Feuille d'exercices n°3
Solutions de base

Exercice 1 – Solutions de base Pour chaque matrice A et chaque vecteur b, déterminer toutes les solutions de base du système $A\,x = b$. Préciser à chaque fois la base considérée, les variables en base et les variables hors base associées.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ **(b)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 12 \\ 14 \\ 20 \end{pmatrix}$ **(d)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 18 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix}$

Exercice 2 – Mise sous forme générale et canonique Mettre chacun des problèmes suivants sous forme générale, puis canonique. *On donnera la réponse sous forme étendue puis avec l'écriture matricielle.* Expliciter le lien entre les solutions optimales des deux formes.

$$(\mathcal{P}_1) \quad \begin{array}{ll} \text{Maximiser} & z = 4\,X_1 + X_2 \\ \text{sous les contraintes} & 2\,X_1 - 4\,X_2 \leq 5 \\ & X_1 \leq 7 \end{array}$$

$$(\mathcal{P}_2) \quad \begin{array}{ll} \text{Maximiser} & z = X_1 - 5\,X_2 \\ \text{sous les contraintes} & X_1 + 3\,X_2 = 3 \\ & X_1 - 2\,X_2 \leq 4 \end{array}$$

$$(\mathcal{P}_3) \quad \begin{array}{ll} \text{Minimiser} & z = -X_1 - X_2 + X_3 \\ \text{sous les contraintes} & X_1 + 7\,X_2 + X_3 \geq 3 \\ & -X_1 + X_2 - 2\,X_3 \geq -4 \\ & 3\,X_1 - X_2 - X_3 \leq -1 \end{array}$$

$$(\mathcal{P}_4) \quad \begin{array}{ll} \text{Maximiser} & z = 20\,X_1 - 30\,X_2 \\ \text{sous les contraintes} & 3\,X_1 + X_2 \leq 2 \\ & X_1 - 4\,X_2 - X_3 \geq 10 \\ & X_1 + X_2 + X_3 \geq 7 \end{array}$$

Exercice 3 – Sommets d'un polyèdre Reprendre les problèmes de l'exercice de la feuille d'exercice n°2. Calculer les coordonnées des sommets du polyèdre des contraintes. Vérifier graphiquement vos résultats.

Exercice 4 – Majoration de la fonction objectif Reprendre les problèmes de l'exercice de la feuille d'exercice n°2. Prouver, le cas échéant, que la fonction objectif est majorée sur l'ensemble réalisable. Vérifier que le résultat obtenu est cohérent avec la résolution graphique.

Problème Considérons les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(a) Représenter graphiquement le polyèdre $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid M\,x \leq b \text{ et } x \geq 0\}$.

(b) Quels sont les sommets de $\mathcal{C}$? Les caractériser à l'aide d'un système linéaire.

(c) On introduit la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quel est le lien entre le polyèdre $\mathcal{C}$ et l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^5 \mid A\,x = b \text{ et } x \geq 0\}$?

(d) Déterminer toutes les solutions de base du système $A\,x = b$. Pour chaque solution de base, préciser la base considérée, les variables en base et les variables hors base associées.

(e) Comment la question précédente permet-elle de donner les sommets de $\mathcal{C}$?