Parte 2.

1 Solucion por convolucion

sabemos que la respuesta impulso del sistema es:

$$h(t) = e^{-t} u(t).$$

Luego

$$y_{conv}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_{0}^{t} e^{-2\tau} [e^{-(t-\tau)} u(t-\tau)] d\tau$$

$$= e^{-t} \int_{0}^{t} e^{-2\tau} e^{\tau} d\tau = e^{-t} \int_{0}^{t} e^{-\tau} d\tau$$

$$= e^{-t} [-e^{-\tau}]_{0}^{t}$$

$$= e^{-t} (1 - e^{-t})$$

$$= e^{-t} - e^{-2t}$$

y multiplicamos por $u(t)$ para anularlo en $t<0$

conclusión

$$\boxed{y_{conv}(t) = (e^{-t} - e^{-2t}) u(t) = y_{ODE}(t)}$$

Si, ambas coinciden exactamente.

② Comprobación de $h(t)$ para $x(t) = \delta(t)$

partimos de:

$$y'(t) + y(t) = \delta(t), \quad y(0^-) = 0$$

- para $t \neq 0$, $\delta(t) = 0$, la solución es homogénea:
  $y = Ce^{-t}$

- integramos la EDO en un intervalo $[-\varepsilon, +\varepsilon]$ alrededor de $t = 0$.

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} y'(t)\,dt + \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} y(t)\,dt = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(t)\,dt \Rightarrow [y]_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} + O(\varepsilon) = 1$$

como $y(0^-) = 0$ y el segundo término tiende a cero al hacer $\varepsilon \to 0$, obtenemos $y(0^+) = 1$

- luego para $t > 0$, $y(0^+) = 1$ es la condición, y la solución homogénea es:

$$h(t) = y(t) = 1 \cdot e^{-t} = e^{-t}, \quad t > 0.$$

- juntando con $h(t) = 0$, para $t < 0$.

$$\boxed{h(t) = e^{-t}u(t)}$$

3. Comprobación manual de la integral de Convolución

Partimos de

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

con $x(\tau) = e^{-2\tau} u(\tau)$ y $h(t-\tau) = e^{-(t-\tau)} u(t-\tau)$

1. Acotamos Soportes

- $x(\tau) \neq$ solo si $\tau \geq 0$
- $h(t-\tau) \neq 0$ solo si $t-\tau \geq 0 \iff \tau \leq t$

$\Rightarrow$ integración efectiva desde $\tau = \max(0, t-\infty) = 0$ hasta $\tau = \min(t, \infty) = t$

2. integral

$$y(t) = \int_0^t e^{-2\tau} e^{-(t-\tau)}\, d\tau = e^{-t} \int_0^t e^{-2\tau} e^{\tau}\, d\tau$$

$$= e^{-t} \int_0^t e^{-\tau}\, d\tau = e^{-t} [-e^{-\tau}]_0^t = \underline{e^{-t}(1 - e^{-t})}$$

3. incluir Heaviside

para forzar $y(t) = 0$ si $t < 0$, multiplicamos por $u(t)$

$$\boxed{y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})\, u(t)}$$

con esto queda verificado que la integral de convolución reproduce exactamente la solución obtenida por EDO