الگوریتم‌های پیشرفته

پاسخ تمرین سری هفتم

---

1)

الف) هر گره از این گراف به صورت تصادفی با احتمال مساوی در یکی از مجموعه‌های V_1 یا V_2 قرار داده می‌شود.

ب) فرض می‌شود که $C(V_1, V_2)$ مجموعه‌ی یال‌هایی باشد که یک سر آن‌ها در V_1 و سر دیگر آن‌ها در V_2 است. فرض می‌شود که وزن یال a به صورت w_a نشان داده شود. امید ریاضی مجموع وزن یال‌های موجود در $C(V_1, V_2)$ که با استفاده از این الگوریتم تصادفی ایجاد شده است، به صورت زیر می‌باشد:

$$E\left(\sum_{a\in C(V_1,V_2)} w_a\right) = \sum_{a\in E} w_a . P\left(a\in C\left(V_1, V_2\right)\right) = \frac{1}{2}\sum_{a\in E} w_a$$

این مسئله با هر روشی که حل شود، همواره مجموع وزن یال‌هایی که یک سر آن‌ها در V_1 و سر دیگر آن‌ها در V_2 باشد، کوچکتر یا مساوی مجموع وزن همه‌ی یال‌های گراف است. بنابراین امید ریاضی مجموع وزن یال‌های موجود در $C(V_1, V_2)$ که با استفاده از روش تصادفی تولید شده، حداقل نصف وزن پاسخ بهینه است. بنابراین مقدار تقریب الگوریتم قسمت (الف)، 2 می‌باشد.

2)

الف) یک جایگشت از گره‌های این گراف به صورت تصادفی (با احتمال یکنواخت) در نظر گرفته می‌شود. سپس با در نظر گرفتن این جایگشت، گره‌های موجود در آن به ترتیب پردازش می‌شوند. فرض می‌شود که R پاسخ ایجاد شده توسط این الگوریتم تقریبی تصادفی باشد. در ابتدای الگوریتم، $R = \emptyset$ مقداردهی می‌شود. در مرحله‌ی پردازش گره‌ی $c\in V$ ، اگر به ازای همه‌ی یال‌های $(c,d)\in E$ و $(d,c)\in E$ ، گره‌ی d در مجموعه‌ی R نباشد، گره‌ی c به R اضافه می‌شود. این فرآیند تا زمانی که همه‌ی گره‌های موجود در جایگشت در نظر گرفته شده پردازش شوند، ادامه می‌یابد.

ب) با فرض آنکه d حداکثر درجه‌ی گره‌های گراف باشد، مقدار تقریب این الگوریتم $\frac{1}{d+1}$ می‌باشد.

اثبات مقدار تقریب الگوریتم:

به ازای هر گره‌ی $a\in E$، یک متغیر Y_a تعریف می‌شود. اگر $a\in R$ باشد، $Y_a = 1$ می‌باشد و در غیر این صورت $Y_a = 0$ است. بنابراین امید ریاضی $|R|$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E(|R|) = E\left(\sum_{a\in V} Y_a\right) = \sum_{a\in V} E\left(Y_a\right) = \sum_{a\in V} P\left(Y_a = 1\right)$$

گره‌ی a فقط در صورتی به مجموعه‌ی R اضافه می‌شود که زودتر از همه‌ی گره‌هایی که با آن‌ها یال مشترک دارد پردازش شود. فرض می‌شود که d_a، تعداد گره‌هایی باشد که با گره‌ی a یال مشترک دارند. با توجه به اینکه ترتیب پردازش گره‌ها به صورت تصادفی تعیین شده، احتمال اینکه گره‌ی a زودتر از همه‌ی گره‌هایی که با آن یال مشترک دارند پردازش شود، $\frac{1}{d_a+1}$ می‌باشد. بنابراین:

$$E(|R|) = \sum_{a\in V} \frac{1}{d_a+1} \geq \sum_{a\in V} \frac{1}{d+1} = \frac{|V|}{d+1}$$

فرض می‌شود که OPT تعداد گره‌های موجود در پاسخ بهینه‌ی این مسئله باشد. با توجه به اینکه $OPT \le |V|$ می‌باشد، می‌توان نتیجه گرفت که:

$$E(|R|) \ge \frac{OPT}{d+1}$$

(3

الف) متغیر y_i تعریف می‌شود به این صورت که اگر S_i در مجموعه‌ی M' باشد، $y_i = 1$ است و اگر S_i در مجموعه‌ی M' نباشد، $y_i = 0$ می‌باشد. فرم ILP این مسئله به صورت زیر است:

مقدار تابع زیر باید حداقل شود:

$$\sum_{1 \le i \le k} y_i . w(S_i)$$

به طوری که:

$$\forall 1 \le i \le k. \ y_i \in \{0, 1\}$$

$$\forall e \in A. \sum_{\{i: e \in S_i\}} y_i \ge 1$$

ب) در فرم LP این مسئله، هر یک از y_i ها می‌توانند عددی در بازه‌ی $[0, 1]$ باشند. بنابراین فرم LP این مسئله به صورت زیر است:

مقدار تابع زیر باید حداقل شود:

$$\sum_{1 \le i \le k} y_i . w(S_i)$$

به طوری که:

$$\forall 1\leq i\leq k.\ 0\leq y_i\leq 1$$

$$\forall e\in A.\ \sum_{\{i:e\in S_i\}} y_i\geq 1$$

ج) با فرض اینکه هر یک از a_i ها حداکثر بتواند در d عدد از مجموعه‌ها موجود باشد، گرد کردن پاسخ LP این مسئله به صورت زیر انجام می‌شود:

اگر $y_i \geq \frac{1}{d}$ باشد، $y_i^{'} = 1$ می‌شود.

اگر $y_i < \frac{1}{d}$ باشد، $y_i^{'} = 0$ می‌شود.

مقدار تقریب پاسخ حاصل از این روش، d می‌باشد.

4) فرض می‌شود که σ یک جایگشت از اعداد $\{1, ..., m\}$ باشد که به صورت تصادفی تعیین شده است. به ازای هر سه‌تایی ثابت $(c_i, d_i, e_i)\in A$ ، در جایگشت σ یک ترتیب تصادفی برای اعداد c_i ، d_i و e_i وجود دارد. برای اینکه جایگشت σ، سه‌تایی (c_i, d_i, e_i) را بپذیرد باید ترتیب این سه عدد در جایگشت σ به صورت c_i, d_i, e_i یا به صورت e_i, d_i, c_i باشد. بنابراین احتمال اینکه جایگشت σ، سه‌تایی ثابت (c_i, d_i, e_i) را بپذیرد، $\frac{2}{3!} = \frac{1}{3}$ است. برای امید ریاضی مجموع اعداد، عبارت زیر برقرار است:

$$E\left[\sum_{i=1}^{k} a_i\right] = \sum_{i=1}^{k} E\left[a_i\right]$$

بنابراین یک جایگشت تصادفی، تعداد $\frac{1}{3}$ از سه‌تایی‌های موجود در مجموعه‌ی A را می‌پذیرد. بنابراین می‌توان نتیجه‌گیری کرد که مقدار تقریب این الگوریتم تصادفی، $\frac{1}{3}$ می‌باشد.

5) مقدار هر متغیر به صورت تصادفی (با احتمال $\frac{1}{2}$)، مساوی یک یا صفر تعیین می‌شود. مقدار تقریب این الگوریتم 2 می‌باشد. زیرا:

با فرض آنکه C_i مقدار کلاز i باشد، متغیر X_i به صورت زیر تعریف می‌شود:

اگر $C_i = true$ باشد، $X_i = 1$ است.

اگر $C_i = false$ باشد، $X_i = 0$ است.

در صورتی که تعداد متغیرهای یک کلاز m باشد، احتمال آنکه مقدار آن کلاز false شود، $\left(\frac{1}{2}\right)^m \leq \frac{1}{2}$ می‌باشد. بنابراین:

$$P\left(X_i\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^m \geq \frac{1}{2}$$

فرض می‌شود که A، تعداد کلازهایی باشد که مقدار آن‌ها true شده است. بنابراین:

$$E[A] = \sum_{i=1}^{n} E\left[X_i\right] \geq \frac{n}{2}$$

فرض می‌شود تعداد کلازهایی که در پاسخ بهینه‌ی این مسئله مقدارشان true می‌شود، OPT باشد. با توجه به اینکه $OPT \leq n$ است، مقدار تقریب الگوریتم تصادفی ارائه شده، 2 می‌باشد.

(6

الف) یک روش مدل‌سازی این مسئله با استفاده از برنامه‌نویسی خطی عدد صحیح (ILP) به صورت زیر است:

برای هر گره‌ی i، متغیر y_i تعریف می‌شود. اگر $i \in V_1$ باشد، $y_i = 0$ است و در غیر این صورت $y_i = 1$ می‌باشد. برای هر یال (i, j)، متغیر $x_{i,j}$ تعریف می‌شود. اگر از بین دو گره‌ی i و j، یکی از آن‌ها در V_1 و یکی از آن‌ها در V_2 باشد، $x_{i,j} = 1$ می‌شود و در غیر این صورت $x_{i,j} = 0$ می‌باشد. مقدار تابع زیر باید حداقل شود:

$$g = \sum_{(i,j) \in E} c(i, j).\, x_{i,j}$$

به طوری که:

$$y_a = 0$$

$$y_b = 1$$

$$\forall (i, j) \in E.\, \left(y_i - y_j \le x_{i,j}\right) \wedge \left(y_j - y_i \le x_{i,j}\right)$$

$$\forall i \in V.\, y_i \in \{0, 1\}$$

$$\forall i, j \in V.\, x_{i,j} \in \{0, 1\}$$

ب) فرم LP این مسئله:

$$g = \sum_{(i,j) \in E} c(i, j).\, x_{i,j}$$

به طوری که:

$$y_a = 0$$

$$y_b = 1$$

$$\forall (i, j)\in E.\, x_{i,j} = |y_i - y_j|$$

$$\forall i\in V.\, 0\le y_i \le 1$$

$$\forall i, j\in V.\, 0\le x_{i,j} \le 1$$

ج) فرض می‌شود که y_i^* و $x_{i,j}^*$ یک پاسخ بهینه برای فرم LP این مسئله باشند و g^* مقدار نهایی تابع g در این پاسخ بهینه باشد. همچنین فرض می‌شود که OPT مقدار تابع g در پاسخ بهینه‌ی فرم ILP این مسئله باشد. بنابراین $g^* \le OPT$ می‌باشد. در ادامه اثبات می‌شود که در صورت استفاده از روش گرد کردن تصادفی، $g^* = OPT$ می‌شود.

برای حل این مسئله با استفاده از روش گرد کردن تصادفی، ابتدا متغیر تصادفی $r\in[0, 1]$ تعیین می‌شود. سپس به ازای هر گره‌ی $i\in V$، اگر $y_i^* \le r$ باشد، $y_i = 0$ می‌شود و اگر $y_i^* > r$ باشد، $y_i = 1$ می‌شود. به ازای $(i, j)\in E$، اگر و تنها اگر $min\{y_i^*, y_j^*\}\le r\le max\{y_i^*, y_j^*\}$ باشد، از بین i و j یکی از آن‌ها در V_1 و دیگری در V_2 می‌باشد. بنابراین احتمال اینکه از دو گره‌ی i و j یکی از آن‌ها در V_1 و دیگری در V_2 باشد، $|y_i^* - y_j^*|$ می‌باشد (که همان $x_{i,j}^*$ است). در نتیجه $E\left[x_{i,j}\right] = x_{i,j}^*$ می‌باشد. بنابراین:

$$E\left[\sum_{(i,j)\in E} c(i, j).\, x_{i,j}\right] = \sum_{(i,j)\in E} c(i, j).\, E\left[x_{i,j}\right] = \sum_{(i,j)\in E} c(i, j).\, x_{i,j}^* = g^*$$

بنابراین در صورت استفاده از روش گرد کردن تصادفی، $g^* = OPT$ می‌شود.