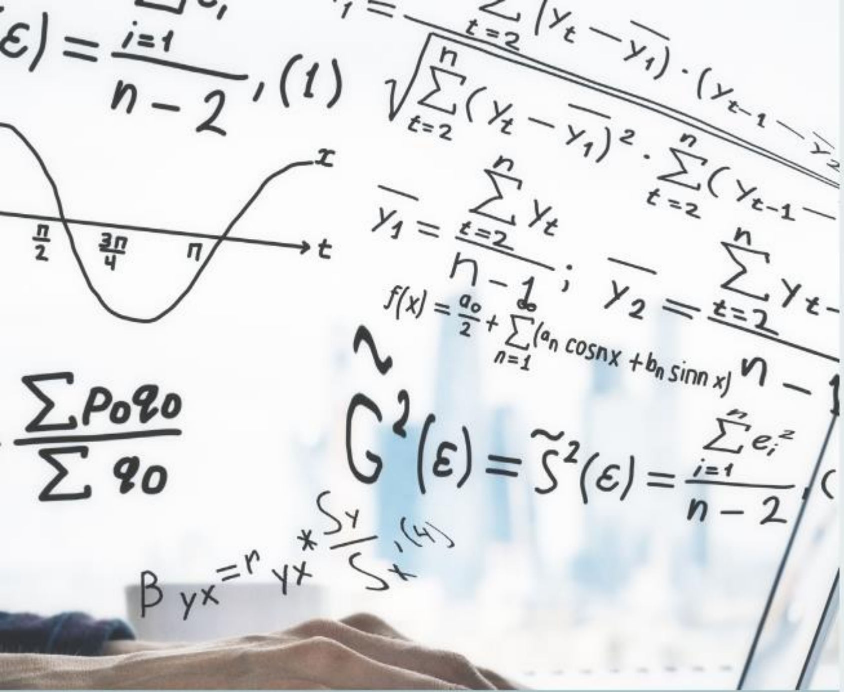
$a(a'+b),(x+y'+x),(y'+x)(a+b+c')(a+a')$

Recuerda: Para obtener la forma canónica de una expresión booleana se procede de la siguiente manera. En primer lugar, se debe obtener un polinomio booleano aplicando, cuando sea necesario, las leyes de doble complemento, Morgan y distributiva. A continuación, a cada término del polinomio que no sea minitérmino se le añaden los elementos precisos mediante la ley de identidad (multiplicando por la suma del elemento que falta más su complemento). Posteriormente, se aplica la propiedad distributiva con lo que se forma un polinomio booleano de minitérminos. Finalmente, si hubiera minitérminos repetidos, se eliminan por idempotencia.

Ejemplo:

La forma canónica de la expresión booleana $(a' + b)c + ac'$ es:

$$\begin{aligned}
&(a' + b)c + ac' = a'c + bc + ac' && \text{(Distributiva)}\\
&= a'(b + b')c + (a + a')bc + a(b + b')c' && \text{(Identidad)}\\
&= a'bc + a'b'c + abc + a'bc + abc' + ab'c' && \text{(Distributiva)}\\
&= a'bc + a'b'c + abc + abc' + ab'c' && \text{(Idempotencia)}
\end{aligned}$$



EXPRESIONES BOOLEANAS

Propiedades de las Expresiones Booleanas

a) Formadas con variables booleanas

b) Valores de 1 (verdadero) ó 0 (falso)

c) Puede tener constantes booleanas (1 ó 0)

d) Puede tener operadores lógicos: AND (&, ^), OR (V)

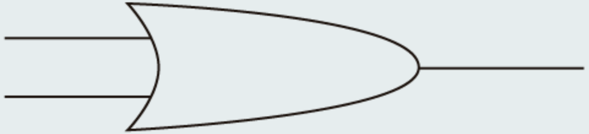
y NOT (¬, ‘, -, ~)

EXPRESIONES BOOLEANAS

- **Multiplicación lógica:** AND $xy = x \cdot y = (x)(y)$
- **Multiplicación booleana** ≡
AND

0 • 0 = 0
0 • 1 = 0
1 • 0 = 0
1 • 1 = 1

- **Suma lógica:** OR $x + y$



0 + 0 = 0
0 + 1 = 0
1 + 0 = 0
1 + 1 = 1

- **Complemento** (negación): **NOT** x'

e) Se puede obtener el resultado lógico de una expresión booleana aplicando las tablas de verdad (valores de certeza)

f) Se puede aplicar la **Ley de Morgan**

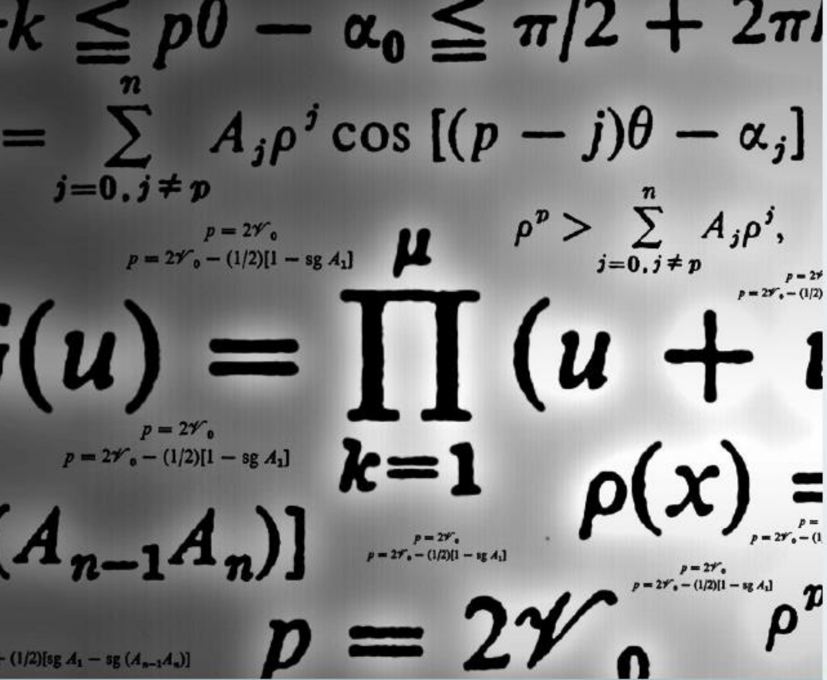
EXPRESIONES BOOLEANAS

Ejemplo de Expresiones Booleanas. Supongamos que un sistema lógico tiene 3 variables de entrada (A, B y C) y la salida de la función (F) se comporta de acuerdo con la siguiente tabla de verdad:

Representación de la expresión booleana:

$F = A'B'C + AB'C' + ABC'$

A	B	C	D
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0



EXPRESIONES BOOLEANAS

Deducir reglas adicionales, teoremas y otras propiedades del sistema en el álgebra booleana que a menudo se emplea.

Leyes de Álgebra Booleana

1. Existencia de neutros

$x+0=x$

$x \cdot 1=x$

2. Conmutatividad

$x+y=y+x$

$x \cdot y=y \cdot x$

3. Asociatividad

$x+(y+z)=(x+y)+z$

$x \cdot (y \cdot z)=(x \cdot y) \cdot z$

4. Distributividad

$x+(y \cdot z)=(x+z) \cdot (x+z)$

$x \cdot (y \cdot z)=(x \cdot z) \cdot z$

5. Complementos

$x+x' =1$

$x \cdot x'=0$

EXPRESIONES BOOLEANAS

Teoremas del Álgebra Booleana

Cerradura. Para los operadores binarios AND , OR y NOT. Es cerrado con respecto a un operador binario si para cada par de valores booleanos se produce un solo resultado booleano

Idempotencia

$x+x=x$

$x \cdot x=x$

Identidad de los elementos 0 y 1

$x+1=1$

$x \cdot 0=0$

Leyes de Morgan

$(x+y)'=x' * y'$

$(x*y)'=x' + y'$

Complemento de 0 y 1

$0'=1$

$1'=0$

Involución (doble negación)

$(x')'=x$

Idempotencia

$x+x=x$

$x \cdot x=x$

Absorción

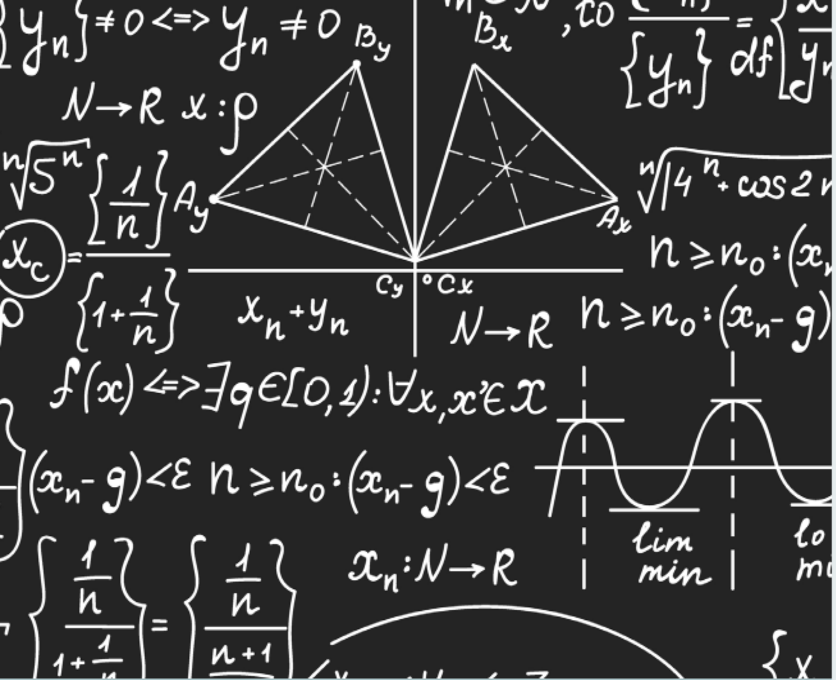
$x+(x \cdot y)=x$

$x \cdot (x+y)=x$

Cambiar por cada + por * y viceversa

Completar (negar) cada término

Completar (negar) la expresión completa



EXPRESIONES BOOLEANAS

El álgebra de Boole no posee elementos inversos aditivos o multiplicativos.

Existencia de elementos identidad e inverso, este último define los elementos llamados complementos.

Los elementos del álgebra booleana sólo son el uno y el cero

Principales Teoremas del álgebra booleana

Idempotencia, de absorción, leyes de Morgan, Teorema de adyacencia y Teorema de dualidad. Estos teoremas nos permiten la manipulación de funciones, por ejemplo para encontrar funciones complementos.

Las funciones booleanas se pueden representar de varias formas: tablas de verdad, canónica, normalizada, mínima, como suma de productos y como producto de sumas.

EXPRESIONES BOOLEANAS

Para obtener el "dual" de un teorema se convierte cada 0 (cero) en 1 (uno) y viceversa, los signos más(+) se convierten en paréntesis, puntos no se ponen y viceversa. Además de esto, las variables no se complementan ya que al hacerlo se obtendría el complemento en lugar del dual.

Completar (negar) la expresión completa

Núm.	Teorema	Dual	Propiedad
1a	0A = 0	1 + A = 1	Complemento 0 y 1
2a	1A = A	0 + A = A	Identidad
3a	AA = A	A + A = A	Idempotencia
4a	AA' = 0	A + A' = 1	Inverso
5a	AB = BA	A + B = B + A	Conmutativa
6a	(AB)C = A(BC)	(A + B) + C = A + (B + C)	Asociativa
7a	(AB...Z)' = A' + B' +...+Z'	(A + B +...+Z)' = A'B'...Z'	De Morgan
8a	(AB) + (AC) = A(B + C)	(A + B)(A + C) = A + (BC)	Distributiva
9a	AB + AB' = A	(A + B)(A + B') = A	Adyacencia Lógica
10a	A + AB = A	A(A + B) = A	Absorción
11a	A + A'B = A + B	A(A' + B) = AB	
12a	CA + CA'B = CA + CB	(C + A)(C+ A' + B) = (C + A)(C+ B)	
13a	AB + A'C + BC = AB + A'C	(A + B)(A' + C)(B + C) = (A + B)(A'+ C)	Concenso
14a	(A')'=A		Involución (Doble negación)

EXPRESIONES BOOLEANAS

Reglas del Álgebra de Booleanas

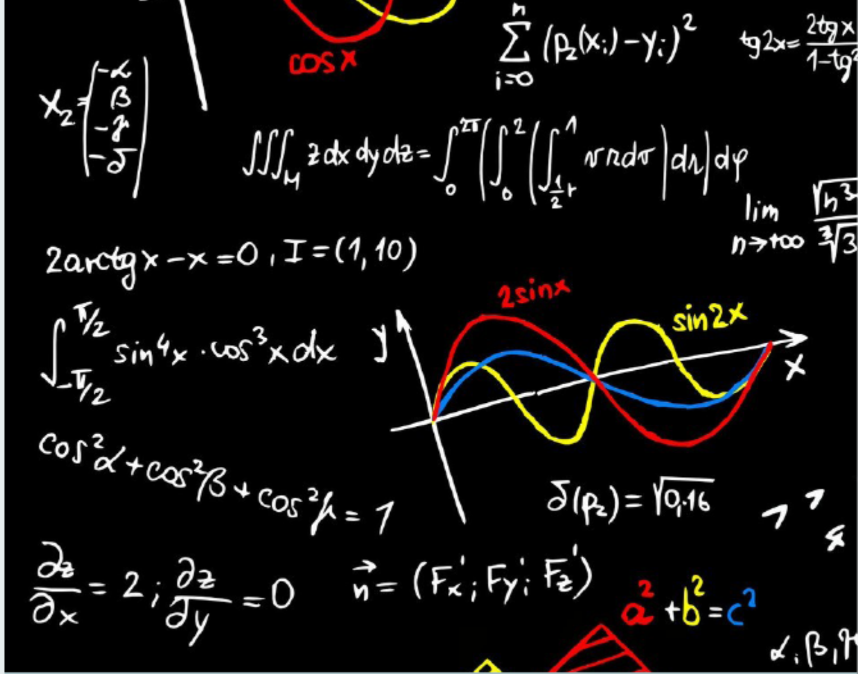
1. $A+0=A$
2. $A+1=1$
3. $A \cdot 0=0$
4. $A \cdot 1=A$
5. $A+A=A$
6. $A+\bar{A}=1$
7. $A \cdot A=A$
8. $A \cdot \bar{A}=0$
9. $\bar{\bar{A}}=A$
10. $A+AB=A$
11. $A+\bar{A}B = A+B$
12. $(A+B)(A+C) = A+BC$

Ejemplo:

Escribir $(xy' + xz)' + x'$ en F.N.D (Forma Normal Disyuntiva) $(xy' + xz)' + x' = (xy')'(xz)' + x'$

$$= (x' + y)(x' + z') + x'$$
$$= (x' + y)x' + (x' + y)z' + x'$$
$$= x' + x'y + x'z' + yz' + x'$$
$$= x' + yz'$$
$$= x'(y + y')(z + z') + yz'(x + x')$$

Solución $= x'yz + x'yz' + x'y'z + x'y'z' + xyz'$



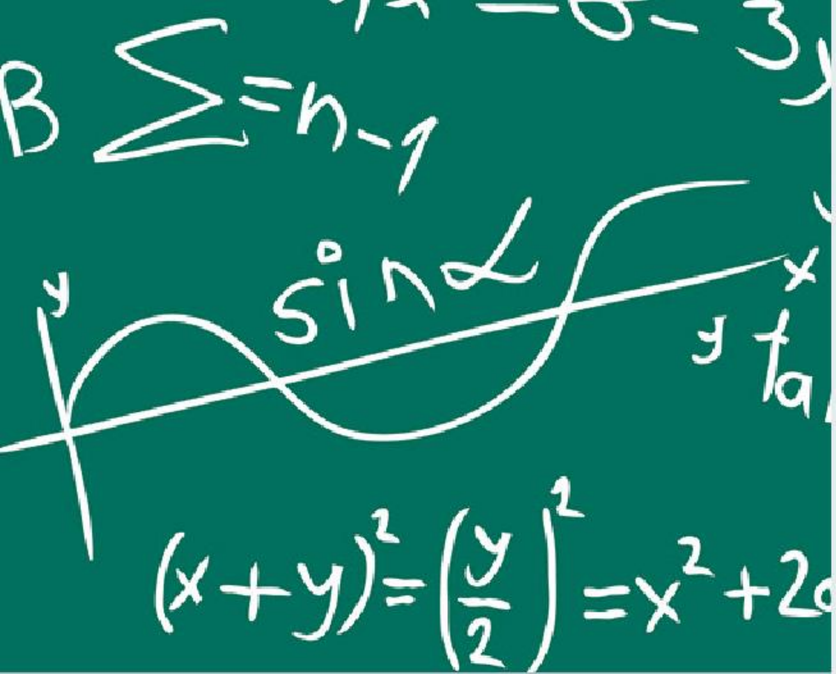
EXPRESIONES BOOLEANAS

Para nuestros propósitos basaremos el álgebra booleana en el siguiente juego de operadores y valores:

Los dos posibles valores en el sistema booleano son cero y uno, a menudo llamaremos a estos valores respectivamente como falso y verdadero.

El símbolo • representa la operación lógica AND. Cuando se utilicen nombres de variables de una sola letra se eliminará el símbolo •, por lo tanto AB representa la operación lógica AND entre las variables A y B, a esto también le llamamos el producto entre A y B.

El símbolo “+” representa la operación lógica OR, decimos que A+B es la operación lógica OR entre A y B, también llamada la suma de A y B.

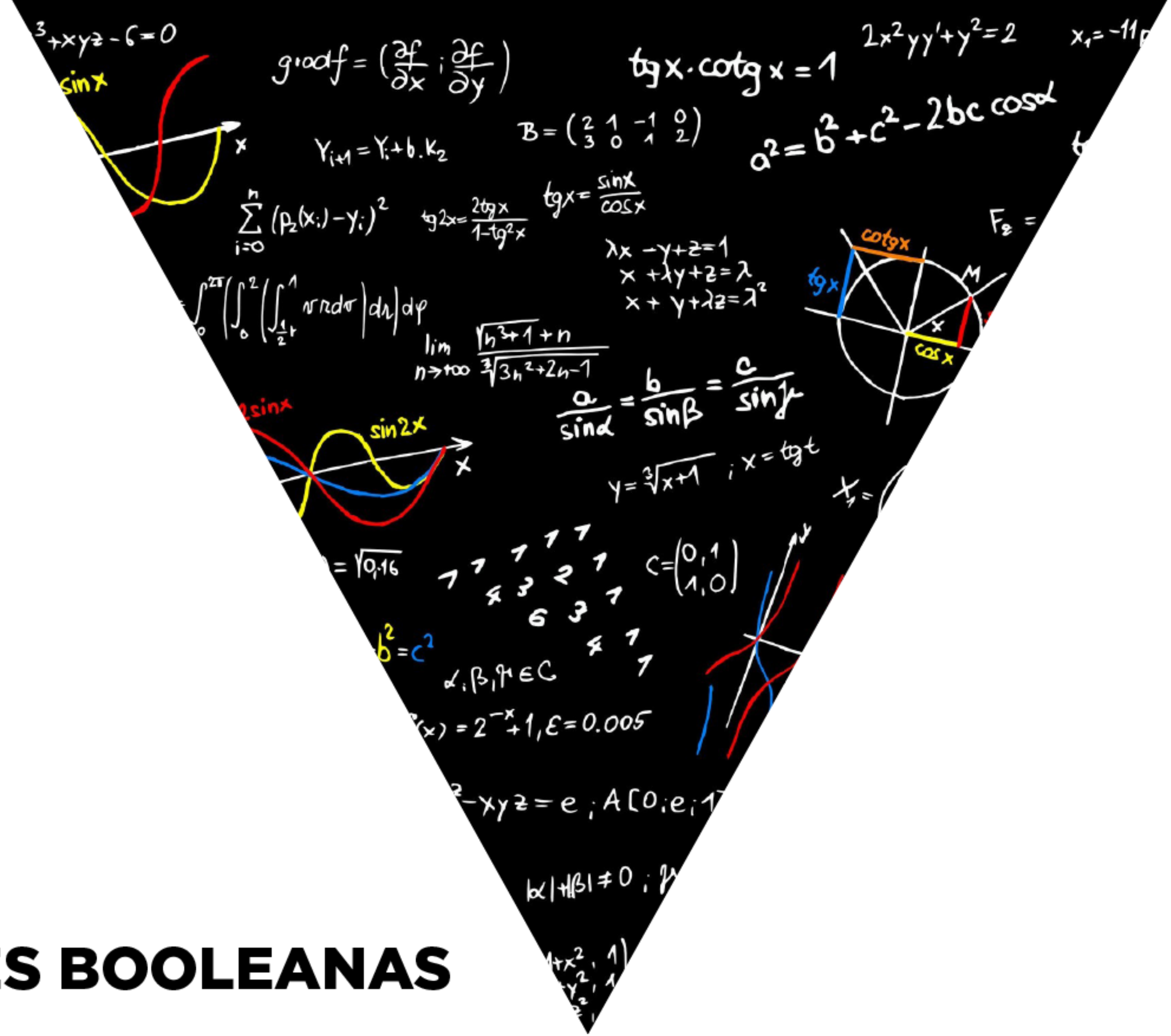


EXPRESIONES BOOLEANAS

El complemento lógico, negación o NOT es un operador unitario, en este texto utilizaremos el símbolo “ ‘ “ para denotar la negación lógica, por ejemplo, A’ denota la operación lógica NOT de A.

Si varios operadores diferentes aparecen en una sola expresión booleana, el resultado de la expresión depende de la procedencia de los operadores, la cual es de mayor a menor, paréntesis, operador lógico NOT, operador lógico AND y operador lógico OR. Tanto el operador lógico AND como el OR son asociativos por la izquierda.

Si dos operadores con la misma procedencia están adyacentes, entonces se evalúan de izquierda a derecha. El operador lógico NOT es asociativo por la derecha.

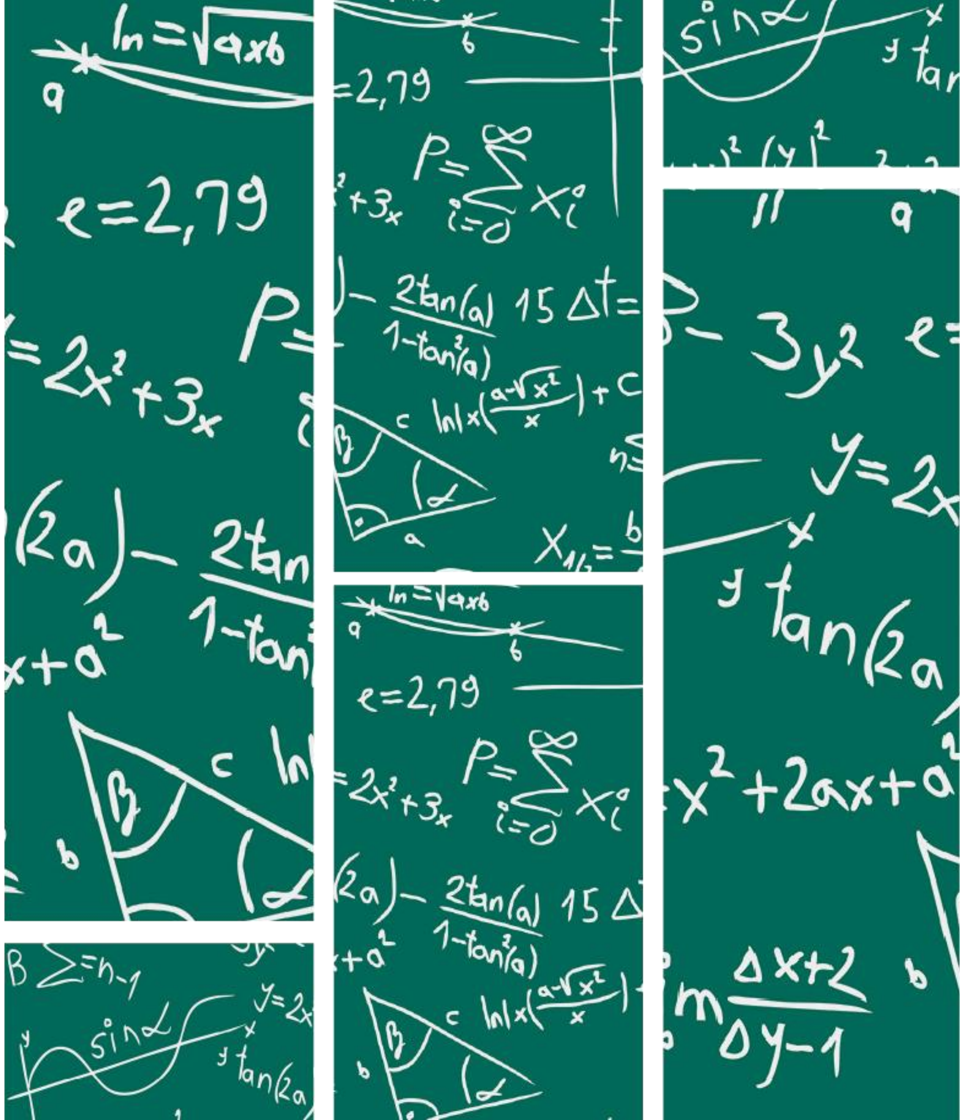


TEMA 3. OPTIMIZACIÓN DE EXPRESIONES BOOLEANAS

OPTIMIZACIÓN DE EXPRESIONES BOOLEANAS

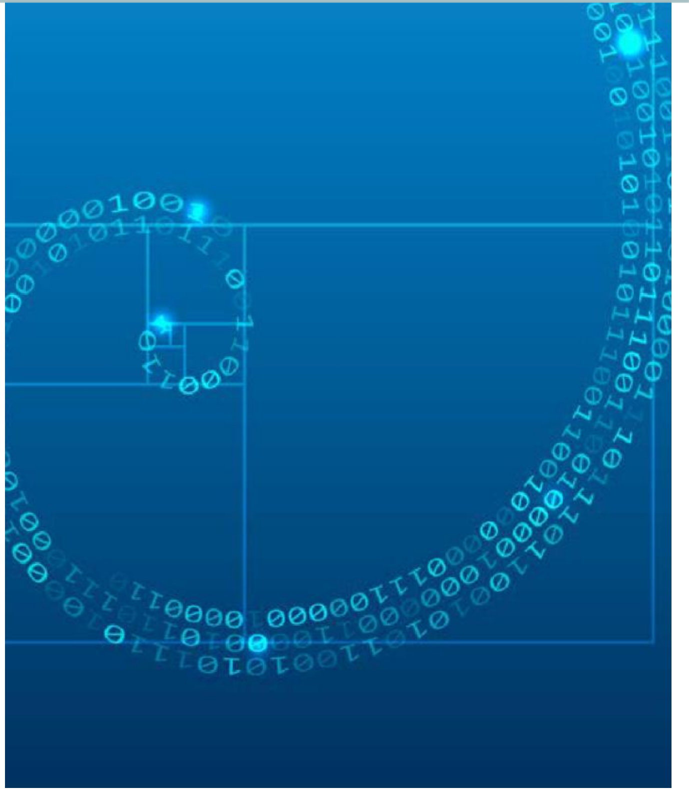
Tomando la tabla de teoremas que se mencionó anteriormente, de 1 a 4 se aplican en cualquier caso y los teoremas 5 a 9 son propiedades que tiene el álgebra booleana, semejantes a las reglas de conjuntos correspondientes a las propiedades conmutativa, asociativa y de De Morgan. Por lo general los teoremas 11 a 13 se aplican en combinación, dependiendo de la expresión booleana.

La aplicación de los teoremas es: comparar partes de la expresión con los teoremas que permitan hacer más simple la expresión, y esto se realiza hasta que ya no sea posible simplificar. En el Álgebra booleana, hay que reducir una expresión a su forma más simple o cambiarla a una forma más conveniente para conseguir una implementación más eficiente. Este método de simplificación utiliza las reglas, leyes y teoremas del Álgebra de Boole para manipular y simplificar una expresión. Al simplificar, emplea el menor número posible de compuertas en la implementación de una determinada expresión.



VIDEO UNIDAD 4

Te invitamos a ver el siguiente video:



OPTIMIZACIÓN DE EXPRESIONES BOOLEANAS

Ejemplo:

- Simplificar la expresión booleana $F = A'B + (ABC)' + C(B' + A)$

$F = A'B + A' + B' + C' + C(B' + A)$ Después de aplicar 7a (De Morgan)

- $F = A'B + A' + B' + C' + CB' + CA$ Por 8a (Distributiva) a la inversa
- $F = A'B + A' + B' + CB' + C' + CA$ Por 5a (Conmutativa)
- $F = A'(B + 1) + B'(1 + C) + C' + CA$ Por 8a (Distributiva)
- $F = A'1 + B'1 + C' + CA$ Por 1b (Complemento)
- $F = A' + B' + C' + CA$ Por 2a (Identidad)
- $F = A' + B' + C' + A$ Por 11a
- $F = (A + A') + B' + C'$ Por 5a (Conmutativa)
- $F = (1 + B') + C'$ Por 4b (Inverso)
- $F = 1 + C'$ Por 1b (Complemento)
- $F = 1$ Por 1b (Complemento)

En general luego de un proceso de simplificación el resultado no siempre es 1, pero lo que sí se espera, es obtener una expresión más simple conformada por menos variables.

OPTIMIZACIÓN DE EXPRESIONES BOOLEANAS

Ejemplo:

Simplificar la expresión booleana $F = C'A + AB'C + A'C'W$

$F = C'A + AB'C + A'C'W$	
$F = C'(A + A'W) + AB'C$	Por 8a (Distributiva)
$F = C'(A + W) + AB'C$	Por 11a
$F = C'A + C'W + AB'C$	Por 8a, a la inversa (Distributiva)
$F = A(CB' + C') + C'W$	Por 8a (Distributiva)
$F = A(C' + B') + C'W$	Por 11a
$F = AC' + AB' + C'W$	Por 8a, a la inversa (Distributiva)

Ejemplo:

Simplificar analíticamente la expresión booleana:

$xy + ((x + y')\,y)'$

$xy + ((x + y')\,y)' = xy + (x + y')' + y'$	(Morgan)
$= xy + x' * y'' + y'$	(Morgan)
$= xy + x'y + y'$	(Complemento)
$= (x + x')y + y'$	(Distributiva * / +)
$= 1 * y + y'$	(Suma de complementos)
$= y + y'$	(Identidad)
$= 1$	(Suma de complementos)

OPTIMIZACIÓN DE EXPRESIONES BOOLEANAS

Ejemplo: Simplificar la expresión booleana: $((x + y')(xy'z)')'$

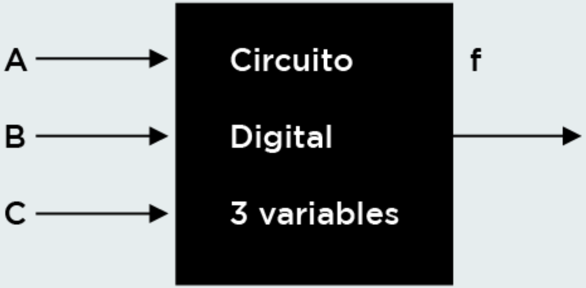
$$((x + y')(x\,y'\,z)')' = (x + y')' + ((x\,y'z)')' \quad \text{(Morgan)}$$
$$= (x + y')' + x\,y'\,z \quad \text{(Complemento)}$$
$$= x' * y'' + x\,y'\,z \quad \text{(Morgan)}$$
$$= x'y + x\,y'\,z \quad \text{(Doble complemento)}$$

Mapas de Karnaugh

Para minimizar funciones se pueden emplear los mapas de Karnaugh a partir de una representación gráfica de funciones basada en los diagramas de Venn. De esta manera la minimización de funciones es una tarea más sencilla. Es importante entender a los mapas de Karnaugh como una forma más de representar funciones booleanas.

OPTIMIZACIÓN DE EXPRESIONES BOOLEANAS

Un mapa de Karnaugh es una representación gráfica de la tabla de verdad.
La tabla de verdad tiene un renglón por cada minitérmino
El mapa de Karnaugh tiene una celda por cada minitérmino



A	B	C	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

C \ AB	00	01	11	10
0				1
1	1	1		1

f

OPTIMIZACIÓN DE EXPRESIONES BOOLEANAS

A	B	X	
0	0	1	$\rightarrow \bar{A}\bar{B}$
0	1	0	
1	0	0	
1	1	1	$\rightarrow AB$

$$\left\{ x=\bar{A}\bar{B}+AB \right\}$$

	$\bar{8}$	8
$\bar{A}$	1	0
A	0	1

Ejemplo:

La función X es 1 cuando: A= 0 y B = 0 o A = 1 y B= 1

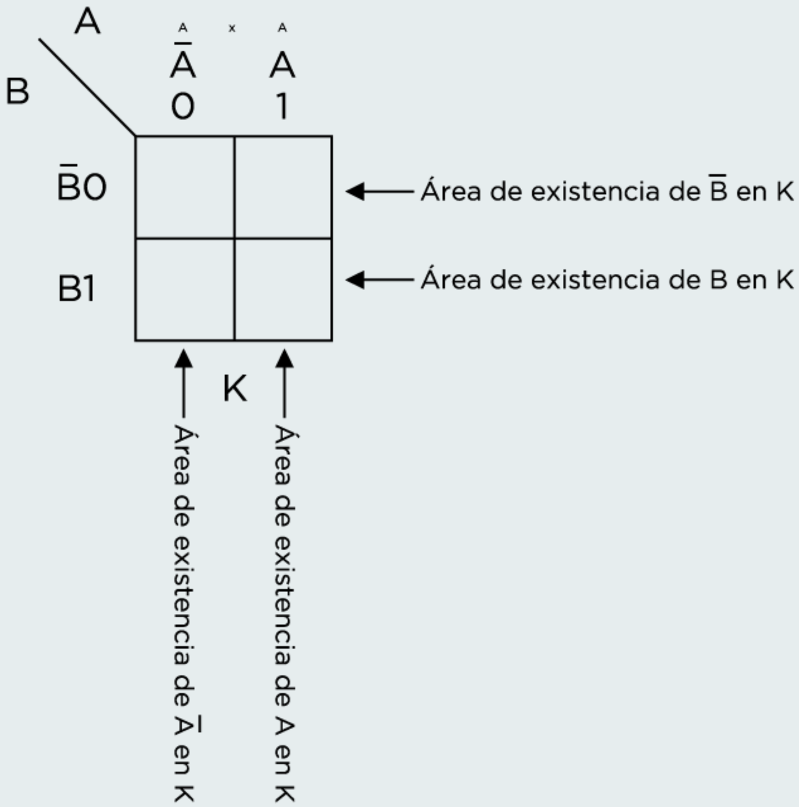
- O sea, la función X = A′B′ +AB
- En estos casos, se coloca un 1 en la celda A′B′ y en la celda AB del mapa
- Las demás celdas se rellenan con 0.
- Las celdas del mapa se marcan de tal forma que los cuadros adyacentes (tanto horizontales como verticales) sólo difieren en una variable.

OPTIMIZACIÓN DE EXPRESIONES BOOLEANAS

-El orden de las etiquetas de las celdas es: 00 (A′B), 01 (A′B), 11 (AB) y 10(AB′)

-Cuando una expresión tiene 2 variables, entonces existen 4 combinaciones (2n=4) (A=0 y B=0, A=0 y B=1, A=1 y B=0, A=1 y B=1)

- Por lo tanto, el mapa K tiene 4 celdas (cada celda corresponde a un minitérmino)



OPTIMIZACIÓN DE EXPRESIONES BOOLEANAS

Mapas de Karnaugh de 2 variables

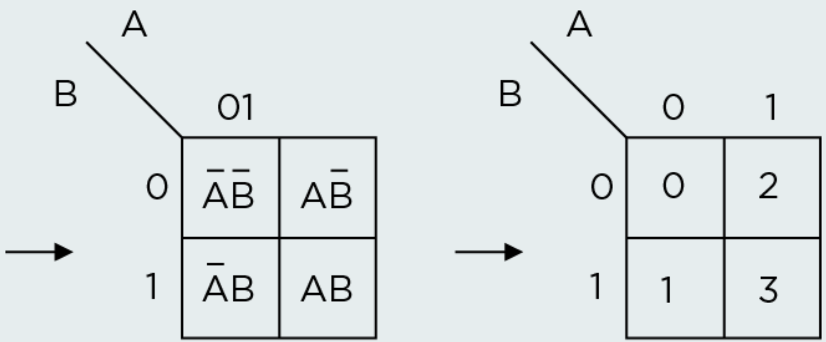
Sea f una función de 2 variables f(A, B)

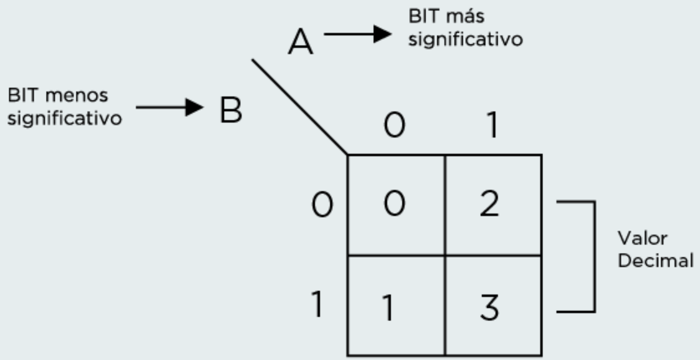
Se forma un mapa de 22 = 4 minitérminos (celdas)

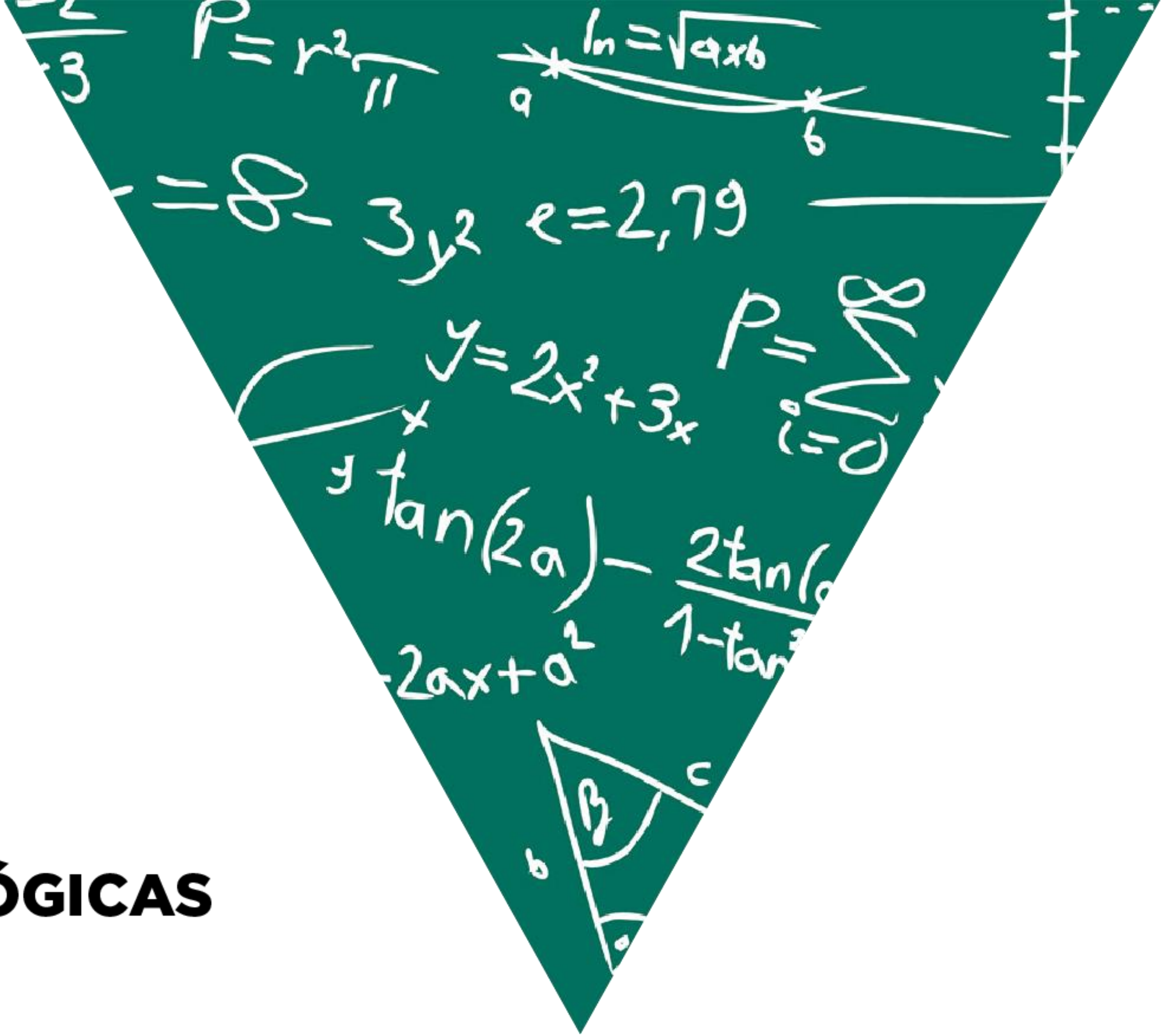
Una forma más sencilla de representar el minitérmino en la celda es señalando su valor decimal.

OPTIMIZACIÓN DE EXPRESIONES BOOLEANAS

A	B	Minitérmino
0	0	$\bar{A}\bar{B} = M_0$
0	1	$\bar{A}B = M_1$
1	0	$A\bar{B} = M_2$
1	1	$AB = M_3$





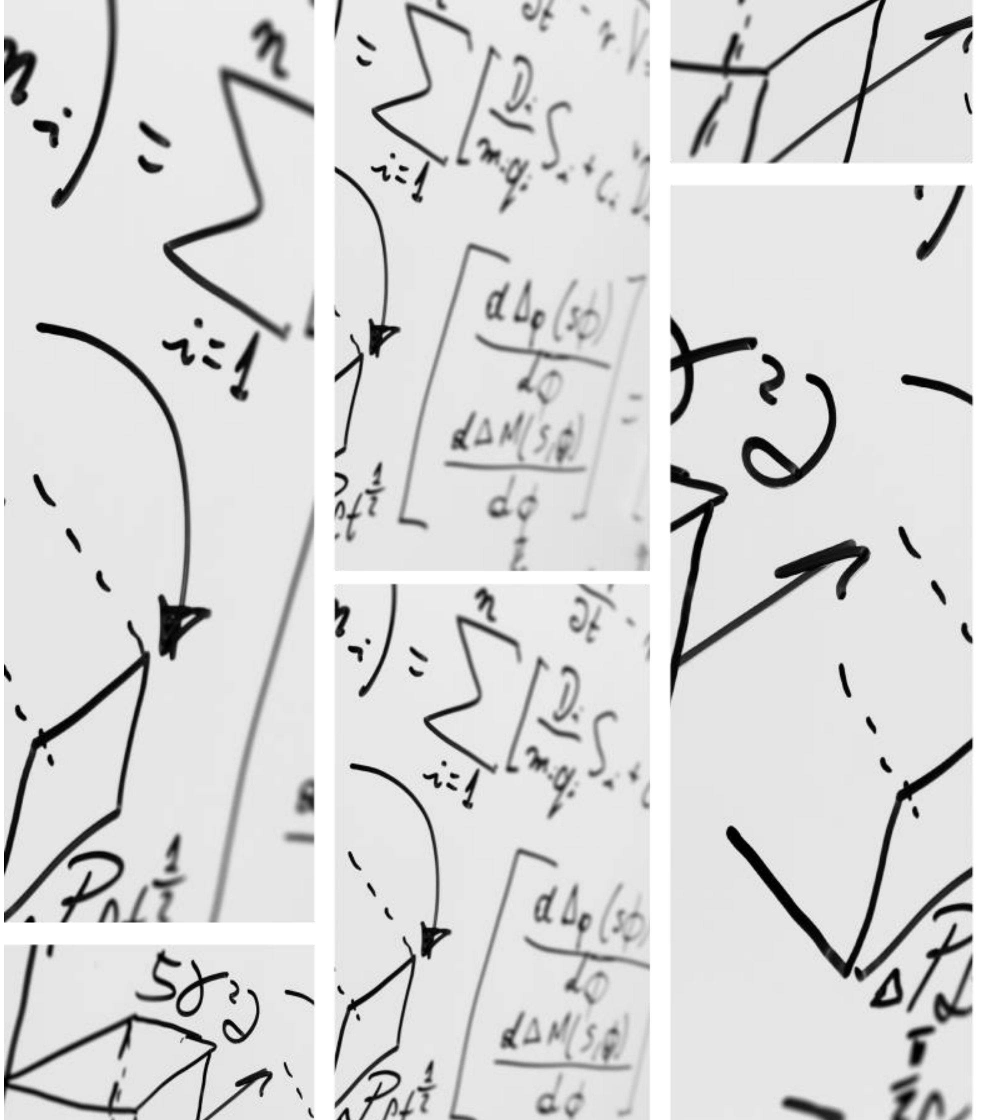


TEMA 4.
COMPUERTAS LÓGICAS

COMPUERTAS LÓGICAS

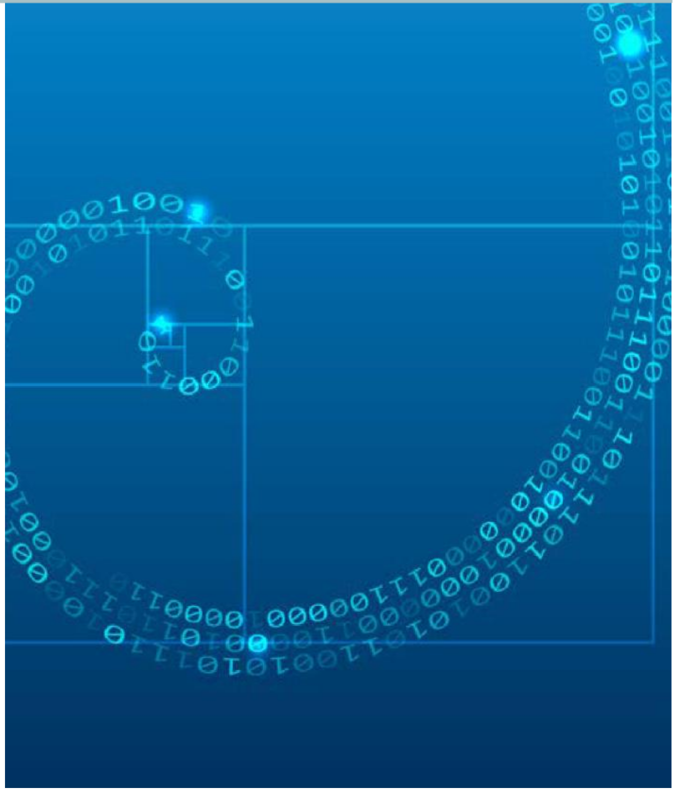
Es una representación gráfica de una o más variables de entrada a un operador lógico para obtener como resultado una señal determinada de salida o resultado.
En electrónica se le llama puertas o compuertas (paso de pulsos eléctricos), se mencionarán los símbolos usados en electrónica para la representación de las compuertas, ya que son los que interesan al área de la computación.

Es posible construir circuitos digitales llamados compuertas lógicas que con diodos, transistores y resistencias conectados de cierta manera que hacen que la salida del circuito sea el resultado de una operación lógica básica sobre la entrada. Tienen la virtud de corresponder al comportamiento de circuitos basados en dispositivos de conmutación (interruptores, relevadores, transistores, etc.).

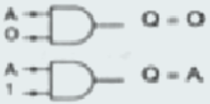
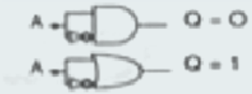
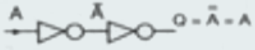


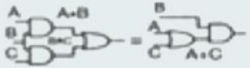
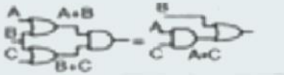
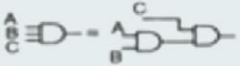
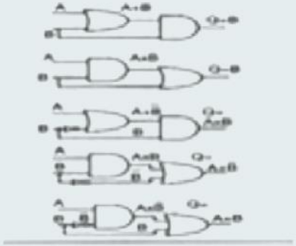
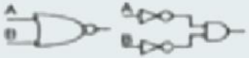
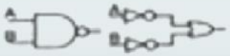
VIDEO UNIDAD 4

Te invitamos a ver el siguiente video:

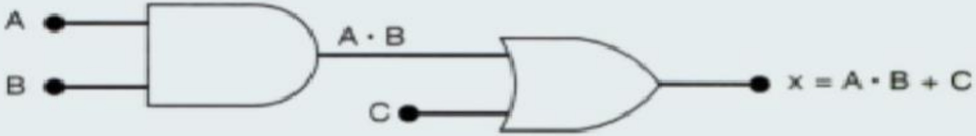


COMPUERTAS LÓGICAS

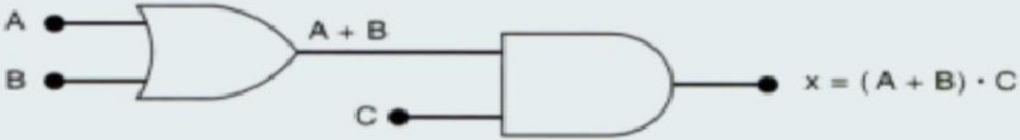
Nº	NOMBRE	EXPRESIÓN	MATERIALIZACIÓN	EXPLICACIÓN
1 2	Propiedades de la operación AND	$A \cdot 0 = 0$ $A \cdot 1 = 1$		La operación AND de una variable A con 0 es siempre 0 y con 1 es siempre igual a la variable A(A poder ser 0 o 1)
3 4	Propiedades de la operación OR	$A + 1 = 1$ $A + 0 = A$		La operación OR de una variable A con 1 es siempre 1 y con o es siempre igual a la variable A(A puede ser 0 o 1)
5 6	Leyes de tautología (o redundancia)	$A \cdot A = A$ $A + A = A$		La operación AND y OR de una variable A con si misma(o sea: se aplica A a las dos entradas), dan como resultado A.
7 8	Leyes de complemento	$A \cdot \bar{A} = 0$ $A + \bar{A} = 1$		La operación AND de A con su complemento (A) es siempre 0 y la operación OR es siempre 1.
9	Leyes de la doble inversión	$\bar{A} = A$		Si A se invierte dos veces se vuelve a obtener A.
10 11	Propiedades conmutativas	$A \cdot B = B \cdot A$ $A + B = B + A$		Las entradas de una compuerta AND u OR se pueden permutar sin que se altere el resultado(la salida). Estas reglas son similares a las del álgebra común (el orden de los factores no altera el producto y el orden de los sumandos no altera la suma).

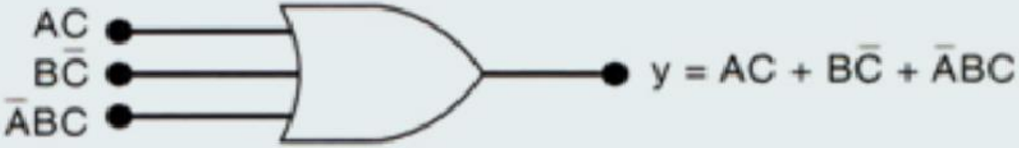
12	Propiedad distributiva de la operación AND	$A \cdot B + B \cdot = C \cdot (A+C)$		Regla similar al primer caso de factor del álgebra común.
13	Propiedad distributiva de la operación OR	$(A+B) \cdot (B+C) = B + A \cdot C$		Cuando un termino 0 está en ambos factores de un producto de sumas, el producto puede transformarse en una suma de productos.
14	Propiedad asociativa de la operación AND	$A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C$		Similar a la propiedad asociativa del álgebra común (son también válidas las demás combinaciones de A, B y C).
15	Propiedad asociativa de la operación OR	$A + B + C = (A + C) + B$		Similar a la propiedad asociativa del álgebra común (son también válidas las demás combinaciones de A, B y C).
16 17 18 19 20	Propiedades de la absorción	$(A + B) \cdot B = B$ $(A \cdot B) + B = B$ $(A + \overline{B}) \cdot B = A \cdot B$ $(A \cdot B) \cdot \overline{B} = A + \overline{B}$ $(A \cdot \overline{B}) + B = A + B$		Estas propiedades son exclusivas del álgebra de Boole y no se cumplen en el álgebra común A1 “absorber” variables, permiten simplificar el diseño con compuertas lógicas.
21	Primer teorema de Morgan	$\overline{A + B} = \overline{A \cdot B}$		La inversa del resultado de la operación OR de variables es igual a la operación AND entre las inversas de dichas variables.
22	Segundo teorema de Morgan	$\overline{A \cdot B} = \overline{A + B}$		La inversa del resultado de la operación AND de dos variables es igual a la operación OR entre las inversas de dichas variables.

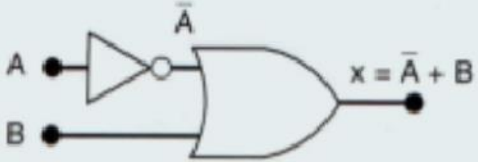
COMPUERTAS LÓGICAS

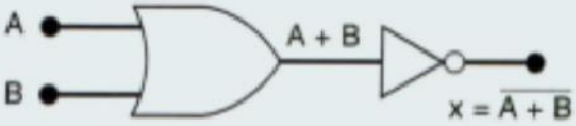


(a)

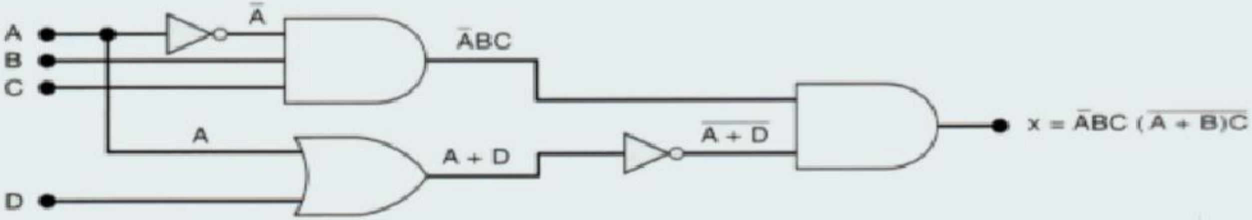


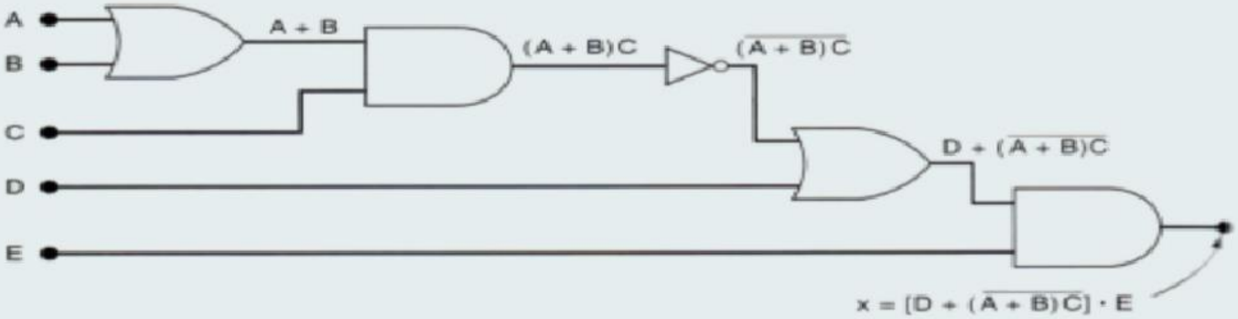


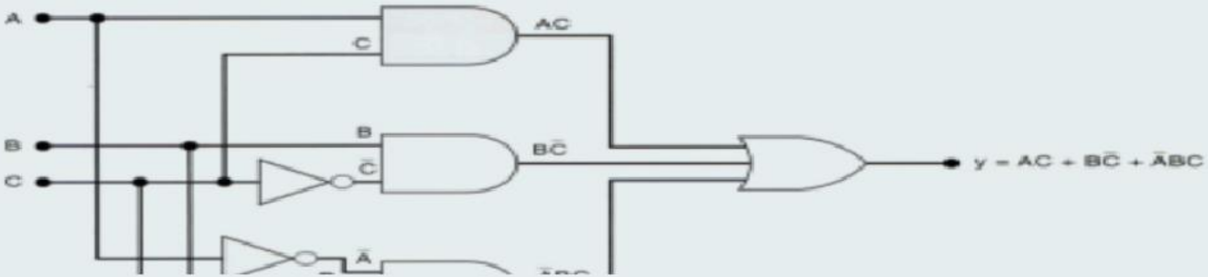




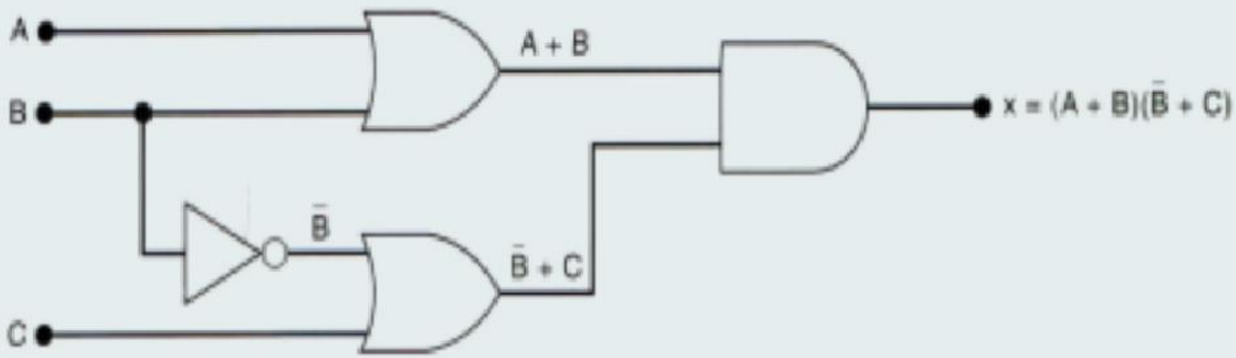
COMPUERTAS LÓGICAS

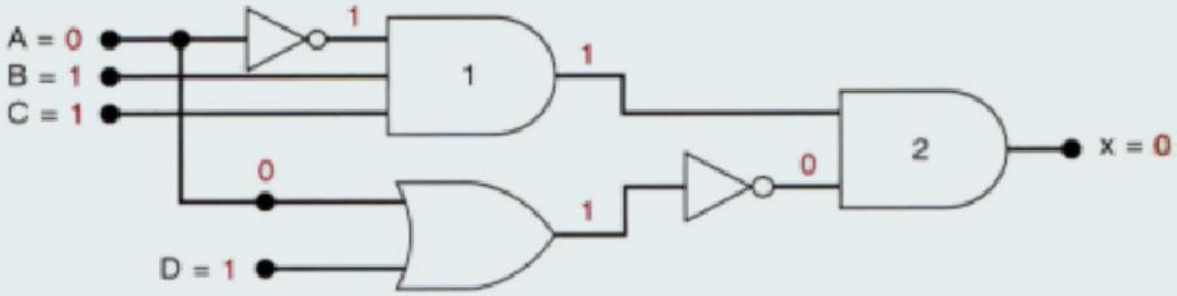






COMPUERTAS LÓGICAS





¡ FELICIDADES !

Acabas de concluir la **quinta unidad** de tu curso **Matemáticas Computacionales**. Te invitamos a finalizar este esfuerzo realizando el examen parcial correspondiente. Para ello debes regresar a la pantalla principal y dar clic en Presentar examen.

BIBLIOGRAFÍA

Díaz Martín, José Fernando. (2005). Introducción al Álgebra. Netbiblo.

Vidriales Castaño, Carlos. (2005). Automatización Fundamentada I Introducción.

Documentación oficial de Microsoft SQL Server. Disponible en: https://docs.microsoft.com/es-es/sql/?view=sql-server-ver15

Documentación de Microsoft SQL. Microsoft. [En línea]. Recuperado el 03 de junio de 2020 de: https://docs.microsoft.com/es-es/sql/?view=sql-server-ver15

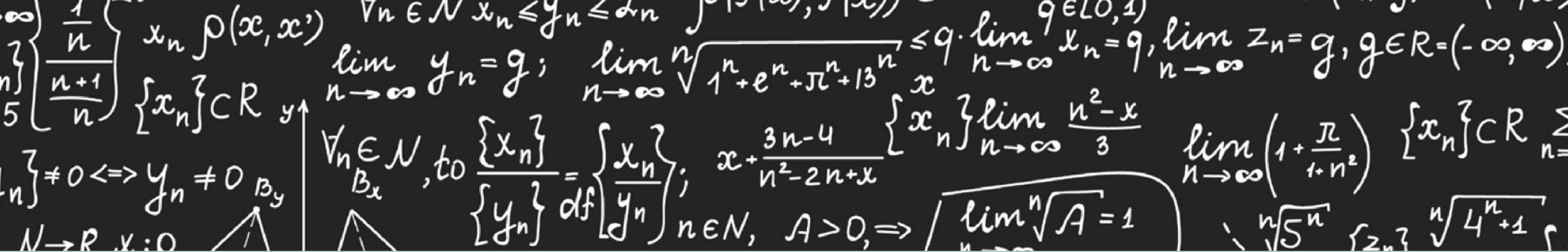
BIBLIOGRAFÍA

Medina Serrano, S. (2015). SQL Server 2014: Soluciones Prácticas de Administración. RAMA Editorial.

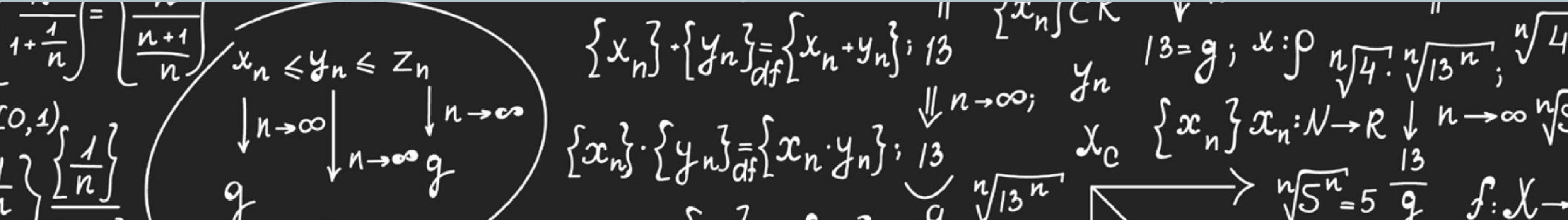
Robe Munguía. (2017). Funciones SQL Server. Programación en Español. Blog con Tips de Programación en Español.
27 de julio de 2020:
https://robmunguia.blogspot.com/2017/funciones-sql-server.html

Valderrey Sanz, P. (2015). Diseño y Administración de Bases de Datos. En Gestión de Bases de Datos. Barcelona, España: Editorial RA-MA.

Ward, Bob. (2019). SQL Server 2019 Revealed. Editorial Apres.



MATEMÁTICAS COMPUTACIONALES
PROYECTO FINAL



PROYECTO FINAL

Te invitamos a realizar el proyecto final:

Presiona el botón para descargar el proyecto final:

Presiona el botón para entregar el proyecto final: