Día Day | Mes Month | Año Year

Taller 2.

punto 3.

Encuentre la funcion de densidad espectral (T. Fourier) para las siguientes señales (sin aplicar propiedades)

- la transformada de Fourier continua de una señal $x(t)$ esta definida como

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

a. $x(t) = e^{-a|t|}$, $a \in \mathbb{R}^+$

como esta señal es par debemos escribir.

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & , t \geq 0 \\ e^{at} & , t < 0 \end{cases}$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{0} (e^{at} e^{-j\omega t})\, dt + \int_{0}^{\infty} (e^{-j\omega t} e^{-at})\, dt$$

$$\int_{-\infty}^{0} (e^{at - j\omega t})\, dt = \int_{-\infty}^{0} (e^{(a-j\omega)t})\, dt$$

$$= \left[\frac{e^{(a-j\omega)t}}{a-j\omega} \Big|_{-\infty}^{0} \right] = \left[\frac{1}{a-j\omega} \right] - 0 = \frac{1}{a-j\omega}$$

$$\int_{0}^{\infty} (e^{-(a+j\omega)})\, dt = \left[\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)} \Big|_{0}^{\infty} \right] = 0 - \left[\frac{-1}{(a+j\omega)} \right]$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Rightarrow X(\omega) = \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} = \boxed{\frac{2a}{a^2+\omega^2}}$$

y Profesiones Afines

Día Day | Mes Month | Año Year

b. $\cos(\omega_c t)$, $\omega_c \in \mathbb{R}$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_c t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$\cos(\omega_c t) = \frac{e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}}{2},$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}}{2} \left(e^{-j\omega t} \right) \right) dt$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{j(\omega_c - \omega)t} \right) dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-j(\omega_c + \omega)} \right) dt$$

como la integral de una exponencial compleja es un delta de dirac

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j(a)t}\, dt = 2\pi\delta(a)$$

Aplicando esta a cada termino se tiene

$$X(\omega) = \frac{1}{2} \left(2\pi\, \delta(\omega - \omega_c) + 2\pi\, \delta(\omega + \omega_c) \right)$$

$$X(\omega) = \pi \left[\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c) \right]$$

Día Day | Mes Month | Año Year

C. $\sin(\omega_s t)$, $\omega_s \in \mathbb{R}$:

Aplicando la definicion de la transformada de Fourier se tiene

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega_s t) \cdot e^{-j\omega t} \, dt$$

aplicando la identidad trigonometrica $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega_s t} - e^{-j\omega_s t}}{2j} (e^{-j\omega t}) \, dt$$

$$= \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{j(\omega_s - \omega)t} - e^{-j(\omega_s + \omega)t}) \, dt$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_s - \omega)t} \, dt - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega_s + \omega)t} \, dt)$$

como la integral de una exponencial compleja es una delta de dirac

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\alpha)t} \, dt = 2\pi \, \delta(\alpha)$$

En la primera integral $\alpha = \omega_s - \omega \rightarrow 2\pi \, \delta(\omega - \omega_s)$

En la segunda integral $\alpha = -(\omega_s + \omega) \rightarrow 2\pi \delta(\omega + \omega_s)$

entonces

$$X(\omega) = \frac{1}{2j} (2\pi \, \delta(\omega - \omega_s) - 2\pi \, \delta(\omega + \omega_s))$$

$$X(\omega) = \pi [\delta(\omega - \omega_s) - \delta(\omega + \omega_s)] \cdot \frac{1}{j}$$

$$X(\omega) = j\pi [\delta(\omega + \omega_s) - \delta(\omega + \omega_s)]$$

Día Day | Mes Month | Año Year

d. $x(t) = f(t) \cdot \cos(\omega_c t)\ ,\quad \omega_c \in \mathbb{R}.$

Aplicando de definicion de la tranformada de Fourier.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega_c t) \cdot e^{-j\omega_c t}\, dt$$ y aplicando la identidad trigonometrica

$$\cos(\omega_c t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}\right)$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}\right) \cdot e^{-j\omega_c t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(e^{j(\omega_c - \omega)t} + e^{-j\omega(\omega_c + \omega)t}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j(\omega - \omega_c)t}\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j(\omega + \omega_c)t}\, dt\right]$$

Se observa que a cada una de esas integrales corresponde a la transformada de Fourier de $f(t)$ evaluada en los frecuencias desplazadas.

asi que por definicion

$$X(\omega) = \frac{1}{2}\left[F(\omega - \omega_c) + F(\omega + \omega_c)\right]$$

e. $x(t) = e^{-a|t|^2}$, $a \in \mathbb{R}^+$ Señal Gaussiana.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|^2} \cdot e^{-j\omega t}\, dt$$, pero como $|t|^2 = t^2$ para todo $t \in \mathbb{R}$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} \cdot e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2 - j\omega t}\, dt$$

llevando $-at^2 - j\omega t$ a una forma factorizada se tiene $(t^2 - bt)$

$$-at^2 - j\omega t = -a\left(\frac{-at^2}{-a} + \frac{-j\omega t}{-a}\right)$$

Completando el cuadrado de $t^2 + \frac{j\omega}{a} t$

$$\boxed{-a\left(t^2 + \frac{j\omega t}{a}\right)} \rightarrow (x-1)^2 \circ (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$x = t$ $\quad 2yt = \frac{j\omega}{a} t$

$$t^2 + \frac{j\omega}{a} t + \left(\frac{j\omega}{2a}\right)^2 - \left(\frac{j\omega}{2a}\right)^2$$

$$\boxed{y = \frac{j\omega}{2a}}$$

Entonces

$$-at^2 - j\omega t = -a\left[\left(t + \frac{j\omega}{2a}\right)^2 - \left(\frac{j\omega}{2a}\right)^2\right]$$

$$= -a\left(t + \frac{j\omega}{2a}\right)^2 - \frac{j^2\omega^2}{4a^2}$$

recordando que $j^2 = -1$, queda

$$-a\left(\left(t + \frac{j\omega}{2a}\right)^2 - \frac{(-1)\omega^2}{4a^2}\right) = -a\left(t + \frac{j\omega}{2a}\right)^2 + \frac{\omega^2}{4\cancel{a^2}} \cdot \cancel{(a)}$$

$$= -a\left(t + \frac{j\omega}{2a}\right)^2 - \frac{\omega^2}{4a}$$

Sustituyendo y simplificando en la integral.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left[-a\left(t+\frac{j\omega}{2a}\right)^2 - \frac{\omega^2}{4a}\right]} dt$$

Separando la parte constante del exponente que no depende de t

$$X(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(t+\frac{j\omega}{2a}\right)^2} dt$$

Realizando un cambio de variable

$u = t + \frac{j\omega}{2a}$, $du = dt$ cuando $t \to -\infty$, $u \to -\infty + \frac{j\omega}{2a} \approx -\infty$

cuando $t \to +\infty$, $u \to \infty + \frac{j\omega}{2a} \approx \infty$

$$X(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-au} du$$, la integral gaussiana es una integral estandar

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-cx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{c}}$$, en este caso $c = a$ y la variable es u por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-au^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \rightarrow \boxed{X(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}}}$$

f. $x(t) = A\,\mathrm{rect}_d(t)$, $A, d \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{rect}_d(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } |t| \leq \frac{d}{2} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$x(t) = A$ si $|t| \leq \frac{d}{2}$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A\,\mathrm{rect}_d(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Acotando los limites de integracion

$$X(\omega) = A \int_{-d/2}^{d/2} e^{-j\omega t}\, dt = A \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \Big|_{-d/2}^{d/2} \right]$$

$$= A \cdot \frac{1}{-j\omega} \left(e^{-j\omega(d/2)} - e^{-j\omega(-d/2)} \right)$$

aplicando la identidad trigonometrica $e^{-j\theta} - e^{j\theta} = -2j\, sen\,\theta$

$$X(\omega) = \frac{A}{-j\omega} \left(-2j\, sen(\omega d/2) \right) = \frac{A \cdot 2\, sen(\omega d/2)}{\omega}$$

utilizando la definicion de sinc normalizado (en radianes)

$$sinc(x) = \frac{sin(x)}{x} \cdot X(\omega)\ A \cdot d \frac{sen(\omega d/2)}{(\omega d/2)}$$

$$\underline{X(\omega) = A \cdot d \cdot sinc\left(\frac{\omega d}{2} \right)}$$