دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکده علوم ریاضی

الگوریتم پیشرفته

۱ آذر

دکتر حامد فهیمی

مقدمه‌ای بر سختی محاسباتی و کاهش چندجمله‌ای

در تحلیل الگوریتم‌ها، معمولاً هدف ما طراحی الگوریتم‌هایی با زمان اجرای چندجمله‌ای نسبت به اندازه ورودی است. با این حال، در عمل با مسائلی مواجه می‌شویم که برای آن‌ها هیچ الگوریتم چندجمله‌ای شناخته‌شده‌ای وجود ندارد. برای تحلیل چنین مسائلی، از ابزاری به نام **کاهش چندجمله‌ای (Polynomial-Time Reduction)** استفاده می‌کنیم.

کاهش چندجمله‌ای روشی است برای مقایسه‌ی سختی محاسباتی مسائل. اگر بتوانیم نشان دهیم که یک مسئله‌ی A در زمان چندجمله‌ای به مسئله‌ی B کاهش می‌یابد (که با $A \le_p B$ نشان داده می‌شود)، آنگاه نتیجه می‌گیریم که مسئله‌ی B حداقل به اندازه‌ی A سخت است. به بیان دقیق‌تر، اگر الگوریتمی وجود داشته باشد که مسئله‌ی B را در زمان چندجمله‌ای حل کند، می‌توان با استفاده از آن و انجام یک تبدیل چندجمله‌ای، مسئله‌ی A را نیز در زمان چندجمله‌ای حل کرد.

به زبان غیررسمی، کاهش چندجمله‌ای به ما اجازه می‌دهد سختی مسائل را «منتقل» کنیم و نشان دهیم که حل یک مسئله‌ی خاص، مستلزم حل یک مسئله‌ی شناخته‌شده‌ی سخت‌تر است.

---

۱. مسئله مجموعه مستقل (Independent Set) و پوشش رأسی (Vertex Cover)

در نظریه گراف، دو مسئله‌ی کلاسیک و بسیار مهم وجود دارند که علی‌رغم تفاوت ظاهری، رابطه‌ی عمیقی با یکدیگر دارند: **Independent Set** و **Vertex Cover**.

- **مجموعه مستقل (Independent Set):**
  در یک گراف $G = (V, E)$، زیرمجموعه‌ای از رئوس مانند $S \subseteq V$ یک مجموعه مستقل نامیده می‌شود اگر هیچ دو رأسی در S توسط یک یال به یکدیگر متصل نباشند. هدف این مسئله، یافتن یک مجموعه مستقل با بیشترین تعداد رأس ممکن است.
- **پوشش رأسی (Vertex Cover):**
  در همان گراف، زیرمجموعه‌ای از رئوس مانند $C \subseteq V$ یک پوشش رأسی است اگر هر یال موجود

در گراف، حداقل یک سر در مجموعه C داشته باشد. هدف این مسئله، یافتن پوشش رأسی با کمترین تعداد رأس است.

رابطه مکمل بودن

نکته‌ی کلیدی این است که بین این دو مسئله یک رابطه‌ی مکمل (Complementary) وجود دارد. می‌توان نشان داد که در هر گراف، یک مجموعه S یک **Independent Set** است اگر و تنها اگر مجموعه‌ی مکمل آن نسبت به V، یعنی V \ S، یک **Vertex Cover** باشد.

به صورت متنی:

> S یک Independent Set است ⇔ V \ S یک Vertex Cover است

این رابطه نشان می‌دهد که انتخاب رأس‌ها به‌گونه‌ای که هیچ یالی بین آن‌ها نباشد، معادل حذف رأس‌هایی است که تمام یال‌های گراف را پوشش می‌دهند.

در نتیجه‌ی این ارتباط قوی، این دو مسئله از نظر پیچیدگی محاسباتی کاملاً معادل هستند و می‌توان آن‌ها را به یکدیگر کاهش داد:

> Independent Set $\equiv_p$ Vertex Cover

---

۲. تعمیم به مسائل مجموعه‌ای: پوشش مجموعه‌ای و بسته‌بندی مجموعه‌ای

مسائل گرافی را می‌توان به مدل‌های انتزاعی‌تری تعمیم داد که در آن‌ها به‌جای رأس و یال، با مجموعه‌ها سروکار داریم. این تعمیم منجر به شکل‌گیری دو مسئله‌ی بنیادی در نظریه‌ی پیچیدگی می‌شود: **Set Cover** و **Set Packing**.

الف) مسئله پوشش مجموعه‌ای (Set Cover Problem)

مسئله Set Cover تعمیم‌یافته‌ی مسئله Vertex Cover است. فرض کنید یک مجموعه مرجع U (Universe) داریم که شامل عناصر مختلف است، و خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های آن به صورت $S_1, S_2, \ldots, S_n$ در اختیار داریم. هدف این است که کمترین تعداد از این زیرمجموعه‌ها را انتخاب کنیم، به‌طوری که اجتماع آن‌ها کل مجموعه U را بپوشاند.

شرط مسئله به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\bigcup_{i \in I} S_i = U \quad \text{و} \quad |I| \le k$$

ب) مسئله بسته‌بندی مجموعه‌ای (Set Packing Problem)

مسئله Set Packing تعمیم‌یافته‌ی مسئله Independent Set است. در این مسئله نیز یک مجموعه مرجع و خانواده‌ای از زیرمجموعه‌ها داریم، اما هدف این بار انتخاب بیشترین تعداد زیرمجموعه است به‌طوری که هیچ دو مجموعه‌ی انتخاب‌شده‌ای با یکدیگر اشتراک نداشته باشند.

این شرط به شکل زیر بیان می‌شود:

> $S_i \cap S_j = \emptyset$ برای هر i و j در I

---

۳. سلسله مراتب کاهش و پیچیدگی (Reductions)

یکی از اهداف اصلی در مطالعه‌ی این مسائل، نشان دادن ارتباط آن‌ها از طریق کاهش‌های چندجمله‌ای است. این کاهش‌ها نشان می‌دهند که چگونه مسائل خاص‌تر را می‌توان به مسائل عمومی‌تر تبدیل کرد.

- **کاهش Vertex Cover به Set Cover:**
در این کاهش، هر یال گراف را به‌عنوان یک عنصر از مجموعه U در نظر می‌گیریم و برای هر رأس، مجموعه‌ای شامل تمام یال‌های متصل به آن رأس تعریف می‌کنیم. در این حالت، انتخاب یک Vertex Cover متناظر با انتخاب یک Set Cover خواهد بود.

> Vertex Cover $\leq_p$ Set Cover

- **کاهش Independent Set به Set Packing:**
به‌طور مشابه، می‌توان مسئله Independent Set را به Set Packing کاهش داد، به‌طوری که انتخاب رئوس غیرمجاور متناظر با انتخاب مجموعه‌های مجزا باشد.

> Independent Set $\leq_p$ Set Packing

---

۴. مسئله صدق‌پذیری (Satisfiability – SAT)

مسئله SAT یکی از بنیادی‌ترین مسائل در علوم کامپیوتر و اولین مسئله‌ای است که NP-Complete بودن آن اثبات شده است. در این مسئله با متغیرهای بولی (صفر و یک) و فرمول‌های منطقی سروکار داریم.

- **تعریف SAT:**
آیا انتسابی از مقادیر True و False به متغیرهای بولی وجود دارد به‌طوری که یک فرمول منطقی که از بندها (Clauses) تشکیل شده و این بندها با عملگر «و» به هم متصل شده‌اند، صادق شود؟

- **مسئله 3-SAT:**
حالت خاصی از SAT است که در آن هر بند دقیقاً شامل سه لیترال (متغیر یا نقیض آن) است که با عملگر «یا» به هم متصل شده‌اند.

در نظریه‌ی پیچیدگی، زنجیره‌ی کاهش زیر اهمیت بسیار زیادی دارد:

> SAT $\le_p$ 3-SAT $\le_p$ Independent Set

این زنجیره نشان می‌دهد که مسائل منطقی را می‌توان به مسائل گرافی تبدیل کرد و از این طریق، سختی آن‌ها را تحلیل نمود. این ایده هسته‌ی اصلی نظریه **NP-Completeness** را تشکیل می‌دهد.

تمرین و اثبات

ثابت کنید که برای هر عدد صحیح k، یک گراف G دارای Independent Set با اندازه k است اگر و تنها اگر دارای Vertex Cover با اندازه $|V| - k$ باشد.

پاسخ

برای اثبات این قضیه، باید دو طرف شرط «اگر و تنها اگر» را ثابت کنیم. فرض کنید یک گراف باشد و زیرمجموعه‌ای از رئوس آن.

۱. فرض کنیم یک مجموعه مستقل (Independent Set) با اندازه است. ثابت می‌کنیم یک پوشش رأسی (Vertex Cover) با اندازه است:

- طبق تعریف مجموعه مستقل، هیچ دو رأسی در با یکدیگر همسایه نیستند. یعنی برای هر یال ، غیرممکن است که هر دو رأس و در باشند.
- این یعنی برای هر یال ، حداقل یکی از دو سر یال (یا یا) باید خارج از باشد (یعنی در باشد).
- از آنجا که هر یال در گراف حداقل یک سر در دارد، پس طبق تعریف، یک **Vertex Cover** است.
- اندازه این مجموعه نیز برابر با است.

۲. فرض کنیم یک پوشش رأسی (Vertex Cover) با اندازه است. ثابت می‌کنیم یک مجموعه مستقل (Independent Set) با اندازه است:

- طبق تعریف پوشش رأسی، برای هر یال ، حداقل یکی از دو رأس یا در قرار دارد.
- این بدان معناست که هیچ یالی وجود ندارد که هر دو سر آن در خارج از (یعنی در) باشد. (اگر یالی وجود داشت که هر دو سرش در بود، آن یال توسط پوشش داده نمی‌شد که با فرض ما در تضاد است).
- چون هیچ دو رأسی در مجموعه توسط یک یال به هم متصل نیستند، پس یک **Independent Set** است.
- اندازه این مجموعه برابر است با .

نتیجه‌گیری:

با اثبات هر دو طرف، نشان دادیم که مکمل یک مجموعه مستقل، همیشه یک پوشش رأسی است و

بالعکس. بنابراین، گراف دارای یک مجموعه مستقل به اندازه است اگر و تنها اگر دارای یک پوشش رأسی به اندازه باشد.