Feuille d'exercices n°6
Méthodes numériques d'optimisation

Démonstrations de cours

*Les exercices de cette section **ne seront pas** traités en TD, les corrigés se trouvant dans le polycopié. Les exercices marqués ♣ sont exigibles au partiel et à l'examen.*

Exercice 1 – Directions de descente

Module B3 – Propositions 1 et 2

Soit $\mathcal{X}$ un espace de Hilbert. Soient $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ un ouvert, $x_0 \in \mathcal{U}$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction.

(a) Soit $d \in \mathcal{X}$. *On suppose que f admet une dérivée directionnelle en x_0 suivant d, avec $f'(x_0; d) < 0$.* Montrer que, si d est une direction de descente pour f en x_0, alors il existe $\tau_0 > 0$ tel que

$$\forall \tau \in \left]\,0\,;\tau_0\,\right], \qquad \frac{f(x_0 + \tau\, d) - f(x_0)}{\tau} < 0$$

Justifier que
$$\lim_{\tau \to 0^+} \frac{f(x_0 + \tau\, d) - f(x_0)}{\tau}$$
existe. Que vaut cette limite ? En déduire que $f'(x_0; d) \leq 0$.

(b) Soit $d \in \mathcal{X}$. *On suppose que f admet une dérivée directionnelle en x_0 suivant d.* En considérant la limite du taux de variation

$$\forall \tau \neq 0, \qquad \frac{f(x_0 + \tau\, d) - f(x_0)}{\tau}$$

justifier qu'il existe une fonction ε définie au voisinage de 0 telle que $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$ et

$$f(x_0 + \tau\, d) = f(x_0) + \tau\,\big(f'(x_0; d) + \varepsilon(\tau)\big)$$

En remarquant que
$$f'(x_0; d) + \varepsilon(\tau) \underset{\tau \to 0}{\longrightarrow} f'(x_0; d)$$
et en utilisant le fait que $f'(x_0; d) < 0$ par hypothèse, montrer qu'il existe $\tau_0 > 0$ tel que

$$\forall \tau \in \left]\,0\,;\tau_0\,\right], \qquad \Big(f'(x_0; d) + \varepsilon(\tau)\Big) > 0$$

En déduire que, pour tout $\tau \in \left]\,0\,;\tau_0\,\right]$, on a $f(x_0 + \tau\, d) < f(x_0)$.

♣ Exercice 2 – Fonctions régulières

Module B3 – Proposition 8

Soit $\mathcal{X}$ un espace de Hilbert. Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonction L-régulière. Soient $A : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ un opérateur linéaire borné et $b \in \mathcal{X}$. Considérons la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & J(A(x) + b) \end{array} \right.$$

Justifier que f est différentiable et calculer son gradient. En déduire que f est $(|||A|||^2 L)$-régulière.

Exercices fondamentaux

Exercice 3 – Méthode de Newton

Après avoir justifié de son applicabilité, écrire les itérations explicites de la méthode de Newton pour la minimisation des fonctions suivantes :

(a) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^2 + \cos t \end{array} \right.$

(b) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & 2\,x^2 + 6\,y^2 \end{array} \right.$

Exercice 4 – Fonctions régulières Montrer que les fonctions suivantes sont régulières :

(a) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^2 + \cos t \end{array} \right.$ **(b)** $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & 2\,x^2 + 6\,y^2 \end{array} \right.$

Exercice 5 – Méthode de gradient Après avoir justifié de son applicabilité, écrire les itérations explicites de la méthode du gradient à pas fixe pour la minimisation des fonctions suivantes :

(a) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^2 + \cos t \end{array} \right.$ **(b)** $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & 2\,x^2 + 6\,y^2 \end{array} \right.$

À quelles conditions l'algorithme écrit converge-t-il vers un minimiseur de la fonction considérée ?

Exercice 6 – Méthode de Newton *vs.* méthode du gradient dans le cas quadratique
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$. On considère la fonction suivante :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{2}\,\langle A\,x, x\rangle - \langle b, x\rangle + c \end{array} \right.$$

(a) Justifier que f admet un unique minimiseur. Le caractériser au premier ordre.

(b) Écrire la suite générée par la méthode de Newton. Justifier qu'elle converge vers le minimiseur de f.

(c) Montrer que f est régulière.

(d) Écrire la suite générée par la méthode du gradient. À quelle condition converge-t-elle vers le minimiseur de f ?

(e) Discuter des avantages éventuels à utiliser la méthode du gradient plutôt que la méthode de Newton.

Exercice 7 – Recherche linéaire Soient $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$. On considère la fonction suivante

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{2}\,\langle A\,x, x\rangle + \langle b, x\rangle + c \end{array} \right.$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\nabla f(x_0) \neq 0$. On s'intéresse à la fonction suivante

$$J : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ \tau & \mapsto & f(x_0 - \tau\,\nabla f(x_0)) \end{array} \right.$$

(a) Montrer que J est une fonction strictement convexe.

(b) Montrer que J est infinie à l'infini.

(c) En déduire que J admet un unique minimiseur.

(d) Donner une expression explicite de J en fonction de A, b, c et x_0.

(e) Déterminer l'unique minimiseur τ^* de J. Vérifier que $\tau^* > 0$.

(f) Donner une expression du minimiseur de J en fonction de $\nabla f(x_0)$ et de $\operatorname{Hess} f(x_0)$.

Compléments

Exercice 8 – Suite minimisante pour une fonction fortement convexe Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction fortement convexe, de module $\alpha > 0$. On note $x^* \in \mathbb{R}^n$ son unique minimiseur. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite minimisante pour f.

(a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\forall\, \lambda \in [\,0\,;1\,], \quad f(\lambda\, x_k + (1-\lambda)\, x^*) \leq \lambda\, f(x_k) + (1-\lambda)\, f(x^*) - \frac{\alpha}{2}\, \lambda\, (1-\lambda)\, \|x_k - x^*\|_2^2$$

(b) Justifier que $$\forall\, \lambda \in [\,0\,;1\,], \quad f(x^*) \leq f(\lambda\, x_k + (1-\lambda)\, x^*)$$

En déduire que $$\forall\, \lambda \in [\,0\,;1\,], \quad \|x_k - x^*\|_2^2 \leq \frac{2}{\alpha\,(1-\lambda)}\, \big(f(x_k) - f(x^*)\big)$$

(c) Justifier que $$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \frac{\alpha}{2}\, \|x_k - x^*\|_2^2 \leq f(x_k) - \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

En déduire que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers le minimiseur de f.

⋆ Exercice 9 – Lemme de descente Soit $\mathcal{X}$ un espace de Hilbert. Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonction L-régulière. Soit $(x, z) \in \mathcal{X}^2$. On pose

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} [\,0\,;1\,] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & J(x + t\,(z-x)) - \langle \nabla J(x), x + t\,(z-x) \rangle \end{array} \right.$$

(a) Vérifier que $$J(z) - J(x) - \langle \nabla J(x), z - x \rangle = \Big[f(t) \Big]_1^0$$

(b) Montrer que $$\Big[f(t) \Big]_1^0 \leq \left| \Big[f(t) \Big]_1^0 \right| \leq L \int_0^1 t\, \|z - x\|^2\, \mathrm{d}t$$

(c) En déduire que $$J(z) \leq J(x) + \langle \nabla J(x), z - x \rangle + \frac{L}{2}\, \|x - z\|^2$$

⋆ Exercice 10 – Méthode du gradient à pas optimal et forte convexité Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction fortement convexe, de module $\alpha > 0$ et L-régulière. On note $x^* \in \mathbb{R}^n$ son unique minimiseur. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\nabla f(x) \neq 0$, on considère la fonction

$$\varphi_x : t \mapsto f(x - t\, \nabla f(x))$$

(a) Justifier que φ_x admet un unique minimiseur, que l'on notera t_x^*.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. On définit la suite suivante :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad x_{k+1} = x_k - t_{x_k}^*\, \nabla f(x_k)$$

(b) Justifier que si $x_k = x^*$ pour $k \in \mathbb{N}$, alors $x_{k+1} = x^*$.

(c) Montrer que la suite $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

(d) Montrer que $$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad f(x_k) - f(x_{k+1}) \geq \frac{\alpha}{2}\, \|x_k - x_{k+1}\|_2^2$$

En déduire que la suite $(\|x_k - x_{k+1}\|_2)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

(e) Montrer que $$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \langle \nabla f(x_k), \nabla f(x_{k+1}) \rangle = 0$$

En déduire que $$\|\nabla f(x_k) - \nabla f(x_{k+1})\|_2^2 = \|\nabla f(x_k)\|_2^2 + \|\nabla f(x_{k+1})\|_2^2$$

(f) Montrer que $$\lim_{k\to+\infty} \|\nabla f(x_k)\|_2^2 + \|\nabla f(x_{k+1})\|_2^2 = 0$$

En déduire que la suite $(\nabla f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

(g) Justifier que f est infinie à l'infini. En raisonnant par l'absurde, montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée. En déduire qu'il existe un compact $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ tel que $x_k \in \mathcal{K}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(h) En déduire qu'il existe $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge. Notons sa limite $\tilde{x}$. Montrer que $\nabla f(\tilde{x}) = 0$.

(i) En déduire que $\tilde{x} = x^*$ et que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers l'unique minimiseur de f.