Feuille d'exercices n°2
Différentiabilité sur les espaces euclidiens

Démonstrations de cours

Les exercices de cette section ***ne seront pas*** *traités en TD, les corrigés se trouvant dans le polycopié. Les exercices marqués ♣ sont exigibles au partiel et à l'examen.*

♣ Exercice 1 – Différentielle et dérivées partielles
Module A2 – Corollaires 1 et 2

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soient U un ouvert de E et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en $a \in U$.

(a) Soit $i \in [\![1\,;\, n]\!]$. On note e_i le i-ème vecteur de la base canonique de E et on pose

$$g_i : t \mapsto f(a + t\, e_i)$$

Justifier que g_i est dérivable en 0 et montrer que

$$g_i'(0) = df_a(e_i) = \langle \nabla f(a), e_i \rangle$$

(b) En déduire que
$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right)_{1 \leq i \leq n}$$

et que
$$\forall\, h \in E, \qquad df_a(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, h_i$$

Exercice 2 – Règles de calcul pour la différentielle seconde
Module A2 – Propositions 8

Soient U un ouvert de E, $a \in U$ et $f, g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions deux fois différentiables en a. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Justifier que ∇f et ∇g sont différentiables en a. En déduire que $\lambda\, \nabla f + \mu\, \nabla g$ est différentiable en x voisin de a et que

$$d_x(\lambda\, f + \mu\, g)(h) = \lambda\, J(\nabla f)(x)\, h + \mu\, J(\nabla g)(x)\, h$$

(b) Justifier que $\lambda\, f + \mu\, g$ est deux fois différentiable en a et que

$$\mathrm{Hess}(\lambda\, f + \mu\, g) = \lambda\, \mathrm{Hess}\, f(a) + \mu\, \mathrm{Hess}\, g(a)$$

Exercices fondamentaux

Exercice 3 – Vrai/faux

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausses (sans justification).

(a) f est continue en a. Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$ existent.

(b) $x \mapsto f(x, a_2)$ et $y \mapsto f(a_1, y)$ sont continues en a_1 et a_2 respectivement. Donc f est continue en a.

(c) $x \mapsto f(x, a_2)$ et $y \mapsto f(a_1, y)$ sont $\mathcal{C}^1$ en a_1 et a_2 respectivement. Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ en a.

(d) f est différentiable en a. Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$ existent.

(e) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$ existent. Donc f est différentiable en a.

(f) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$ existent. Donc f est continue en a.

Exercice 4 – Gradient Pour les fonctions suivantes, répondre aux questions suivantes :

1. Montrer que la différentielle existe sur un ouvert que l'on déterminera.
2. Calculer le gradient aux points où il existe, puis la différentielle.
3. La fonction est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

(a) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 2\,x^2 + 6\,y^2 \end{array} \right.$

(b) $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & y\,\mathrm{e}^{x-z} \end{array} \right.$

(c) $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \ln(x^2 + y^2 + 1) \end{array} \right.$

(d) $k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & \ln(x) + \cos(y^2 - z) \end{array} \right.$

Exercice 5 – Matrice jacobienne Pour les fonctions suivantes, répondre aux questions suivantes :

1. Montrer que la différentielle existe sur un ouvert que l'on déterminera.
2. Calculer la matrice jacobienne aux points où elle existe, puis la différentielle.
3. La fonction est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

(a) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x^2 - y^2 - 2\,x\,y, y, y^3) \end{array} \right.$

(b) $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2\,x^2 + 6\,y^2, \ln(x^2 + y^2 + 1)) \end{array} \right.$

Exercice 6 – Matrice hessienne Pour les fonctions suivantes, répondre aux questions suivantes :

1. Montrer que la différentielle seconde existe sur l'ensemble de définition.
2. Calculer la matrice hessienne, puis la différentielle seconde.

(a) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 2\,x^2 + 6\,y^2 \end{array} \right.$

(b) $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & y\,\mathrm{e}^{x-z} \end{array} \right.$

Exercice 7 – Dérivabilité partielle et différentiabilité On considère la fonction définie par

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Montrer que la fonction f admet des dérivées partielles selon ses deux variables en tout point de $\mathbb{R}^2$. Sont-elles continues en $(0,0)$?

(b) La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?

(c) La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

Compléments

Exercice 8 – Forme bilinéaire Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. On considère la fonction suivante

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \langle A\,x, x \rangle \end{array} \right.$$

Soit $a \in \mathbb{R}^n$.

(a) Vérifier que $\qquad \forall\,h \in \mathbb{R}^n, \qquad f(a+h) = \langle A\,a, a \rangle + \langle A\,a, h \rangle + \langle A\,h, a \rangle + \langle A\,h, h \rangle$

(b) Montrer que

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ h & \mapsto & \langle A\,a, h \rangle + \langle A\,h, a \rangle \end{array} \right.$$

est linéaire et continue.

(c) Montrer que $$\forall\, h \in \mathbb{R}^n, \qquad |\langle A\,h, h\rangle| \leq \|A\,h\|_2\,\|h\|_2 \leq |||A|||\,\|h\|_2\,\|h\|_2$$

En déduire que f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et déterminer sa différentielle.

(d) Justifier que $$f(a+h) = f(a) + df(a)\cdot h + \langle A\,h, h\rangle + o(\|h\|_2^2)$$

Peut-on en déduire que f est deux fois différentiable en a ?

(e) Déterminer le gradient de f en a.

(f) Montrer que ∇f est différentiable en a. En déduire que f est deux fois différentiable en a et calculer la jacobienne de ∇f en a.

(g) Vérifier que $$\forall\, h \in \mathbb{R}^n, \qquad \langle A\,h, h\rangle = \frac{1}{2}\,\langle J(\nabla f)(a)\,h, h\rangle$$

Que vaut Hess $f(a)$? Justifier votre réponse.

⋆ Exercice 9 – Espace de matrices Posons $\mathcal{X} = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.

(a) On considère l'application $$F : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathcal{X} \\ A & \mapsto & A^2 \end{array} \right.$$

Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{X}$ et calculer pour tout $A \in \mathcal{X}$ sa différentielle $dF(A)$.

(b) On considère l'application $$G : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathcal{X} \\ A & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \end{array} \right.$$

Montrer que cette application est différentiable en 0 et calculer sa différentielle $dG(0)$.

(c) On considère l'application $$H : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathcal{X} \\ A & \mapsto & \operatorname{tr}(A)\,A \end{array} \right.$$

Montrer que H est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $dH(A)$ pour tout $A \in \mathcal{X}$.