Feuille d'exercices n°2
Convexité

Exercices préparatoires

Les exercices de cette section ne seront pas traités en TD. Les étudiants sont encouragés à les travailler en autonomie ***avant*** *la séance de TD.*

Exercice 1 – Vrai/faux Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Le cas échéant, fournir un contre-exemple.

(a) L'intersection de deux ensembles convexes est convexe.

(b) L'union de deux ensembles convexes est convexe.

(c) L'intérieur et l'adhérence d'un ensemble convexe sont convexes.

(d) Toute combinaison linéaire de fonctions convexes est convexe.

(e) La composée de deux fonctions convexe est convexe.

(f) Toute norme est convexe.

(g) Le carré de toute norme est convexe.

Exercice 2 – Cas différentiable Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \geq 0$. Déterminer si les fonctions suivantes sont (strictement) convexes sur leur domaine de définition.

(a) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^+)^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & -\ln t \end{array} \right.$

(b) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^4 - 2\,x^2\,y + y^2 \end{array} \right.$

Exercices fondamentaux

Exercice 3 – Fonctions quadratiques Soient $A \in \mathrm{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$. On considère les deux fonctions suivantes

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{2}\,\langle A\,x, x\rangle + \langle b, x\rangle + c \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{2}\,\|A\,x - b\|_2^2 \end{array} \right.$$

(a) À quelle condition les fonctions f et g sont-elles convexes ? strictement convexes ?

(b) Montrer que, si A est symétrique et si on note λ_1 sa plus petite valeur propre, alors

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \qquad \langle A\,x, x\rangle \geq \lambda_1\,\|x\|_2^2$$

En déduire que f est fortement convexe si et seulement si A est définie positive, puis que g est fortement convexe si et seulement si A injective.

(c) Déterminer les points critiques de f et g.

Exercice 4 – Fonctions fortement convexes

(a) **Premier exemple.** Soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha > 0$. Montrer que

$$f_\alpha : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\alpha}{2}\,\|x - x^0\|_2^2 \end{array} \right.$$

est fortement convexe.

(b) Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que la fonction

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(x) + \dfrac{\alpha}{2} \|x - x^0\|_2^2 \end{array} \right.$$

est fortement convexe.

On considère à présent $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction fortement convexe de module α.

(c) Justifier que f est strictement convexe.

Soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$. On introduit la fonction

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x & \mapsto & f(x) - \dfrac{\alpha}{2} \|x - x^0\|_2^2 \end{array} \right.$$

(d) Montrer que g est convexe. En déduire que toute fonction fortement convexe est la somme d'une fonction convexe de même domaine et d'une fonction quadratique.

(e) En déduire que la somme d'une fonction convexe et d'une fonction fortement convexe, de module α, est fortement convexe, de module α.

(f) *On suppose que f est différentiable.* Montrer que g admet une minorante affine, *i.e.* il existe $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \qquad g(x) \geq \langle b, x \rangle + c$$

(g) En déduire que f est infinie à l'infini.

Exercice 5 – Projection sur un convexe Soit $\mathcal{X}$ un espace de Hilbert, de produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de norme euclidienne notée $\| \cdot \|$. Soient $a \in \mathcal{X}$ et $r > 0$. Après avoir en avoir justifié l'existence, déterminer la projection sur la boule fermée de rayon non nul

$$\overline{\mathcal{B}(a, r)} = \Big\{ x \in \mathcal{X} \mid \|x - a\| \leq r \Big\}$$

Compléments

⋆ Exercice 6 – Fréchet-différentiabilité et Gateaux-différentiabilité Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soit $a \in \mathbb{R}$.

(a) *On suppose que f est Fréchet-différentiable en a.* Montrer que f est Gateaux-différentiable en a.

(b) *On suppose à partir de cette question que f est Gateaux-différentiable en a.* Notons $\mathcal{S}$ la sphère unité. Soit $\varepsilon > 0$. Justifier qu'il existe un recouvrement fini de boules de rayon ε :

$$\mathcal{S} \subset \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{B}(v_i, \varepsilon)$$

(c) Soit $h \in \mathbb{R}^n$. Vérifier qu'il existe $v \in \mathcal{S}$ tel que $h = \|h\|_2\, v$ et $i \in [\![1\,;\, r]\!]$ tel que $\|v - v_i\|_2 \leq \varepsilon$.

(d) Montrer que

$$\begin{aligned} |f(a+h) - f(a) - f'(a;h)| \leq & \, |f(a + \|h\|_2\, v_i) - f(a) - \|h\|_2\, f'(a;v_i)| \\ & + |f(a + \|h\|_2\, v) - f(a + \|h\|_2\, v_i)| \\ & + \|h\|_2\, |f'(a;v_i) - f'(a;v)| \end{aligned}$$

(e) On rappelle que, puisque f est convexe, elle est *localement lipschitzienne*. En déduire qu'il existe $M > 0$ tel que

$$|f(a + \|h\|_2\, v) - f(a + \|h\|_2\, v_i)| \leq M\, \|h\|_2\, \varepsilon$$

(f) Montrer qu'il existe également $M' > 0$ tel que

$$|f'(a;v_i) - f'(a;v)| \leq M'\, \|v_i - v\|_2 \leq M'\, \varepsilon$$

(g) Justifier que, pour tout $i \in [\![1 \, ; r]\!]$, il existe $\delta_i > 0$ tel que pour tout $h \in \mathcal{B}(0, \delta_i)$

$$\left| \frac{f(a + \|h\|_2 \, v_i) - f(a) - \|h\|_2 \, f'(a; v_i)}{\|h\|_2} \right| \leq \varepsilon$$

Soit $\delta = \max\{\delta_i\}_{1 \leq i \leq r}$. En déduire que pour tout $i \in [\![1 \, ; r]\!]$

$$\forall \, h \in \mathcal{B}(0, \delta), \qquad |f(a + \|h\|_2 \, v_i) - f(a) - \|h\|_2 \, f'(a; v_i)| \leq \varepsilon \, \|h\|_2$$

(h) Vérifier que $$|f(a+h) - f(a) - f'(a; h)| \leq (1 + M + M') \, \|h\|_2 \, \varepsilon$$

(i) En déduire que f est FRÉCHET-différentiable an a.

Exercice 7 – Séparation d'un point et d'un convexe fermé Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$ un ensemble convexe, fermé et non vide. Soit $x^0 \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{C}$. Considérons la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \langle x^0 - \mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x^0), x \rangle \end{array} \right.$$

(a) Montrer que $$\forall \, x \in \mathcal{C}, \qquad f(x) \leq f\big(\mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x^0)\big)$$

puis que $$f(x^0) = \|x^0 - \mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x^0)\|^2 + f\big(\mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x^0)\big)$$

(b) Justifier que $$f(x^0) > f\big(\mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x^0)\big)$$

En déduire que $$\forall \, x \in \mathcal{C}, \qquad f(x^0) > f\big(\mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x^0)\big) \geq f(x)$$

(c) Considérons le point $y = (x^0 + \mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x^0))/2$. Justifier que $y \neq x^0$ et $y \neq \mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x^0)$. Montrer que

$$f(y) = \frac{1}{2} \, (f(x^0) + f(\mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x^0)) \qquad \text{et} \qquad f(x^0) > f(y) > f\big(\mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x^0)\big)$$

(d) Montrer que l'ensemble $$\mathcal{H} = \Big\{ x \in \mathcal{X} \mid \langle x^0 - \mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x^0), x \rangle = f(y) \Big\}$$

définit un hyperplan affine.

(e) Montrer que $$x^0 \in \mathcal{H}^+ = \Big\{ x \in \mathcal{X} \mid \langle x^0 - \mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x^0), x \rangle > f(y) \Big\}$$

et que $$\mathcal{C} \subset \mathcal{H}^- = \Big\{ x \in \mathcal{X} \mid \langle x^0 - \mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x^0), x \rangle < f(y) \Big\}$$

On dit alors que l'hyperplan $\mathcal{H}$ sépare strictement x^0 de $\mathcal{C}$.