Feuille d'exercices n°4
Minimisation d'une fonction
Conditions d'optimalité

Démonstrations de cours

*Les exercices de cette section **ne seront pas** traités en TD, les corrigés se trouvant dans le polycopié. Les exercices marqués ♣ sont exigibles au partiel et à l'examen.*

⋆ Exercice 1 – Existence de minimiseur pour une fonction continue infinie à l'infini

Module B1 – Proposition 9 et Lemme 1

Soit E un espace euclidien et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue et infinie à l'infini.

(a) Soit $x^0 \in E$. On suppose que l'ensemble

$$K = \Big\{x \in E \mid f(x) \le f(x_0)\Big\}$$

n'est pas borné. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n\|_2 = +\infty \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f(x_n) \le f(x_0)$$

Justifier que f n'est pas infinie à l'infini. En déduire que K est compact.

(b) Justifier qu'il existe $x^* \in K$ tel que

$$\forall\, x \in E, \qquad f(x) \le f(x^0) \qquad \Longrightarrow \qquad f(x^*) \le f(x)$$

(c) En déduire que x^* est un minimiseur de f.

♣ Exercice 2 – Stricte convexité et unicité du minimiseur

Module B1 – Proposition 10

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement convexe. On suppose que $x_1 \neq x_2 \in \arg\min_{\mathcal{X}} f$. Montrer que

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \min_{\mathcal{X}} f$$

Quelle conclusion peut-on en tirer ?

Exercice 3 – Fonctions fortement convexes différentiable

Module B1 – Proposition 11

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonction fortement convexe de module $\alpha > 0$.

(a) Soit $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe telle qu'il existe $(x_0, p) \in \mathcal{X}^2$ vérifiant

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad g(x) \ge g(x_0) + \langle p, x - x_0\rangle$$

Vérifier que

$$\langle p, x - x^0\rangle + \frac{\alpha}{2}\,\|x - x^0\|^2 = \frac{\alpha}{2}\,\left\|x - x^0 + \frac{p}{\alpha}\right\|^2 - \frac{\alpha}{2}\,\left\|\frac{p}{\alpha}\right\|^2$$

En déduire que la fonction $\quad x \mapsto g(x) + \frac{\alpha}{2}\,\|x - x^0\|^2 \quad$ est infinie à l'infini.

(b) On suppose que f est différentiable. Montrer que f est infinie à l'infini.

(c) On suppose de plus que $\mathcal{X} = E$ est un espace euclidien. Justifier que f admet un unique minimiseur.

♣ Exercice 4 – Problèmes équivalents

Module B1 – Proposition 3

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f admet au moins un minimiseur.

(a) Soit $(\alpha, \beta) \in \,]\,0\,;+\infty\,[\, \times \mathbb{R}$. Montrer que x^* est minimiseur de f si et seulement si

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad \alpha\, f(x^*) + \beta \leq \alpha\, f(x) + \beta$$

En déduire que x^* est minimiseur de f si et seulement si x^* est minimiseur de $\alpha\, f + \beta$, avec

$$\min_{x\in\mathcal{X}} (\alpha\, f(x) + \beta) = \alpha\, \min_{x\in\mathcal{X}} f(x) + \beta$$

(b) Soit $x^0 \in \mathcal{X}$. Montrer que x^* est minimiseur de f si et seulement si

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad f\big((x^* + x^0) - x^0\big) \leq f\big((x + x^0) - x^0\big)$$

En déduire que x^* est minimiseur de f si et seulement si $x^* + x^0$ est minimiseur de $y \mapsto f(y - x^0)$, avec

$$\min_{x\in\mathcal{X}} f(x) = \min_{y\in\mathcal{X}} f(y - x^0)$$

Exercices fondamentaux

Exercice 5 – Vrai/faux

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable et $x^* \in \mathbb{R}^n$. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausses (sans justification).

(a) Si les valeurs propres de $\operatorname{Hess} f(x^*)$ sont strictement positives, alors x^* est minimiseur local de f.

(b) Si f est strictement convexe, alors f admet au plus un point critique.

(c) Si f admet un unique point critique, alors f admet au plus un minimiseur.

(d) Si x^* est minimiseur global, alors les valeurs propres de $\operatorname{Hess} f(x^*)$ sont positives.

Exercice 6 – Fonction infinie à l'infini

Montrer que les fonctions suivantes sont infinies à l'infini.

(a) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2 + y^2 + \cos x \end{array} \right.$

(b) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \exp((x-1)^2 + 2\,y^2) \end{array} \right.$

(c) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 5\,x^2 + 2\,y^2 + x\,y - x - y + 1 \end{array} \right.$

(d) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|x - a\|_2^2 \end{array} \right.$

Exercice 7 – Règle de Fermat

On considère les fonctions suivantes :

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \sqrt{1+t^2} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (2x - y)^2 \end{array} \right.$$

Pour $i \in [\![\, 1\,;\, 2\,]\!]$, traiter les questions suivantes.

(a) Justifier que f_i est une fonction convexe et différentiable.

(b) Déterminer les minimiseurs de f_i à l'aide de la règle de Fermat.

Exercice 8 – Optimisation et système linéaire

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$. On considère la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{2}\,\langle A\,x, x\rangle + \langle b, x\rangle + c \end{array} \right.$$

(a) Justifier que cette fonction admet exactement un minimiseur.

(b) Montrer que le minimiseur de f est l'unique solution du système linéaire

$$A\,x = -b$$

Exercice 9 – Conditions du second ordre On considère les fonctions suivantes :

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^3 + 6\,t^2 - 15\,t + 1 \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x + y/2 - x^2/2 - y^2/2 \end{array} \right.$$

Pour $i \in [\![1\,;\,2]\!]$, traiter les questions suivantes.

(a) Justifier que f_i est une fonction deux fois différentiable.

(b) Déterminer les points critiques de f_i.

(c) La fonction f_i est-elle convexe ?

(d) Appliquer les conditions d'optimalité du second ordre pour déterminer quels points critiques de f_i sont des minimiseurs locaux / ne sont pas des minimiseurs locaux.

Compléments

Exercice 10 – Suite minimisante de fonctions fortement convexes Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonction fortement convexe, de module α. On suppose que f admet un minimiseur $x^* \in \mathcal{X}$.

(a) Soit $x \in \mathcal{X}$. Montrer que

$$\forall\,\lambda \in [\,0\,;1\,], \qquad f(\lambda\,x + (1-\lambda)\,x^*) \leq \lambda\,f(x) + (1-\lambda)\,f(x^*) - \frac{\alpha}{2}\,\lambda\,(1-\lambda)\,\|x - x^*\|^2$$

En déduire que $$\forall\,\lambda \in \,]\,0\,;1\,[\,, \qquad \|x - x^*\|^2 \leq \frac{2}{\alpha\,(1-\lambda)}\,\big(f(x) - f(x^*)\big)$$

puis que $$\|x - x^*\|^2 \leq \frac{2}{\alpha}\,\big(f(x) - f(x^*)\big)$$

(b) Montrer que toute suite minimisante pour f converge vers x^*.

Exercice 11 – Suite minimisante de fonctions continues infinies à l'infini Soit E un espace euclidien. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue et infinie à l'infini. On considère $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite minimisante pour f.

(a) Justifier que la suite des $f(x_k)$ est convergente et qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\,k \geq k_0, \qquad f(x_k) \leq f(x_{k_0}) \qquad \text{soit} \qquad x_k \in \big\{x \in \mathcal{X} \mid f(x) \leq f(x_{k_0})\big\}$$

(b) En déduire que la suite des x_k admet une sous-suite qui converge, de limite que l'on notera x^*.

(c) Montrer que $f(x^*)$ est le minimum de f et que x^* est un minimiseur de f..

Exercice 12 – Minimisation partielle On considère la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & |x+y| + 2\,|x-y| \end{array} \right.$$

(a) Montrer que f est convexe et infinie à l'infini.

(b) Montrer que les fonctions partielles $y \mapsto f(a,y)$ et $x \mapsto f(x,b)$ pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ sont convexes et infinies à l'infini.

(c) Vérifier que $(0,0)$ est l'unique minimiseur de f.

(d) Soit $a > 0$. Montrer que $y \mapsto f(a,y)$ admet un unique minimiseur et le déterminer.

(e) Montrer de même que a est l'unique minimiseur de $x \mapsto f(x,a)$.

(f) Que peut-on conclure des questions précédentes ?