



دانشکده علوم ریاضی

# الگوریتم پیشرفته

۲۶ آبان

دکتر حامد فهیمی



دانشگاه فردوسی مشهد

## کلاس‌های پیچیدگی و مسائل تصمیم‌ناپذیر

تاکنون الگوریتم‌های کارآمدی برای طیف وسیعی از مسائل توسعه داده‌ایم، بلکه برای چنین مسائلی دسته‌بندی‌های مشخصی را نیز ارائه کرده‌ایم. اما اگر با مسائلی برخورد کرده‌ایم که نمی‌دانیم چگونه حل می‌شوند، هیچ تلاشی نیز روی دسته‌بندی یا توصیف چنین مسائلی نکرده‌ایم. بلکه مسائلی وجود دارند که هر چقدر زمان و حافظه برای آن‌ها صرف کنیم، توسط هیچ کامپیوتری قابل حل نیستند (تصمیم‌ناپذیر یا Undecidable).

### مسئله توقف (Halting Problem - Turing 1936)

آیا یک برنامه کامپیوتری دلخواه و ورودی دلخواهی که به آن داده شده باشد، آیا این برنامه روی ورودی متوقف خواهد شد یا تا بی‌نهایت روی آن کار خواهد کرد؟

- الگوریتم با زمان چندجمله‌ای:  $O(n^k)$  - polynomial

## الگوریتم‌های چندجمله‌ای و رده‌بندی مسائل

- الگوریتم با زمان چندجمله‌ای روی ورودی به اندازه  $n$ ، الگوریتمی است که زمان اجرای بدترین حالت آن به ازای مقدار ثابتی مانند  $k > 0$ ، برابر  $O(n^k)$  می‌باشد.

یکی از مزایای آشنایی با چنین تعریفی، ملموس بودن آن است که به ما این فرصت را می‌دهد که به صورت ریاضیاتی ثابت کنیم برخی از مسائل را نمی‌توان به طور کارآمد (در زمان چندجمله‌ای) حل نمود.

به تدریج با بررسی مسائلی که حل آن‌ها در زمان چندجمله‌ای امکان‌پذیر نبود، مشخص شد طیف وسیعی از مسائل محاسباتی در حوزه‌های مختلف (بهبودسازی، هوش مصنوعی، ترکیبیاتی و...) به طور مشابهی از لحاظ محاسباتی برای حل دشوار هستند. از آن زمان تاکنون، این سوال مهم که آیا این مسائل به طور چندجمله‌ای قابل حل هستند یا خیر، بدون پاسخ مانده است. در واقع در حال حاضر ما با هزاران مسئله این‌چنینی هستیم که الگوریتم چندجمله‌ای برای‌شان نیافته‌ایم و نه توانسته‌ایم ثابت کنیم چنین الگوریتم‌هایی حتی برای یکی از آن‌ها وجود ندارند.

## مسائل NP-کامل (NP-Complete)

دسته بزرگی از این مسائل در یک منطقه خاکستری (Black Box) در نظر گرفته می‌شوند و ثابت شده است که با هم معادل هستند؛ به این معنا که وجود یک الگوریتم چندجمله‌ای برای حداقل یکی از آن‌ها، وجود الگوریتم چندجمله‌ای برای همه آن‌ها را نتیجه می‌دهد. به این مسائل **NP-کامل** می‌گویند.

جنبه هیجان‌انگیز این مسائل (NP-کامل) آن است که ظاهر بعضی از آن‌ها طوری است که به نظر می‌رسد الگوریتم زمان چندجمله‌ای دارند، اما در عمل این ثابت نشده است:

- مثال ۱:** مسئله پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر در یک گراف جهت‌دار:  $O(V + E)$  (در مرتبه چندجمله‌ای)
- مثال ۲:** مسئله پیدا کردن بلندترین مسیر در یک گراف: **NP-کامل**

## تکنیک کاهش (Reduction)

اکنون با آشنایی با مفهوم کاهش مسائل به یکدیگر، می‌خواهیم به طور رسمی عبارتی مانند «مسئله  $X$  حداقل به اندازه مسئله  $Y$  سخت است» بیان کنیم. در حقیقت نشان خواهیم داد اگر یک مسئله خاص  $X$  به اندازه مسئله دیگر  $Y$  سخت است، با این استدلال که اگر ما جعبه سیاهی داشتیم که قادر بود  $X$  را حل کند، آنگاه می‌توانستیم  $Y$  را نیز حل کنیم.

### تعریف کاهش:

مسئله تصمیم  $A$  را در نظر می‌گیریم که می‌خواهیم در زمان چندجمله‌ای آن را حل کنیم. حال فرض کنیم مسئله تصمیم دیگری مانند  $B$  داریم که

می‌دانیم چگونه باید در زمان چندجمله‌ای حل شود. برای انجام این کار باید روالی داشته باشیم که هر الگوی  $\alpha$  از مسئله  $A$  را به الگوی  $\beta$  از مسئله  $B$  با ویژگی‌های زیر تبدیل کند:

- تبدیل در زمان چندجمله‌ای انجام شود.
  - جواب‌ها یکسان هستند؛ یعنی جواب  $\alpha$  «بله» است اگر و تنها اگر جواب  $\beta$  «بله» باشد. چنین روالی را **کاهش زمان چندجمله‌ای** می‌نامیم.
- در حقیقت مفهوم کاهش در مباحث درس ما برای نشان دادن این استفاده می‌شود که ثابت کنیم یک مسئله از مسئله دیگر سخت‌تر است یا آسان‌تر نیست. با استفاده از این تعریف به این طریق عمل می‌شود:
- به ازای نمونه  $\alpha$  از مسئله  $A$  با استفاده از الگوریتم کاهش زمان چندجمله‌ای، آن را به نمونه  $\beta$  از  $B$  تبدیل کنیم.
  - الگوریتم تصمیم‌گیری با زمان چندجمله‌ای مربوط به  $B$  را روی  $\beta$  اجرا کنیم.

## مثال‌های تکمیلی و نمونه‌های NP-کامل

- مثال:** مسئله پیدا کردن دور اویلری در یک گراف در مقابل پیدا کردن دور همیلتونی.
  - دور اویلری:  $O(E)$
  - دور همیلتونی: **NP-کامل**
- مثال:** مسئله 2CNP (زمان چندجمله‌ای) در مقابل SAT-3 (مسئله **NP-کامل**).

## مسئله صدق‌پذیری (Satisfiability - SAT)

یک فرمول بولی حاوی متغیرهایی با مقادیر 0 و 1، عملگرهای بولی مثل  $\wedge$  (و)،  $\vee$  (یا) و  $\neg$  (نقیض) به همراه پرانتزها می‌باشد. فرمول بولی در صورت صدق‌پذیر گفته می‌شود که تخصیص‌هایی از مقادیر 0 و 1 به متغیرهایش وجود داشته باشد به طوری که ارزیابی کل عبارت به 1 شود.

- 2-CNF:** در زمان چندجمله‌ای قابل حل است.
- 3-CNF:** مسئله **NP-کامل** است.