Compléments
sur les opérateurs adjoints

1 Rappels de cours

Soit $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux espaces de Hilbert, munis d'un produit scalaire noté (dans les deux cas) $\langle \cdot, \cdot \rangle$. La norme associée est notée $\| \cdot \|$.

1.1 Définition

Définition 1 (Opérateur adjoint)

Soit $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un opérateur linéaire **continu**. On appelle *opérateur adjoint* de A tout opérateur linéaire A^* vérifiant

$$\forall\,(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \qquad \langle A(x), y \rangle = \langle x, A^*(y) \rangle$$

Le théorème suivant assure l'existence et l'unicité d'un tel opérateur adjoint.

Théorème 1 (Théorème de représentation de Riesz)

Soit $\varphi : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une forme linéaire **continue**. Alors il existe un unique $u \in \mathcal{X}$ tel que

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad \varphi(x) = \langle u, x \rangle$$

En appliquant le théorème de représentation de Riesz à la forme linéaire continue (par composition)

$$\varphi : x \mapsto \langle A(x), y \rangle$$

on en déduit l'existence et l'unicité de $A^*(y)$. On démontre aisément que l'application A^* ainsi définie est linéaire. On peut également montrer que A^* est continu.

Dans le cas de la dimension finie, la continuité de toute application linéaire est acquise, ce qui entraîne automatiquement l'existence d'un opérateur adjoint. Si l'on se place dans le cas des espaces vectoriels réels de dimension finie, on peut identifier toute application linéaire à une matrice.

Proposition 1 (Cas de la dimension finie)

Soit $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Alors on a

$$\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \qquad \langle M\,x, y \rangle = \langle x, {}^{\mathrm{t}}M\,y \rangle$$

où ${}^{\mathrm{t}}M$ désigne la matrice transposée de M.

Autrement dit, en dimension finie, on peut identifier opérateur adjoint et matrice transposée.

1.2 Quelques propriétés utiles

Proposition 2 (Combinaison linéaire)

Soit $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ et $B : \mathcal{Z} \to \mathcal{X}$ deux opérateurs linéaires **continus**. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors on a

$$(\lambda\, A + \mu\, B)^* = \lambda\, A^* + \mu\, B^*$$

On peut transposer ce résultat au cas de la dimension finie :

$$\forall\,(M, N) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \forall\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \qquad {}^{\mathrm{t}}(\lambda\, M + \mu\, N) = \lambda\, {}^{\mathrm{t}}M + \mu\, {}^{\mathrm{t}}N$$

Proposition 3 (Composition)

Soit $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ et $B : \mathcal{Z} \to \mathcal{X}$ deux opérateurs linéaires **continus**. Alors on a

$$(A \circ B)^* = B^* \circ A^*$$

On retrouve la généralisation de la transposition du produit de deux matrices :

$$\forall\,(M, N) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \qquad {}^{\mathrm{t}}(MN) = {}^{\mathrm{t}}N\, {}^{\mathrm{t}}M$$

Proposition 4 (Norme)

Soit $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un opérateur linéaire **continu**. Alors on a

$$|||A||| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} = \sup_{y \neq 0} \frac{\|A^*(y)\|}{\|y\|} = |||A^*|||$$

De plus, on a $\qquad |||A^* A||| = |||A\, A^*||| = |||A|||^2$

De plus, dans le cas de la dimension finie, si on considère la norme matricielle (de Frobenius)

$$\forall\, M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \qquad \|M\|_{\mathrm{F}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2}$$

il est immédiat que $\qquad \|M\|_{\mathrm{F}} = \|\,{}^{\mathrm{t}}M\|_{\mathrm{F}}$

Références bibliographiques

[Brezis'99] Haïm Brezis, *Analyse Fonctionnelle : théorie et applications*. Dunod, 1999.
[Hirsch & Lacombes'09] Francis Hirsch et Gilles Lacombes, *Élément d'analyse Fonctionnelle*. Dunod, 2009.
[Rudin'98] Walter Rudin, *Analyse réelle et complexe : Cours et exercices*. Dunod, 1998.

2 Exemple

Méthode

Comment calculer l'opérateur adjoint d'un opérateur linéaire continu A ?

---

1. Expliciter le produit scalaire $\langle A(x), y\rangle$ pour x et y quelconques.
2. Réarranger l'expression de $\langle A(x), y\rangle$ de sorte à reconnaître le produit scalaire entre le vecteur x et un autre vecteur ne dépendant pas de x.

Exemple Considérons la discrétisation de l'opérateur dérivée $\delta^h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, définie à l'aide des différences finies suivantes :

$$\forall\, x = (x_i)_{1\le i\le n} \in \mathbb{R}^n, \forall\, i \in [\![\, 1\,;\, n\,]\!]\,, \qquad (\delta^h x)_i = \begin{cases} \dfrac{x_{i+1} - x_i}{h} & \text{si } i \neq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où h est un réel strictement positif. Calculer l'opérateur adjoint de δ^h.

> Cet opérateur apparaît dans de nombreuses applications, car elle est utilisée pour approcher la dérivée d'une fonction. En effet, en remplaçant x_i par $f(t + i\,h)$, les $(\delta^h x)_i$ peuvent être vus comme des taux de variation (h étant alors un pas de discrétisation).

1. Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$. Écrivons le produit scalaire $\langle \nabla^h x, y\rangle$:

$$\langle \delta^h x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} (\delta^h x)_i\, y_i = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{h}\, y_i$$

2. En distribuant y_i dans le produit apparaissant dans la somme, séparons cette somme en deux :

$$\langle \delta^h x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_{i+1}}{h}\, y_i - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i}{h}\, y_i$$

puis effectuons le changement d'indice $\ell = i + 1$ dans la première somme :

$$\langle \delta^h x, y\rangle = \sum_{\ell=2}^{n} \frac{x_\ell}{h}\, y_{\ell-1} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i}{h}\, y_i$$

En mettant de côté les indices non communs aux deux sommes (c'est-à-dire les indices 1 et n), réunissons les deux nouvelles sommes :

$$\begin{aligned} \langle \delta^h x, y\rangle &= -\frac{x_1}{h}\, y_1 + \sum_{i=2}^{n-1} \left(\frac{x_i}{h}\, y_{i-1} - \frac{x_i}{h}\, y_i\right) + \frac{x_n}{h}\, y_{n-1} \\ &= -x_1\, \frac{y_1}{h} + \sum_{i=2}^{n-1} x_i\, \frac{y_{i-1} - y_i}{h} + x_n\, \frac{y_{n-1}}{h} \end{aligned}$$

Ainsi, en posant

$$\forall\, y = (y_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n, \forall\, i \in [\![\, 1\,;\, n\,]\!], \qquad ((\delta^h)^* y)_i = \begin{cases} -\dfrac{y_1}{h} & \text{si } i = 1 \\ \dfrac{y_{i-1} - y_i}{h} & \text{si } 1 < i < n \\ \dfrac{y_{n-1}}{h} & \text{si } i = n \end{cases}$$

on vérifie qu'on a bien

$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \qquad \langle \delta^h x, y\rangle = \langle x, (\delta^h)^* y\rangle$$

> Dans cet exemple, on peut représenter le gradient discrétisé à l'aide de la matrice
>
> $$M = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
>
> qui admet pour matrice transposée
>
> $${}^{\mathrm{t}}M = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
>
> dont on vérifie qu'elle est bien associée à l'opérateur linéaire $(\nabla^h)^*$. On aurait donc pu directement passer par le calcul de la transposée de la matrice associée à ∇^h. Cependant, il existe des cas où la détermination de la matrice associée à l'opérateur considéré n'est pas aisée (cf. Exercices).

3 Exercices

Exercice 1 – Discrétisation de l'opérateur gradient en dimension 2 Considérons la discrétisation de l'opérateur gradient $\nabla^h : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{2\times m\times n}$, définie à l'aide des différences finies suivantes :

$$\begin{array}{l} \forall\, u = (u_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \\ \forall\, (i,j) \in [\![\, 1\,;\, m\,]\!] \times [\![\, 1\,;\, n\,]\!], \end{array} \qquad (\delta_x^{h_x} u)_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_x} & \text{si } i \neq m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \forall\, u = (u_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \\ \forall\, (i,j) \in [\![\, 1\,;\, m\,]\!] \times [\![\, 1\,;\, n\,]\!], \end{array} \qquad (\delta_y^{h_y} u)_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_x} & \text{si } j \neq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et
$$\forall\, u \in \mathbb{R}^{m\times n}, \qquad \nabla^h u = \left(\delta_x^{h_x} u, \delta_y^{h_y} u\right)$$

où $h = (h_x, h_y)$ est un couple de réels strictement positifs. Calculer l'opérateur adjoint de ∇^h.

> De même que, dans l'exemple précédent, l'opérateur ∇^h permet d'approcher la dérivée d'une fonction réelle, dans cet exemple, il permet de définir une approximation du gradient d'une fonction de deux variables à valeurs réelles, c'est-à-dire le couple formé par ses dérivées horizontales (selon x) et verticales (selon y). On emploie beaucoup cet opérateur (et ses variantes) en traitement d'images.

Réponse : $\quad \forall\, v \in \mathbb{R}^{2\times m\times n}, \qquad (\nabla^h)^* v = (\delta_x^{h_x})^* v + (\delta_y^{h_y})^* v$

avec

$$\forall\,(i,j) \in [\![1\,;\, m]\!] \times [\![1\,;\, n]\!], \qquad ((\delta_x^{h_x})^* v)_{i,j} = \begin{cases} -\dfrac{v_{1,j}}{h_x} & \text{si } i = 1 \\ \dfrac{y_{i-1,j} - y_{i,j}}{h_x} & \text{si } 1 < i < m \\ \dfrac{y_{m-1,j}}{h_x} & \text{si } i = m \end{cases}$$

$$\forall\,(i,j) \in [\![1\,;\, m]\!] \times [\![1\,;\, n]\!], \qquad ((\delta_y^{h_y})^* v)_{i,j} = \begin{cases} -\dfrac{v_{i,1}}{h_y} & \text{si } j = 1 \\ \dfrac{y_{i,j-1} - y_{i,j}}{h_y} & \text{si } 1 < j < n \\ \dfrac{y_{i,n-1}}{h_y} & \text{si } j = n \end{cases}$$

Exercice 2 – Gradient et divergence Soit $\mathcal{X}$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ à support compact et $\mathcal{Y}$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ à support compact. On rappelle que, pour tout $f \in \mathcal{X}$,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \qquad \nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$$

et que, pour tout $g \in \mathcal{Y}$,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \qquad \operatorname{div} g(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_i}(x)$$

Montrer que $\qquad \nabla^* = -\operatorname{div}$

Réponse : Puisqu'on a

$$\begin{aligned} \langle \nabla f, g \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla f(x), g(x) \rangle \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, g_i(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, g_i(x) \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

on peut intégrer par parties et obtenir, grâce au fait que les fonctions considérées sont à support compact, que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, g_i(x) \, \mathrm{d}x_i = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \frac{\partial g_i}{\partial x_i}(x) \, \mathrm{d}x_i$$