

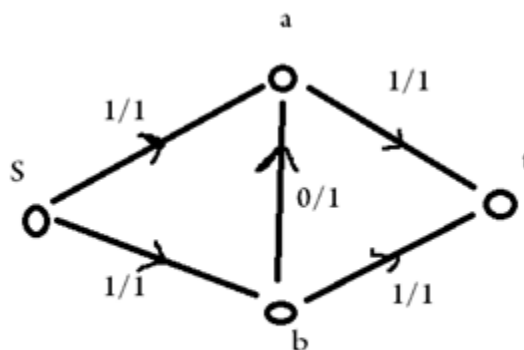
الگوریتم‌های پیشرفته

پاسخ تمرین سری چهارم



مسئول تمرین: احمدرضا سزاوار (ahmadreza.sezavar@gmail.com)

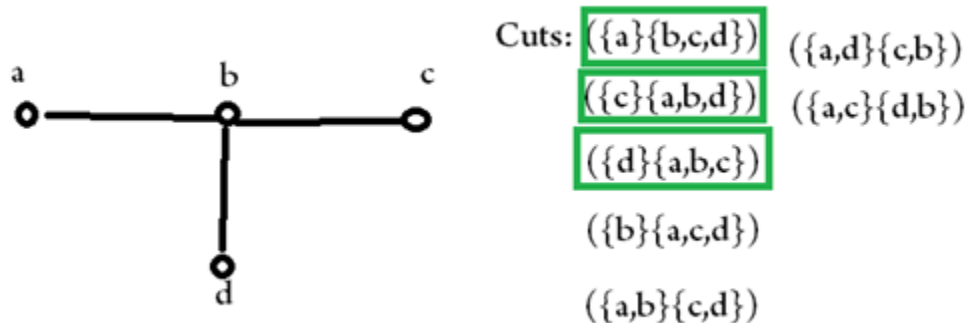
1. کافی است ظرفیت تمامی یال‌ها را برابر 1 قرار داده شار از راس S به راس T را محاسبه کنیم، مقدار شار نشان دهنده تعداد مسیرهای یال مجزا از S به T می‌باشد. برای مثال در گراف زیر، سه مسیر از S به T داریم که تنها دو مسیر از هم یال مجزا دارند، اگر ظرفیت تمامی یال‌ها را برابر 1 قرار دهیم، بیشترین شار از S به T برابر 2 خواهد شد که همان تعداد مسیرهای یال مجزا از S به T می‌باشد.



Max-Flow= 2

$s \rightarrow a \rightarrow t$, $s \rightarrow b \rightarrow t$, $s \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow t$

2. برش یعنی افراز راس ها به دو مجموعه مجزا، برش کمینه نیاز به کمترین تعداد یال برای برش دارد، برای مثال در درخت زیر تعداد 7 برش داریم ولی تنها سه برش، برش کمینه می باشند. به طور کلی، در یک درخت با n گره و $n-1$ یال، تعداد $n-1$ برش کمینه داریم.



3. در گراف سوال 3، حداکثر شار از S به t برابر است با 16 که می توان با انتخاب هوشمندانه تنها دو مسیر زیر در الگوریتم گفته شده به این شار دست پیدا کنیم، در هر یک از مسیر های انتخابی 8 واحد شار اضافه می شود، در نتیجه تنها با انتخاب این دو مسیر، می توان حداکثر شار را یافت و تنها نیاز به دو بار عملیات افزایش شار داشت.

$$S \rightarrow d \rightarrow c \rightarrow t, S \rightarrow b \rightarrow e \rightarrow t$$

4. برش های کمینه (min cut) های گراف را در نظر بگیرید، فرض کنید برش کمینه با کمترین تعداد یال، دارای k_1 یال باشد و برش کمینه با بیشترین تعداد یال برابر k_2 یال داشته باشد.

$$|در نتیجه داریم $1 \leq d_1 \leq k_1$ و نیز $k_2 \leq d_2 < |E|$ و نتیجه می گیریم که $d_1 \leq d_2$$$

5. یک گراف با دو راس s و t در نظر گرفته و برای هر جنس یک گره در نظر گرفته و یالی با ظرفیت 1 بین آن گره و گره s ایجاد می کنیم، سپس به ازای هر خریدار یک گره ایجاد کرده و آنها را با یالی با ظرفیت k_i به راس t وصل می کنیم، در نهایت گره های متناظر با اجناس را به گره های متناظر با خریداران متصل می کنیم (در صورتی که خریدار درخواستی برای آن جنس داده باشد). اگر شار بیشینه برابر با مجموع ظرفیت یال های ورودی t باشد به این معنی هست که یک تخصیصی وجود دارد که تمام خریداران راضی باشند.

6. به کمک الگوریتم های یافتن $Max Flow$ شبکه $Residual$ را می یابیم، اگر در شبکه $Residual$ تنها دو مولفه داشتیم، برش کمینه یکتاست.

7. بیشتر از یک راه حل برای این مساله وجود دارد، اگر راس های میانی را از بالا به پایین به ترتیب a, b, c بنامیم، می توان اولین مسیر را s, b, c, t انتخاب کرد، این مسیر 6 واحد شار اضافه می کند، سپس مسیر s, a, b, t را انتخاب کرده که 4 واحد ظرفیت می دهد، سپس مسیر s, c, a, t را انتخاب کرده که 2 واحد اضافه می کند، در نتیجه شار نهایی بیشینه برابر است با 12.