Nacional de Ingenierías Eléctrica, Mecánica y Profesiones Afines

Día / Day | Mes / Month | Año / Year

punto 4

a). $F\{e^{-j\omega_1 t}\cos(\omega_c t)\}$, $\omega_1, \omega_c \in \mathbb{R}$;

Aplicando la identidad trigonometrica $\cos(\omega_c t) =$
$= \frac{1}{2}(e^{j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t})$

$$e^{-j\omega t}\cos(\omega_c t) = e^{-j\omega_1 t}\cdot\frac{1}{2}(e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t})$$

$$= \frac{1}{2}(e^{-j(\omega_1-\omega_c)t} + e^{-j(\omega_1+\omega_c)t})$$

Aplicando la transformada de Fourier

$$F\{e^{-j\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

$$F\{e^{-j\omega_1 t}\cos(\omega_c t)\} = \frac{1}{2}[F\{e^{-j(\omega_1-\omega_c)t}\} + \ldots$$

$$\ldots + F\{e^{-j(\omega_1+\omega_c)t}\}]$$

$$\Rightarrow F\{e^{-j\omega_1 t}\cos(\omega_c t)\} = \frac{1}{2}[2\pi\delta(\omega-(\omega_1-\omega_c)) + \ldots$$

$$\ldots + 2\pi\delta(\omega - \omega_1 + \omega_c)$$

$$\boxed{F\{e^{-j\omega_1 t}\cos(\omega_c t)\} = \pi[\delta(\omega-(\omega_1-\omega_c)) + \delta(\omega-(\omega_1+\omega_c))]}$$

Día Day | Mes Month | Año Year

b. $\mathcal{F}\{u(t)\cos^2(\omega_c t)\}$, $\omega_c \in \mathbb{R}$ $u(t)$ = funcion escalon

Aplicando la identidad trigonometrica

$$\cos^2(\omega_c t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\omega_c t)$$

$$u(t)\cos^2(\omega_c t) = u(t)\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\omega_c t)\right]$$

$$= \frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{2}u(t)\cos(2\omega_c t)$$

Aplicando propiedades lineales de la transformada de Fourier

$$\mathcal{F}\{u(t)\cos^2(\omega_c t)\} = \frac{1}{2}\mathcal{F}\{u(t)\} + \frac{1}{2}\mathcal{F}\{u(t)\cos(2\omega_c t)\}$$

la transformada de Fourier de $u(t)$ es

$$\boxed{\mathcal{F}\{u(t)\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}}$$

Ahora para $u(t)\cos(2\omega_c t)$ se utiliza la propiedad de modulacion:

$$\mathcal{F}\{u(t)\cos(\omega_c t)\} = \frac{1}{2}\left[\mathcal{F}\{u(t)e^{j\omega_0 t}\} + \dots\right.$$

$$\left.\dots \mathcal{F}\{u(t)e^{-j\omega_0 t}\}\right]$$

Ademas, $\boxed{\mathcal{F}\{u(t)e^{\pm j\omega_0 t}\} = \pi\delta(\omega \mp \omega_0) + \frac{1}{j(\omega \mp \omega_0)}}$

Eléctrica, Mecánica y Profesiones Afines

Día / Day | Mes / Month | Año / Year

Entonces

$$F\left\{u(t)\cos(2\omega_c t)\right\} = \frac{1}{2}\left[\pi\delta(\omega-2\omega_c) + \frac{1}{j(\omega-2\omega_c)} \cdots\right.$$

$$\left.\cdots + \pi\delta(\omega+2\omega_c) + \frac{1}{j(\omega+2\omega_c)}\right]$$

$$F\left\{u(t)\cos^2(\omega_c t)\right\} = \frac{1}{2}\left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right) + \frac{1}{4}\left[\pi\delta(\omega-2\omega_c)\cdots\right.$$

$$\left.\cdots + \frac{1}{j(\omega-2\omega_c)} + \pi\delta(\omega+2\omega_c) + \frac{1}{j(\omega+2\omega_c)}\right]$$

$$\boxed{F\left\{u(t)\cos^2(\omega_c t)\right\} = \frac{\pi}{2}\delta(\omega) + \frac{1}{2j\omega} + \frac{\pi}{4}\left[\delta(\omega-2\omega_c) + \cdots + \delta(\omega+2\omega_c)\right] + \frac{1}{4j}\left[\frac{1}{\omega-2\omega_c} + \frac{1}{\omega+2\omega_c}\right]}$$

c. $F^{-1}\left\{\frac{7}{\omega^2+6\omega+45} * \frac{10}{\left(\frac{8+j\omega}{3}\right)^2}\right\}$

Aplicando el teorema de convolucion para la transformada de Fourier

$$F^{-1}\left\{F(\omega) * G(\omega)\right\} = 2\pi \cdot f(t) \cdot g(t)$$

Donde

$$f(t) = F^{-1}\left\{F(\omega)\right\}, \quad g(t) = F^{-1}\left\{G(\omega)\right\}$$

Día Day | Mes Month | Año Year

- calcular la transformada inversa de la primera funcion f(t)

$$F(\omega) = \frac{7}{\omega^2+6\omega+45} \qquad \omega^2+6\omega+45 = (\omega^2+6\omega+9)+36$$
$$= \boxed{(\omega+3)^2+6^2}$$

$F(\omega) = \frac{7}{(\omega+3)^2+6^2}$, Aplicando la propiedad par de transformada (Decaimiento expo)

$$F\left\{e^{-a|t|}\right\} = \frac{2a}{a^2+\omega^2} \rightarrow H(\omega) = \frac{7}{\omega^2+6^2} \rightarrow \underline{a=6}$$

$F^{-1}\left\{\frac{2(6)}{6^2+\omega^2}\right\} = e^{-6|t|}$, ajustando las constantes

$$H(\omega) = \frac{7}{12}\cdot\frac{12}{\omega^2+6^2} \rightarrow \boxed{\begin{aligned} h(t) &= F^{-1}\{H(\omega)\} \\ &= \frac{7}{12}e^{-6|t|}\end{aligned}}$$

- Luego aplicando la propiedad de desplasamiento en frecuencia

$$H(\omega+3) \rightarrow \omega+3=0 \qquad f(t) = F^{-1}\{H(\omega+3)\} = e^{-j3t}h(t)$$
$$\omega_0 = -3$$

$$\boxed{f(t) = \frac{7}{12}e^{-j3t}e^{-6|t|}}$$

Día Day | Mes Month | Año Year

calcular la transformada inversa de la segunda función $g(t)$

$$G(\omega) = \frac{10}{(8+j\omega/3)^2}$$, Aplicando el par de transformada

$$F\{t e^{-at} u(t)\} = \frac{1}{(a+j\omega)^2}$$

reescribiendo

$$G(\omega) = \frac{10}{\left(\frac{1}{3}(24+j\omega)\right)^2} = \frac{10}{\frac{1}{9}(24+j\omega)^2} = \boxed{\frac{90}{(24+j\omega)^2}}$$

La expresión $\frac{90}{(24+j\omega)^2}$ coincide con la forma $\frac{1}{(a+j\omega)^2}$

$$g(t) = F^{-1}\left\{\frac{90}{(24+j\omega)^2}\right\} = 90 \cdot F^{-1}\left\{\frac{1}{(24+j\omega)^2}\right\}$$

$$\boxed{g(t) = 90\, t e^{-24t} u(t)}$$

Aplicando Teorema de convolución $y(t) = 2\pi \cdot f(t) \cdot g(t)$

$$y(t) = 2\pi \cdot \left(\frac{7}{12} e^{-j3t} e^{-6|t|}\right) \cdot \left(90\, t e^{-24t} u(t)\right)$$

$$y(t) = 105\pi e^{-j3t} e^{-6|t|} t e^{-24t} u(t)$$ → $u(t)$ 0 para $t<0$

$|t|$ t para $t \geq 0$

$$e^{-6|t|} \cdot e^{-24t} = e^{-6t} \cdot e^{-24t} = e^{-30t}$$ (para $t \geq 0$)

$$\boxed{y(t) = 105\pi\, t\, e^{-(30+j3)t} u(t)}$$

Día Day	Mes Month	Año Year

d. $\mathcal{F}\{3t^3\}$ Aplicando la propiedad de linealidad

$\mathcal{F}\{3t^3\} = 3 \cdot \mathcal{F}\{t^3\}$ Aplicando la propiedad de Diferenciación en frecuencia

$$\mathcal{F}\{t^n x(t)\} = j^n \frac{d^n}{d\omega^n} X(\omega) \rightarrow \begin{array}{l} n = 3 \\ x(t) = 1 \end{array}$$

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t) = 1\}$$

$$\boxed{\mathcal{F}\{1\} = 2\pi\,\delta(\omega)}$$

$$\mathcal{F}\{t^3\} = j^3 \frac{d^3}{d\omega^3}\left[2\pi\,\delta(\omega)\right] \rightarrow j^3 = j^2 \cdot j = (-1)j = -j$$

$$\mathcal{F}\{t^3\} = -j \cdot 2\pi \frac{d^3}{d\omega^3}\delta(\omega) \rightarrow \boxed{\frac{d^3}{d\omega^3}\delta(\omega) = \delta^{(3)}(\omega)}$$

$$\mathcal{F}\{3t^3\} = 3 \cdot (-j2\pi\,\delta^{(3)}(\omega) \rightarrow$$

$$\boxed{\mathcal{F}\{3t^3\} = -j\,6 \cdot 2\pi\,\delta^{(3)}(\omega)}$$

Consejo Profesional Nacional de Ingenierías Eléctrica, Mecánica y Profesiones Afines

Día Day | Mes Month | Año Year

e. $\frac{B}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{a^2+(\omega-n\omega_0)^2}+\frac{1}{a+j(\omega-n\omega_0)}\right)$

donde $n\in\{0,\pm1,\pm2,\dots\}$ $\omega_0=2\pi/T$

$B, T \in \mathbb{R}^+$

$X(\omega)=C\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(\omega-n\omega_0)$ si $x(t)=f(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$

multiplicacion de una señal aperiodica $f(t)$ por un tren de impulsos periodico

$$X(\omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=\infty}^{\infty}F(\omega-n\omega_0)$$

La constante de escala es B:

La funcion de forma base en frecuencia es:

$$F(\omega)=\frac{1}{a^2+\omega^2}+\frac{1}{a+j(\omega)}$$

$f(t)=\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}$, como $F(\omega)$ es una suma se puede aplicar la propiedad de la linealidad

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{a^2+\omega^2}\right\}+\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{a+j\omega}\right\}$$

Día Day | Mes Month | Año Year

Para el primer termino aplicando la propiedad de par de transformada

$$F^{-1}\left\{e^{-a|t|}\right\} = \frac{2a}{a^2+w^2} \rightarrow F^{-1}\left\{\frac{1}{a^2+w^2}\right\} = \frac{1}{2a}e^{-a|t|}$$

Para el segundo termino aplicando la misma propiedad anterior:

$$F^{-1}\left\{e^{-a|t|}u(t)\right\} = \frac{1}{a+jw} \rightarrow F^{-1}\left\{\frac{1}{a+jw}\right\} = e^{-at}u(t)$$

entonces la funcion base $f(t)$ es:

$$f(t) = \frac{1}{2a}e^{-a|t|} + e^{-at}u(t)$$

Ahora se construye la señal final en el dominio del tiempo

$$x(t) = B \cdot f(t)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)\right)$$

$$x(t) = B\cdot\left(\frac{1}{2a}e^{-a|t|} + e^{-at}u(t)\right)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)$$

$$x(t) = B\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(kT)\cdot\delta(t-kT),\ f(kT) = \frac{1}{2a}e^{-a|kT|} + \ldots$$

$$\ldots + e^{-akT}u(kT)$$

entonces, la expresion final para la señal en el tiempo es;

$x(t)$, la expresion

$$\boxed{x(t) = B\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2a}e^{-a|kT|} + e^{-akT}u(kT)\right)\delta(t-kT)}$$