الگوریتم پیشرفته

۱۰ آذر

دکتر حامد فهیمی

دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکده علوم ریاضی

۱. مفاهیم پایه و تعاریف

- **مهارنشدنی بودن مسائل (Intractability):**
مسائلی که هیچ الگوریتم زمان چندجمله‌ای برای حل آن‌ها شناخته نشده است و به‌طور شهودی با افزایش اندازه ورودی، زمان حل آن‌ها به‌سرعت رشد می‌کند.
- **تعاریف منطقی (بر اساس کتاب کلینبرگ):**
  - **Literal (لیترال):** یک متغیر بولی مانند x_i یا نقیض آن $\sim x_i$.
  - **Clause (بند):** مجموعه‌ای از لیترال‌ها که با عملگر «یا» ($\vee$) به هم متصل شده‌اند.
- **آشنایی با مسائل NP:**
مجموعه‌ای از مسائل تصمیم که برای آن‌ها، اگر پاسخ «بله» باشد، یک **گواهی (Certificate)** وجود دارد که در زمان چندجمله‌ای توسط یک **Verifier** قابل بررسی است.
- **تعریف گواهی (Certificate):**
یک الگوریتم B، گواهی‌دهنده مسئله X است اگر:
i. B یک الگوریتم زمان چندجمله‌ای باشد که روی ورودی‌های s و c اجرا شود.
ii. تابع چندجمله‌ای p وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $s \in X$، گواهی‌ای مانند c با شرط $|c| \le p(|s|)$
وجود داشته باشد و $B(s, c) = yes$ شود.
- **رابطه کلاس‌ها:** $P \subseteq NP$.
اگر برای یک مسئله NP-کامل الگوریتم زمان چندجمله‌ای پیدا شود، نتیجه می‌گیریم که $P = NP$.
- **کاهش‌پذیری چندجمله‌ای (Polynomial Reduction):**
اگر مسئله Y در زمان چندجمله‌ای به مسئله X کاهش یابد، آن را به‌صورت $Y \le_p X$ نشان می‌دهیم.
- **ویژگی تعدی (Transitivity):**
اگر $Y \le_p Z$ و $X \le_p Y$، آنگاه $X \le_p Z$.
- **تعریف NP-Complete:**
مسئله X را NP-کامل می‌نامیم اگر:
i. $X \in NP$
ii. برای هر $Y \in NP$ داشته باشیم $Y \le_p X$

- **اولین مسئله NP-کامل:**
  مسئله **SAT** اولین مسئله‌ای است که NP-Complete بودن آن اثبات شد (قضیه کوک–لوین).

---

۲. زنجیره کاهش و اثبات از طریق SAT-3

در اثبات NP-Complete بودن بسیاری از مسائل، از ساختارهای کمکی موسوم به **Gadget** (طبق کتاب کلینبرگ) استفاده می‌شود:

$$\text{3-SAT} \le_p \text{Independent Set} \le_p \text{Vertex Cover} \le_p \text{Clique} \le_p \text{Set Packing}$$

- **SAT-3:**
  نسخه‌ای از SAT که در آن هر Clause دقیقاً شامل ۳ لیترال است.
- **Independent Set:**
  یافتن مجموعه‌ای از رئوس بدون یال مشترک.
- **Clique:**
  یافتن زیرمجموعه‌ای از رئوس که همگی به یکدیگر متصل‌اند (مسئله متمم Independent Set).
- **ایده اصلی:**
  یک فرمول SAT-3 قابل ارضا است **اگر و تنها اگر** گراف متناظر دارای یک مجموعه مستقل به اندازه تعداد Clauseها باشد.

---

۳. فرمول منطقی و ساختار گراف (Gadget Construction)

در کاهش SAT-3 به Independent Set، برای هر Clause یک Gadget گرافی ساخته می‌شود:

- **فرمول منطقی نمونه:**

$$(x\_1 \lor \sim x\_2 \lor \sim x\_3) \land (x\_3 \lor x\_2 \lor x\_4) \land (\sim x\_1 \lor \sim x\_3 \lor \sim x\_4)$$

- **قوانین ساخت گراف:**
  i. برای هر Clause یک مثلث (Clique سه‌تایی) ساخته می‌شود.
  ii. رأس‌ها با لیترال‌های داخل Clause برچسب‌گذاری می‌شوند.
  iii. بین لیترال‌های متناقض (مثلاً x_i و $\sim x_i$) در مثلث‌های مختلف یال اضافه می‌شود.
- **نتیجه:**
  وجود یک مجموعه مستقل با اندازه k (تعداد Clauseها)
  ↔ وجود یک مقداردهی درست برای فرمول SAT-3.

---

۴. مسئله زمان‌بندی فیلم تعمیم‌یافته (General Movie Scheduling)

مدل‌سازی یک مسئله واقعی و اثبات NP-Complete بودن آن:

- **نسخه ساده:**

اگر هر فیلم فقط یک بازه زمانی داشته باشد، مسئله با الگوریتم حریصانه حل شده و در کلاس P قرار می‌گیرد.

- **نسخه تعمیم‌یافته (سخت):**

اگر هر فیلم چندین بازه زمانی ممکن داشته باشد و بخواهیم بیشترین تعداد فیلم بدون تداخل را انتخاب کنیم، مسئله NP-Complete می‌شود.

- **مدل‌سازی گرافی:**
  - هر «فیلم در یک بازه خاص» ↔ یک رأس
  - اگر دو انتخاب تداخل زمانی داشته باشند یا متعلق به یک فیلم باشند ↔ یال
- **تحلیل:**

مسئله به Independent Set کاهش می‌یابد و از آن‌جا به Vertex Cover و Set Packing مرتبط می‌شود.