MATEMÁTICAS
MATRICIALES

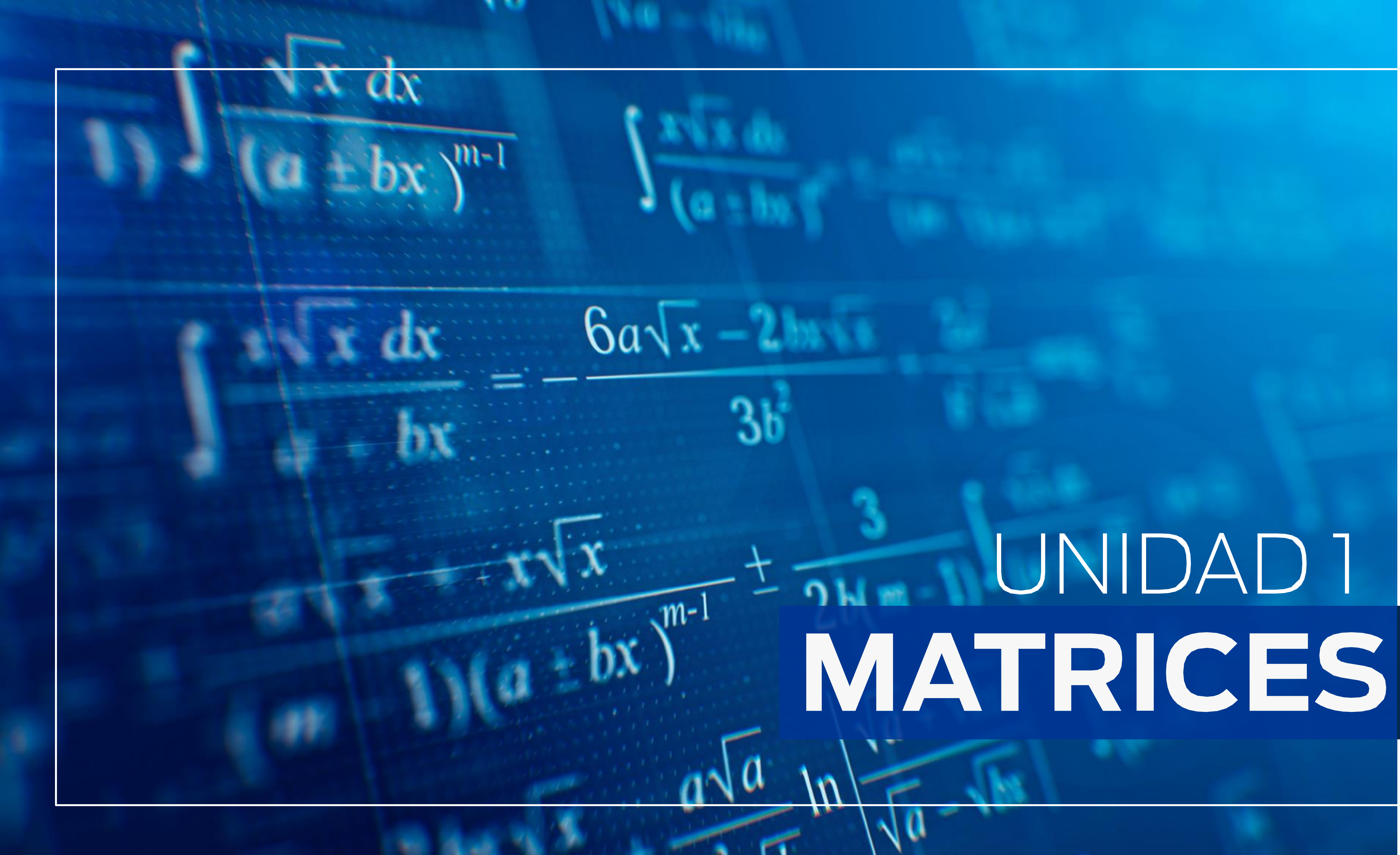
BIENVENIDA

Bienvenido(a) a la asignatura *Matemáticas Matriciales*, con la cual podrás adentrarte en el mundo de las matrices y sus múltiples utilidades. Una de las herramientas más importantes del álgebra lineal tiene que ver con las matrices, así como con las determinantes y los sistemas de ecuaciones lineales. Estas permiten estudiar, de manera detallada, varias de las áreas más fundamentales de las Matemáticas.

A lo largo de esta materia, se estudiarán y desarrollarán temas relacionados con el álgebra de las matrices, sus aplicaciones en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, y temas relacionados con determinantes y sus aplicaciones.

LIBROS RECOMENDADOS

- Schott, J. R. (2017) *Matrix Analysis for Statistics*. Wiley.
- Staff, E. B. & Snider, A. D. (2016) *Fundamentals of Matrix Analysis with Applications*. Wiley.



UNIDAD 1

MATRICES

TEMARIO

UNIDAD 1

MATRICES

INTRODUCCIÓN

En esta primera unidad comprenderás los fundamentos básicos de las matrices. Estas juegan un papel muy determinante en áreas como: las ciencias sociales y naturales; los negocios, diversas ingenierías, computación y, además, matemáticas puras y aplicadas.

COMPETENCIAS A DESARROLLAR

- El alumno comprenderá la noción de matriz *mxn*, así como el vocabulario básico utilizado.

- El alumno podrá implementar operaciones básicas con matrices.

CONCEPTOS BÁSICOS

Una matriz es un **conjunto de elementos de cualquier naturaleza**, pero los más comunes son números organizados en filas y columnas, y delimitados por corchetes o paréntesis.

Las matrices se utilizan en el cálculo numérico, en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, de ecuaciones diferenciales y de las derivadas parciales. Además, aparecen de manera natural en informática, estadística, geometría, etcétera.

Las matrices constituyen una parte esencial en la programación, ya que la mayoría de los datos se introducen en los servidores o computadoras en forma de tablas organizadas en filas y columnas: hojas de cálculo, base de datos, entre otros.

Matriz en $\mathbb{R}$

Una matriz en *R* es un **arreglo rectangular de números reales** distribuidos en filas y columnas. En general, una matriz real *A* que tiene *m* filas y *n* columnas es un ordenamiento de números reales de la forma:

$$A=\left\{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}\right\}$$

Donde $a_{ij} \in R, \forall i,j \in N \ con \ 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$

Si una matriz A tiene m filas y n columnas, se dice que A es de tamaño $\boldsymbol{m \times n}$; o que A es de **orden** $\boldsymbol{m \times n}$. Si $m = n$, se dice que A es de orden n.

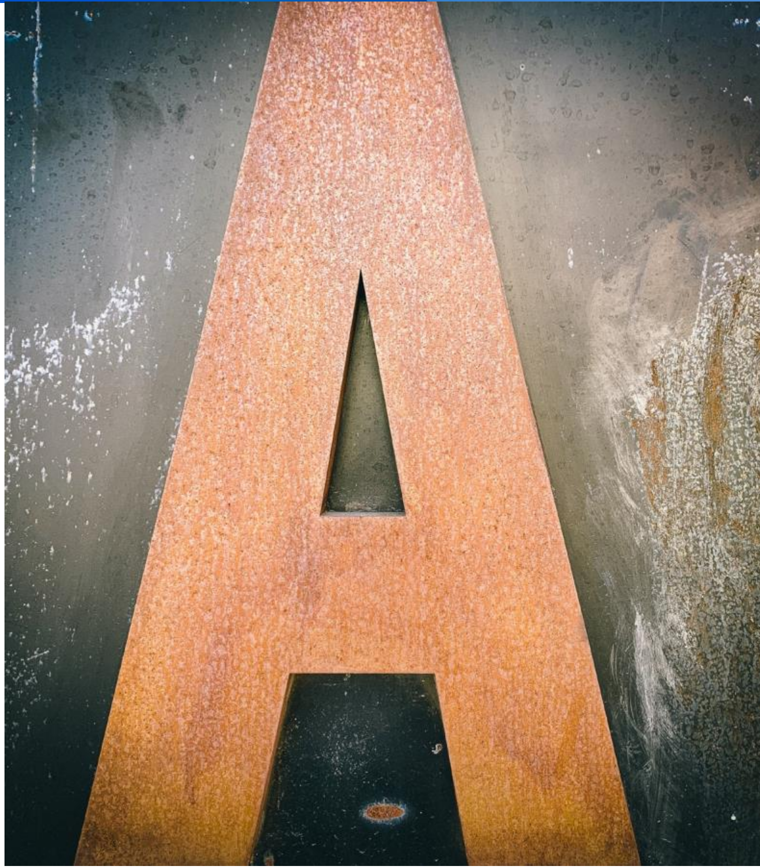
Cada número real a_{ij} del ordenamiento es llamado **elemento de A** o entrada de A.

$A_{(i)}$ representa la i-ésima **fila** de A; así, $A_{(i)} = (a_{i_1} \; a_{i_2} \; a_{i_3} \; \cdots \; a_{in})$

$A^{(j)}$ representa la j-ésima **columna** de A; así, $A^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$

El elemento $\boldsymbol{a_{ij}}$, entrada de A que está en la i-ésima fila y en la j-ésima columna, es también denotado como $\boldsymbol{\langle A \rangle_{ij}}$

El conjunto formado por todas las matrices de tamaño **$m \times n$** con entradas reales es denotado como $\boldsymbol{M_{mxn}}$ $\boldsymbol{(R)}$. Si $m=n$, simplemente se escribe $\boldsymbol{M_n}$ $\boldsymbol{(R)}$.



Igualdad de Matrices

Sean $A, B \in M_{mxn}(R)$. Se dice que *A* y *B* son iguales, y se escribe **A = B**, si se cumple que:

$$\langle A \rangle_{ij} = \langle B \rangle_{ij} \quad , \forall i,\, j \in \mathbb{N} \ con \ 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

De acuerdo con la definición anterior, para determinar si dos matrices son iguales, se debe cumplir que dichas matrices **tengan el mismo tamaño** y que, además, todas **sus entradas correspondientes sean iguales**.

Matriz Transpuesta de una Matriz

Sea $A \in M_{mxn}(R)$. La matriz transpuesta de A, denotada como $\boldsymbol{A^t}$, es la matriz de tamaño $n \times m$, tal que:

$$\langle A^t \rangle_{ij} = \langle A \rangle_{ij}, \forall i, j \in \mathbb{N} \ con \ 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

Con base en lo anterior, se puede asegurar que la matriz transpuesta de A es **aquella matriz que se obtiene a partir de *A* luego de escribir cada fila *i* como columna *i***.

Ejemplo:

En general, si:

$$A=\left\{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}\right\}$$

Se tiene que:

$$A^t=\left\{\begin{matrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & \cdots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{mn} \end{matrix}\right\}$$

Matriz Cuadrada

Es aquella que posee **igual número de filas y de columnas**; es decir, un arreglo de números de tamaño $n \times n$. Si A es una matriz de tamaño $n \times n$, se dice que A es de orden n. Toda matriz cuadrada A de orden n es un arreglo de la forma:

$$A = \left\{ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \right\}$$

Una matriz A es una matriz cuadrada si, y solo si, $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M_n}(\boldsymbol{R})$.
Los elementos $a_{11},\ a_{22},\ a_{33}, \cdots, a_{nn}$ conforman lo que se denomina **diagonal principal de *A***.

Matriz Fila

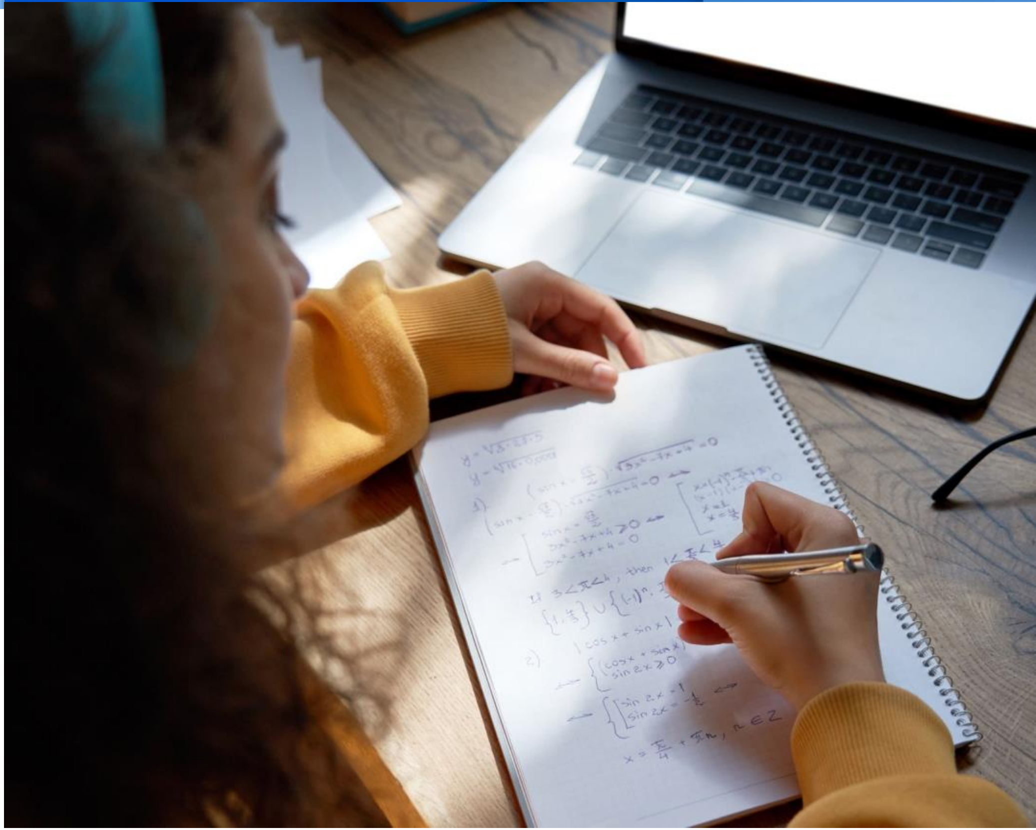
También llamada vector fila. Una matriz A es una matriz fila si, y solo si, $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M_{1xn}}(\boldsymbol{R})$. En general, una matriz fila de tamaño $1 \times n$ es un arreglo de 1 fila y n columnas de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n1} \end{pmatrix}$$

Matriz Columna

También llamada vector columna. Una matriz A es una matriz columna si, y solo si, $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{mx1}}(\boldsymbol{R})$ En general, una matriz columna de tamaño $m \times 1$ es un arreglo de m filas y 1 columna de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$



Matriz Identidad

Una matriz A es una matriz identidad si, y solo si, los elementos de su diagonal son todos iguales a 1 y sus restantes elementos son iguales a 0.

La matriz identidad de orden n será denotada como $\boldsymbol{I_n}$; de esta manera, se tiene que:

$$\langle I_n \rangle_{ij} = \begin{cases} 1 & si \;\; i=j \\ 0 & si \;\; i \neq j \end{cases} \forall i,\ j \in \mathbb{N} \ con \ 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$$

Por ejemplo:

$$I_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Matriz Nula

Sea $A \in M_{mxn}\ (R)$. La matriz A es una matriz nula si, y solo si, **todas sus entradas son iguales a 0**.

La matriz nula de tamaño $m \times n$ será denotada como O_{mxn} si $m = n$ se denota como $\boldsymbol{O_n}$; de esta manera, se tiene que:

$$\langle O_{mxn} \rangle_{ij} = 0, \forall i,\ j \in N\ con\ 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

Por ejemplo:

$$O_{2x2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz Diagonal

Sea $A \in M_n(R)$ La matriz A es una matriz diagonal si, y solo si, todos los elementos de A que **no están en su diagonal son iguales a 0**.

Con base en la definición anterior, si A es una matriz diagonal de orden n, se cumple que:

$$\langle A \rangle_{ij} = \begin{cases} a_{ij} \ si \ i=j \\ 0 \ \ si \ \ i \neq j \end{cases} \ donde \ a_{ii} \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N} \ con \ 1 \leq i \leq n$$

Es decir, A es de la forma:

$$A = \begin{Bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 00 & & \cdots & a_{nn} \end{Bmatrix}$$

Matriz Triangular Superior

Sea $A \in M_n(R)$. La matriz A es una matriz triangular superior si, y solo si, $\langle \boldsymbol{A} \rangle_{ij} = \mathbf{0}, \forall \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ ***con*** $\boldsymbol{i} > \boldsymbol{j}$

De esta manera, si A es una matriz triangular superior, todos los elementos de A que están **bajo su diagonal son iguales a 0**; es decir, A es de la forma:

$$A = \left\{ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \right\}$$

Matriz Triangular Inferior

Sea $A \in M_n(R)$. La matriz A es una matriz triangular inferior si, y solo si, $\boldsymbol{\langle A\rangle_{ij}=0, \forall i, j \ con \ i< j}$

Así, si A es una matriz triangular inferior todos los elementos que están **sobre su diagonal son iguales a 0**; es decir, A es de la forma:

$$A=\left\{\begin{matrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}\right\}$$

Matriz Simétrica

Una matriz cuadrada es simétrica cuando los **elementos a ambos lados de la diagonal principal son iguales**.

Sea $A \in M_n(R)$. La matriz A es una matriz simétrica si, y solo si, $\mathbf{A} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{t}}$

$$a_{m,n} = a_{n,m}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 5 \\ 7 & 3 & 9 \\ 5 & 9 & 2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 5 \\ 7 & 3 & 9 \\ 5 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriz Antisimétrica (o hemisimétrica)

Matriz cuadrada en la que los elementos a ambos lados de la diagonal principal son opuestos (iguales, pero con distinto signo) y los elementos de la diagonal principal deben ser cero.

Sea $A \in M_n(R)$. La matriz A es una matriz simétrica si, y solo si, $\mathbf{A} = -\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{t}}$

$$a_{m,n} = -a_{n,m}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -9 \\ 3 & 9 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -9 \\ 3 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

OPERACIONES BÁSICAS

Como en los números reales, los enteros, los racionales y otros elementos matemáticos, en las matrices también están definidas las operaciones básicas.

Para **sumar** dos o más matrices, estas deben ser del mismo orden (tamaño), contener la misma cantidad de filas y la misma cantidad de columnas; el resultado es otra matriz del mismo tamaño, cuyos elementos se obtienen de la suma de los elementos encontrados en el mismo lugar de las matrices sumadas.

En resumen, la suma de dos matrices se calcula sumando los **elementos que ocupan la misma posición**.

Sean $A,B \in M\_mxn\ (R)$. Se define la suma de A y B, denotada como $A+B$, como la matriz de tamaño $m \times n$ dada por:

$$(A+B)_{ij} = \langle A \rangle_{ij} + \langle B \rangle_{ij} \quad , \forall i, j \in \mathbb{N} \ con\ 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

En términos generales, si:

$$A= \left\{ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \right\} \text{ y } B= \left\{ \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{matrix} \right\}$$

Entonces:

$$A+\mathrm{B}= \left\{ \begin{matrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{matrix} \right\}$$

De igual manera sean $A,B \in M_{mxn}(R)$ Se define la **resta** de *A* y *B*, denotada como ***A-B***, como la matriz de tamaño $m \times n$ dada por

$$(A-B)_{ij} = \langle A \rangle_{ij} - \langle B \rangle_{ij} \quad , \forall i, j \in \mathbb{N} \ con \ 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3 & 7-1 \\ 5-6 & 3-(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

El término **matriz por un escalar** se refiere al producto de **multiplicar un número real por una matriz**.

Sean $A\in M\_mxn\ (R)$ Y $\lambda\in R$. Se define el producto de λ y A, denotado como $\lambda\cdot A$, como la matriz de tamaño $m\times n$ dada por:

$$(\lambda\cdot A)_{ij} = \lambda\cdot\langle A\rangle_{ij} \ ,\forall i,\ j \in \mathbb{N}\ con\ 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

El producto tiene como resultado otra matriz de igual tamaño:

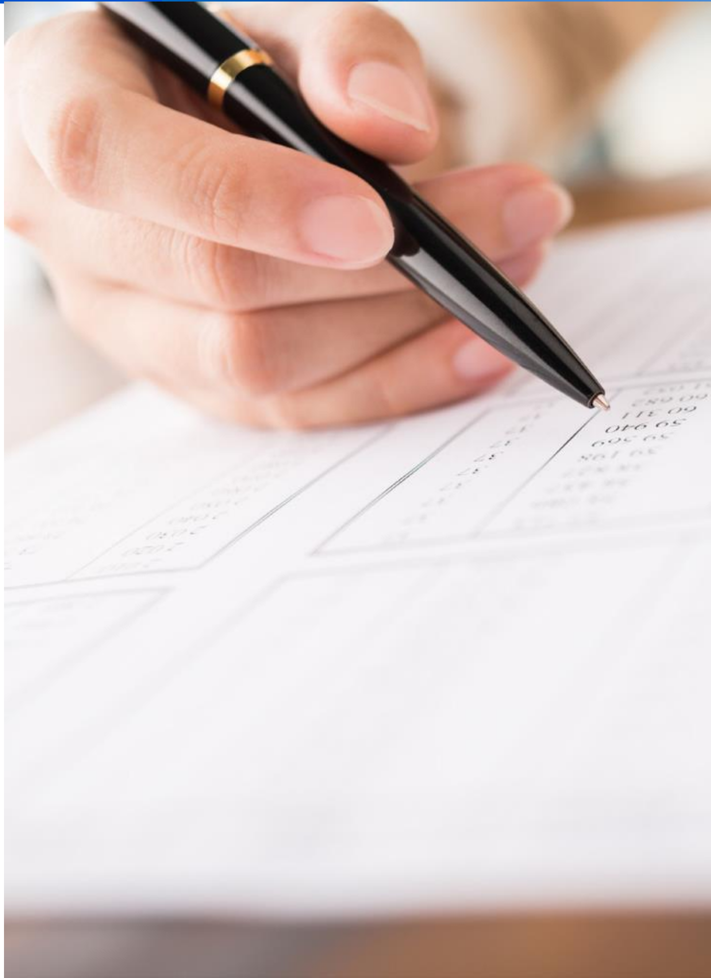
Así , si $\lambda \in R$ y $A = \left\{ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \right\}$ entonces: $\lambda \cdot A = \left\{ \begin{matrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{matrix} \right\}$

Por ejemplo:

$$A=\begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad K=12$$

Encontraremos 2A:

$$2A=2\cdot\begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\cdot 10 & 2\cdot 6 \\ 2\cdot 4 & 2\cdot 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 20 & 12 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$



La **multiplicación** de matrices consiste en combinar linealmente dos o más de estas mediante la multiplicación y suma de los elementos de las filas y columnas de las matrices origen, teniendo en cuenta el orden de los factores.

Sean $A \in M_{mxp}(R)$ y $B \in M_{pxn}(R)$ Se define el producto de *A* y *B*, denotado como *A·B*, como la matriz de tamaño $m \times n$ dada por:

$$\langle AB \rangle_{ij} = \sum_{k=1}^{p} \langle A \rangle_{ik} \ \langle B \rangle_{kj} \ , \forall i, j \in \mathbb{N} \ con \ 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

Como el elemento de AB que está en la fila i y columna j se obtiene multiplicando la i-ésima fila de A con la j-ésima columna de B, el producto de estas dos matrices existe si, y solo si, el número de columnas de A es igual al número de filas de B. Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$$

MATRICES NO SINGULARES

Algunas matrices cuadradas cumplen con ciertas condiciones que nos dirigen hacia un estudio más detallado respecto de ellas, y de algunas de las propiedades que satisfacen. A este tipo de matrices se les conoce como matrices no singulares.

Sea $A \in M_n(R)$ Si existe alguna matriz A' de orden n, tal que $AA' = I_n$ y $A'A = I_n$ entonces se dice que A es una **matriz no singular o invertible**.

Si A es una matriz no singular de orden n, toda matriz A' que satisfaga $AA' = I_n$ y $A'A = I_n$ es llamada una **inversa de A** y denotada como $\boldsymbol{A}^{-1}$; de esta manera, si A es una matriz no singular de orden n se cumple que $\boldsymbol{AA^{-1}=A^{-1}A=I_n}$.

Si A no posee matriz inversa alguna, se dice que A es singular.

Ejemplo:

Si se tiene $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ entonces $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz inversa de A, ya que:

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0+3-2 & -3+0+3 & 3-3+0 \\ 0+2-2 & -2+0+3 & 2-2+0 \\ 0+2-2 & -3+0+3 & 3-2+0 \end{pmatrix}$$

Continuación: $$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= I_3$$

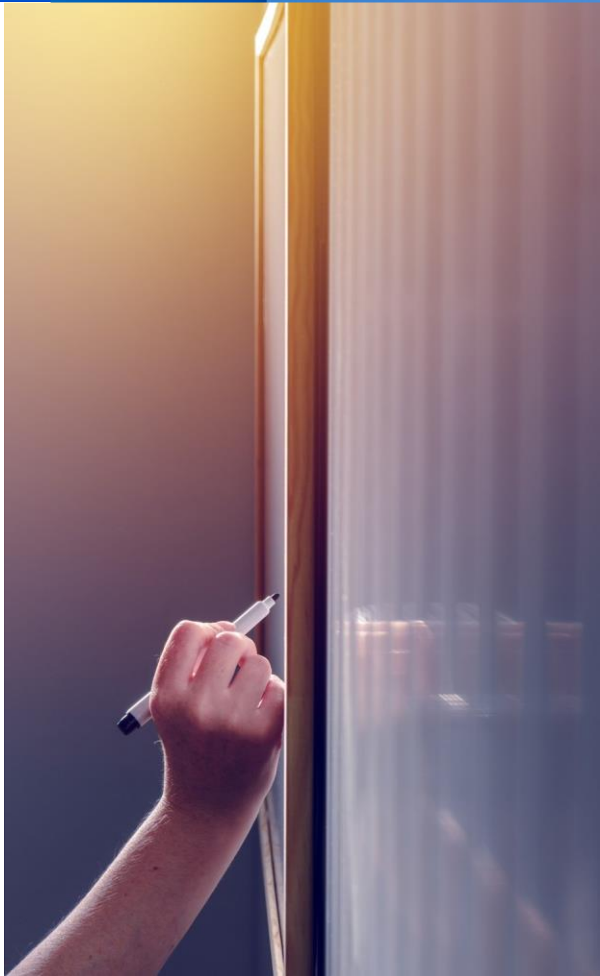
y, además: $$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0-2+3 & 0-2+2 & 0+1-1 \\ 3+0-3 & 3+0-2 & -1+0+1 \\ 6-6+0 & 6-6+0 & -2+3+0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= I_3$$

es decir, $AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$



Teoremas

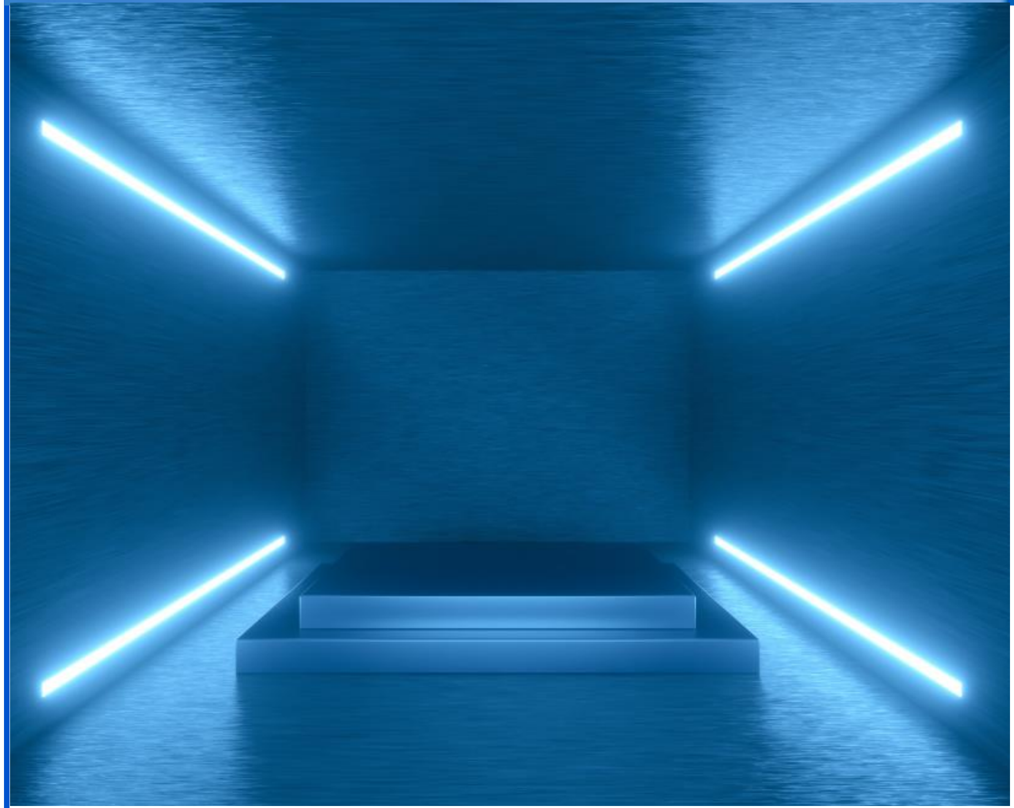
- Si A es una matriz no singular de orden n, entonces la matriz inversa de A es única.

- Si $A,B\in M_n\ (R)$, tal que A y B son matrices no singulares, entonces AB es una matriz no singular y $(AB)^{-1}=B^{-1}\ A^{-1}$

- Sean $A,\ B\in M_n\ (R)$, si $BA=I_n$ necesariamente $\mathrm{AB}=I_n$

- Si $\mathrm{A}\in M_n\ (R)$, tal que A es una matriz no singular, entonces $(A^{-1})^{-1}=A$

VIDEO



Te invitamos a ver el siguiente video:

Multiplicación de matrices

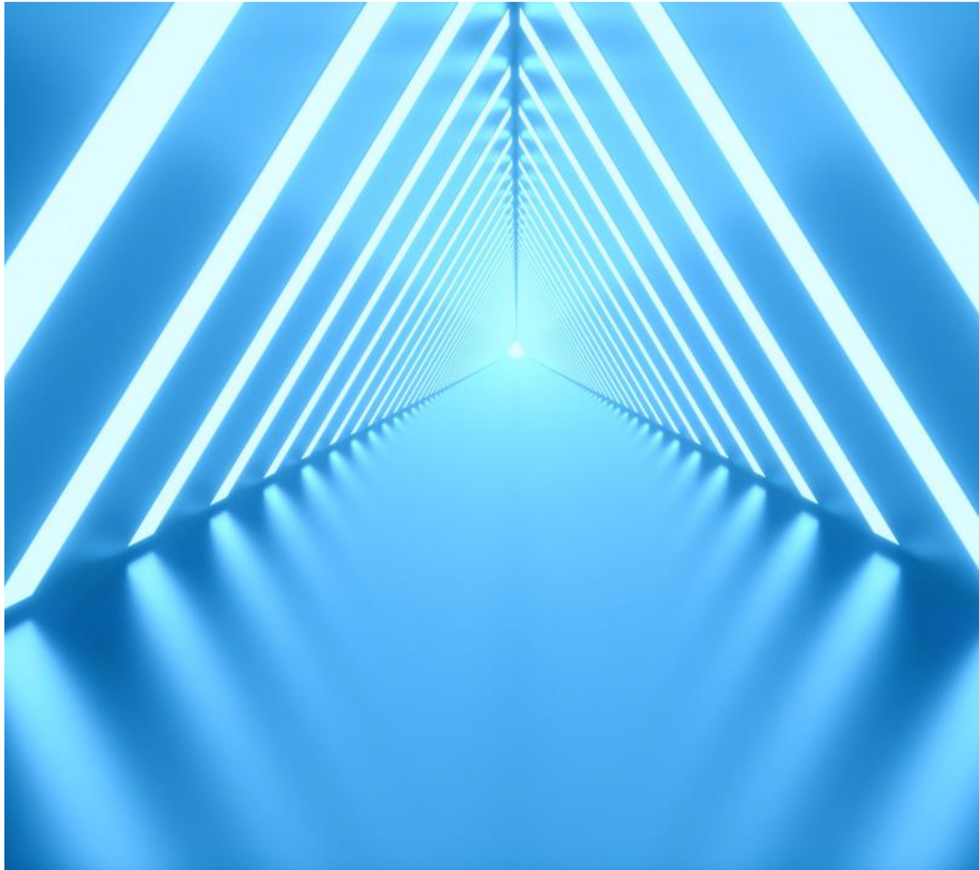
FORO UNIDAD 1

Entorno de trabajo

Participa en el foro enviando imágenes que demuestren que ya tienes acceso a las siguientes herramientas en su versión de prueba:

- R
- R Studio

Presiona el botón para participar en el foro.



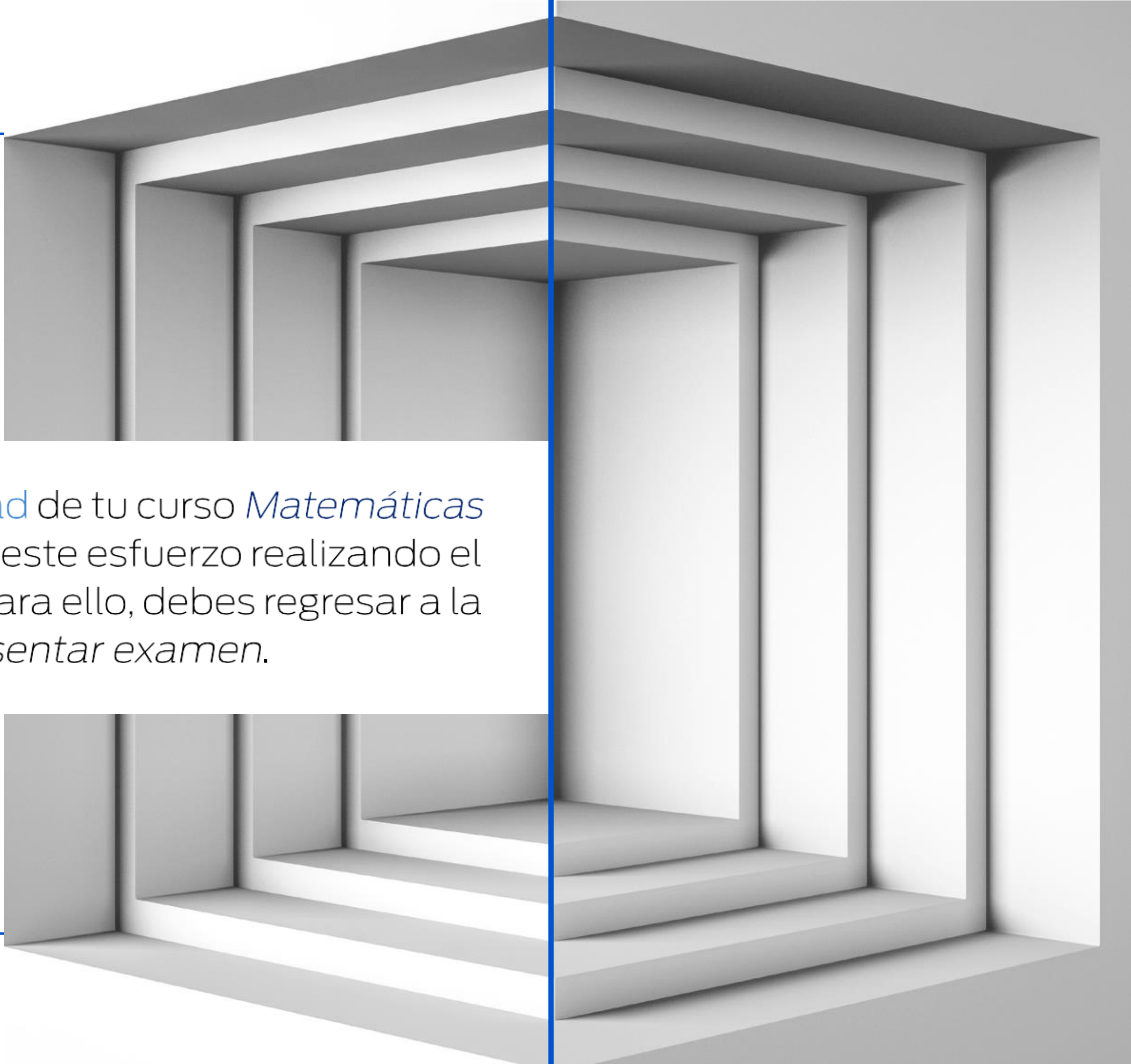
CONCLUSIÓN

No cabe duda que el estudio de las matrices es de suma importancia. Estas se utilizan en el planteamiento y solución de problemas que se presentan en diversas áreas aplicadas, tales como: análisis de circuito redes (cálculo de voltajes, corrientes y potencias), despacho económico de carga, así como en ingeniería eléctrica, ingeniería térmica, ingeniería aeronáutica, etcétera.

Prácticamente, todos los problemas del álgebra lineal pueden enunciarse en términos de matrices. Como ingeniero en desarrollo de software, es importante comprender los conceptos y usos que tienen las matrices dentro de tu campo laboral.

¡Felicidades!

Acabas de concluir la primera unidad de tu curso *Matemáticas Matriciales*. Te invitamos a finalizar este esfuerzo realizando el examen parcial correspondiente. Para ello, debes regresar a la pantalla principal y dar clic en *Presentar examen*.



UNIDAD 2

MÉTODOS MATRICIALES

TEMARIO

UNIDAD 2

MÉTODOS MATRICIALES

INTRODUCCIÓN

En esta unidad vamos analizar qué es un sistema de ecuación lineal con dos o más incógnitas. Así como su definición y clasificación de acuerdo al número de soluciones. Además, veremos el método de Gauss y el método de Cramer para resolverlas.

De la misma manera, se analizan las propiedades de los sistemas de ecuaciones lineales sobre el cuerpo R; es decir, los sistemas lineales en los cuales los coeficientes de las ecuaciones son números reales.

COMPETENCIAS A DESARROLLAR

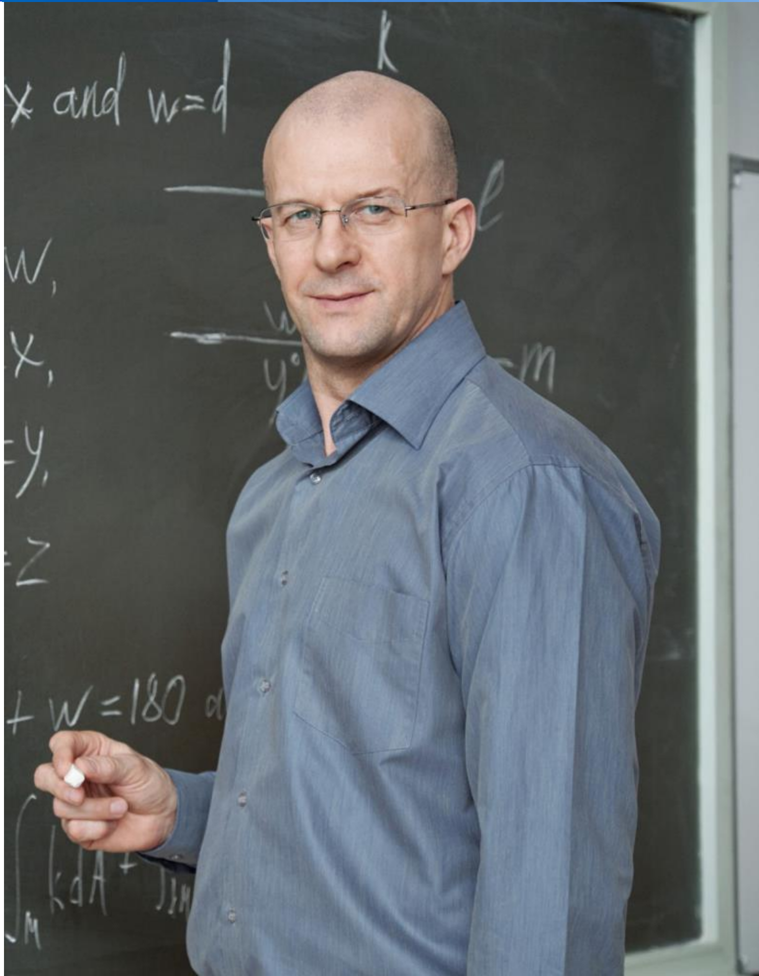
- El alumno conocerá las ecuaciones lineales según su número de soluciones.

- El alumno resolverá sistemas de ecuaciones con un determinado número de ecuaciones y de incógnitas a través de los métodos de Gauss y Cramer.

DETERMINANTES

Un concepto importante asociado con las matrices cuadradas es el concepto de **determinante**. Muy útil en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, entre otros.

Dado que cada matriz cuadrada está relacionada con un único número real, el determinante puede ser considerado como una función que tiene como **dominio** el conjunto de las matrices cuadradas; y cuyo **codominio** es el conjunto de los números reales.



Menor de un Elemento

Si $A \in M_n\ (R)$, se define el menor del elemento a_{ij} de A, denotado por $\boldsymbol{M_{ij}^A}$, como el **determinante de la matriz que se obtiene a partir de *A*** luego de eliminar su i-ésima fila y su j-ésima columna. Por ejemplo:

Considere la matriz A definida como:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Para la matriz A, se tiene que:

$$M_{11}^A = |d| = d \qquad M_{12}^A = |c| = c \qquad M_{21}^A = |b| = b \qquad M_{22}^A = |a| = a$$

Cofactor

Si $A \in M_n\ (R)$, se define el cofactor del elemento $\boldsymbol{a_{ij}}$ de A, denotado por $\boldsymbol{A_{ij}}$, como el número dado por:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\, M_{ij}^{A}$$

Ejemplo, dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Sus cofactores son:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\, M_{11}^{A} = (-1)^2 d = 1 \cdot d = d$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\, M_{12}^{A} = (-1)^3 c = -1 \cdot c = -c$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\, M_{21}^{A} = (-1)^3 b = -1 \cdot b = -\mathrm{b}$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\, M_{22}^{A} = (-1)^4 a = 1 \cdot a = a$$

Determinante Matriz Orden *n*

Sea $A \in M_n\ (R)$ con $n \geq 2$, el determinante de A se define, de manera recursiva, como el número real dado por:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} \langle A \rangle_{1j}\, A_{1j}$$

Ejemplo:

Considere la siguiente matriz y verifique que el determinante de toda matriz de orden 2 está dado por:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Con base en la definición, se tiene que:

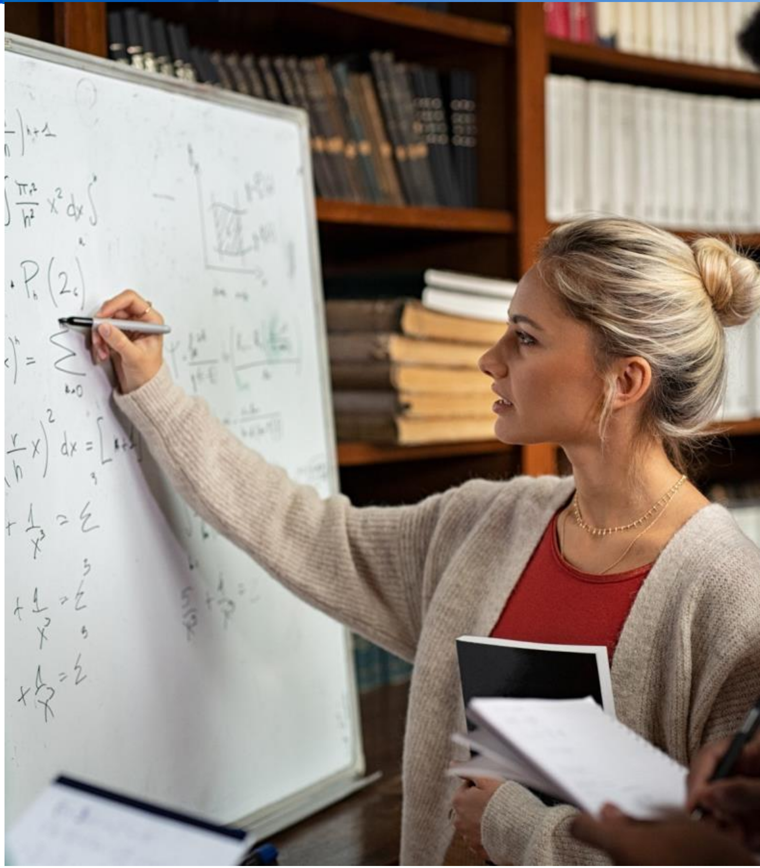
$$|A| = \sum_{j=1}^{n} \langle A \rangle_{1j}\, A_{1j}$$

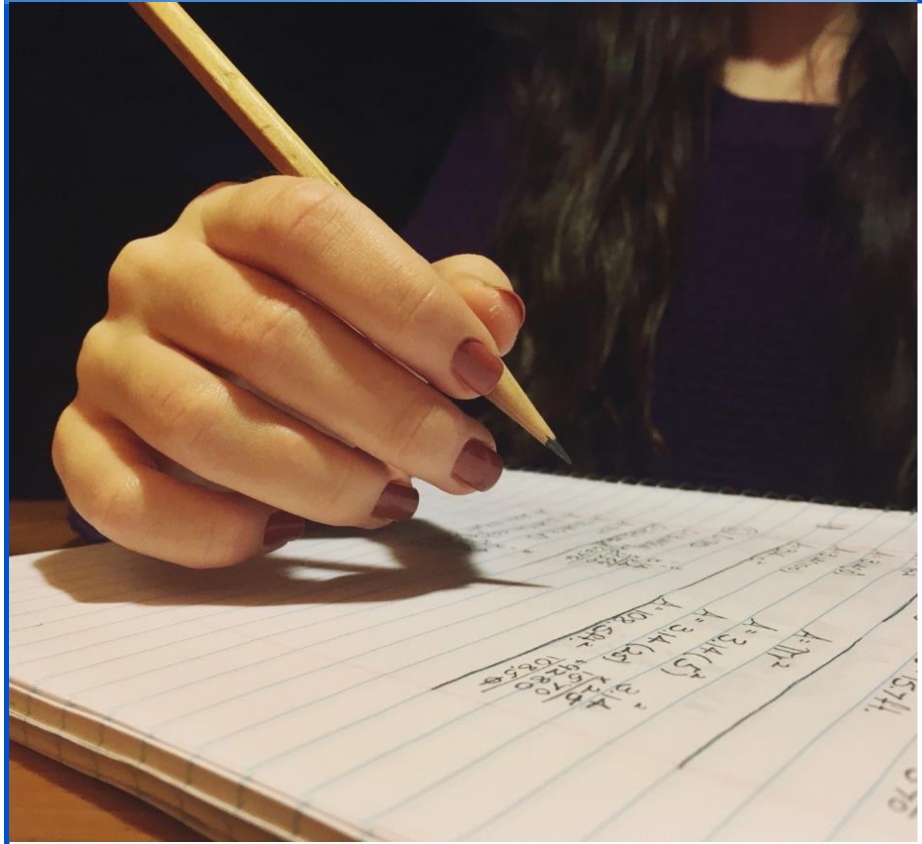
$$= \langle A \rangle_{11} A_{11} + \langle A \rangle_{12} A_{12}$$

$$= a((-1)^{1+1}\ M_{11}^{A}) + b\left((-1)^{1+2}\ M_{12}^{A}\right)$$
$$= a((-1)^{2}\ d) + b((-1)^{3} c)$$
$$= ad + b(-c)$$
$$= ad\ - bc$$

De esta manera:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad\ - bc$$





Para encontrar el determinante de cualquier matriz $A \in M_n\,(R)$ con $n(n \geq 2)$, se debe seleccionar cualquier renglón o columna de A y multiplicar cada entrada por su cofactor. La suma de estos productos será el determinante de A, llamado **determinante de orden *n***.

Ejemplo de evaluación de un determinante de orden 3. Encontraremos el determinante de:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando la regla anterior al primer renglón, para la entrada:

a_{11} obtenemos $(2)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (2)(1)(5) = 10$

a_{12} obtenemos $(-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-1)(13) = 13$

a_{13} obtenemos $(3)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1)(3) = 9$

De aquí:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 10 + 13 + 9 = 32$$

De manera alterna, si hubiésemos expandido con respecto a la segunda columna:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a_{12} obtenemos $(-1)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-1)(13) = 13$

a_{22} obtenemos $(0)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (0)(1)(-4) = 0$

a_{32} obtenemos $(1)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = (1)(-1)(-19) = 19$

De aquí:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 13 + 0 + 19 = 32$$

Puede demostrarse que **el determinante de una matriz es único** y no depende del renglón o columna seleccionada para su evaluación.

Matriz Adjunta

La matriz adjunta de una matriz cuadrada A es otra matriz que resulta de **sustituir cada elemento por su adjunto**:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; Adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Calcule la matriz adjunta de:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \therefore Adj(A) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 8 & -10 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix};$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^2(2-4) = -2 \qquad A_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^3(2-3) = 1$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^4(4-3) = 1 \qquad A_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^3(4-0) = -4$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^4(8-0) = 8 \qquad A_{23} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^5(16-6) = -10$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^4(2-0) = 2 \qquad A_{32} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^5(4-0) = -4$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^6(4-2) = 2$$

Determinantes e Inversa

El determinante de alguna matriz está directamente relacionado con la inversa de dicha matriz; se enunciarán algunos resultados que evidencian este hecho, como lo es una aplicación de los determinantes para la obtención de la inversa de alguna matriz no singular.

Una matriz $A \in M_n\ (R)$ es **no singular** si, y solo si, $\boldsymbol{|A| \neq 0}$

Si $A \in M_n\ (R)$ es no singular, entonces $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A)$.

Ejemplo:

Calcular la inversa de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Se sabe que $\boldsymbol{|A| = -6} \therefore$ es un matriz no singular, es decir: **tiene inversa**:

$$A^t = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \text{ cuya } \quad Adj(A^t) = \left[\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 8 & -10 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Para obtener la matriz inversa se **divide la matriz adjunta de la transpuesta de *A* entre su determinante**:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 8 & -10 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}}{-6}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Método de Gauss

Para determinar la inversa de una matriz $A \in M_n \ (R)$:

1 Aumente la matriz *A* con una matriz identidad (*m* *m*), dando como resultado:

$$(A \mid I)$$

2 Realice operaciones de fila en toda la matriz aumentada para transformar *A* en una matriz identidad $(A \mid I)$. La matriz resultante tendrá la forma:

$$(\boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{A^{-1}})$$

Donde $\boldsymbol{A^{-1}}$ se puede leer a la derecha de la línea vertical.

Calcular la matriz inversa de:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

1 > Se aumenta la matriz, de modo que:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2 > Se transformará el elemento a_{11} en 1:

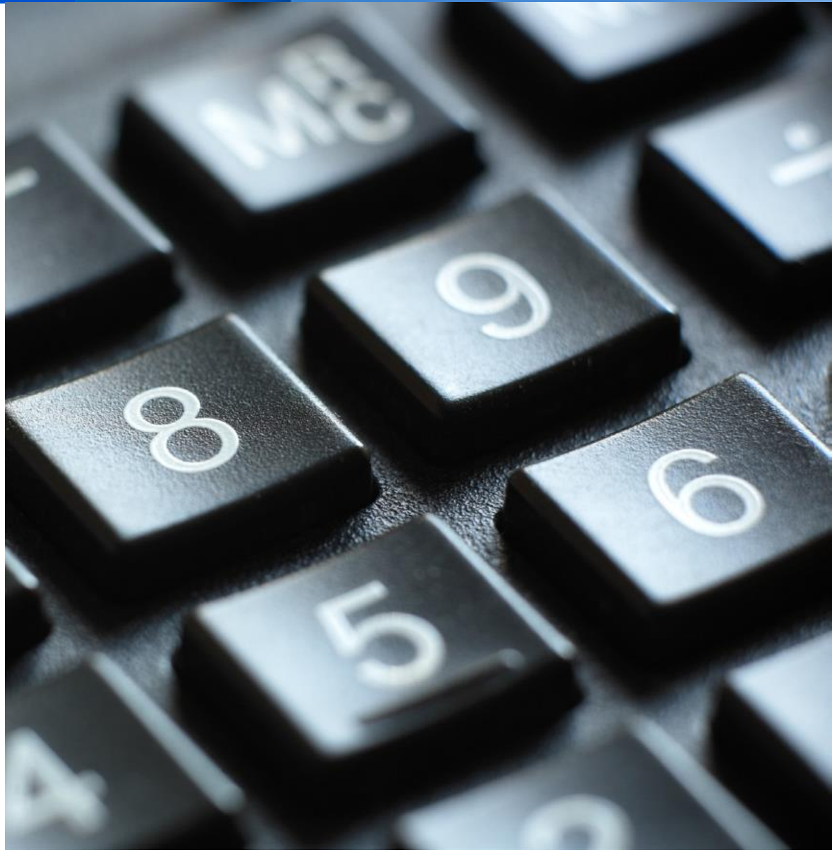
$$\frac{1}{4}F_1 \;\therefore \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

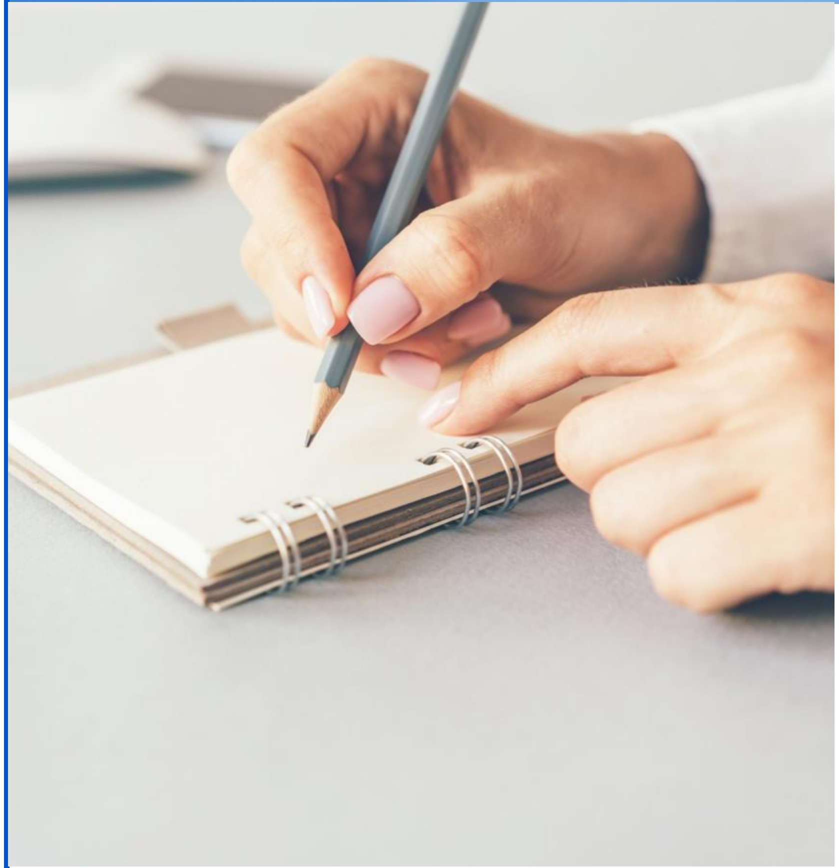
3> Se convertirán en 0 los elementos debajo de a_{11}:

$$F_2 - 2F_1 \quad \therefore \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

4> Se transformará el elemento a_{22} en 1:

$$F_2 \rightleftharpoons F_3 \quad \therefore \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array}\right)$$





5> Se convertirán en 0 los elementos de arriba y abajo de a_{22}:

$$F_1 - \frac{1}{4}F_2 \;\therefore \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array}\right)$$

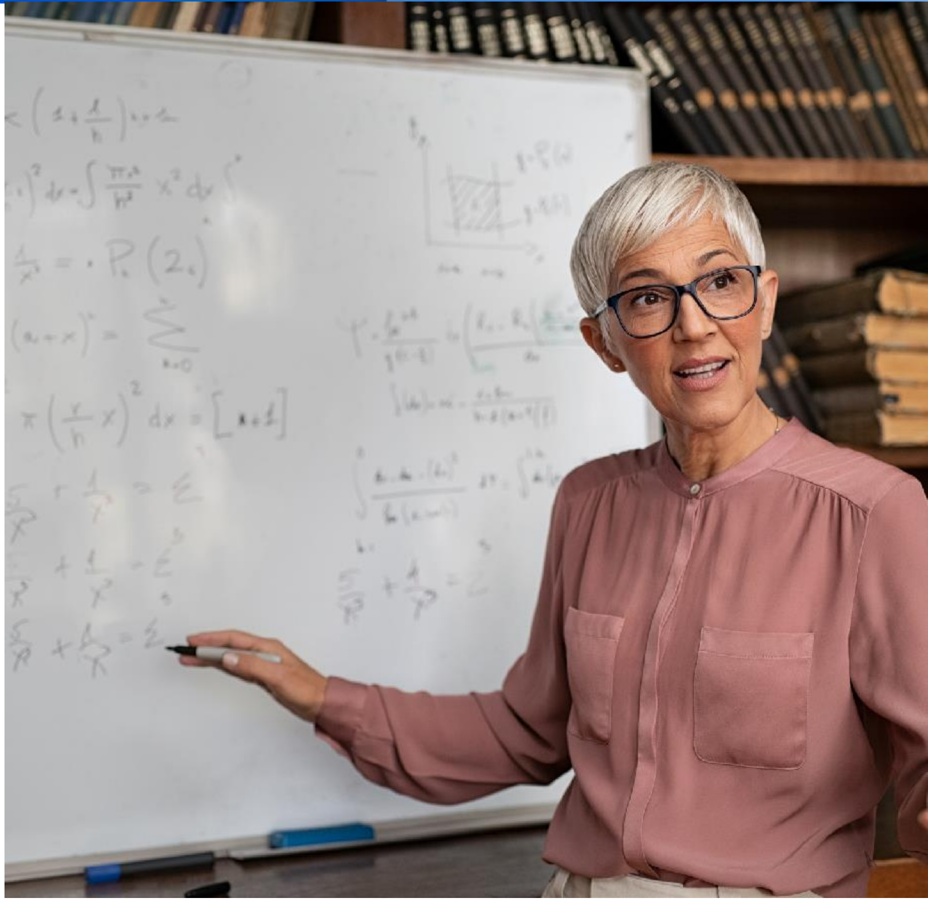
$$F_3 - \frac{1}{2}F_2 \;\therefore \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

6 › Se transformará el elemento a_{33} en 1:

$$\frac{2}{3}F_3 \therefore \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

7 › Se convertirán en 0 los elementos de arriba y abajo de a_{33}:

$$F_2 - 2F_3 \therefore \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$



8› Se convertirán en 0 los elementos de arriba y abajo de a_3 :

$$F_1 - \frac{1}{4}F_3 \therefore \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

9› Se puede concluir que:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Un sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas es todo conjunto de *m* ecuaciones que restringen valores que pueden asumir las *n* variables. En este conjunto, se desea determinar los valores de dichas incógnitas para los que satisfacen, simultáneamente, todas las ecuaciones; un **sistema de ecuaciones** es de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Donde $\boldsymbol{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n}$ son las **incógnitas;** y $\boldsymbol{b_i, a_{ij}} \in \boldsymbol{R}, \forall i,$ **j con 1 ≤ i ≤ m, 1 ≤ j ≤ n**.

La matriz asociada de todo sistema de ecuaciones lineales de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Es la matriz *A* dada por:

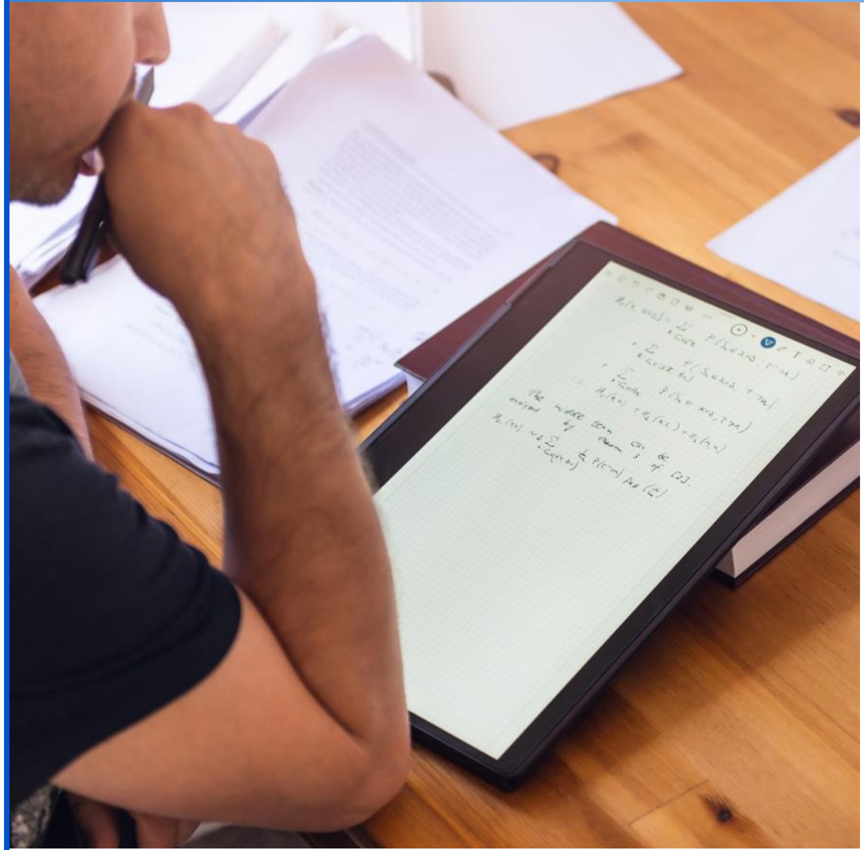
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Si A es la matriz asociada del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Su representación matricial se define como $\boldsymbol{Ax=b}$, donde:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$



Sistema de Ecuaciones Lineales Homogéneo

Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es homogéneo si es de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Matriz Aumentada

Si $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ es representación matricial de algún sistema de ecuaciones lineales, la matriz aumentada correspondiente con dicho sistema se define como la **matriz** $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$.

Solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales

Si $Ax=b$ es la representación de algún sistema de m ecuaciones con n incógnitas, una **solución de dicho sistema** es toda matriz de la forma:

$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = (k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n)^t$ donde $k_1 \in R$, $\forall$i con $1 \leq i \leq n$, si al sustituir x

por $(k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n)^t$ se satisface la igualdad $Ax=b$

Al conjunto conformado por todas las soluciones del sistema se le llama **conjunto solución del sistema** y, usualmente, es denotado con la letra S.

Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es **consistente** si su conjunto solución S **no es vacío**; en caso contrario, se dice que el sistema de ecuaciones es **inconsistente**.

Regla de Cramer

Sea $Ax=b$ la representación matricial de un sistema de *n* ecuaciones lineales con *n* incógnitas, donde $x=(x_1 , x_2 , x_3 ,..., x_n)^t$.

Si $|A|\neq 0$, entonces la solución única del sistema $Ax=b$ está dada por $\boldsymbol{x_i} = \frac{|M_i^A|}{|A|}$, **∀i con 1 ≤ i ≤ n**, donde $\boldsymbol{M\_i\hat{}A}$ es la matriz de orden *n* que se obtiene de *A* luego de cambiar la i-ésima columna de *A* por *b*.

Con base en la regla de Cramer, determine la solución única del sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 3 \\ 2x - 3y - 8z = 4 \\ -3x + z = 3 \end{cases}$$

Una representación matricial del sistema de ecuaciones anterior está dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & -8 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

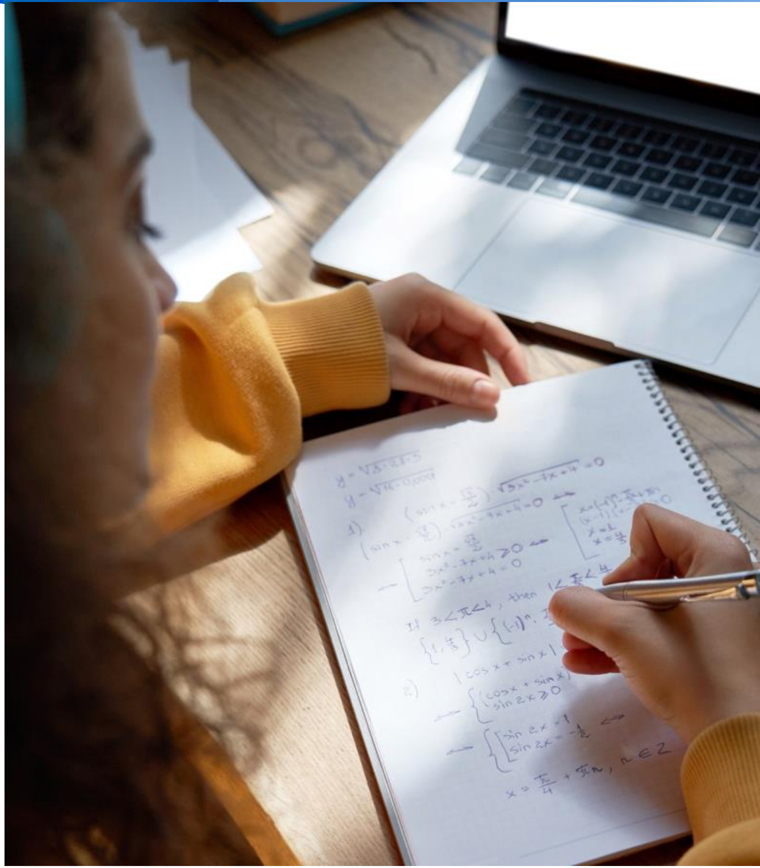
Como **$|A| = -74$**, dicho sistema de ecuaciones lineales posee **solución única**. Los valores respectivos de las incógnitas están dados por:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 4 & -3 & -8 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{74}{-74} = -1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & -8 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{148}{-74} = -2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{0}{-74} = 0$$

De esta manera, el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales en estudio está dado por:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$



Método de Gauss-Jordan

El método de Gauss transforma la matriz de coeficientes en una matriz triangular superior. Este continúa el proceso de transformación hasta obtener una matriz diagonal unitaria ($a_{ij}=0$ para cualquier $i \neq j$).

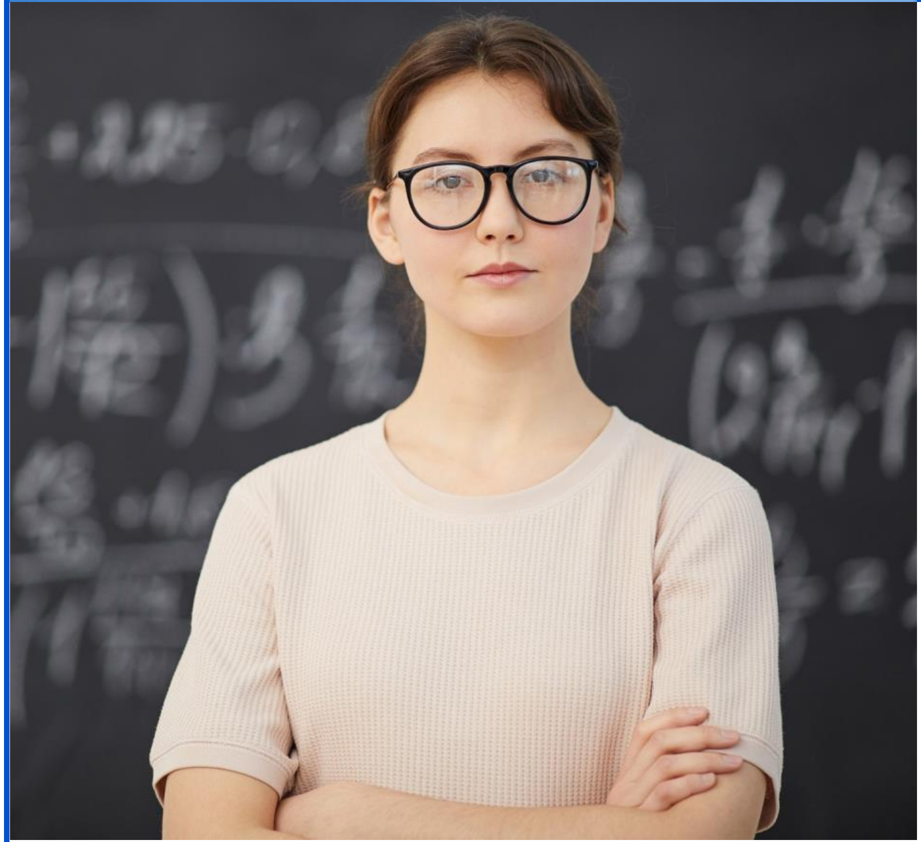
Ejemplo de Sistema con Solución Única:

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales mediante el método de Gauss-Jordan:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 3x - 2y - 4z = -3 \\ 5x - y - z = 4 \end{cases}$$

Se escribe la matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 & -3 \\ 5 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right)$$



1 › Se transformará el elemento a_{11} en 1:

$$\frac{1}{2}F_1 \therefore \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & -2 & -4 & -3 \\ 5 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

2 › Se convertirán en 0 los elementos debajo de a_{11}:

$$F_2 - 3F_1 \therefore \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{13}{2} & -\frac{11}{2} & -\frac{9}{2} \\ 5 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

3 Se convertirán en 0 los elementos debajo de a_{11}:

$$F_3 - 5F_1 \therefore \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{13}{2} & -\frac{11}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & -\frac{17}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

4 Se transformará el elemento a_{22} en 1:

$$-\frac{2}{13}F_2 \therefore \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{11}{13} & \frac{9}{13} \\ 0 & -\frac{17}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

5 › Se convertirán en 0 los elementos de abajo y arriba de a_{22} :

$$F_3 + \frac{17}{2}F_2 \;\therefore \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{11}{13} & \frac{9}{13} \\ 0 & 0 & \frac{48}{13} & \frac{96}{13} \end{array}\right) \qquad F_1 - \frac{3}{2}F_2 \;\therefore \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{10}{13} & -\frac{7}{13} \\ 0 & 1 & \frac{11}{13} & \frac{9}{13} \\ 0 & 0 & \frac{48}{13} & \frac{96}{13} \end{array}\right)$$

6 › **Se transformará el elemento a_{33} en 1:**

$$\frac{13}{48}F_3 \quad \therefore \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{10}{13} & -\frac{7}{13} \\ 0 & 1 & \frac{11}{13} & \frac{9}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

7 › **Se convertirán en 0 los elementos de arriba de a_{33}:**

$$F_2 - \frac{11}{13}F_3 \quad \therefore \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{10}{13} & -\frac{7}{13} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

8 Se convertirán en 0 lo elementos de arriba de a_{33}:

$$F_1 + \frac{10}{13}F_3 \ \therefore \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

De esta manera, el **conjunto solución** del sistema de ecuaciones lineales en estudio está dado por:

$$\boldsymbol{S = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} \, donde \; x = 1 \, , y = -1 \, , z = 2}$$

Ejemplo de Sistemas con Infinidad de Soluciones:

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales mediante el método de Gauss-Jordan:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 3z = 5 \\ 2x + 4y - z = 2 \end{cases}$$

Se escribe la matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

1 Se transformará el elemento a_{11} en 1:

$$F_1 - F_2 \therefore \left(\begin{matrix} 1 & -6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}\right)$$

2 Se convertirán en 0 los elementos debajo de a_{11}:

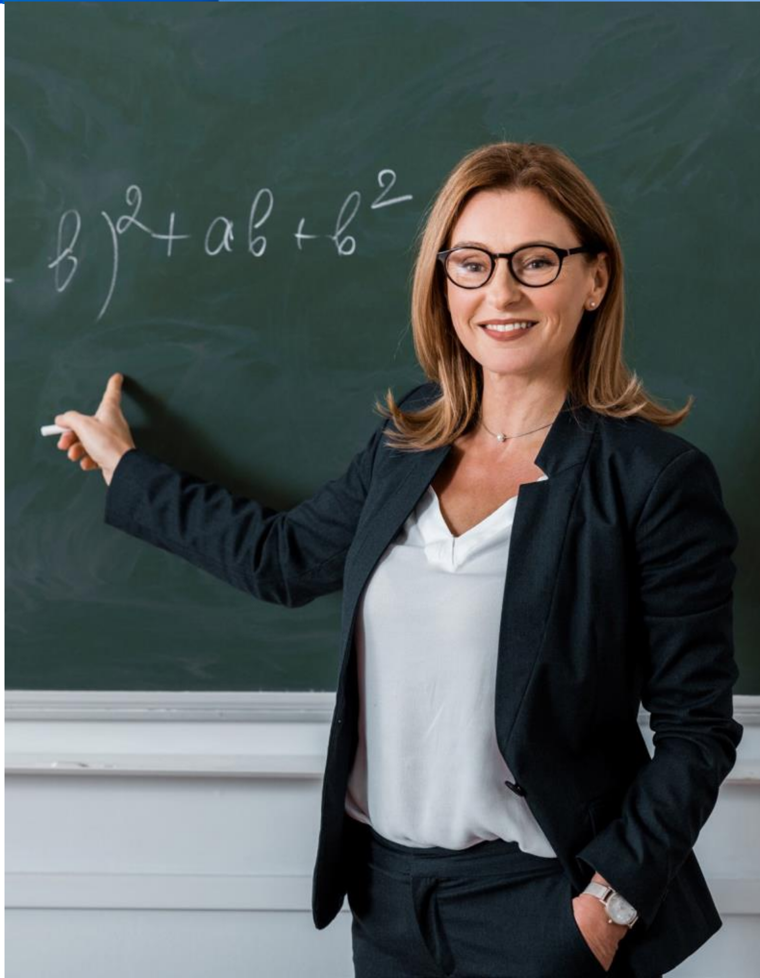
$$F_2 - 2F_1 \therefore \left(\begin{matrix} 1 & -6 & 4 \\ 0 & 16 & -9 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 3 \\ -4 \end{matrix}\right)$$

3 > Se transformará el elemento a_{22} en 1:

$$\frac{1}{16}F_2 \therefore \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{16} & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

4 > Se convertirán en 0 los elementos de arriba de a_{22}:

$$F_1 + 6F_2 \therefore \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{8} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{9}{16} & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$



La última matriz está en su forma escalonada reducida. Debido a que ya no se puede reducir más, se obtiene:

$$x+\frac{5}{8}z=\frac{3}{2} \qquad y-\frac{9}{16}z=-\frac{1}{4}$$

Despejando z:

$$z=\frac{12}{5}-\frac{8}{5}x \qquad z=\frac{4}{9}+\frac{16}{9}y$$

Donde $x,y \in R$, es decir, **el sistema de ecuaciones tiene una infinidad de soluciones**.

Ejemplo de Sistemas sin Solución:

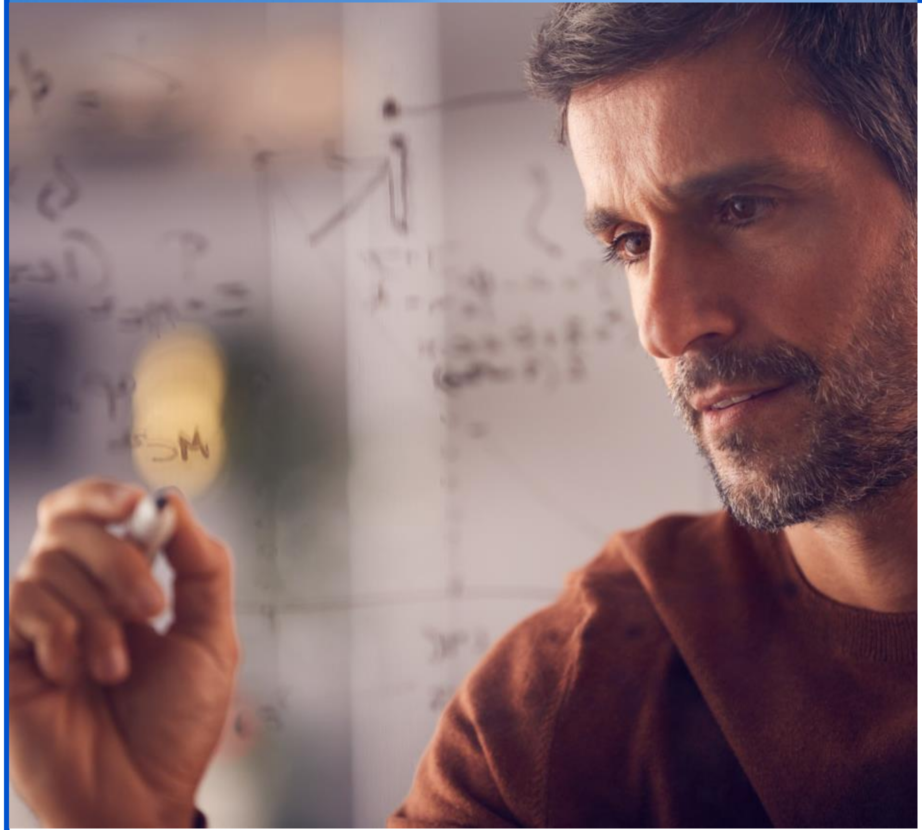
Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales mediante el método de Gauss-Jordan:

-

$$\begin{cases} x + 8y - 5z = 3 \\ 3x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y - z = 4 \end{cases}$$

Se escribe la matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -5 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right)$$



1 › Se convertirán en 0 los elementos debajo de a_{11}:

$$F_2 - 3F_1 \therefore \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -5 & 3 \\ 0 & -26 & 18 & -8 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

$$F_3 - 2F_1 \therefore \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -5 & 3 \\ 0 & -26 & 18 & -8 \\ 0 & -13 & 9 & -2 \end{array}\right)$$

2 › Se convertirá en 1 el elemento a_{22}:

$$-\frac{1}{26}F_1 \therefore \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{13} & \frac{4}{13} \\ 0 & -13 & 9 & -2 \end{array}\right)$$

3 › Se convertirán en 0 los elementos de abajo y arriba de a_{22}:

$$F_1 - 8F_2 \therefore \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{7}{13} & \frac{7}{13} \\ 0 & 1 & -\frac{9}{13} & \frac{4}{13} \\ 0 & -13 & 9 & -2 \end{array}\right)$$

4 Se convertirán en 0 los elementos de abajo y arriba de a_{22}:

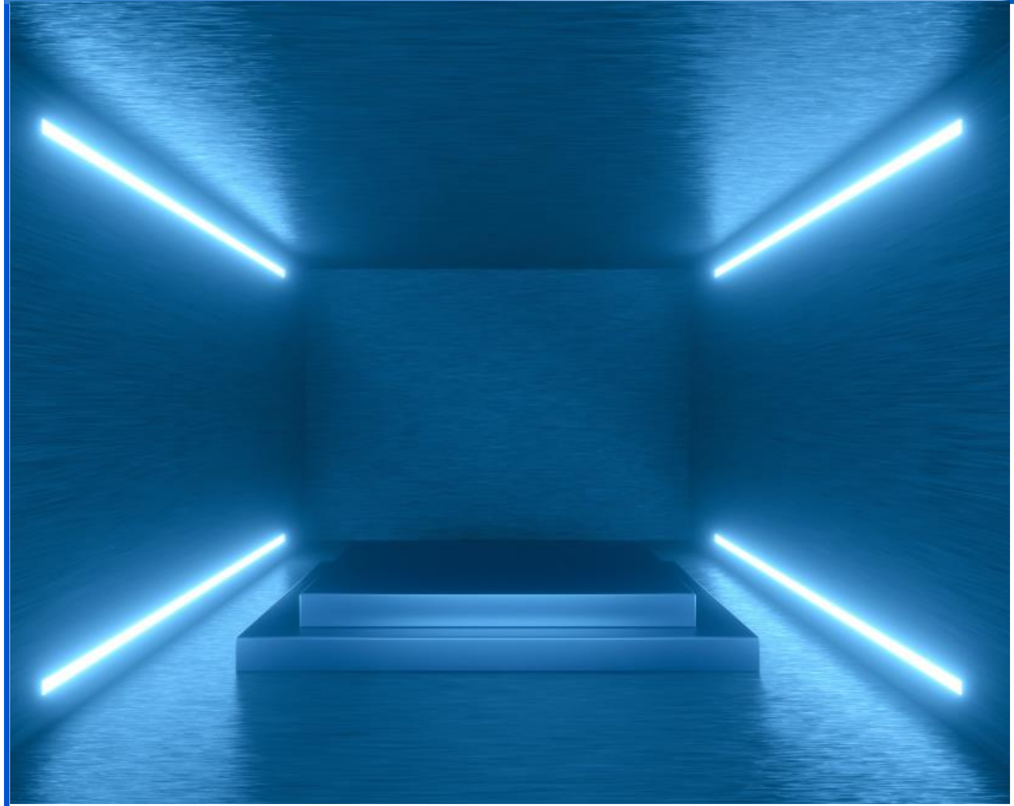
$$F_3 + 13F_2 \therefore \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{7}{13} & \frac{7}{13} \\ 0 & 1 & -\frac{9}{13} & \frac{4}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Como se puede observar en la tercera fila de la matriz aumentada, se obtiene:

$$0x + 0y + 0z = 2$$

Debido a que la ecuación es una **inconsistencia** se considera que el sistema de ecuaciones **no tiene solución**.

VIDEO



Te invitamos a ver el siguiente video:

Método de Gauss-Jordan

ACTIVIDAD INTEGRADORA 1

Análisis de problemática

Te invitamos a realizar la siguiente actividad:

Presiona el botón para descargar la actividad:

Presiona el botón para entregar la actividad:

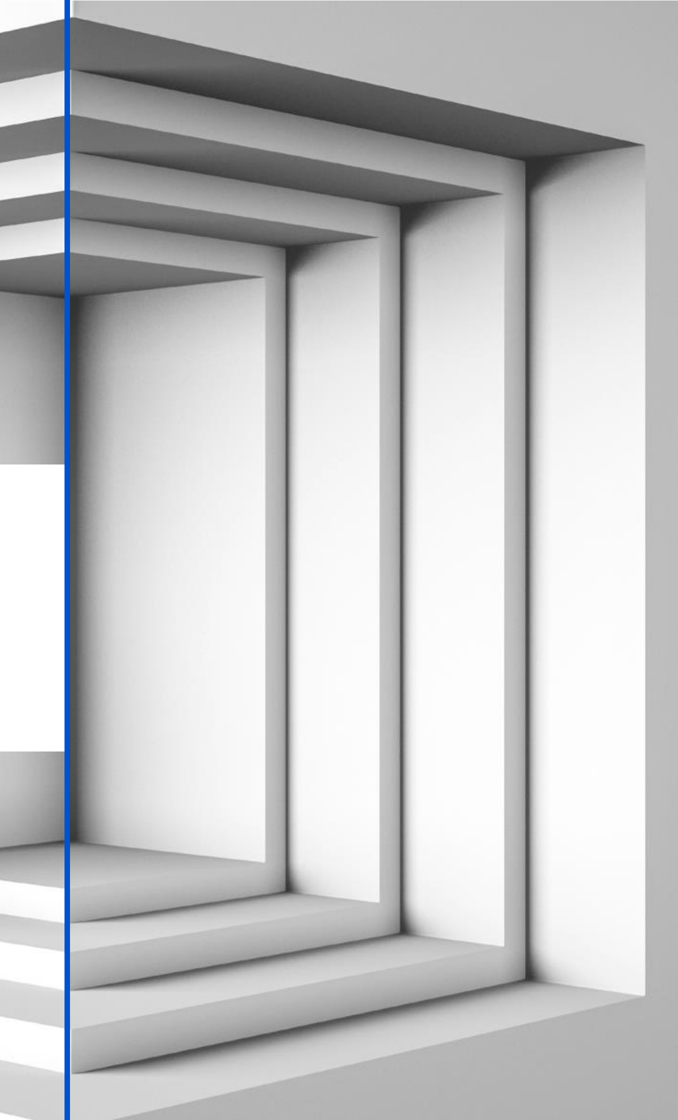
CONCLUSIÓN

Es de suma importancia desarrollar la capacidad para dar soluciones a problemas de sistemas de ecuaciones lineales. Para ello, existen diferentes métodos, como los que vimos en esta unidad. Ya sea el método de Cramer o el método de Gauss, ambos te ayudarán a encontrar la solución correcta para el problema específico que se te presente.

En Informática, es fundamental dominar la resolución de problemas por medio de sistemas de ecuaciones lineales, ya que estos son métodos base para la programación, la estructuración de información, e, incluso, en la inteligencia artificial.

¡Felicidades!

Acabas de concluir la segunda unidad de tu curso *Matemáticas Matriciales*. Te invitamos a finalizar este esfuerzo realizando el examen parcial correspondiente. Para ello, debes regresar a la pantalla principal y dar clic en *Presentar examen*.



UNIDAD 3

ESPACIO VECTORIAL

TEMARIO

UNIDAD 3

ESPACIO VECTORIAL

En esta unidad comprenderemos lo fundamental que tiene un conjunto para llamarlo espacio vectorial. A saber, que sus objetos se puedan sumar y multiplicar por un escalar.

De esta manera, los espacios vectoriales constituyen una plataforma inicial para estudiar ciertos conjuntos relacionados con conceptos como combinación lineal, independencia lineal y bases.

INTRODUCCIÓN

COMPETENCIAS A DESARROLLAR

- El alumno identificará la noción de vectores en el espacio como entes matemáticos abstractos definidos por sus características.

- El alumno será capaz de resolver con propiedad operaciones relacionadas con el álgebra vectorial.

ESPACIO VECTORIAL

Cuerpo

Un cuerpo es un conjunto no vacío $\mathbb{K}$, en el que se definen dos operaciones: la suma o adición, denotada por "+"; y la multiplicación o producto, denotado por el signo "·", y tales que, para todo $a, b, c \in \mathbb{K}$, se verifican los siguientes axiomas:

ESPACIO VECTORIAL

$a + b \in \mathbb{K}$, [propiedad de clausura]

La **suma** es asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$ para cada $a, b, c \in \mathbb{K}$;

La **suma** es conmutativa: $a + b = b + a$ para cada $a, b \in \mathbb{K}$;

Hay un elemento neutro para la **suma**: existe un elemento $0 \in \mathbb{K}$ tal que:
$a + 0 = a$ y $0 + a = a$ para todo $a \in \mathbb{K}$;

Todo elemento de $\mathbb{K}$ posee un **opuesto aditivo**: para todo $a \in \mathbb{K}$ existe un elemento $a' \in \mathbb{K}$ tal que: $a + a' = 0$ y $a' + a = 0$;

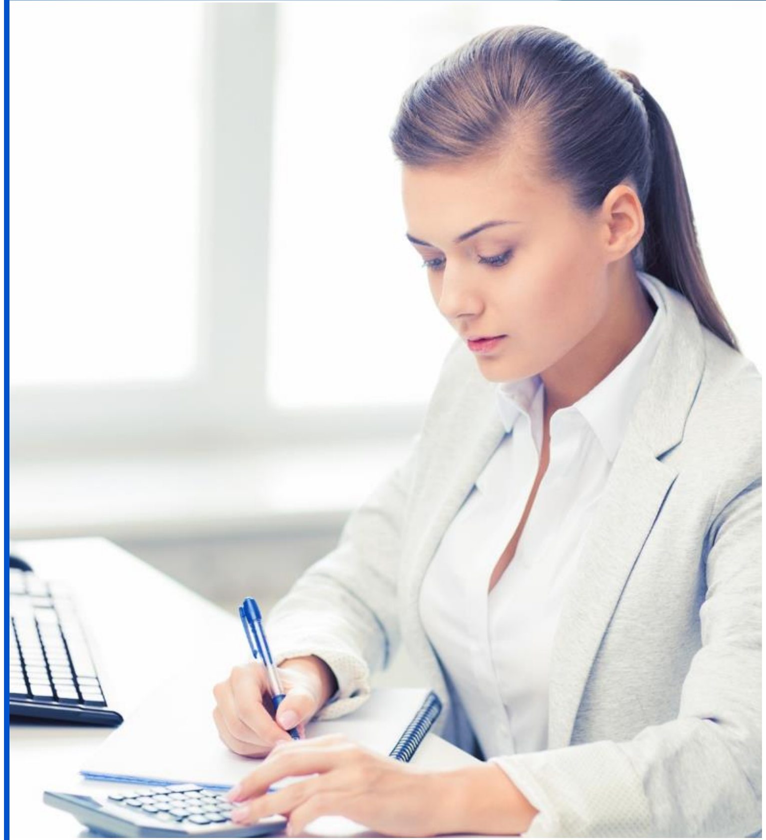
$a \cdot b \in \mathbb{K}$, **[propiedad de clausura]**

El **producto** es asociativo: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ para cada $a, b, c \in \mathbb{K}$;
El **producto** es conmutativo: $a \cdot b = b \cdot a$ para cada $a, b \in \mathbb{K}$;

Hay un elemento neutro para el **producto**: existe un elemento $1 \in \mathbb{K}$ tal que: $a \cdot 1 = a$ y $1 \cdot a = a$ para todo $a \in \mathbb{K}$;

Todo elemento de $\mathbb{K}$ distinto de 0 posee un **inverso multiplicativo**: para cada $a \in \mathbb{K}$ distinto de 0 existe $a' \in \mathbb{K}$ tal que: $a \cdot a' = 1$ y $a' \cdot a = 1$; el producto se distribuye sobre la suma: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ para cada $a, b, c \in \mathbb{K}$;

Los elementos neutros de la suma y del producto son distintos: $0 \neq 1$.



Espacio Vectorial

Dado un cuerpo $\mathbb{K}$, que denominaremos **conjunto de escalares**, consideremos un conjunto V no vacío en el que se definen las operaciones de suma y multiplicación por escalares. Si ambas operaciones satisfacen la propiedad de clausura, entonces diremos que el conjunto V con dichas operaciones es un espacio vectorial si se cumplen las siguientes propiedades para todo $u, v, w \in V$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

La **suma** es asociativa: $(x+y)+z=x+(y+z)$ para cada $x, y, z \in V$;

La **suma** es conmutativa: $x+y=y+x$ para cada $x, y \in V$;

Hay un elemento neutro para la **suma**: existe un elemento $0V \in V$ tal que: $x+0V=x$ y $0V+x=x$ para todo $x \in V$;

Todo elemento de V posee un **opuesto**: para todo $x \in V$ existe un elemento $x' \in V$ tal que: $x+x'=0V$ y $x'+x=0V$;

La **multiplicación** escalar es asociativa: $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y todo $x \in V$;

La **multiplicación** escalar es unitaria: $1 \cdot x = x$ para todo $x \in V$;

La multiplicación escalar se distribuye sobre la suma de $\mathbb{K}$ y sobre la suma de V:

$\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ y todo $x, y \in V$;
$(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y todo $x \in V$.

ESPACIO VECTORIAL

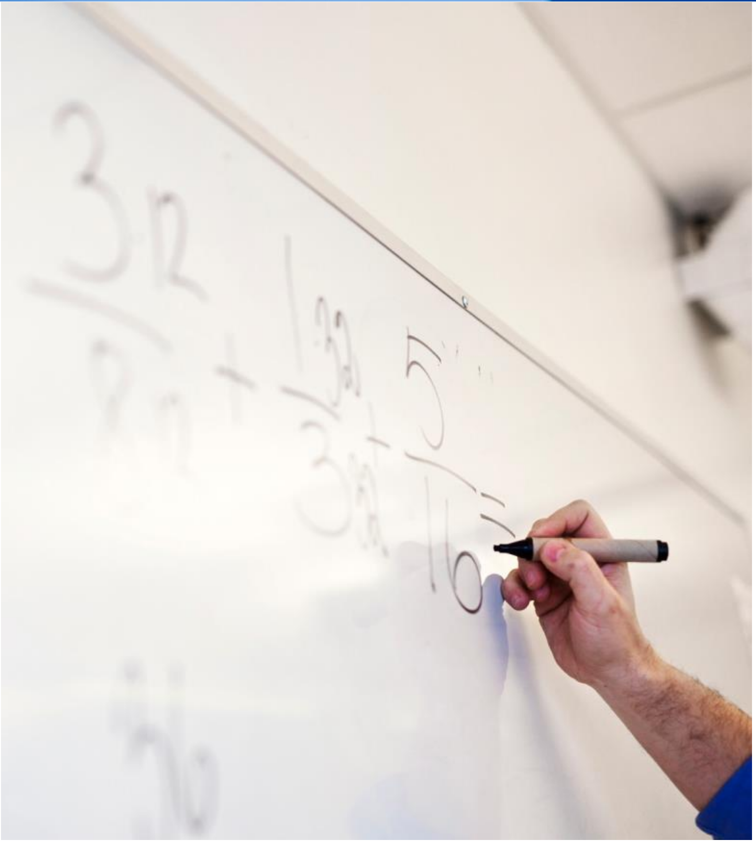
Los elementos de un espacio vectorial V, definidos de la forma anterior, se denominan **vectores**. Los elementos de V pueden ser números, n-tuplas de números, matrices, polinomios, funciones, etc., ya que la definición de las operaciones de suma y multiplicación por escalares es lo que nos permitirá referirnos a ellos como vectores. Los vectores se denotarán por letras latinas (p.e., $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{v}$, etc.).

Un conjunto $\boldsymbol{K^{mxn}}$ de todas las matrices de dimensión $\boldsymbol{m \times n}$ sobre el cuerpo K, con la suma de matrices y la multiplicación por los escalares de $\boldsymbol{K}$, es un **espacio vectorial**.

Sea el sistema de ecuaciones lineales homogéneo escrito en forma matricial como $\boldsymbol{A\ x} = \mathbf{0}$, con A de dimensión $\boldsymbol{m \times n}$ y elementos reales. Sabemos que el sistema es compatible y que su conjunto de soluciones está formado por *n*-tuplas (de números reales).

Podemos concluir que el conjunto de soluciones de dicho sistema de ecuaciones lineales homogéneo es un espacio vectorial sin más que tener en cuenta las siguientes dos **observaciones**:

- La suma y la multiplicación por escalares $\boldsymbol{(R)\ en\ R^n}$ verifica los axiomas de la definición de espacio vectorial.
- Cualquier combinación lineal con coeficientes reales de dos soluciones de dicho sistema es también solución del sistema.



Subespacio Vectorial

Dado un espacio vectorial V, a menudo es posible formar otro espacio vectorial tomando un subconjunto no vacío S de V que **hereda las operaciones de V**. Puesto que V es un espacio vectorial, las operaciones de suma y multiplicación por escalares siempre producirán un vector de V. Para que el nuevo subconjunto $S \subset V$ sea también un espacio vectorial, el conjunto S debe ser cerrado con respecto a dichas operaciones.

Es decir, **la suma de dos elementos de S debe ser un elemento de S; y el producto de un escalar y de un elemento S también**. Si esto ocurre, el resto de propiedades que definen un espacio vectorial se satisfacen automáticamente en S. Así:

Un subconjunto no vacío S del espacio vectorial V es un subespacio de V si satisface las propiedades de clausura $u + v \in S$ y $\alpha u \in S$ para todo $u, v \in S$ y todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

Ejemplo:

Dada una matriz $A \in K^{mx}$, su espacio columna $\mathcal{C}(A)$ es un subespacio de K^m Claramente, el conjunto es no vacío, pues contiene a todas las columnas de A; también, si consideramos la combinación lineal:

$0 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + \cdots + 0 \cdot A_n = 0$, el cero pertenece a $\mathcal{C}(A)$. Además, es cerrado bajo la suma y la multiplicación por escalares:

$$(\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_n A_n) + (\beta_1 A_1 + \cdots + \beta_n A_n)$$
$$= (\alpha_1 + \beta_1) A_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) A_n$$
$$k(\alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_n A_n) = k\alpha_1 A_1 + \cdots + k\alpha_n A_n,$$

Que son combinaciones lineales de las n columnas de la matriz. Por tanto, $\mathcal{C}(A)$ es un subespacio.

COMBINACIÓN, DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Combinación Lineal

Sea V un espacio vectorial sobre K. Dados n vectores $v_1, \ldots, v_n \in V$, llamamos combinación lineal de estos vectores a cualquier expresión de la forma:

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \in V$, donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$.

Dependencia e Independencia Lineal

Sea V un espacio vectorial. Se dice que el conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ es **linealmente dependiente** si, y solo si, existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$, con algún $\alpha_i \neq 0$, tales que:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$$

En caso contrario, se dice que el conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es **linealmente independiente**.

En caso de que un conjunto de vectores no sea linealmente dependiente, se dice que es linealmente independiente (o libre).

Por tanto, escribiendo la negación de la definición de dependencia lineal, tendremos que un conjunto de vectores es linealmente independiente cuando ninguno de ellos es combinación lineal de los demás o equivalentemente.

El vector $\vec{0}$ no es combinación lineal de ellos, a no ser que la combinación tenga coeficientes que sean todos nulos. Es decir, la única forma de poner $\vec{0}$ como combinación lineal de los vectores es con todos los coeficientes nulos.

Veamos que $u=(3,1)$ y $v=(4,5)$ en $\mathbb{R}^2$ son linealmente independientes. Para ello, intentaremos poner (0,0) como combinación lineal de ellos, y encontraremos que solo es posible con coeficientes nulos.

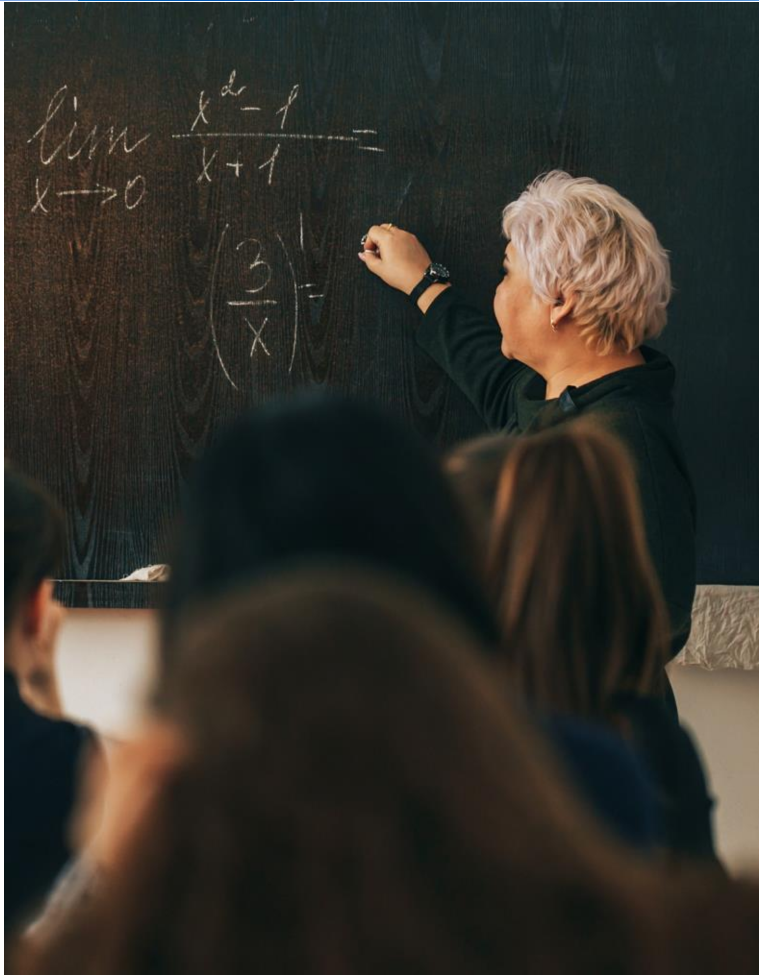
$$(0,0) = \alpha(3,1) + \beta(4,5) \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} 3\alpha + 4\beta = 0 \\ \alpha + 5\beta = 0 \end{array}\right\}$$

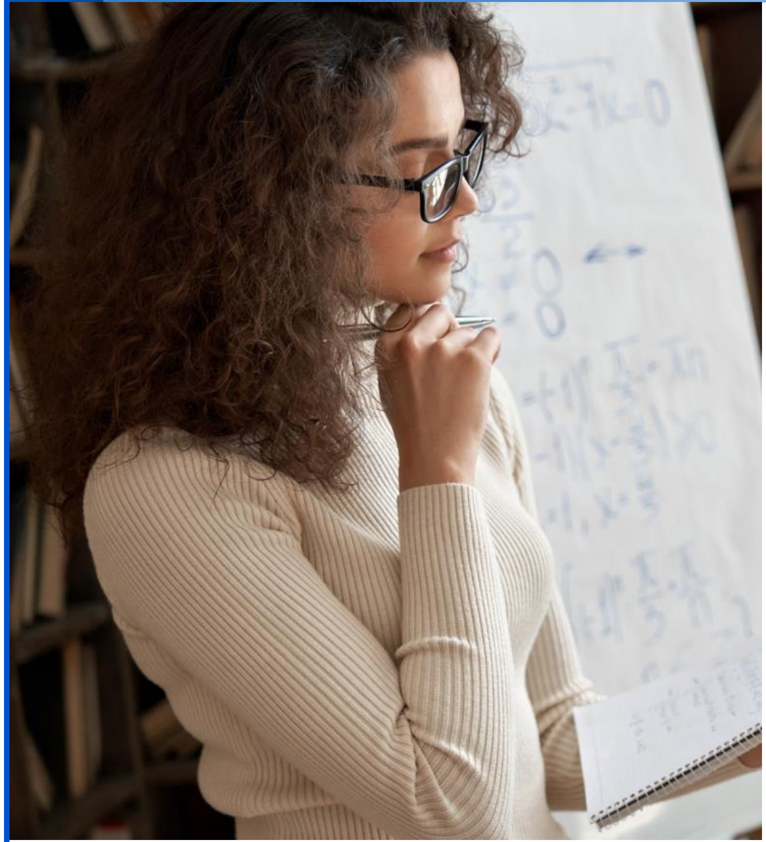
Este sistema es compatible determinado, por tanto solo tiene la solución $\alpha=0, \beta=0$.

Así pues, la única forma de poner (0,0) como combinación lineal de *u*, *v* es con coeficientes α, β nulos. Esto significa que son linealmente independientes.

Por otra parte, se dice que un conjunto de vectores es **lineamente dependiente** (o ligado) si al menos uno de ellos es combinación lineal de los demás.

El vector $\vec{0}$ es combinación lineal de ellos (con coeficientes no todos nulos).





La dependencia lineal de un conjunto de vectores puede ser estudiada aplicando las **transformaciones de Gauss**. Si llegamos a obtener un cuadro de vectores, de modo que en la diagonal no haya cero y debajo de la diagonal todas las componentes sean nulas, el conjunto de vectores es **libre**.

Si resulta algún vector con todas sus componentes nulas se trata de un **conjunto ligado**.

Ejemplo:

Prueba que los vectores (1, 1, 2, 0), (1, 1, 0, 6), (-1, 2, 0, 1) y (1, 1, 1, 3) son linealmente dependientes.
Escribe la relación de dependencia
Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De la 2ª matriz pasamos a la 3ª simplemente intercambiando filas. Finalmente, obtenemos una fila formada por ceros. Luego, los vectores son linealmente dependientes. Necesariamente uno de ellos será combinación lineal de los otros restantes. Probamos la siguiente relación:

$$(1,1,2,0)=\alpha(1,1,0,6)+\beta(-1,2,0,1)+\gamma(1,1,1,3)$$

Lo que nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha-\beta+\gamma=1 \\ a+2\beta+\gamma=1 \\ \gamma=2 \\ 6\alpha+\beta+3\gamma=0 \end{cases}$$

Y, operando en las dos primeras ecuaciones con el valor de γ que resulta, llegamos a:

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 2 = 1 \\ \alpha + 2\beta + 2 = 1 \end{cases}$$

Y se obtiene $\alpha = -1$; $\beta = 0$

Podemos comprobar también que los valores obtenidos de α y de β verifican la 4ª ecuación del sistema; por tanto, la relación de dependencia es:

$$(1,1,2,0) = -1(1,1,0,6) + 0(-1,2,0,1) + 2(1,1,1,3)$$

O bien:

$$1(1,1,2,0) + 1(1,1,0,6) - 0(-1,2,0,1) - 2(1,1,1,3) = (0,0,0,0)$$
$$1v_1 + 1v_2 - 0v_3 - 2v_4 = 0$$

La relación de dependencia puede obtenerse directamente al aplicar el *método de Gauss*, como veremos a continuación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 - v_1 \\ v_3 + v_1 \\ v_4 - v_1 \end{array} \end{array}$$

Intercambiamos filas y las ponemos en el orden que se observa:

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_3 + v_1 \\ v_4 - v_1 \\ v_2 - v_1 \end{array} \end{array} \sim \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_3 + v_1 \\ v_4 - v_1 \\ -2(v_4 - v_1) + v_2 - v_1 \end{array} \end{array}$$

Vemos que la expresión $-2(v_4-v_1)+v_2-v_1$ conduce al vector cero, por tanto:

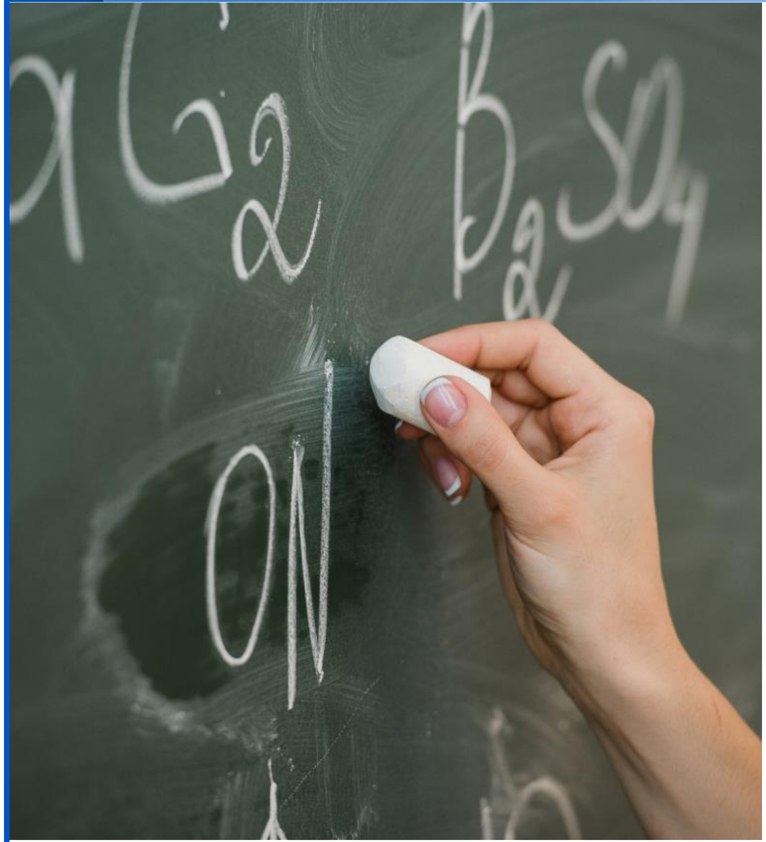
$-2v_4+2v_1+v_2-v_1=0$, es decir $v_1+v_2-0v_3-2v_4=0$

Que es la misma relación que se ha obtenido antes.

Propiedades de la Dependencia / Independencia Lineal

1. El conjunto formado por un solo vector *v* no nulo es libre. En efecto, una combinación lineal de *v* es solamente λv, y $\lambda v = \vec{0}$ solo puede conseguirse con $\lambda = 0$.

2. Dos vectores *v*, *w* son linealmente dependientes cuando uno es múltiplo del otro, $v = \lambda w$ (ya que esto equivale a decir que uno es combinación lineal del otro).



3. Todo conjunto que contenga al $\vec{0}$ es ligado. Veámoslo para 3 vectores. Si tenemos { v, w, $\vec{0}$ } podemos formar $\vec{0}$ como combinación de ellos:

$$0\,v + 0\,w + 1\,\vec{0} = 0$$

Y los coeficientes de esta combinación lineal son 0, 0, 1; por tanto, no todos son nulos.

4. Si un conjunto es ligado, al añadirle vectores, sigue siendo ligado. En efecto, si un vector es combinación de otros, aunque añadamos más vectores seguirá siéndolo.

5. Si un conjunto es libre, quitándole vectores sigue siendo libre. En efecto, si no se puede formar $\vec{0}$ como combinación de ellos, al quitar vectores tampoco se podrá.

6. Si un conjunto es libre, se pueden añadir más vectores libres hasta un cierto número. Que será la dimensión del espacio.

Sistema de Generadores

Sea V un espacio vectorial Diremos que un sistema de vectores $S=\{v_1,\ldots,v_n\}$ es un sistema de generadores de V **si todo vector de V puede escribirse como combinación lineal de los vectores de S**.

En este caso, diremos que V está generado por S, o por los vectores de S.

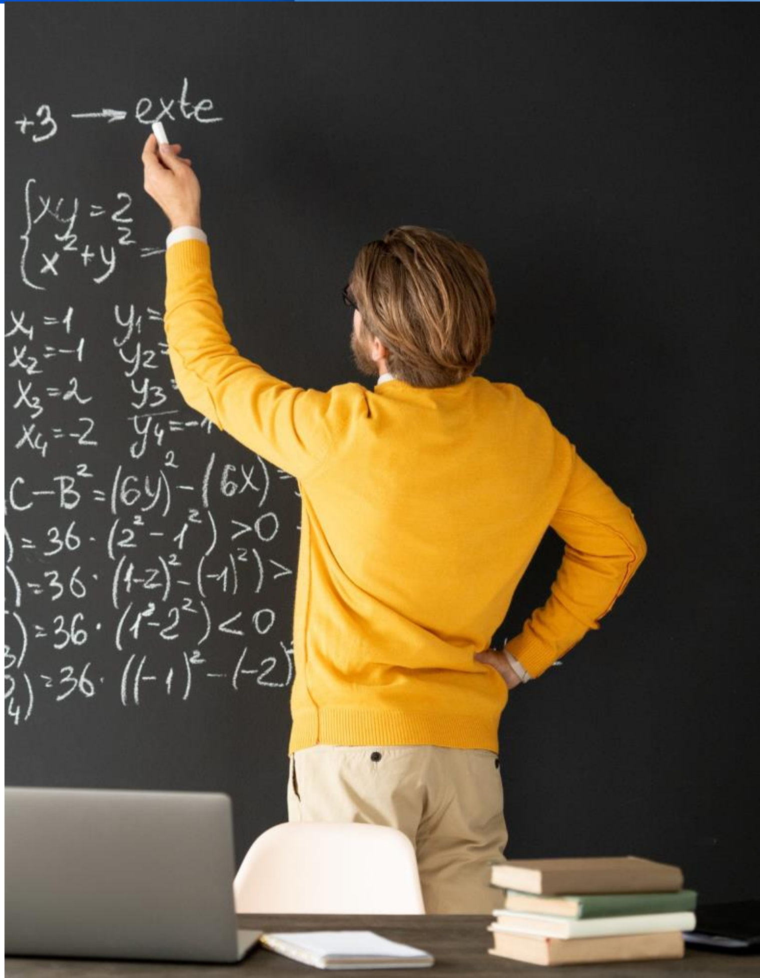
Un espacio vectorial V se dice que es de tipo finito si está generado por un número finito de vectores Es decir, si existe un sistema de generadores $S=\{v_1,\ldots,v_n\}$.

Dimensión

Sea V un espacio vectorial de tipo finito. Todas las bases de V tienen el mismo número de elementos. A este se le llama **dimensión de *V***.

La dimensión de un espacio vectorial V, que denotamos dim (V), se define como sigue:

Si $V = \{0\}$, entonces dim $(V) = 0$.



Si V es de **tipo finito**, su dimensión es el número de elementos de cualquier base de V.

Si V **no es de tipo finito**, diremos que tiene dimensión infinita, y escribiremos $dimV = \infty$.

Si V es un **espacio vectorial de dimensión finita $n \geq 1$**, entonces:

- Cualquier conjunto linealmente independiente de n vectores es una base.
- Cualquier conjunto generador de V de n vectores es una base.

La dimensión de un espacio vectorial nos impone restricciones sobre el tamaño que pueden tener los sistemas libres o los sistemas de generadores:

1 > Si S es un sistema de generadores, entonces: $\mathbf{m \geq dim}\ V$.

2 > Si S es linealmente independiente, entonces: $\mathbf{m \leq dim}\ V$.

3 > Si S es sistema de generadores, y $m = dim\ V$, entonces: **S es base de V**.

4 > Si S es linealmente independiente, y $m = dim\ V$, entonces: **S es base de V**.

Si $H \subset V$ es un subespacio de un espacio vectorial V de dimensión finita, entonces la dimensión de H es finita, y es menor o igual que la de V:

$$\mathbf{dimH \leq dimV}$$

Ejemplo:

Encuentra la dimensión del subespacio:

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{bmatrix} a - 3b + 6c \\ 5a + 4d \\ b - 2c - d \\ 5d \end{bmatrix} con\ a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Este subespacio es $Gen\ (v_1, v_2, v_3, v_4)$ con:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Es evidente que ***v3*** es combinación lineal de los otros vectores (es $-2v\_2$), por lo que se puede eliminar del conjunto de generadores, H = $Gen(v\_1,v\_2,v\_4)$.

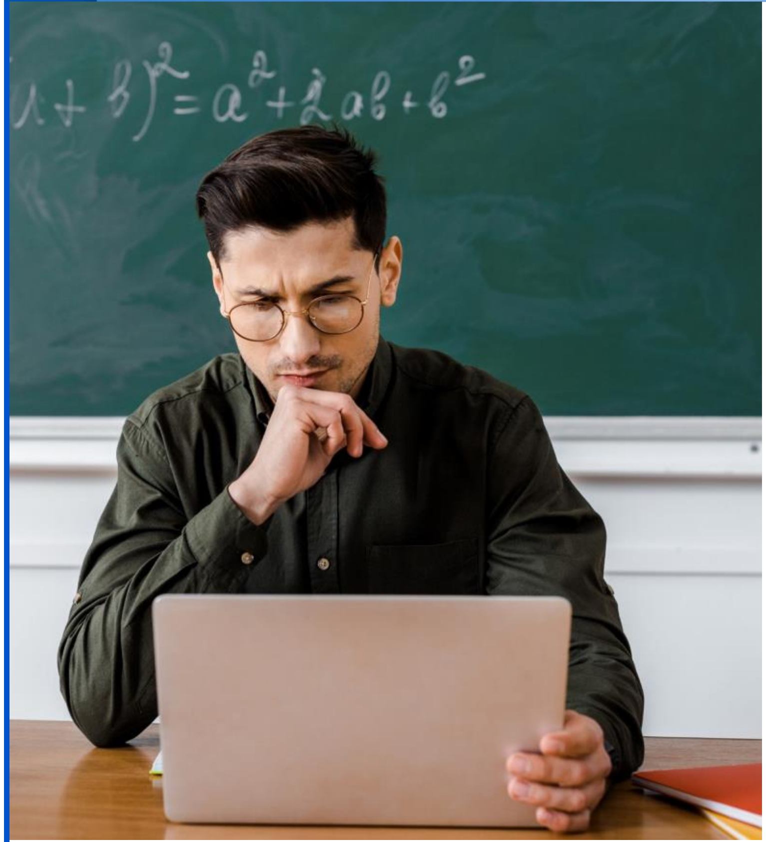
También es evidente, por la disposición escalonada de los elementos no nulos de v_1,v_2 y v_4, que estos forman un conjunto linealmente independiente. Por lo tanto, son base de *H*. Son tres, por lo que la dimensión de *H* es 3.

Base

Sea V un espacio vectorial de tipo finito. Diremos que un sistema de vectores $B \subset V$ es una base de V si cumple:

1. B es un sistema de generadores de V.

2. B es linealmente independiente.



Una base es un sistema de generadores de un espacio vectorial en el que no sobra ningún vector, ya que, al ser linealmente independiente, ninguno de ellos puede escribirse como combinación lineal de los demás.

Todo espacio vectorial $\boldsymbol{V} \neq \{\mathbf{0}\}$ (o subespacio vectorial) con un sistema de generadores finito posee al menos una base.

Sistema de Coordenadas

Sea B = $\{b_1 ,..., b_n\}$ una base de un espacio vectorial V. Todo vector $v \in V$ se puede expresar de forma única como combinación lineal:

$$v = c_1 b_1 + \cdots + c_n b_n$$

Sea B = $\{b_1 ,..., b_n\}$ una base de un espacio vectorial V. Las coordenadas de v respecto a la base B son los escalares $c_1 ,..., c_n$ tales que:

$$v = c_1 b_1 + \cdots + c_n b_n$$

Las coordenadas permiten relacionar cualquier espacio vectorial (que tenga una base finita de n vectores) con un espacio $\mathbb{R}^n$. Efectivamente, a cualquier vector $v \in V$ se le puede asociar un vector de coordenadas $[\boldsymbol{v}]_{\boldsymbol{B}}$ respecto a la base B:

$$[v]_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad si\ v = c_1 b_1 + \cdots + c_n b_n$$

Ejemplos:

1 > En $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$:

$$\mathfrak{B}_c = \{e_1 = (1,0,0,\dots,0)\,, e_2 = (0,1,0,\dots,0),\dots, e_n = (0,0,0,\dots,1)\}$$

También llamada **base canónica**:

2 > En $\boldsymbol{M_{mxn}}\,(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{B}=$

$$\left\{E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, E_{nm} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

3 > En $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{B}=\{1,x,x^2,\ldots,x^n\}$$

Si $A=\{v_1=(1,3,4),v_2=(2,-1,1),v_3=(3,2,5),v_4=(5,15,20)\}\subset\mathbb{R}^3$: entonces

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 5\\ 5 & 15 & 20\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 0 & 7 & 7\\ 0 & 7 & 7\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Y $\mathcal{B}=\{u_1=(1,3,4),u_2=(0,1,1)\}$ es una base de A. Para hallar las coordenadas del vector v=(2,-1,1) respecto de dicha base, se procede así:

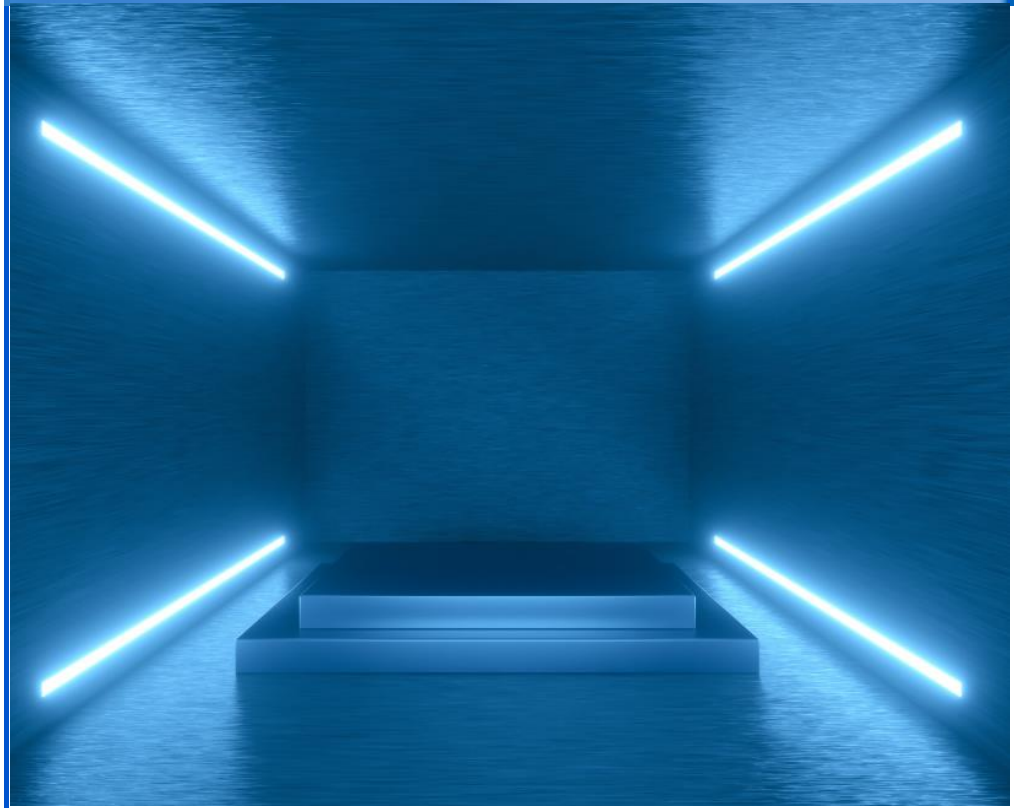
$$v=au_1+bu_2\Rightarrow(2,-1,1)=a(1,3,4)+b(0,1,1)\Rightarrow\begin{cases}a=2\\3a+b=-1\\4a+b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=-7\end{cases}$$

De donde $v=2u_1-7u_2=(2,-7)_{\mathcal{B}}$. En referencia a esta base, las **ecuaciones paramétricas e implícitas** de *A* son:

$$\begin{cases} x = a \\ y = 3a + b \\ z = 4a + b \end{cases} ; a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow x + y - z = 0$$

Nota: en matemáticas, un sistema de ecuaciones paramétricas permite representar una curva o superficie en el plano o en el espacio. Lo hace mediante valores que recorren un intervalo de números reales, a través de una variable llamada parámetro. Se considera cada coordenada de un punto como una función dependiente del parámetro.

VIDEO



Te invitamos a ver el siguiente video:

Espacios vectoriales

ACTIVIDAD INTEGRADORA 2

Desarrollo de problemática

Te invitamos a realizar la siguiente actividad:

Presiona el botón para descargar la actividad:

Presiona el botón para entregar la actividad:

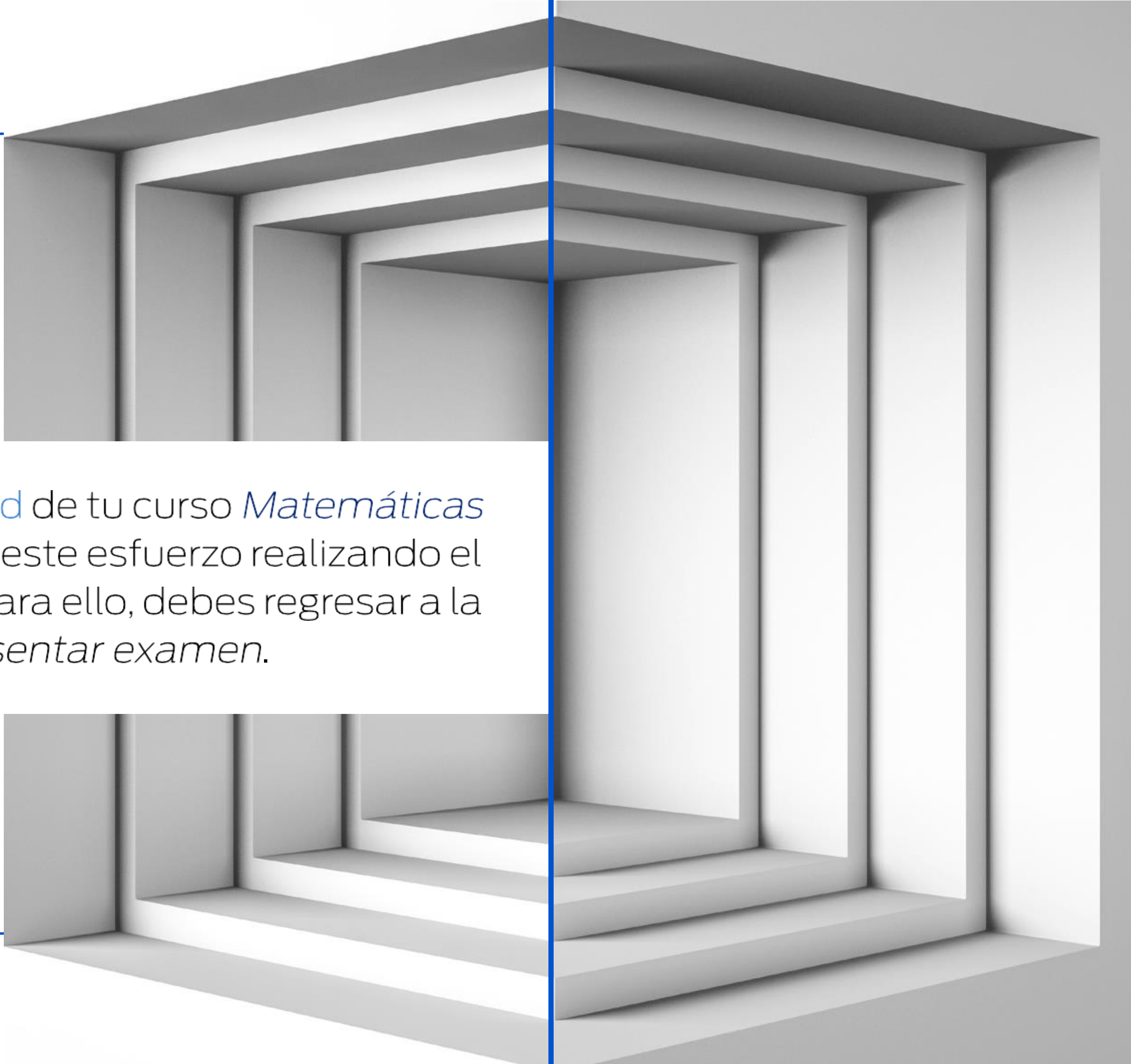
CONCLUSIÓN

Un espacio vectorial es el objeto básico de estudio en la rama de la Matemática llamada Álgebra Lineal. Llamado así porque los elementos de los espacios vectoriales se llaman vectores.

Sobre los vectores pueden realizarse dos operaciones: la multiplicación por escalares y la adición (una asociación entre un par de objetos). Estas dos operaciones se tienen que ceñir a un conjunto de axiomas que generalizan las propiedades comunes de las tuplas de números reales, así como los vectores.

¡Felicidades!

Acabas de concluir la tercera unidad de tu curso *Matemáticas Matriciales*. Te invitamos a finalizar este esfuerzo realizando el examen parcial correspondiente. Para ello, debes regresar a la pantalla principal y dar clic en *Presentar examen*.



UNIDAD 4

TRANSFORMACIONES LINEALES

TEMARIO

UNIDAD 4

TRANSFORMACIONES LINEALES

INTRODUCCIÓN

En esta cuarta unidad comprenderemos la importancia de las transformaciones lineales, las cuales intervienen en muchas situaciones dentro de las matemáticas. Por ejemplo, en Geometría, modelan las simetrías de un objeto; en Álgebra, se pueden usar para representar ecuaciones; en Análisis, sirven para aproximar localmente funciones, entre múltiples utilidades más.

COMPETENCIAS A DESARROLLAR

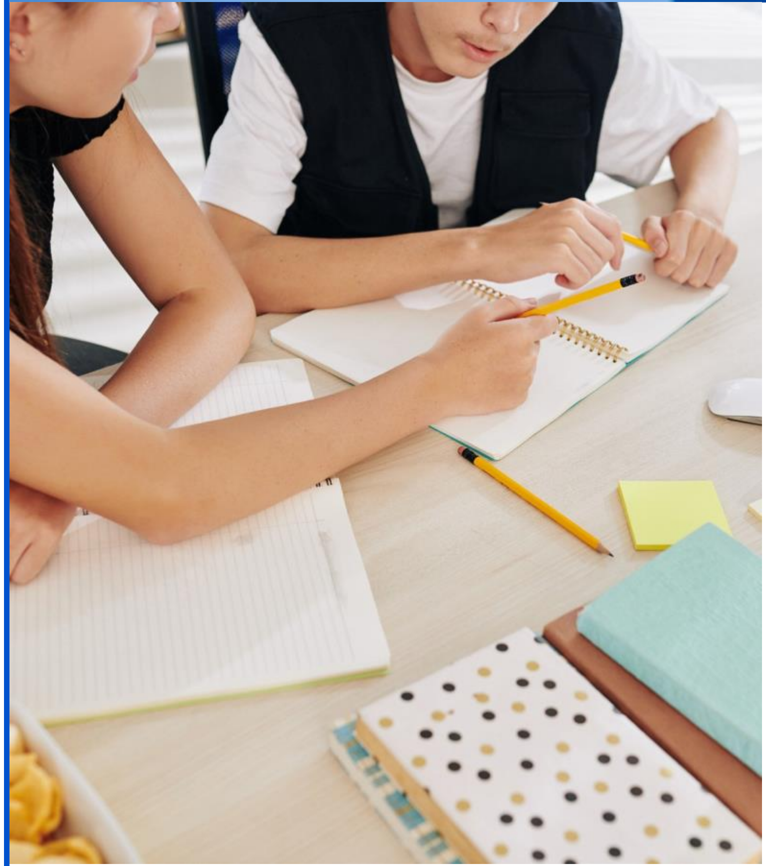
- El alumno identificará los conceptos fundamentales relacionados a las transformaciones lineales.

- El alumno comprenderá la asociación de cada transformación lineal con una matriz.

Para comenzar, recordemos la función real de una variable x, a saber: $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{A} \rightarrow \mathbb{R}$, la cual transforma cada número x del dominio de f (un subconjunto propio $A \subset \mathbb{R}$ o el propio $\mathbb{R}$) en exactamente un número $\boldsymbol{f(x)} \in \mathbb{R}$.

En otras palabras, podríamos decir que la función f **transforma** un vector x (puesto que $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial) en otro vector $y = f(x)$ de la imagen de f. Este significado se refleja mediante el uso de la notación:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$



De manera similar, una función real f de dos variables reales transforma vectores $(x, y)^t$ del dominio ($\mathbb{R}^2$ o un subconjunto de $\mathbb{R}^2$) en vectores de la imagen ($\mathbb{R}$ o un subconjunto de $\mathbb{R}$) y escribiremos:

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y)^t &\longmapsto f(x,y) \end{aligned}$$

En general, dados dos espacios vectoriales V y W sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$, una función T de V en W es una regla que asigna a cada vector $v \in V$ un único vector $w \in W$. Representamos esta función mediante: $\boldsymbol{T : V \to W}$.

Si una función: $T : V \to W$ satisface la siguiente propiedad:

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) \; para \; todo \; v_1, v_2 \in V \; y \; todo \; \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$$

Entonces, se denomina **transformación lineal**. También se la suele denominar con otros nombres como función lineal, aplicación lineal u homomorfismo. Equivalentemente, es directo comprobar que una función T es lineal si, y solo si, satisface las siguientes **propiedades**:

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) \; para \; todo \; v_1, v_2 \in V.$$
$$T(v_1) = \alpha T(v_1) \; para \; todo \; v_1 \in V \; y \; todo \; \alpha \in \mathbb{K}.$$

Una **función**, **aplicación** o **transformación** es un conjunto de operaciones que se realizan sobre un elemento de un espacio vectorial para convertirlo en un elemento de otro espacio vectorial W. Ejemplo:
Sean los espacios vectoriales:

$V = \{ax^2 + bx + c | a, b, c \in \mathbb{R}\}$ y $W = \{(a, b, c) | a, b, c \in \mathbb{R}\}$ y la transformación $T: V \to W$ definida por $T(ax^2 + bx + c) = (a + 1, b + c, 0)$.

Se observa fácilmente que cualquier elemento de V se convierte en un elemento de W tras aplicársele la transformación T. Por ejemplo, si: $\bar{v} = -2x^2 + x - 2$, al aplicarle la transformación T, se obtiene:

$$T(-2x^2 + x - 2) = (-2 + 1, 1 - 2, 0)$$
$$= (-1, -1, 0)$$

Por lo que el polinomio de V se convirtió en una terna ordenada perteneciente a W.

Al igual que las funciones tradicionales, las transformaciones tienen tres partes esenciales para existir: el dominio, el codominio y la regla de asignación, como se observa en la imagen:

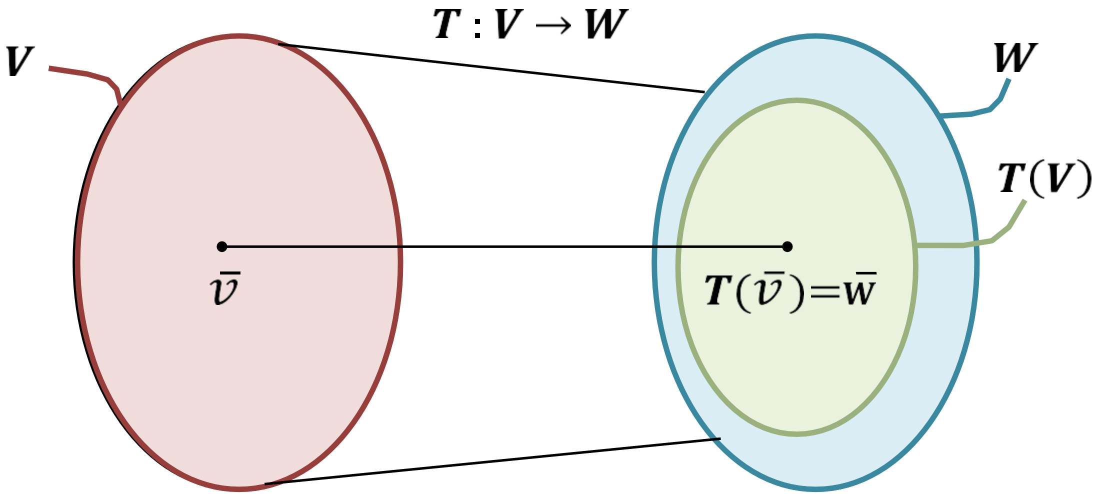


Diagrama de Venn de una transformación. V es el dominio, W el condominio, T la regla de asignación y $T\ (V)$ es el recorrido.

- **Dominio.** Es el espacio vectorial V al cual se le aplicará la transformación
- **Codominio.** Es el espacio W al cual pertenece el resultado de aplicar la transformación.
- **Regla de asignación.** Es la forma en la cual se debe manipular un elemento de V para convertirlo en un elemento de W.

Finalmente, $T(V)$ es el recorrido de la transformación, y es el subconjunto de W. Este se obtiene a partir de la aplicación de la transformación a cada elemento de V.

Dentro de las transformaciones, existe un subconjunto especial llamado núcleo. El núcleo es parte del dominio y es el conjunto de vectores de V cuya transformación bajo T tiene como único resultado al vector nulo del espacio W (codominio). Es decir, si se tiene una transformación $T: V \to W$ y existe un subconjunto $U \subset V$ tal que $T(U) = \vec{0}\ W$, entonces el subconjunto U es el **núcleo de la transformación** T.

Sean V, W espacios vectoriales sobre un cuerpo con $T: V \to W$ una transformación lineal. El núcleo de T denotado $\boldsymbol{KerT}$ es el conjunto:

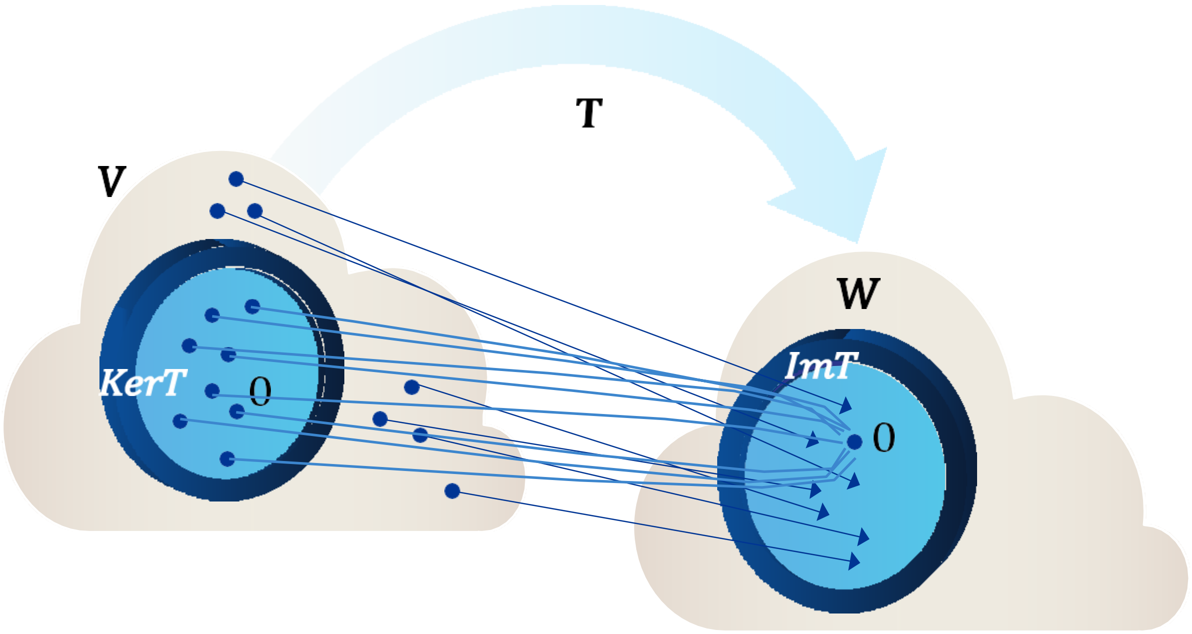
$$KerT = \{v \in V / T(v) = 0_w\}$$

(También se le llama núcleo y se anota $\boldsymbol{Nu\,T}$)

La imagen denotada $\boldsymbol{ImT}$, es el conjunto:

$$ImT = \{w \in W / w = T(v),\ para\ algún\ v \in V\}$$

Si $T : V \to W$ es una transformación lineal y 0 es el vector cero de *W*, entonces el conjunto de vectores $v \in V$, para los que $T(v) = \mathbf{0}$, se denomina **núcleo de *T*** o **espacio nulo de *T*** o **kérnel de *T***. Lo denotamos como $KerT$.



Imagen

La imagen de la transformación lineal $T : V \rightarrow W$ es un espacio vectorial. Recordemos que, cuando S es un subconjunto de un espacio vectorial, para demostrar que es un subespacio, basta con probar que es cerrado bajo las operaciones de suma y producto por escalares. En efecto, en este caso, tenemos que para todo: $w_1, w_2 \in Im(T)$ existen : $v_1, v_2 \in V$, tales que:

$$w_1+w_2=T(v_1)+T(v_2)=T(v_1+v_2)$$

Y, puesto que V es un espacio vectorial: $v_1 + v_2 \in V$; por tanto:

$T(v_1+v_2) \in Im(T) \Rightarrow w_1+w_2 \in Im(T)$ (cerrado bajo la suma).

Por otro lado: $\forall\, w \in Im(T)$, existe algún $v \in V$ tal que $T(v) = w$ y $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ tenemos:

$$\alpha\, w = \alpha\, T(v) = T(\alpha\, v)$$

Y como $\alpha\, v \in V$ resulta que:

$T(\alpha\, v) \in Im(T) \Rightarrow \alpha\, w \in Im(T)$ (cerrado bajo el producto por escalares).

En consecuencia, $Im(T)$ es un espacio vectorial

Ejemplo:

Hallar la imagen de la transformación lineal: **f : R**

3 → R definida como:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, -x_1 + x_2, 2x_1 - 2x_2 + x_3)$$

Por definición:

$$\begin{aligned} Im(f) &= \{y \in \mathbb{R}^3 / \exists\ x \in \mathbb{R}^3, f(x) = y\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^3 / \exists\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, (x_1 - x_2, -x_1 + x_2, 2x_1 - 2x_2 + x_3) = y\}. \end{aligned}$$

Entonces, un elemento de *y* pertenece a *Im(f)*, si y solo si, es de la forma:

$$\begin{aligned} y &= (x_1 - x_2, -x_1 + x_2, 2x_1 - 2x_2 + x_3) \\ &= (x_1, -x_1, 2x_1) + (-x_2, x_2, -2x_2) + (0, 0, x_3) \\ &= x_1.(1, -1, 2) + x_2.(-1, 1, -2) + x_3.(0, 0, 1) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$Im(f) = < (1, -1, 2), (-1, 1, -2), (0, 0, 1) > = < (1, -1, 2), (0, 0, 1) >$$

Núcleo

El núcleo de una transformación lineal $T: V \to W$ es un espacio vectorial Puesto que Ker (T) es un subconjunto del espacio vectorial V, basta con probar que es cerrado con respecto a la suma y al producto por escalares para garantizar que es un espacio vectorial (puesto que sería subespacio de V).

Consideremos: $u, v \in Ker\ (T)\ y\ \alpha \in \mathbb{R}$. Tenemos que probar que $u + v \in Ker\ (T)$ y que $\alpha u \in Ker\ (T)$. En efecto:

$$T(u+v) = T(u) + T(v) = 0 + 0 = 0 \Longrightarrow u + v \in Ker(T)$$
$$T(\alpha u) = \alpha T(u) = \alpha 0 = 0 \Longrightarrow \alpha u \in Ker(T)$$

Los teoremas anteriores permiten formular las siguientes definiciones (que utilizaremos con frecuencia en el futuro).

- La dimensión del espacio vectorial "imagen de la transformación lineal T" se denomina rango de T y se denota por $\boldsymbol{rg(T)}$.
- La dimensión del espacio vectorial "núcleo de la transformación lineal T" se denomina nulidad de T y se representa por $\boldsymbol{nul(T)}$.

Si $T: V \to W$ es una transformación lineal, y el espacio vectorial V tiene dimensión n, entonces:

$$rg(T) + nul(T) = n$$

Nótese que $rg(T)$ es la dimensión de la imagen de T (un subespacio vectorial en W); mientras que $nul(T)$ es la dimensión del núcleo de T (un subespacio vectorial en V).

Ejemplo:

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$.

Entonces:

$$Nu(f) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : f(x_1, x_2, x_3) = 0\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 0\} = < (0, 0, 1) >$$

La siguiente proposición nos da una manera de determinar si una transformación lineal es un monomorfismo, considerando simplemente su núcleo. Debido a:

Sea: f : V → W una transformación lineal. Entonces f es $monomorfismo \Longleftrightarrow Nu(f) = \{0\}$

Ahora, vamos a describir algunas propiedades básicas. Recordemos que los vectores $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ son de la forma:

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^t = v_1(1,0,\dots,0)^t + v_2(0,1,\dots,0)^t + \cdots + v_n(0,0,\dots,1)^t = v_1e_1 + v_2e_2 + \cdots + v_ne_n,$$

Donde $\boldsymbol{e_i}$ son los vectores de la base canónica. De manera natural se deduce lo siguiente:

Si A es una matriz $m \times n$ y $\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ está definida mediante $\boldsymbol{T(v) = Av}$ para todo $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, entonces T es una aplicación lineal.

Vamos a denotar como $\boldsymbol{T\_A}$ la transformación lineal T basada en la matriz A, definida mediante $\boldsymbol{T(v) = A\ v}$. Adicionalmente, podemos probar el resultado inverso: para cada transformación lineal. $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, existe una matriz A tal que $\boldsymbol{T(v) = A\ v}$.

Supongamos que $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal. Sea $(e\_1, \ldots, e\_n)$ la base canónica (ordenada) de $\mathbb{R}^n$ y sea:

$$A = (T(e_1), \ldots, T(e_n))$$

La matriz $m \times n$ cuyas columnas son los vectores $T(e_1), \ldots, T(e_n)$ de $\mathbb{R}^m$ Entonces, para cada $u \in \mathbb{R}^n$:

$$T(u) = A\, u$$

Dada una matriz A_{mxn} no necesariamente cuadrada, definiremos la función T_A que tiene como dominio a $\mathbb{R}^n$ y como codominio a $\mathbb{R}^m$; es decir, la función va de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ de la siguiente manera:

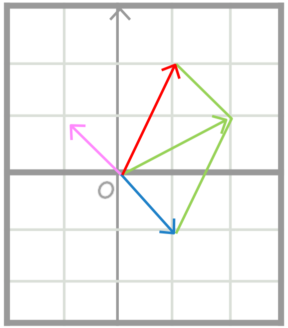
$$TA : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$x \mapsto A \cdot x$$

Es decir, la función consiste en multiplicar el vector *x*, que representa la entrada, por la matriz *A*.

La función T_A se conoce como la **transformación matricial asociada a *Mi***. Diremos que una función *F* que va de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ es una transformación matricial si existe una matriz A_{mxn} tal que:

$$F(x) = A \cdot x$$

Tomemos la matriz: $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$



La transformación matricial asociada a *A* va de $\mathbb{R}^2$ (porque la matriz tiene dos columnas) a $\mathbb{R}^2$ (porque la matriz tiene dos renglones).

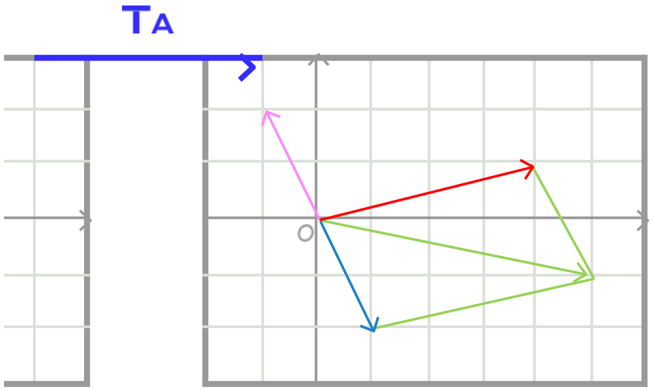
Solución:

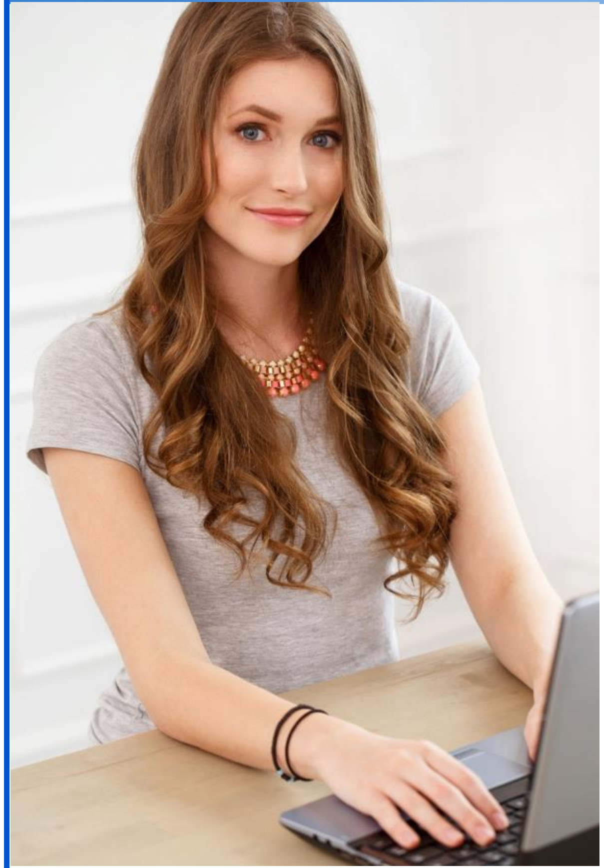
$$T_A = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T_A = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$T_A = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$T_A = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

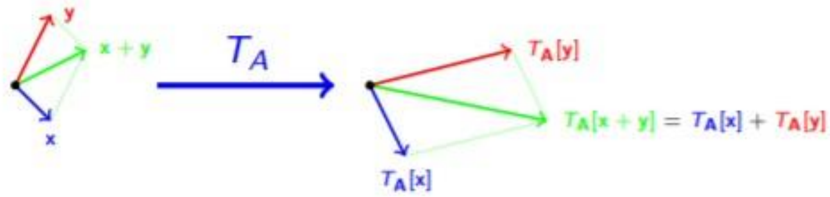




Si T_A es una transformación matricial, entonces:

- Se distribuye sobre una suma:

$$T_A[\mathbf{x}+\mathbf{y}] = T_A[\mathbf{x}] + T_A[\mathbf{y}]$$

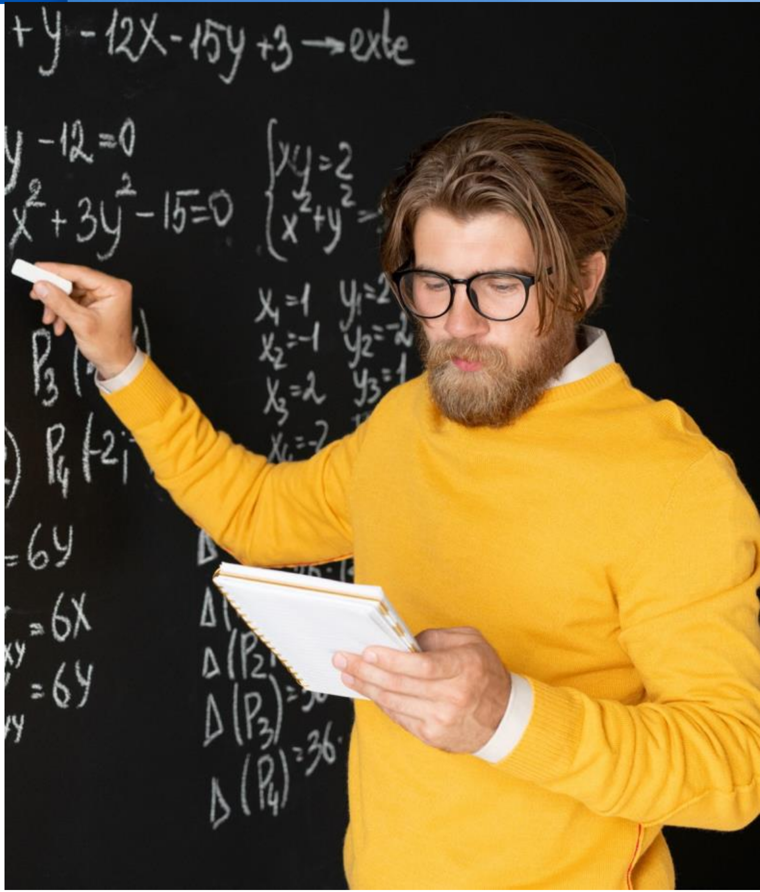


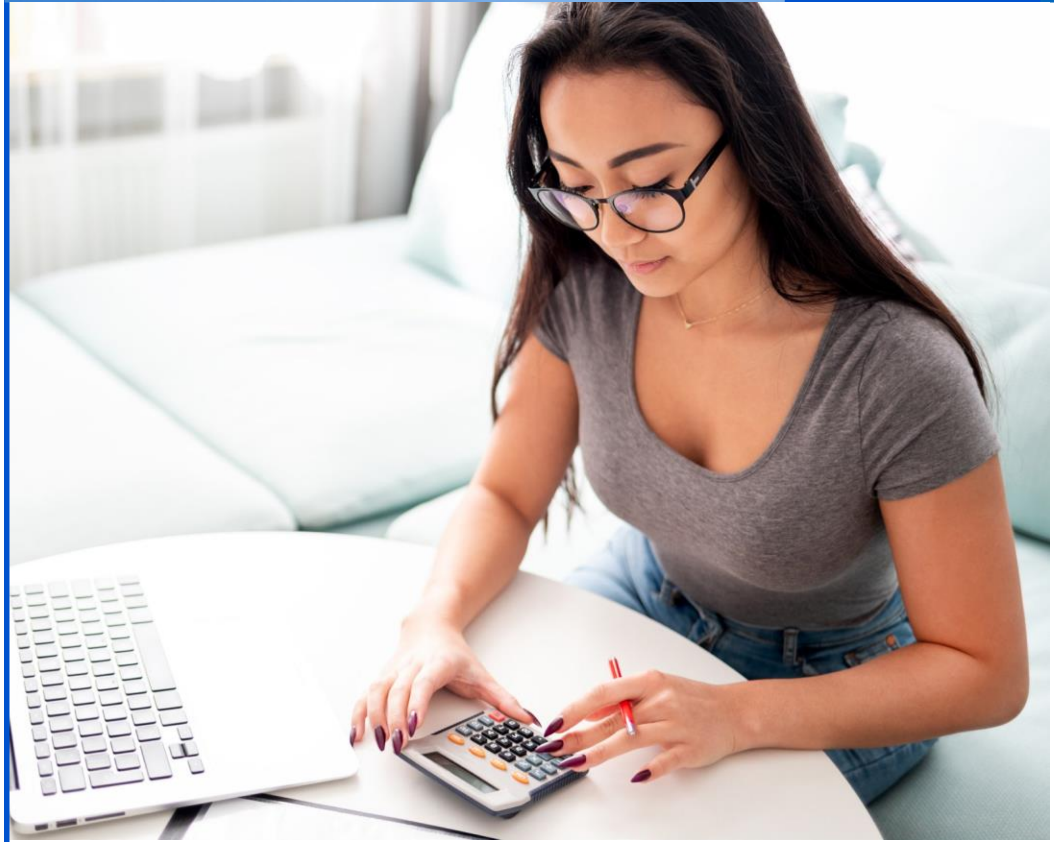
- Preserva proporcionalidad y colinealidad:

$$T_A[c\cdot\mathbf{x}] = c\cdot T_A[\mathbf{x}]$$

Como se vio en el ejemplo anterior, es posible asociar a una transformación lineal con una matriz.

Existen dos procedimientos válidos para obtener esta matriz. Sin embargo, debe recalcarse que uno de ellos funciona solo si la transformación estudiada es del tipo $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; el otro procedimiento aplica para cualquier transformación lineal referida a cualquier espacio vectorial.





Al tratar una transformación de la forma $T\colon \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ se puede establecer una matriz asociada con base en la **regla de asignación**, y viceversa.

Sea $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal entre los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ Existe una matriz asociada a T, tal que:

$$T(\bar{v})T = M(T)\bar{v}T$$

Donde $M(T)$ está compuesta de la siguiente manera:

$$M(T) = (T(\overline{b_1})^t, T(\overline{b_2})^t, T(\overline{b_3})^t, \dots, T(\overline{b_n})^t)$$

Siendo $\{\overline{b_1}, \overline{b_2}, \overline{b_3}, \dots, \overline{b_n}\}$ a base canónica del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$

Ejemplo:

Sea la transformación $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por:

$$T(x,y,z) = (x - y + z, -2x, -3y - 2z, x - y - z)$$

Si se utiliza la base canónica del dominio se obtienen las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (1,-2,0,1) \\ T(0,1,0) &= (-1,0,-3,-1) \\ T(0,0,1) &= (1,0,-2,-1) \end{aligned}$$

Esas transformaciones se acomodan en un arreglo matricial, utilizando cada vector como una columna de dicha matriz:

$$M(T) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz obtenida es la matriz asociada a la transformación lineal T. Esta puede utilizarse para obtener la imagen de cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ bajo la transformación T. Si se desease obtener la transformación del vector $\bar{v} = (1, -1, -4)$ bajo T, se puede utilizar la regla de asignación o la matriz asociada.

Por regla de asignación:

$$T(1, -1, -4) = (-2, -2, 11, 6)$$

Por matriz asociada:

$$T(1, -1, -4)^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Se puede observar que las transformaciones por ambos métodos son iguales

Así, fijadas las bases canónicas $B_{0,n}$ y $B_{0,m}$ de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente, a cada transformación lineal T le corresponde una única matriz, que denotamos por $\boldsymbol{A_T}$; y a cada matriz A le corresponde una única transformación lineal T_A.

En ciertas ocasiones, aun trabajando con aplicaciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, nos interesará usar bases distintas de las canónicas. Supongamos, por ejemplo, que necesitamos usar las bases $B=(b_1, b_2, ..., b_n)$ y $B'=(b'_1, b'_2, ..., b'_n)$ de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente. En ese caso, si el vector $u \in \mathbb{R}^n$ tiene coordenadas $[u]_B = (u_1, \ldots, u_n)^t$ respecto de la base $B=(b_1, b_2, ..., b_n)$ se cumple que:

$$u = u_1 b_1 + \cdots + u_n b_n = (b_1, \ldots, b_n)[u]_B \Rightarrow T(u) = (T(b_1), \ldots, T(b_n))[u]_B.$$

De esta manera, si expandimos los vectores $T(b_i) \in \mathbb{R}^m$ en la base B' se tiene que:

$$T(b_i) = t_{1i}b'_1 + t_{2i}b'_2 + \cdots + t_{mi}b'_m = (b'_1, b'_2, \dots, b'_m)\begin{pmatrix} t_{1i} \\ t_{2i} \\ \vdots \\ t_{mi} \end{pmatrix}$$

Y, por tanto:

$$T(u) = (b'_1, b'_2, \dots, b'_m)\begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{m1} & \cdots & t_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

La ecuación anterior implica que las coordenadas de *T(u)* en la base *B'* se obtienen sin más que multiplicar las coordendas de *u* en la base *B* por la matriz:

$$A_{T,B'B} = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{m1} & \cdots & t_{mn} \end{pmatrix}$$

El razonamiento anterior nos garantiza que, fijadas las bases *B* y *B'* de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, a cada transformación lineal le corresponde una única matriz $A_{(T,B'\,B)}$.

Además, según la demostración anterior, para determinar la matriz $A_{(T,B'\,B)}$ que representa la transformación T, es suficiente con conocer la imagen de los vectores de B en la base B', sean cuales sean dichas bases, pues con ello podremos determinar la imagen de cualquier vector.

Nótese también que bases distintas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ producirán distintas matrices que representan una misma transformación T. Cuando sea claro y no sea necesario especificar con respecto a qué bases estamos calculando la matriz, denotaremos esta simplemente como $\boldsymbol{A_T}$.

Afirmaciones

Si 0_{mxn} es la matriz cero de dimensión $m \times n$, entonces $\boldsymbol{T_{0_{mxn}}}$ es la transformación lineal nula 0 que asigna a cada $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ el vector cero de $\mathbb{R}^m$.

Si $n = m$ e $\boldsymbol{I_n}$ es la matriz identidad de dimensión $n \times n$, entonces $\boldsymbol{T_{I_n}}$ es la transformación lineal identidad $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que le asigna a cada vector él mismo.

Ejemplo:

Consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Y la transformación lineal asociada $T_A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_1 - 2u_3 \\ 4u_1 + u_2 - u_3 \end{pmatrix}$$

El núcleo de T_A viene dado por:

$$\ker(T_A) = \{u = (u_1, u_2, u_3)t \in \mathbb{R}^3 : A\,u = 0\}$$

Este conjunto incluye todos los vectores que satisfacen: $2u_1 - 2u_3 = 0$ y $4u_1 + u\_2 - u_3 = 0$. Al resolver este sistema (compatible indeterminado) resulta que el núcleo es:

$$\ker(T_A) = \{\alpha(1, -3, 1)t \colon \alpha \in \mathbb{R}$$

Que, obviamente, es un espacio vectorial de dimensión 1, generado por el vector $(1, -3, 1)^t$.

La imagen de T_A es:

$$Im(T_A) = \{v = (v_1, v_2)t \in \mathbb{R}^2 \colon v_1 = 2u_1 - 2u_3, v_2 = 4u_1 + u_2 - u_3, u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}$$

Su dimensión se calcula fácilmente como:

$$rg(T_A) = n - nul(T_A) = 3 - 1 = 2$$

Como $Im(T_A) \subset \mathbb{R}^2$, y tiene la misma dimensión que este, se tiene que:

$$Im(T_A) = \mathbb{R}^2$$

Finalmente, obsérvese que el rango de la matriz A es también 2.

Ejemplo:

Sea $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por:

$$T\left((u_1, u_2, u_3)^t\right) = (u_1 + u_2 + u_3, u_1 - u_3, u_1 + 2u_2 - 3u_3)^t$$

Puesto que:

$$T(e_1) = (1,1,1)^t;\ T(e_2) = (1,-1,2)^t;\ T(e_3) = (1,0,-3)^t$$

Respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$, se tiene que:

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que las componentes de la matriz A_T, por columnas, son los coeficientes de u_1, u_2, u_3 en la definición de T.

Teorema 1

Sea la transformación lineal dada por:

$$T\big((u_1, u_2, u_3)^t\big) = (u_1 + u_2 + u_3, u_1 - u_3, u_1 + 2u_2 - 3u_3)^t$$

Si $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es la transformación lineal asociada a la matriz A de dimensión $m \times n$, entonces:

1. $\ker(TA) = N(A)$
2. $Im(TA) = C(A)$
3. $rg(TA) = rg(A)$
4. El máximo valor posible para $\mathbf{rg}(T_A)$ es igual al mín (m, n).

Teorema 2

Si $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es la transformación lineal asociada a la matriz A de dimensión $m \times n$, entonces:

1. $\ker(T_A) = N(A)$
2. $Im(T_A) = C(A)$
3. $rg(T_A) = rg(A)$

Si A es $\mathbf{u}T_A$*na* matriz $n \times n$ y $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es la correspondiente transformación lineal, las siguientes propiedades son equivalentes:

1. A es no-singular (tiene inversa).
2. La imagen de T_A es $\mathbb{R}^n$

Representación Matricial de una Transformación Lineal Arbitraria

Sean los espacios vectoriales U y V sobre $\mathbb{R}$, de dimensiones respectivas n y m, y bases (ordenadas) respectivas $B_U = (u_1, \ldots, u_n)$ y $B_V = (v_1, \ldots, v_m)$. Sabemos que todo vector de U puede ser representado de manera única mediante un vector columna de $\mathbb{R}^n$ cuyos componentes son las coordenadas de dicho vector con respecto a la base B_U. Análogamente, los vectores de V tienen representación única en la base B_V como un vector de $\mathbb{R}^m$.

Consideremos la aplicación lineal $T : U \to V$. Para cada vector u_i de la base B_U, su imagen con respecto a *T* será un vector $T(u_i) \in V$, que puede ser representado con respecto a la base B_V mediante:

$$T(u_i) = t_{1i}v_1 + t_{2i}v_2 + \ \dots + t_{mi}v_m = (v_1, v_2, \dots, v_m)\begin{pmatrix} t_{1i} \\ t_{2i} \\ \vdots \\ t_{mi} \end{pmatrix}$$

O como el vector de coordenadas con respecto a B_V dado por $[T(u_i)]_{BV} \ = (t_{1i}, t_{2i}, \cdots, t_{mi})^t$ De esta manera, la transformación lineal *T* tiene una representación matricial relativa a las bases B_U y B_V dada por la siguiente matriz *n × m*:

$$A_{T,B_VB_U} = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{m1} & \cdots & t_{mn} \end{pmatrix}$$

Obsérvese que igual que sucedía en el caso de los espacios $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, la i-ésima columna de la matriz A_{T,B_VB_U} viene dada por las coordenadas respecto a B_V de la imagen por *T* de u_i.

Si *U = V* y usamos la misma base *B* para ambos espacios vectoriales, entonces podemos aligerar la notación definiendo $A_{T,B} = A_{T,B\,B}$. Por lo que:

Sean T U → V una transformación lineal y A_{T,B_VB_U} su representación matricial relativa a las bases B_U y B_V Si representamos los vectores de *U* y *V* como vectores columna respecto a dichas bases se tiene que:

$$\boxed{\overbrace{[T(u)]_{B_V}}^{\text{rep. coordenadas}} = \underbrace{A_{T,B_VB_U}}_{\text{rep. matricial}} \overbrace{[u]_{B_U}}^{\text{rep. coordenadas}}, \quad \forall\, u \in U.}$$

Consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_1$ dada por $T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_1 + a_2$ Consideremos las bases $B_1 = (1, x, x^2)$ y $B'_1 = (1, 1 + x, 1 + x + x2)$ de $\mathbb{P}_2$ y $B_2 = (1, x)$ y $B'_2 = (1 - \mathrm{x}, 1 + \mathrm{x})$ de $\mathbb{P}_1$.

La representación matricial de T respecto a las bases (canónicas) B_1 y B_2 es:

$$A_{T,B_V B_U} = ([T(1)])_{B_2}, ([T(x)])_{B_2}, ([T(x^2)])_{B_2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, podemos escribir las imágenes de los vectores de la base B'_1 respecto a la base B'_2 como sigue:

$$T\,(1)=0=0(1-x)+0(1+x)$$

$$T(1+x)=1=1/2\,(1-x)+1/2\,(1+x)$$

$$T(1+x+x\hat{}2\,)=1+x=0(1-x)+1(1+x)$$

Es decir:

$$[T(1)]_{B'_2} = (0,0)^t, [T(1+x)]_{B'_2} = \frac{1}{2}(1,1)^t, [T(1+x+x^2)]_{B'_2} = (0,1)^t$$

En consecuencia, la representación matricial de T respecto a las bases $B\acute{}_1$ y $B\acute{}_2$, está dada por:

$$A_{T,B_V B_U} = ([T(1)]_{B'_2}, [T(1+x)]_{B'_2}, [T(1+x+x^2)]_{B'_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, enunciamos las siguientes **propiedades**, que nos permitirán realizar ciertas operaciones con las transformaciones lineales utilizando simplemente operaciones equivalentes entre las matrices que las representan.

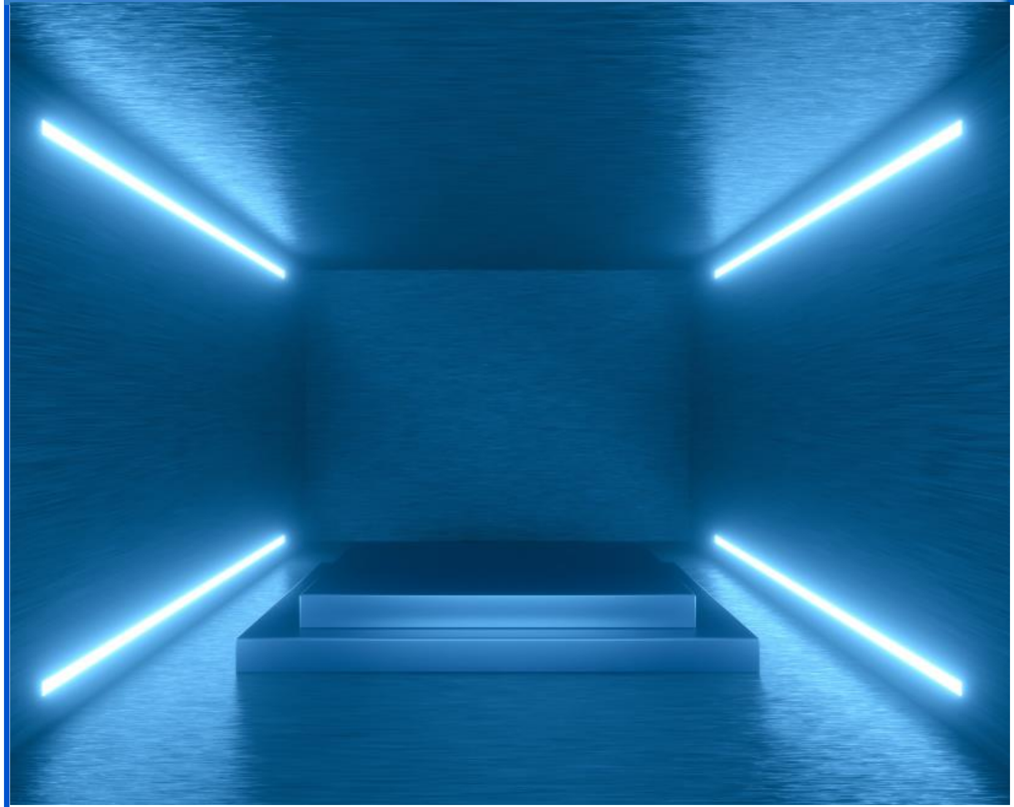
- Si T_1 y T_2 son transformaciones lineales representadas (respecto a las mismas bases) por las matrices A_{T_1} y A_{T_2} respectivamente, entonces la transformación lineal $T_1 + T_2$ está representada por $A_{T_1} + A_{T_2}$.

- Si T es una transformación lineal representada por la matriz A_T y $\alpha \in \mathbb{K}$ es un escalar, entonces la transformación lineal $\alpha\, T$ está representada por αA_T.

- Si $T_1 \colon U \to V$ y $T_2 \colon V \to W$ son transformaciones lineales representadas por A_{T_1} y A_{T_2}, entonces $T_1 \cdot T_2$ está representada por el producto $A_{T_1} \cdot A_{T_2}$.

- Una transformación lineal T es invertible si, y solo si, la matriz asociada A_T es invertible (independientemente de las bases escogidas para representar T). En tal caso, la matriz asociada a T^{-1} en las mismas bases es $A_T{}^{-1}$.

VIDEO



Te invitamos a ver el siguiente video:

Transformaciones lineales

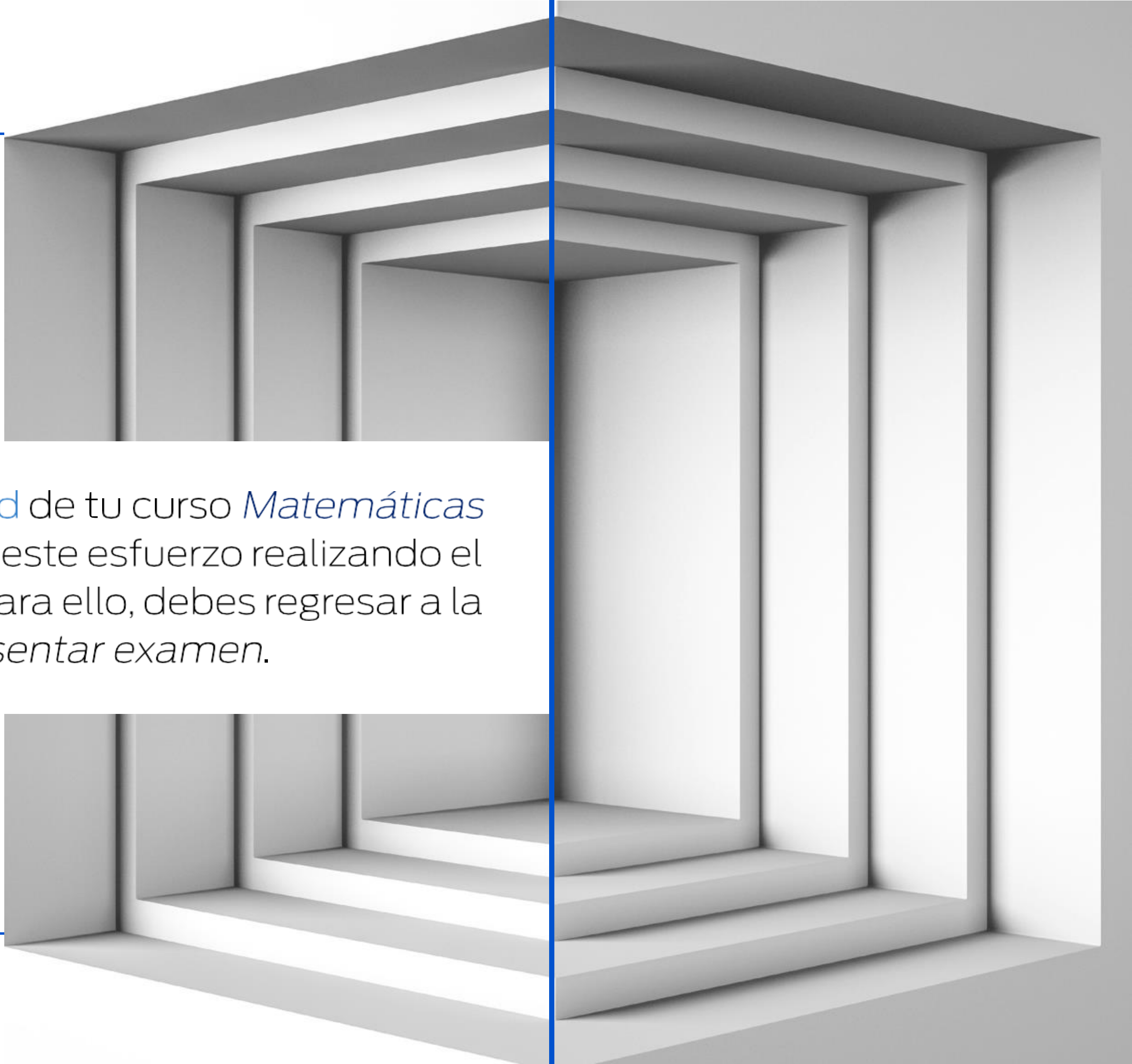
CONCLUSIÓN

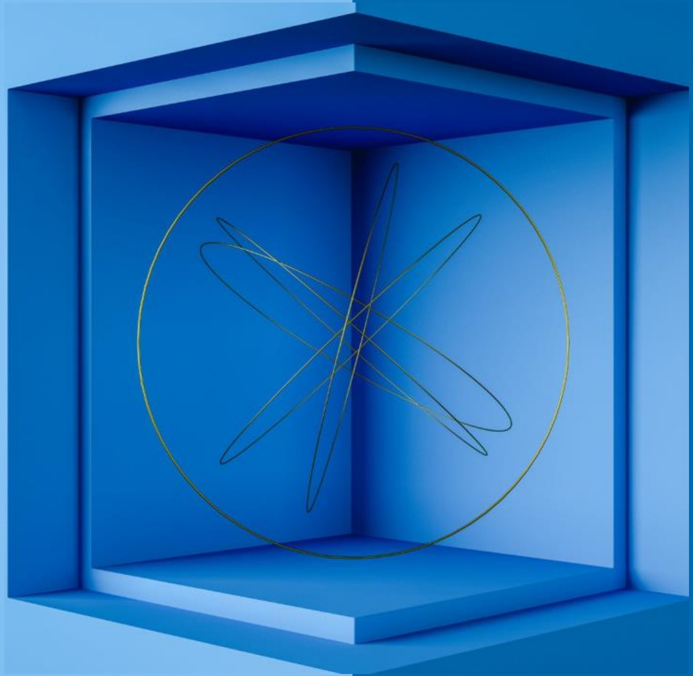
Las transformaciones lineales constituyen una de las áreas más importantes de estudio en la matemática. Los matemáticos describen las transformaciones lineales por un conjunto de reglas y relaciones pero, más simplemente, como un tipo de regla que, cuando se aplica, cambia el tamaño o la dirección de un vector. Por ejemplo, las transformaciones lineales convierten una pantalla de pequeños cuadrados de color en una imagen en tres dimensiones.

Las transformaciones lineales tienen aplicaciones importantes en el mundo de los gráficos por computadora. Aunque los matemáticos observan una transformación lineal como una manipulación de vectores en un plano, los diseñadores gráficos lo miran como una manipulación de píxeles en una pantalla de una computadora. Cada vector representa un píxel de una imagen. Esto permite al diseñador utilizar una transformación lineal para agrandar, ampliar o girar los píxeles (uno por uno) hasta que la imagen siga su deseo. Los programadores usan las transformaciones lineales para hacer muchas de las imágenes tridimensionales y de computadora que disfrutas en línea.

¡Felicidades!

Acabas de concluir la cuarta unidad de tu curso *Matemáticas Matriciales*. Te invitamos a finalizar este esfuerzo realizando el examen parcial correspondiente. Para ello, debes regresar a la pantalla principal y dar clic en *Presentar examen*.

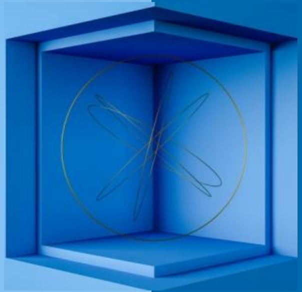




BIBLIOGRAFÍA

- Benavides W. (2012). *Manual de Matrices y Determinantes.* Ecuador: Editorial Universitaria Abya-Yala.
- Del Valle J. (2011). *Álgebra Lineal Para Estudiantes De Ingeniería Y Ciencias.* México: Mc Graw Hill.
- Lang, S. (1986). *Álgebra Lineal.* México: Sistemas Técnicos de Edición.
- Rincón, H. A. (2002). *Álgebra Lineal*. México: Las Prensas de Ciencias.

BIBLIOGRAFÍA



- http://ocw.uc3m.es/matematicas/algebra-lineal/teoria/algebra_teoria_06.pdf
- https://gc.scalahed.com/recursos/files/r157r/w13173w/AlgLineal_unidad%208.pdf
- http://cb.mty.itesm.mx/ma3002/materiales/ma3002-transformacion-lineal.pdf
- http://ocw.uc3m.es/matematicas/algebra-lineal/teoria/algebra_teoria_05.pdf
- http://mate.dm.uba.ar/~jeronimo/algebra_lineal/AlgebraLineal.pdf
- https://www.uv.mx/personal/aherrera/files/2014/08/21c.-TRANSFORMACIONES-LINEALES-3.pdf
- https://hopelchen.tecnm.mx/principal/sylabus/fpdb/recursos/r101283.PDF

PROYECTO FINAL

Conclusiones

Te invitamos a realizar el proyecto final:

Presiona el botón para descargar el proyecto final:

Presiona el botón para entregar el proyecto final: