

روش حسابداری (Accounting Method)

در این ارائه، روش حسابداری در تحلیل سرشکن را بر اساس فصل تحلیل سرشکن از کتاب **CLRS** (**Introduction to Algorithms, 4th Edition**) مرور می‌کنیم. تمرکز روی درک شهودی مفهوم اعتبار (Credit) و نحوه طراحی هزینه‌ی سرشکن برای انواع عملیات است.

مقدمه

روش حسابداری یکی از سه روش استاندارد در تحلیل سرشکن است. هدف اصلی آن تخصیص یک «هزینه سرشکن» (amortized cost) به هر نوع عملیات است به طوری که برای هر عملیات، اعتبار (credit) کافی برای پوشش هزینه واقعی عملیات‌های پرهزینه که در آینده رخ می‌دهند، نگه داشته شود. در روش حسابداری با یک حساب اعتباری ذهنی کار می‌کنیم که از عملیات‌های ارزان‌تر مقداری اضافه دریافت و در حساب ذخیره می‌شود؛ سپس عملیات‌های گران را از این حساب پرداخت می‌کنیم.

۱. ایده کلی

در روش حسابداری، برای هر عملیات هزینه‌ای سرشکن شده (\hat{c}) تعریف می‌کنیم که ممکن است با هزینه‌ی واقعی (c) آن متفاوت باشد. اگر \hat{c} از c بیشتر باشد، مازاد آن به صورت اعتبار ذخیره می‌شود و در آینده برای پوشش عملیات پرهزینه‌تر مصرف می‌گردد. هدف این است که مجموع هزینه‌های سرشکن همیشه هزینه‌های واقعی را پوشش دهد و هیچ‌گاه اعتبار منفی نشود:

$$\sum \hat{c}_i \geq \sum c_i \quad \text{برای هر از توالی عملیات.}$$

تحلیل زمانی عملیات در روش حسابداری بر پایه‌ی انتخاب درست مقادیر \hat{c} است تا بتوانیم برای کل توالی n عمل، مجموع هزینه‌ی واقعی را در حد $O(n)$ نگه داریم.

۲. مثال اول — پشته با **PUSH**, **POP** و **MULTIPOP**

فرض کنید پشته‌ای داریم با عملیات‌های زیر:

- **PUSH()** — افزودن یک عنصر (هزینه‌ی واقعی = 1)
- **POP()** — حذف یک عنصر (هزینه‌ی واقعی = 1)
- **MULTIPOP(S, k)** — حذف تا k عنصر (هزینه‌ی واقعی = $\min(k, |S|)$. که $|S|$ اندازه پشته و k تعداد عناصر مدنظر برای حذف میباشد)

انتخاب هزینه‌ی سرشکن

در روش حسابداری، انتخاب می‌کنیم:

$$\hat{c}_{\text{PUSH}} = 2, \hat{c}_{\text{POP}} = 0, \hat{c}_{\text{MULTIPOP}} = 0$$

در هر PUSH ، یک واحد برای کار واقعی خروج می‌شود و یک واحد به عنوان اعتبار روی عنصر ذخیره می‌گردد. هنگامی که عنصر با POP یا در MULTIPOP حذف می‌شود، هزینه‌ی واقعی حذف (۱) از اعتبار از قبل ذخیره شده‌ی همان عنصر پرداخت می‌شود.

در نتیجه، مجموع هزینه‌ی سرشکن در n عمل حداکثر برابر $2n$ (اگر فقط PUSH داشته باشیم) است، و چون هزینه‌ی واقعی حداکثر به اندازه‌ی آن است، میانگین هزینه‌ی هر عمل برابر (1) می‌شود.

| توضیح | هزینه سرشکن | هزینه واقعی | عملیات |
|-----------------------------------------|-------------|-------------|-----------------|
| ۱ برای کار + ۱ ذخیره روی عنصر | 2 | 1 | PUSH |
| هزینه از اعتبار عنصر پرداخت می‌شود | 0 | 1 | POP |
| هر حذف از اعتبار خود عنصر پرداخت می‌شود | 0 | $k \geq$ | MULTIPOP(k) |

۳. مثال دوم — شمارنده دودویی (Binary Counter)

شمارنده‌ای دودویی با b بیت داریم که از صفر شروع می‌کند. هر بار عمل (INCREMENT) یک واحد به مقدار آن اضافه می‌کند. هزینه‌ی واقعی هر INCREMENT برابر با تعداد بیت‌هایی است که از ۱ به ۰ یا از ۰ به ۱ تغییر می‌کنند.

انتخاب هزینه‌ی سرشکن

در هر INCREMENT دو واحد اعتبار در نظر می‌گیریم: $\hat{c} = 2$. هرگاه بیتی از ۰ به ۱ تغییر کند، یک واحد صرف هزینه‌ی خود عمل، و یک واحد اعتبار روی آن ذخیره می‌شود تا در آینده هنگام بازگشت از ۱ به ۰ هزینه‌اش از آن اعتبار پرداخت گردد.

وقتی در یک عمل INCREMENT ، تعداد k بیت از ۱ به ۰ تغییر کنند و یک بیت از ۰ به ۱، هزینه‌ی واقعی برابر $k+1$ است؛ ولی این k بیت قبلًا اعتبار داشته‌اند، پس هزینه‌شان پرداخت شده و فقط ۲ واحد برای بیت جدید لازم است. بنابراین هزینه‌ی سرشکن ثابت است و مجموع هزینه‌ها برای n عمل، چون مجموع تعدادی عمل با مرتبه زمانی ثابت (۲) است، حداکثر برابر $2n$ می‌شود که از مرتبه زمانی $O(n)$ است.

۴. مثال سوم — جدول پویا (Dynamic Table)

در جدول پویا (مثل آرایه‌ی پویا)، هنگام پر شدن ظرفیت، اندازه را دو برابر می‌کنیم. در چنین حالتی، همه‌ی عناصر باید کپی شوند که پرهزینه است.

برای متعادل‌سازی هزینه‌ها، در هر INSERT هزینه‌ی سرشکن $c = \hat{c}$ می‌پردازیم؛ یک واحد برای درج واقعی و یک واحد به عنوان اعتبار ذخیره می‌شود. هنگامی که ظرفیت دو برابر می‌شود، اعتبار ذخیره‌شده‌ی عناصر قبلی هزینه‌ی کپی را پوشش می‌دهد. بنابراین میانگین هزینه برای هر INSERT نیز $O(1)$ است که در مجموع برای n عمل، از مرتبه زمانی $O(n)$ می‌شود.

۵. تمرین‌ها و پاسخ‌ها

16.2-۱ تمرین

دباله‌ای از عملیات‌های PUSH و POP روی یک پشته انجام می‌دهیم. اندازه‌ی پشته برابر k است و هیچوقت از آن بزرگتر نمی‌شود. بعد از هر k عملیات (یعنی چه PUSH و چه POP ، کل پشته به صورت خودکار کپی (backup) می‌شود.

در این مثال، هزینه‌های واقعی بدین صورت است:

$$\begin{aligned} c_{\text{PUSH}} &= 1 & \bullet \\ c_{\text{POP}} &= 1 & \bullet \\ c_{\text{backup}} &\leq k & \bullet \end{aligned}$$

هزینه‌های سرکشن را به این شکل در نظر می‌گیریم:

$\hat{c}_{\text{PUSH}} = 3$ که یک واحد برای خودش استفاده می‌شود، دو واحد نیز برای کپی‌های احتمالی آینده ذخیره خواهد شد.

$$\begin{aligned} \hat{c}_{\text{POP}} &= 1 & \bullet \\ \hat{c}_{\text{backup}} &= 0 & \bullet \end{aligned}$$

مانند مثال‌های قبل، در این مثال نیز میتوانیم مطمئن باشیم که همواره مجموع هزینه سرشکن، بزرگتر یا مساوی هزینه واقعی است. زیرا با هر عمل PUSH دو واحد اعتبار ذخیره می‌کنیم که حتی اگر یک عنصر بیش از یک بار هم کپی شود، اعتبار ذخیره شده منفی نشود و همواره مثبت بماند.

۶. چند نکته و جمع‌بندی

- در روش حسابداری، هر عملیات بخشی از هزینه‌ی عملیات‌های آینده را پیش‌پیش پرداخت می‌کند.
- اعتبارها باید طوری طراحی شوند که هیچ‌گاه منفی نشوند.
- معمولاً برای عملیات‌هایی که «آیتمی» کار می‌کنند (مثل PUSH) هزینه سرشکن را به صورت «ثابت» در نظر می‌گیریم و این اعتبار را به عنصر وصل می‌کنیم.
- برای رویدادهایی که هزینه‌شان به اندازه تعداد عناصر فعلی بستگی دارد (مثل کپی کردن عناصر آرایه)، اعتبار را هنگام وارد کردن عناصر ابانته کنید تا هنگام کپی از آن‌ها استفاده شود.
- یک قاعدة سرانگشتی: اگر هزینه واقعی گران تنها هنگامی رخ می‌دهد که تعداد عناصر دو برابر شده یا مشابه آن باشد، اختصاص 2 یا 3 واحد اعتبار به ازای هر عنصر اغلب کافی است.