الگوریتم‌های پیشرفته

پاسخ تمرین سری سوم

زمان آپلود: 1401/08/24

موعد تحویل: 1401/09/01

مسئول تمرین: برنا توسلی (borna.tavassoli@gmail.com)

۱- درستی یا نادرستی گزاره های زیر را با ذکر دلیل بیان کنید.

الف) اگر یک مسئله NP-Complete در زمان خطی حل شود، تمام مسائل NP-Complete را می‌توان در زمان خطی حل کرد.

پاسخ: نادرست است. از آنجاکه فرآیند کاهش، چندجمله‌ای و نه لزوما خطی است لزومی بر حل سایر مسائل NP-Complete در زمان خطی نیست.

ب) اگر یک مسئله NP در زمان چندجمله‌ای حل شود، تمام مسائل NP را می‌توان در زمان چندجمله‌ای حل کرد.

پاسخ : اگر P = NP باشد گزاره مطرح شده درست است. اگر P =! NP باشد گزاره مطرح شده نادرست است زیرا مسئله حتما باید در کلاس NP-Complete باشد تا بتوان چنین ادعایی را مطرح کرد.(P VS NP Problem)

ج) اگر مسئله‌ای در کلاس پیچیدگی NP باشد و بتوانیم مسئله‌ای NP-Complete را به آن کاهش دهیم، آنگاه آن مسئله NP-Complete است.

پاسخ : نادرست است. کاهش باید چندجمله‌ای باشد تا بتوان چنین ادعایی را مطرح کرد.

۲- می‌خواهیم ثابت کنیم سوال زیر در کلاس پیچیدگی NP-complete قرار می گیرد:

سوال: گراف جهتدار G و عدد k داده شده است. آیا می توان با حذف حداکثر k راس از G کاری کرد که هیچ دوری نداشته باشد؟

الف) ابتدا ثابت کنید مسئله مورد نظر در کلاس پیچیدگی NP قرار دارد.

باید بتوانیم راه حلی برای این سوال را درستی سنجی (verification) کنیم تا ثابت شود در کلاس NP است. k راس داده شده را از گراف حذف می کنیم و در مابقی گراف چک می کنیم که آیا دور وجود دارد یا خیر (با یک dfs ساده قابل انجام است) هر دو مرحله در زمان چند جمله‌ای قابل انجام است.

ب) مسئله Vertex-Cover را با استفاده از این مسئله و با روش polynomial reduction حل کنید.

باید مسئله vertex-cover را به این مسئله کاهش دهیم. در vertex-cover گراف G و عدد k داده می شود و پرسیده می‌شود که آیا مجموعه از راس ها به اندازه حداکثر k وجود دارد که به ازای هر یال حداقل یکی از دو سرش داخل این مجموعه باشد یا خیر. گراف H را از روی G به اینگونه می سازیم که راس ها همان راس های G هستند، و به ازای هر یال در G دو یال یک جهتی بین آن دو راس در H قرار می‌دهیم. گراف H و عدد k را به سوال گفته در مسئله ورودی می دهیم و خروجی آن را دقیقا به عنوان خروجی vertex-cover خروجی می دهیم. اگر مجموعه ای از رئوس در H وجود داشت که با حذف آن هیچ دوری درون H وجود نداشت. آنگاه همین مجموعه پوشش راسی نیز محسوب می شود (چراکه باید حداقل یکی از دو یال جهت دار جدید انتخاب شوند) و اگر پوشش راسی در G وجود داشته باشد همین مجموعه را اگر در H حذف کنیم دیگر هیچ یالی وجود نخواهد داشت، بنابراین دوری نیز نخواهد بود. پس وجود دور به اندازه حداکثر k در H متناظر وجود پوشش راسی به اندازه حداکثر k در G است.

پس کاهش درست انجام شده است. واضح است که تبدیل ورودی ها از مرتبه چند جمله‌ای است.

۳- گراف وزن دار G داده شده است. وزن یال‌های این گراف می‌توانند منفی و یا مثبت باشد. مسئله‌ی دور با وزن صفر بررسی می‌کند که آیا دوری در گراف وجود دارد بطوریکه مجموع وزن یالهای این دور دقیقا برابر با صفر باشد یا خیر. ثابت کنید که این مسئله از نوع مسائل NP-Complete است.

ابتدا توجه کنید که با داشتن یک دور ساده در گراف G می‌توان با پیمایش این دور، در زمان چندجمله‌ای تصمیم گرفت که مجموع وزن یالهای دور برابر با صفر می‌شود یا خیر پس این مسئله NP است.

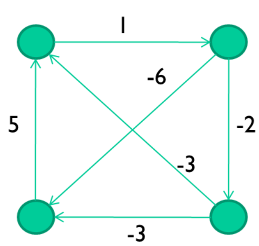
مسئله Subset Sum را به این مسئله کاهش می‌دهیم. مجموعه $S = \{A_1, ..., A_n\}$ از اعداد صحیح را در نظر بگیرید. گراف جهتدار G_0 را با $2n$ راس می‌سازیم به طوریکه هر عضو A_i متناظر با دو راس V_i و U_i در این گراف می‌باشد. به ازای هر V_i، یک یال از V_i به U_i با وزن A_i می‌کشیم. همچنین یک یال با وزن صفر از هر U_j به تمامی V_i ها وصل می‌کنیم. در نهایت یک یال با وزن صفر از هر V_j به تمامی U_i ها نیز می‌کشیم$(i != j)$

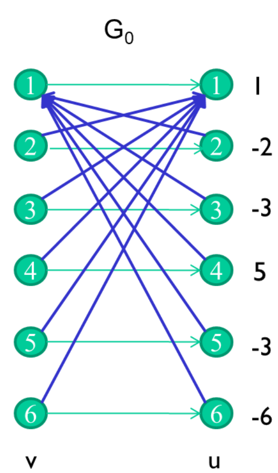
اگر یک دور با وزن صفر در G_0 پیدا کنیم، پس باید مجموع تمام وزن یالهای V_i به U_j در این دور صفر باشد.

از طرفی دیگر، اگر یک زیرمجموعه S_0 با مجموع صفر داشته باشیم، می‌توان یک دور با وزن صفر ساخت که یال‌های آن یا مثل (V_i, U_j) متناظر با اعضای S_0 هستند یا وزن صفر دارند.

پس این مسئله حداقل به سختی Subset Sum می‌باشد.

گراف G که در آن یک دور با وزن صفر نیز وجود دارد.





گراف G_0 که تمامی یالهای رئوس شماره ۱ برای آن نمایش داده شده اند. وزن یالهای آبی در این گراف صفر می‌باشد.

۴- جدولی با ابعاد $m \times n$ از مربع های واحد داریم که هر کدام از این مربع ها می‌تواند خالی، دارای X و یا دارای O باشد. هدف این است تا با حذف برخی از X یا O ها جدول را به شکلی در آوریم که دارای دو شرط زیر باشد:

الف) هر ردیف حداقل دارای یکی از علامت‌های X یا O باشد.

ب) هیچ ستونی دارای هر دو نوع علامت نباشد.

واضح است که برای برخی حالات نمی‌توان شرایط بالا را به دست آورد. ثابت کنید فهمیدن اینکه برای یک جدول اولیه می‌توان به جدول با شرایط ذکر شده رسید یا خیر، یک مسئله NP-Hard می‌باشد.

در ادامه یک ورودی که برای آن می‌توان به شرایط ذکر شده رسید، آورده شده است.

X	O	X	O
	X	O	
	O	X	

ورودی سوال

X	O		O
		O	
	O		

یکی از پاسخ‌ها

با استفاده از کاهش مسئله 3SAT نشان می‌دهیم مسئله‌ی مطرح شده در این سوال نیز NP-Hard است. ϕ را یک فرمول بولین با m متغیر و n گزاره در نظر بگیرید. در زمان چندجمله‌ای آن را به ورودی جدول مسئله تبدیل می‌کنیم. یک جدول $m \times n$ در نظر بگیرید که مقدار خانه سطر i ام و ستون j ام آن به شکل زیر تعیین می‌شود:

۱- اگر متغیر x_j در گزاره i ام ϕ باشد، مقدار این خانه ضربدر است.

۲- اگر متغیر $\bar{x}_j$ در گزاره i ام ϕ باشد، مقدار این خانه دایره است.

۳- در غیر این صورت، مقدار این خانه صفر است.

اثبات می‌کنیم این جدول قابل حل است اگر و تنها اگر ϕ قابل حل (satisfiable) باشد. به دو سوی این اثبات دقت کنید:

۱- اگر: فرض کنید ϕ قابل حل باشد و یک جواب آن را در نظر بگیرید. حال تغییرات زیر را به ازای هر ستون j بر روی جدول اعمال کنید:

الف) اگر $x_j = true$ آنگاه تمام دایره‌ها را از ستون j ام حذف می‌کنیم.

ب) به طور مشابه، اگر $x_j = false$ آنگاه تمام ضربدرها را از ستون j ام حذف می‌کنیم.

با عمل بالا، در واقع علامت‌هایی که متناظر با ارزش‌های منفی در ϕ هستند، حذف می‌شوند. حال هر ستون حداکثر یک نوع علامت داشته (چون هر متغیر در حداقل یک گزاره از ϕ وجود دارد) و همچنین از آنجایی که هر گزاره ϕ حداقل یک ارزش true دارد، هر ردیف جدول حداقل یک علامت خواهد داشت؛ پس جدول قابل حل خواهد بود.

۲- تنها اگر: فرض کنید جدول قابل حل باشد و یک جواب آن را در نظر بگیرید. روی ستونها حرکت کنید و بر حسب علامت هر ستون، مقدار x_j را به شکل زیر تعیین کنید:

الف) اگر علامت ستون j ضربدر بود، $x_j = true$ خواهد بود.

ب) اگر علامت ستون j دایره بود، $x_j = false$ خواهد بود.

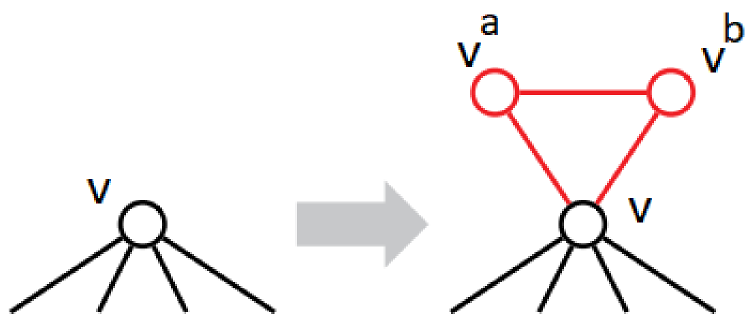
ج) اگر ستون j بی‌علامت بود، یک مقدار دلخواه به x_j می‌دهیم.

با عمل بالا، درواقع ارزش متغیرهایی که متناظر با علامت هر ستون هستند، true خواهد بود. هر ردیف حداقل یک علامت دارد، پس هر گزاره ϕ حتما true خواهد بود پس $\phi = true$ و قابل حل خواهد بود.

اعمال بالا چندجمله‌ای هستند پس کاهش نیز در زمان چندجمله‌ای انجام می‌شود.

۵- یک دور "همیلتونی-دوبل" در گراف بدون جهت G، یک مسیر بسته است که از تمامی راس‌های G دقیقا دوبار می‌گذرد. ثابت کنید مسئله تشخیص وجود دور "همیلتونی-دوبل" در گراف G دلخواه، NP-Hard است.

سوال را با کاهش از مسئله دور همیلتونی حل می‌کنیم. گراف بدون جهت G را در نظر بگیرید؛ گراف H را از روی گراف G می‌سازیم به گونه‌ای که به ازای هر راس v آن، دو راس v^a و v^b اضافه شده و این سه راس با یکدیگر تشکیل یک مثلث می‌دهند (به شکل زیر دقت کنید).



ادعا می‌کنیم G یک دور همیلتونی دارد اگر و تنها اگر H یک دور همیلتونی-دوبل داشته باشد. به دو سوی این اثبات دقت کنید:

۱- اگر: فرض کنید H یک دور همیلتونی-دوبل D داشته باشد؛ یک راس v متعلق به G را در این دور در نظر بگیرید. طبق تعریف می‌دانیم v دقیقا دوبار در این دور آمده است. این دو دور، D را به دو گشت بسته افراز می‌کند که v دقیقا یکبار در هر کدام از آنها آمده است. هر گشتی از v^a یا v^b به رئوس دیگر H باید از v بگذرد بنابراین یکی از آن دو گشت بسته، تنها رئوس v، v^a و v^b را پیمایش می‌کند؛ پس با حذف رئوس H \ G از D، می‌توان به گشت بسته‌ای در G رسید که هر راس دقیقا یک‌بار مشاهده شود (دور همیلتونی).

۲- تنها اگر: فرض کنید G یک دور همیلتونی با دنباله رئوس $v_1, v_2, \dots v_n, v_1$ داشته باشد، می‌توان یک دور همیلتونی-دوبل در گراف H با دنباله رئوس زیر تشکیل داد:

$$\dots, v_i, v_i^a, v_i^b, v_i^a, v_i^b, v_i, \dots$$

بدیهی است که دنباله بالا یک دور همیلتونی-دوبل است زیرا هر راس در آن دوبار دیده شده است.

اعمال بالا چندجمله‌ای هستند پس کاهش نیز در زمان چندجمله‌ای انجام می‌شود.