Module A4
Théorème du rang constant

Dans ce module, E désigne l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}$, muni du produit scalaire usuel et de norme associée la norme euclidienne, notée $\|\cdot\|_2$. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer au module **A2 : Différentiabilité sur les espaces euclidiens**.

L'objectif de ce module est de démontrer une généralisation du théorème d'inversion locale dans le cas où la différentielle au point considéré n'est pas inversible. On va commencer par étudier les cas où elle est injective puis surjective, pour enfin considérer le cas général.

1 Rang de la différentielle

1.1 Rappel : théorème d'inversion locale

Définition 1 (Difféormorphisme)

Soit $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux espaces de Banach, $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathcal{X}$ et $\mathcal{V}$ un ouvert de $\mathcal{Y}$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Une application $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ est un *difféomorphisme de classe* $\mathcal{C}^k$, ou encore un $\mathcal{C}^k$*-difféomorphisme* de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{V}$ si

- f est bijective de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{V}$
- f et $f^{-1} : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ sont de classe $\mathcal{C}^k$.

> Dans le cas des $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes, on peut parler plus simplement de *difféomorphismes* (sans préciser la classe).

Remarque : Si f est un difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{V}$, alors, pour tout $x \in \mathcal{U}$, la différentielle $df(x)$ est inversible. En effet, puisque

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$$

on a par composition $\quad d(\mathrm{Id})(x) = d(f^{-1})(f(x)) \circ df(x)$

Puisque $\quad \mathrm{Id}(x+h) = x + h = x + \mathrm{Id}(h)$

on en déduit que la différentielle de l'identité est l'identité ; ainsi, si l'on applique l'égalité précédente à $y = f(x)$, on obtient pour tout $x \in \mathcal{U}$

$$\mathrm{Id} = d(f^{-1})(y) \circ df(x)$$

ce qui démontre que $df(x)$ est inversible, d'inverse $d(f^{-1})(f(x))$.

Exercice

Montrer que la composée de deux difféomorphismes et la réciproque d'un difféomorphisme sont des difféomorphismes.

EXERCICE

Montrer que toute permutation est un difféomorphisme.

On rappelle maintenant un résultat central en calcul différentiel :

Théorème 1 (Théorème d'inversion locale)

Soit $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux espaces de BANACH, $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ un ouvert et $a \in \mathcal{U}$. Soit $f : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Si $df(a) : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ est bijective, alors il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}_0$ de a tel que $\mathcal{V}_0 = f(\mathcal{U}_0)$ soit ouvert dans $\mathcal{Y}$ et que f soit un difféomorphisme de $\mathcal{U}_0$ sur $\mathcal{V}_0$.

REMARQUE : Pour que f satisfasse les hypothèses de ce théorème, $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ doivent être soit de même dimension, soit tous les deux de dimension infinie.

En dimension finie, la différentielle peut être identifiée à la matrice jacobienne, pour laquelle le caractère bijectif se traduit par la non-nullité du déterminant. Ainsi, on a la version suivante du théorème précédent :

Théorème 2 (Théorème d'inversion locale en dimension finie)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $a \in U$. Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Si le déterminant jacobien $\det Jf(a)$ est non nul, alors il existe un voisinage ouvert U_0 de a tel que $V_0 = f(U_0)$ soit ouvert dans $\mathbb{R}^n$ et que f soit un difféomorphisme de U_0 sur V_0.

Le théorème d'inversion locale peut s'interpréter de la manière suivante : si la différentielle de l'application f de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathcal{U}$ est inversible au point $a \in \mathcal{C}$, alors il existe un voisinage de a sur lequel la différentielle reste inversible. Autrement dit, dans le cas de la dimension finie, si $df(a)$ est de rang n, alors $df(x)$ est de rang n pour x voisin de a.

1.2 Rang de la différentielle

On se place désormais dans le cas de la dimension finie. La remarque du paragraphe précédent nous incite à nous intéresser au rang de la différentielle d'une application en un point où elle est définie.

> Pour les rappels sur le rang d'une application linéaire et le rang d'une matrice, ainsi que les principales propriétés utilisées dans ce module, le lecteur est invité à se reporter au document **Compléments C1 : Éléments d'algèbre linéaire**.

Commençons par noter que le rang de la différentielle d'une application $f : E \to F$ ne reste en général pas constant sur l'ensemble des points où f est différentiable. L'exemple suivant le prouve :

EXEMPLE

On considère la fonction suivante :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{2} \|x\|_2^2 \end{array} \right.$$

Il s'agit d'une fonction polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^1$, de gradient

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^2, \qquad \nabla f(x) = x$$

Autrement dit, la différentielle de f en a est l'application linéaire suivante :

$$df(a) : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ h & \mapsto & \langle a, h \rangle \end{array} \right.$$

Si $a = (0,0)$, alors $df(a)$ est la forme linéaire nulle, elle est donc de rang nul. Si $a \neq (0,0)$, alors $df(a)$ n'est pas injective (car si a est de la forme (a_x, a_y), alors $df(a) \cdot (-b, a)^\top = 0$ avec $(-b, a) \neq (0,0)$; le théorème du rang assure alors que $df(a)$ est de rang 1. On voit donc que df n'est pas de rang constant sur $\mathbb{R}^2$.

> Attention ! Quand on parle du rang de la différentielle, on s'intéresse bien au rang de **l'application linéaire** $df(a)$, et non à l'application df qui a tout point a où f est différentiable, associe sa différentielle $df(a)$ (cette application n'ayant aucune raison d'être linéaire). Par ailleurs, quand on dit que le rang de la différentielle est constant, il est sous-entendu qu'il est constant par rapport au point a. Plus précisément, dire que le rang de la différentielle est constant sur l'ensemble $\mathcal{E}$ signifie que, pour tous points $(a, a') \in \mathcal{E}^2$, on a
>
> $$\operatorname{rg}\big(df(a)\big) = \operatorname{rg}\big(df(a')\big)$$
>
> Le point a doit donc *varier* ; dans le cas contraire, si a est fixé, alors $df(a)$ a un rang donné, comme toute application linéaire, et celui-ci ne peut subir aucune “variation”.

Dans la section suivante, on va généraliser le théorème d'inversion locale dans certains cas où l'espace de départ et d'arrivée ne sont pas de même dimension, donc lorsque la différentielle de l'application considérée en un point donné ne peut être à la fois injective et surjective. Elle sera seulement l'un ou l'autre.

2 Immersion et submersion

2.1 Définitions

Définition 2 (Immersion)

Soit $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux espaces de BANACH et $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathcal{X}$. Une application différentiable $f : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$ est une *immersion* en $x \in \mathcal{U}$ si sa différentielle en x est injective.

On dit que f est une *immersion* si elle est une immersion en tout $x \in \mathcal{U}$.

Remarque : Si $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont de dimension finie, de dimension respective n et m, et si f est une immersion en $x \in \mathcal{X}$, alors $n \leq m$.

En dimension finie, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une immersion en $x \in \mathcal{U}$ si la matrice jacobienne $Jf(x)$ est de rang n. Autrement dit, les n vecteurs **colonnes** de $Jf(x)$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^m$, tandis que les m vecteurs **lignes** de $Jf(x)$ (qui ne sont autrement que les gradients $\nabla f_i(x)$ des composantes de f en x) forment une famille génératrice (cf. **Compléments C1 : Éléments d'algèbre linéaire**).

Exercice

Injection canonique. Soit $n \leq m$ deux entiers naturels non nuls. On considère l'application suivante :

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) \end{array} \right.$$

L'application f est appelée *injection canonique* de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Montrer que f est une immersion sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable. On considère l'application suivante :

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^{n+m} \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Alors f est une immersion sur $\mathbb{R}^n$. En effet, elle est différentiable, et sa matrice jacobienne vaut

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \qquad Jf(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n \\ Jf(x) \end{pmatrix}$$

qui est bien de rang n, donc $df(x)$ est injective pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

D'une manière analogue, on peut définir les submersions :

Définition 3 (Submersion)

Soit $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux espaces de Banach et $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathcal{X}$. Une application différentiable $f : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$ est une *submersion* en $x \in \mathcal{U}$ si sa différentielle en x est surjective.
On dit que f est une *submersion* si elle est une submersion en tout $x \in \mathcal{U}$.

Remarque : Si $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont de dimension finie, de dimension respective n et m, et si f est une submersion en $x \in \mathcal{X}$, alors $n \geq m$.

En dimension finie, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une submersion en $x \in \mathcal{U}$ si la matrice jacobienne $Jf(x)$ est de rang m. Puisque la transposée de $Jf(x)$ est également de rang m, la définition de $Jf(x)$ implique donc que les m gradients $\nabla f_i(x)$ des composantes de f forment une famille libre de $\mathbb{R}^n$ (cf. **Compléments C1 : Éléments d'algèbre linéaire**). De même, les n vecteurs **colonnes** de $Jf(x)$ forment une famille génératrice.

EXERCICE

Projection canonique. Soit $n \geq m$ deux entiers naturels non nuls. On considère l'application suivante :

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & (x_1, \ldots, x_m) \end{array} \right.$$

L'application f est appelée *projection canonique* de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^m$. Montrer que f est une submersion sur $\mathbb{R}^n$.

Signalons que l'ensemble des immersions (resp. submersions) sont stables par composition avec des difféomorphismes :

Proposition 1

Soit $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux espaces de BANACH et $\mathcal{U}, \mathcal{U}_0$ deux ouverts de $\mathcal{X}$. Soit $f : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$ une application différentiable. Soit $\phi : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}$ et $\psi : f(\mathcal{U}) \to \psi \circ f(\mathcal{U})$ deux difféomorphismes. Si f est une immersion (resp. submersion), alors $\psi \circ f \circ \phi$ est une immersion (resp. submersion).

DÉMONSTRATION : Par composition, l'application $g = \psi \circ f \circ \phi$ est différentiable sur $\mathcal{U}_0$, de différentielle

$$\forall\, x \in \mathcal{U}_0, \qquad dg(x) = d\psi(f \circ \phi(x)) \circ d(f \circ \phi)(x) = d\psi(f \circ \phi(x)) \circ df(\phi(x)) \circ d\phi(x)$$

Soit $x \in \mathcal{U}_0$. Puisque ψ et ϕ sont des difféomorphismes, $d\psi(y)$ et $d\phi(x)$ sont inversibles pour tout $y \in f(\mathcal{U})$ (et donc pour $y = f \circ \phi(x)$ en particulier).

- **Supposons que f soit une immersion.** Par définition, $df(\phi(x))$ est injective pour tout $x \in \mathcal{U}_0$. Montrons que $dg(x)$ est injective. Soit $h \in \mathcal{X}$. On a

  $$dg(x) \cdot h = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad d\psi(f \circ \phi(x)) \circ df(\phi(x)) \circ d\phi(x) \cdot h = 0$$

  Puisque $d\psi(f \circ \phi(x))$ est bijective, elle est en particulier injective ; il s'ensuit que

  $$df(\phi(x)) \circ d\phi(x) \cdot h = 0$$

  Par hypothèse sur f, on a ensuite

  $$d\phi(x) \cdot h = 0$$

  puis la bijectivité de $d\phi(x)$ assure que $h = 0$. On vient donc de démontrer que $dg(x)$ est injective.

- **Supposons que f soit une submersion.** Par définition, $df(\phi(x))$ est surjective pour tout $x \in \mathcal{U}_0$. Montrons que $dg(x)$ est surjective. Soit $x \in \mathcal{U}_0$ et $y \in \mathcal{Y}$. Puisque $d\psi(f \circ \phi(x))$ est bijective, il existe un (unique) $y_0 \in \mathcal{Y}$ tel que

  $$d\psi(f \circ \phi(x)) \cdot y_0 = y$$

  De même, comme $df(\phi(x))$ est surjective, on en déduit qu'il existe $x_0 \in \mathcal{X}$ tel que

  $$df(\phi(x)) \cdot x_0 = y_0$$

  Enfin, la bijectivité de $d\phi(x)$ assure l'existence d'un (unique) $h \in \mathcal{X}$ tel que

  $$d\phi(x) \cdot h = x_0$$

  Finalement,

  $$d\psi(f \circ \phi(x)) \circ df(\phi(x)) \circ d\phi(x) \cdot h = y$$

  Autrement dit, on vient de démontrer que $dg(x)$ est surjective. ■

EXEMPLE

Translation, homothétie, rotation. Soit $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$. Si $f : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$ est une immersion (resp. submersion), alors $f(\cdot - a)$ et $f + b$ sont des immersions (resp. submersion) pour tout $(a, b) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. De même, dans le plan ou l'espace, la composition d'une immersion (resp. une submersion) par une homothétie (de rapport non nul) ou par une rotation est une immersion (resp. submersion).

2.2 Rang de la différentielle d'une immersion / submersion

À partir de ce paragraphe, on se place dans le cas de la dimension finie.

Le théorème d'inversion locale assure que, si l'application $f : E \to F$ est $\mathcal{C}^1$ et que $df(a)$ est inversible pour un certain a, alors il existe un voisinage de a sur lequel df reste inversible, c'est-à-dire que son rang est constant sur ce voisinage. Dans ce paragraphe, on va démontrer que cette propriété reste vraie lorsque $df(a)$ n'est pas inversible (donc, non bijective), mais seulement injective ou surjective. Cela correspond au cas où la différentielle est de rang **maximal**, puisque dans ce cas

$$\operatorname{rang} df(a) = \min\{\dim E, \dim F\}$$

(le théorème du rang assurant que le rang d'une application linéaire est nécessairement majoré par cette valeur).

Lemme 1

Soit E et F deux espaces euclidiens, $U \subset E$ un ouvert et $a \in U$. Soit $f : U \to F$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Alors il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a tel que

$$\forall\, x \in \mathcal{V}, \qquad \operatorname{rang}(df(x)) \geq \operatorname{rang}(df(a))$$

En d'autres termes, au voisinage de a, le rang de la différentielle ne peut que croître.

DÉMONSTRATION : Notons r le rang de $df(a)$. Par définition, l'image de $df(a)$ est de dimension r. On peut donc considérer une base $(u_1, \dots, u_r) \in E^r$ de cet espace. Puisque $u_i \in \operatorname{Im}(df(a))$ pour tout $i \in [\![1 ; r]\!]$, il s'ensuit qu'il existe $(h_i)_{1 \leq i \leq r} \in E^r$ tel que

$$\forall\, i \in [\![1 ; r]\!], \qquad df(a)(h_i) = u_i$$

Par construction, les vecteurs $df(a)(h_i)$ forment une famille libre. Nous allons montrer que, pour x voisin de a, les r vecteurs $df(x)(h_i)$ forment également une famille libre. Pour cela, on va montrer que, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$, (la norme de) la combinaison linéaire

$$\sum_{i=i}^{r} \lambda_i\, df(x)(h_i)$$

ne s'annule pas. On commence par écrire que

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=i}^{r} \lambda_i\, df(x)(h_i) \right\|_2 &= \left\| \sum_{i=i}^{r} \lambda_i\, df(a)(h_i) + \sum_{i=i}^{r} \lambda_i \left(df(x)(h_i) - df(a)(h_i) \right) \right\|_2 \\
&\geq \left\| \sum_{i=i}^{r} \lambda_i\, df(a)(h_i) \right\|_2 - \left\| \sum_{i=i}^{r} \lambda_i \big(df(x)(h_i) - df(a)(h_i) \big) \right\|_2
\end{aligned}$$

l'inégalité étant une conséquence de l'inégalité triangulaire. Le premier terme du membre de droite est strictement positif par hypothèse. Puisque l'application définie par

$$(\lambda_i)_{1 \leq i \leq r} \mapsto \sum_{i=i}^{r} \lambda_i \, df(a)(h_i)$$

est linéaire, elle est bornée et il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall \, (\lambda_i)_{1 \leq i \leq r} \in \mathbb{R}^r, \qquad \left\| \sum_{i=i}^{r} \lambda_i \, df(a)(h_i) \right\|_2 \geq \alpha \max_{i \in [\![1\,;\,r]\!]} |\lambda_i|$$

Quant au second terme, il est minoré par

$$- \max_{i \in [\![1\,;\,r]\!]} |\lambda_i| \max_{i \in [\![1\,;\,r]\!]} \| df(x)(h_i) - df(a)(h_i) \|_2$$

La continuité de df sur U assure l'existence d'un voisinage de a sur lequel le terme de droite est inférieur à $\alpha/2$. On en déduit que, pour tout x dans ce voisinage, on a

$$\forall \, (\lambda_i)_{1 \leq i \leq r} \in \mathbb{R}^r, \qquad \left\| \sum_{i=i}^{r} \lambda_i \, df(x)(h_i) \right\|_2 \geq \frac{\alpha}{2} \max_{i \in [\![1\,;\,r]\!]} |\lambda_i|$$

ce qui démontre bien la liberté de la famille considérée. Or cette famille est un élément de l'image de $df(x)$; on en déduit que la dimension de ce sous-espace vectoriel est au moins égal à r. ■

On peut maintenant démontrer le résultat suivant :

Proposition 2

Soit E et F deux espaces euclidiens, $U \subset E$ un ouvert et $a \in U$. Soit $f : U \to F$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Si $df(a)$ est surjective ou injective, alors il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a tel que

$$\forall \, x \in \mathcal{V}, \qquad \operatorname{rang}\left(df(x)\right) = \operatorname{rang}\left(df(a)\right)$$

En d'autres termes, si f est une immersion (resp. une submersion) en a, alors f est une immersion (resp. une submersion) en tout x voisin de a.

Démonstration : On va démontrer séparément les deux inégalités.

- **Montrons que** $\operatorname{rang}(df(x)) \geq \operatorname{rang}(df(a))$**.** Il s'agit d'une conséquence directe du lemme 1.
- **Montrons que** $\operatorname{rang}(df(x)) \leq \operatorname{rang}(df(a))$**.** Soit $x \in U$ et $r(x)$ le rang de $df(x)$. On a d'après le théorème du rang (cf. **Compléments C1 : Éléments d'algèbre linéaire**) une première inégalité

  $$r(x) \leq \min(\dim E, \dim F)$$

  Si $df(a)$ est surjective, alors on a nécessairement

  $$\dim F \leq \dim E \qquad \text{et} \qquad \operatorname{rang} df(a) = \dim F$$

  (cf. **Compléments C1 : Éléments d'algèbre linéaire**). Si $df(a)$ est injective, alors on a nécessairement

  $$\dim E \leq \dim F \qquad \text{et} \qquad \operatorname{rang} df(a) = \dim E$$

  (cf. **Compléments C1 : Éléments d'algèbre linéaire**). Finalement, on a montré que, dans les deux cas,

  $$\operatorname{rang} df(a) = \min(\dim E, \dim F)$$

ce qui achève la preuve. ■

2.3 Formes normales

Dans ce paragraphe, on va montrer que, localement, à un changement de variables près, les immersions et les submersions ont une forme très simple.

On commence par montrer que, à un changement de variables près, toute immersion est localement une injection canonique. Pour simplifier les calculs, on suppose dans un premier temps que l'image de l'origine est l'origine.

Proposition 3 (Forme normale locale d'une immersion)

Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert contenant 0. Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ une immersion de classe $\mathcal{C}^1$ en 0 telle que $f(0) = 0$. Alors il existe $W \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert contenant 0 et $\psi : W \to \mathbb{R}^m$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme tel que, pour x voisin de 0,

$$\psi \circ f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$$

Démonstration : Puisque $df(0)$ est injective, les vecteurs lignes de $Jf(0)$, c'est-à-dire les gradients $\nabla f_i(0)$ pour $i \in [\![1\,;\,m]\!]$, génèrent $\mathbb{R}^n$. On peut donc choisir parmi ces vecteurs n vecteurs formant une base de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire tels que la sous-matrice carrée constituée de ces n lignes soit inversible. On rappelle que les lignes en question sont de la forme

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(0), \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(0)\right)$$

- On commence par supposer qu'on peut choisir les n premières lignes $Jf(0)$. On s'intéresse alors à l'application suivante :

$$g : \left\{ \begin{array}{rcl} U \times \mathbb{R}^{m-n} & \to & \mathbb{R}^m \\ (x,y) & \mapsto & (f_1(x), \dots, f_n(x), f_{n+1}(x) + y_1, \dots, f_m(x) + y_{m-n}) \end{array} \right.$$

Par hypothèse, l'application g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U \times \mathbb{R}^{m-n}$. Sa matrice jacobienne est donnée par

$$Jg(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_n}(x) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On reconnaît donc la matrice définie par blocs

$$Jg(x) = \begin{pmatrix} (Jf(x))_{1 \le j \le n} & 0 \\ (Jf(x))_{n+1 \le j \le m} & \mathrm{I}_{m-n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R})$$

Par hypothèse, les deux sous-matrices diagonales sont inversibles, donc $Jg(0)$ est inversible. Le théorème d'inversion locale assure donc qu'il existe un voisinage ouvert de $U_0 \subset \mathbb{R}^m$ de 0 tel que g soit un difféomorphisme de U_0 sur $g(U_0)$. Autrement dit, g est bijective, g^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $g(U_0)$. On a alors en particulier pour (x, y) voisin de $(0, 0)$

$$(x, y) = g^{-1} \circ g(x) = g^{-1}\big(f(x) + (0, y)\big)$$

On peut choisir $y = 0$; on en déduit alors que, pour x voisin de 0,

$$g^{-1} \circ f(x) = (x, 0)$$

Il suffit donc de choisir $\psi = g^{-1}$.

- Dans le cas général, il suffit de considérer une permutation $p : [\![1\,;\, m]\!] \to [\![1\,;\, m]\!]$ telle que les vecteurs $\nabla f_{p(i)}$ pour $i \in [\![1\,;\, n]\!]$ forment une base de $\mathbb{R}^n$. Ainsi, si on s'intéresse à l'application $\tilde{f} = p \circ f = \big(f_{p(i)}\big)_{i \in [\![1\,;\, m]\!]}$, celle-ci satisfait les hypothèses du point précédent. On en déduit donc finalement que, si

$$\tilde{g} : \left\{ \begin{array}{ccc} U \times \mathbb{R}^{m-n} & \to & \mathbb{R}^m \\ (x, y) & \mapsto & (\tilde{f}_1(x), \dots, \tilde{f}_n(x), \tilde{f}_{n+1}(x) + y_1, \dots, \tilde{f}_m(x) + y_{m-n}) \end{array} \right.$$

alors pour x voisin de 0,

$$\tilde{g}^{-1} \circ \tilde{f}(x) = \tilde{g}^{-1} \circ p \circ f = (x, 0)$$

avec $\tilde{g}^{-1} \circ p$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. On peut donc choisir $\psi = g^{-1} \circ p$. ■

On montre maintenant que, localement, à un changement de variables près, une submersion est une projection canonique. Pour simplifier les calculs, on suppose encore une fois que l'image de l'origine est l'origine.

Proposition 4 (Forme normale locale d'une submersion)

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert contenant 0. Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ une submersion en 0 telle que $f(0) = 0$. Alors il existe $V \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert contenant 0 et $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme tel que $\phi(0) = 0$ et, pour $x \in \mathbb{R}^n$ voisin de 0,

$$f \circ \phi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m)$$

Démonstration : Puisque $df(0)$ est surjective, les n vecteurs colonnes de $Jf(0)$ génèrent $\mathbb{R}^m$. On peut donc choisir parmi elles m colonnes telles que la sous-matrice carrée constituée de ces m colonnes soit inversible. On rappelle que les colonnes en question sont de la forme

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x)\right)^\top$$

- On commence par supposer qu'on peut choisir les m premières lignes $Jf(0)$. On s'intéresse à l'application suivante :

$$h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & (f_1(x), \dots, f_m(x), x_{m+1}, \dots, x_n) \end{array} \right.$$

Par hypothèse, l'application g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Sa matrice jacobienne est donnée par

$$Jh(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_{m+1}}(x) & \dots & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_{m+1}}(x) & \dots & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On reconnaît donc la matrice définie par blocs

$$Jh(x) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq m}} & \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1\leq i\leq m \\ m+1\leq j\leq n}} \\ 0 & \mathrm{I}_{n-m} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$$

D'après l'hypothèse faite plus haut, lorsque $x = 0$, les deux matrices diagonales sont inversibles, donc la matrice $Jh(0)$ est inversible. Le théorème d'inversion locale assure donc qu'il existe un voisinage ouvert de $U_0 \subset \mathbb{R}^n$ de 0 tel que h soit un difféomorphisme de U_0 sur $h(U_0)$. Autrement dit, h est bijective, h^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $g(U_0)$. On a alors en particulier pour x voisin de 0

$$x = h \circ h^{-1}(x) = \big(f_1 \circ h^{-1}(x), \dots, f_m \circ h^{-1}(x), (h^{-1}(x))_{m+1}, \dots, (h^{-1}(x))_n\big)$$

En particulier, on voit que les m premières coordonnées de $h \circ h^{-1}(x)$ forment le vecteur $f \circ h^{-1}(x)$; or, les m premières coordonnées de $h \circ h^{-1}(x)$ sont exactement les m premières coordonnées de x.

- Pour achever la preuve, on doit considérer le cas général. Soit $(i_j)_{1\leq j\leq m}$ un sous-ensemble de m entiers distincts compris entre 1 et n tel que la sous-matrice de $Jf(0)$ définie par

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{i_j}}(x)\right)_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq m}}$$

soit inversible. La permutation $p : [\![1 \,;\, m]\!] \to [\![1 \,;\, m]\!]$ donnée par

$$\forall\, j \in [\![1 \,;\, m]\!], \qquad p(j) = i_j$$

est un difféomorphisme. On peut donc appliquer la preuve du point précédent à la fonction $\tilde{f} = f \circ p^{-1}$. ■

Dans les deux résultats précédents, on a fait l'hypothèse que l'image de l'origine est l'origine. Si $f : U \to \mathbb{R}^m$ est une immersion (resp. une submersion) quelconque en a, alors l'application

$$\tilde{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} U - a & \to & \mathbb{R}^m \\ y & \mapsto & f(y+a) - f(a) \end{array} \right.$$

est une immersion (resp. une submersion) en 0 telle que $\tilde{f}(0) = 0$. Ainsi, on peut toujours se ramener aux hypothèses de la proposition 3 (resp. de la proposition 4). Plus précisément, si f est une immersion en a, alors la proposition 3 s'écrit pour la fonction $\tilde{f}$: il existe $W \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert contenant 0 et $\psi : W \to \mathbb{R}^m$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme tel que, pour y voisin de 0,

$$\psi(f(y_1 + a_1, \dots, y_n + a_n) - f(a)) = (y_1, \dots, y_n, 0, \dots, 0)$$

En effectuant le changement de variables $x = y + a$ et en posant $\tilde{\psi} = \psi(\cdot - f(a))$, on obtient, pour x voisin de a,

$$\tilde{\psi} \circ f(x_1, \dots, x_n) = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n, 0, \dots, 0) = (x, 0) - (a, 0)$$

On notera que $\tilde{\psi}$ est un difféomorphisme sur un voisinage de a. On peut établir un résultat similaire si f est une submersion en a. On résume ces deux résultats dans le corollaire suivant :

Corollaire 1 (Formes normales locales - cas général)

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $a \in U$. Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application différentiable sur U.

- Si f est une immersion en a, alors il existe $W \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert contenant $f(a)$ et $\psi : W \to \mathbb{R}^m$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme tel que, pour x voisin de a,

$$\psi \circ f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) - (a_1, \dots, a_n, 0, \dots, 0)$$

- Si f est une submersion en a, alors il existe $V \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert contenant 0 et $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme tel que $\phi(0) = a$ et pour x voisin de 0,

$$f \circ \phi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m) + f(a)$$

3 Théorème du rang constant

Dans cette section, on se place dans le cas de la dimension finie. Le but de cette section est double : dans un premier temps, reformuler le corollaire 1 en exprimant les injection et projection canoniques directement à l'aide de la différentielle au point considéré ; généraliser le résultat obtenu lorsque l'application n'est ni une immersion, ni une submersion.

3.1 Cas d'une immersion ou d'une submersion

On se place dans le cas de la dimension finie. On a vu dans la section précédente que si $f(0) = 0$ et si f est une immersion en 0, alors

- il existe un voisinage $U \subset \mathbb{R}^n$ de a tel que, pour tout $x \in U$, l'application f est une immersion en x (*localement, f reste une immersion*) ;
- il existe un voisinage V de 0 et $\psi : f(V) \to \mathbb{R}^m$ un difféomorphisme autour de 0 tels que, pour tout $x \in V$, l'application $\psi \circ f$ est l'injection canonique de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

De manière analogue, si f est une submersion en 0, alors

- il existe un voisinage $U \subset \mathbb{R}^n$ de 0 tel que, pour tout $x \in U$, l'application f est une submersion en x (*localement, f reste une submersion*) ;
- il existe un voisinage V de 0 et $\phi : V \to \mathbb{R}^m$ un difféomorphisme autour de 0 tels que, pour tout $x \in V$, l'application $f \circ \phi$ est la projection sur les m premières coordonnées.

Ainsi, quitte à remplacer ϕ ou ψ par une application identité, on a montré dans les deux cas que, au voisinage de 0,

$$\psi \circ f \circ \phi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \cdots, x_r, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m$$

où ψ et ϕ sont des difféomorphismes autour de 0 et où r est le rang de $df(0)$. Grâce au corollaire **??** des **Compléments C1 : Éléments d'algèbre linéaire**, on sait par ailleurs que, quitte à réaliser un changement de base, on peut réécrire cette identité directement à l'aide de la différentielle $df(0)$, qui est de rang $r \in \{m, n\}$: au voisinage de 0, il existe deux difféomorphismes ψ et ϕ tels que

$$\psi \circ f \circ \phi = df(0)$$

Il est possible d'étendre cette formule au cas plus général où $a \neq 0$ et $f(0) \neq 0$; on obtient alors

$$\psi \circ f \circ \phi = df(a)$$

Autrement dit, si f est une immersion ou une submersion en a, alors, localement, à un changement de variables près, f se comporte comme sa différentielle en a.

> Plus précisément, dans le cas d'une submersion par exemple, le corollaire **??** des **Compléments C1 : Éléments d'algèbre linéaire** et le corollaire 1 assurent l'existence d'un difféomorphisme $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ défini au voisinage V de 0, tel que $\psi(0) = a$, et l'existence de deux applications **linéaires** bijectives $\tilde{\psi} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ et $\tilde{\phi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tels que pour x voisin de 0,
>
> $$f \circ \phi(x) = (x_1, \ldots, x_m) + f(a) = \tilde{\psi} \circ df(a) \cdot \tilde{\phi}(x) + f(a)$$
>
> Il suffit alors d'appliquer une translation pour obtenir le résultat énoncé plus haut.

3.2 Cas général

Dans ce paragraphe, on va relâcher l'hypothèse d'un rang maximal pour la différentielle. Dans ce cas, on a vu que, si $df(a)$ est de rang r quelconque, alors il n'existe pas nécessairement un voisinage de a sur lequel la différentielle de f reste de rang r (il suffit de reprendre l'exemple introductif du paragraphe 1.2, en choisissant $a = 0$). Toutefois, **si le rang de la différentielle reste constant** au voisinage de a, on peut généraliser le résultat obtenu pour les immersions et les submersions, à savoir que, localement, à un changement de variables près, l'application f se comporte comme sa différentielle en a.

Comme dans le cas des immersions ou des submersions, on va commencer par démontrer une version plus simple de ce résultat, où l'on suppose que $f(0) = 0$ avec $df(0)$ de rang r.

Proposition 5

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert contenant 0. Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$. On suppose que rang $df(x) = r$ pour tout $x \in U$. Alors il existe $V \subset \mathbb{R}^n$ et $W \subset \mathbb{R}^m$ deux ouverts contenant 0, $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ et $\psi : W \to \mathbb{R}^m$ deux $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes tel que $\phi(0) = 0$ et, pour $x \in \mathbb{R}^n$ voisin de 0,

$$\psi \circ f \circ \phi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$$

Autrement dit, localement, à deux changements de variables près, f est une projection canonique.

DÉMONSTRATION : De même que pour la démonstration de la forme normale locale d'une submersion, on peut supposer que, à deux changements de base près, les r premières lignes et les r premières colonnes de $Jf(0)$ forment une matrice inversible. Autrement dit, la matrice suivante

$$\det\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(0)\right)_{\substack{1\le i\le r\\ 1\le j\le r}} \neq 0$$

on pose
$$\hat{U} = \left\{\hat{x} \in \mathbb{R}^r \mid x \in U\right\}$$

Si U est un ouvert contenant 0 dans $\mathbb{R}^n$, alors $\hat{U}$ est un ouvert contenant 0 dans $\mathbb{R}^r$. On peut alors définir la fonction suivante :

$$\hat{f} : \left\{\begin{array}{ccc} \hat{U} & \to & \mathbb{R}^m \\ \hat{x} & \mapsto & f(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_r, 0, \ldots, 0) \end{array}\right.$$

Puisque f est différentiable sur U, l'application $\hat{f}$ est différentiable sur $\hat{U}$. On définit deux applications :

$$g : \left\{\begin{array}{ccc} \hat{U} \times \mathbb{R}^{m-r} & \to & \mathbb{R}^m \\ (\hat{x}, y) & \mapsto & (\hat{f}_1(\hat{x}), \ldots, \hat{f}_r(\hat{x}), \hat{f}_{r+1}(\hat{x}) + y_1, \ldots, \hat{f}_m(\hat{x}) + y_{m-r}) \end{array}\right.$$

et
$$h : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & (f_1(x), \ldots, f_r(x), x_{r+1}, \ldots, x_n) \end{array}\right.$$

Ces deux applications sont de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de 0, de matrices jacobiennes respectives

$$Jg(\hat{x}, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \hat{x}_1}(\hat{x}) & \ldots & \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial \hat{x}_r}(\hat{x}) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \hat{f}_r}{\partial \hat{x}_1}(\hat{x}) & \ldots & \frac{\partial \hat{f}_r}{\partial \hat{x}_r}(\hat{x}) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{\partial \hat{f}_{r+1}}{\partial \hat{x}_1}(\hat{x}) & \ldots & \frac{\partial \hat{f}_{r+1}}{\partial \hat{x}_r}(\hat{x}) & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{\partial f_m}{\partial \hat{x}_1}(\hat{x}) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial \hat{x}_r}(\hat{x}) & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et
$$Jh(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_r}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_{r+1}}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_{r+1}}(x) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_r}{\partial x_r}(x) & \frac{\partial f_r}{\partial x_{r+1}}(x) & \frac{\partial f_r}{\partial x_{r+1}}(x) & \ldots & \frac{\partial f_r}{\partial x_n}(x) \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De même que dans le cas où $r \in \{m, n\}$, on peut montrer que $Jg(0,0)$ et $Jh(0)$ sont inversibles, donc le théorème d'inversion locale implique que, sur un voisinage de l'origine, les deux applications g et h sont des difféomorphismes, d'inverse g^{-1} et h^{-1}. En choisissant $\psi = g^{-1}$ et $\phi = h^{-1}$, on démontre le résultat annoncé. ■

On conclut ce module avec une formulation plus générale de ce résultat, donnée dans le théorème suivant :

Théorème 3 (Théorème du rang constant)

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $a \in U$. Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application $\mathcal{C}^1$. On suppose que $\operatorname{rang} df(x) = r$ pour tout $x \in U$. Alors il existe $V \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert contenant 0, $W \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert contenant $f(a)$ et $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ et $\psi : W \to \mathbb{R}^m$ deux $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes tels que $\phi(V)$ est un ouvert contenant a et, sur V,

$$\psi \circ f \circ \phi = df(a)$$

Démonstration : Laissée en exercice. On commencera par relâcher l'hypothèse $f(0) = 0$ à l'aide de translation, puis on utilisera un changement de base pour remplacer la projection canonique par la différentielle en a.