Feuille d'exercices n°10
Théorème de Karush–Kuhn–Tucker

Démonstrations de cours

*Les exercices de cette section **ne seront pas** traités en TD, les corrigés se trouvant dans le polycopié. Les exercices marqués ♣ sont exigibles au partiel et à l'examen.*

♣ Exercice 1 – Condition d'indépendance linéaire

Module B5 – Théorème 1

Soit $U \subset E$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{R}$, $g_i : U \to \mathbb{R}$ avec $i \in [\![1\,;\,p]\!]$ et $h_1 : U \to \mathbb{R}$ des fonctions $\mathcal{C}^1$. On considère le problème d'optimisation sous contraintes suivant

$$\text{Minimiser } f(x) \text{ sous les contraintes } \begin{cases} g_i(x) = 0 & \text{pour } i \in [\![1\,;\,p]\!] \\ h_1(x) \leq 0 \end{cases} \tag{$\mathcal{P}_c$}$$

(a) Justifier que l'ensemble admissible est fermé.

(b) *On suppose que h_1 est nul.* En utilisant le théorème des extrema liés, montrer que, si $x^* \in U$ est une solution de $(\mathcal{P}_c)$ et que les $\nabla g_i(x^*)$ forment une famille libre, alors il existe p réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0$$

(c) Justifier que $(\mathcal{P}_c)$ est équivalent au problème

$$\text{Minimiser } F(x,\varepsilon) = f(x) \text{ sous les contraintes } \begin{cases} \tilde{g}_i(x,\varepsilon) = g_i(x) = 0 \text{ pour } i \in [\![1\,;\,p]\!] \\ \tilde{g}_{p+1}(x,\varepsilon) = h_1(x) + \varepsilon^2 = 0 \end{cases} \tag{$\mathcal{P}'_c$}$$

dans le sens où x^* est solution de $(\mathcal{P}_c)$ si et seulement si $(x^*, \pm\sqrt{-h_1(x^*)}$ est solution de $(\mathcal{P}'_c)$.

(d) Montrer que les vecteurs $\nabla \tilde{g}_i(x,\varepsilon)$ pour $i \in [\![1\,;\,p+1]\!]$ forment une famille libre si

- les vecteurs $\nabla g_i(x)$ pour $i \in [\![1\,;\,p]\!]$ forment une famille libre et $\varepsilon \neq 0$
- ou les vecteurs $\nabla g_i(x)$ pour $i \in [\![1\,;\,p]\!]$ et $\nabla h_1(x)$ forment une famille libre.

Vérifier que pour tout (x,ε) admissible pour $(\mathcal{P}'_c)$, on a $\varepsilon \neq 0$ si et seulement si $h_1(x) < 0$.

(e) En déduire que, si x^* est une solution de $(\mathcal{P}'_c)$ et que

- les vecteurs $\nabla g_i(x^*)$ pour $i \in [\![1\,;\,p]\!]$ forment une famille libre et $h_1(x^*) < 0$
- ou les vecteurs $\nabla g_i(x^*)$ pour $i \in [\![1\,;\,p]\!]$ et $\nabla h_1(x^*)$ forment une famille libre

alors il existe $p+1$ réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ et μ tels que

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \mu \nabla h_1(x^*) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mu\, h_1(x^*) = 0$$

Exercice 2 – Positivité de μ

Module B5 – Théorème 1

*On reprend les notations de l'**Exercice 1**.* On suppose que x^* est une solution de $(\mathcal{P}'_c)$ tel que $h_1(x^*) = 0$ et que les vecteurs $\nabla g_i(x^*)$ pour $i \in [\![1\,;\,p]\!]$ et $\nabla h_1(x^*)$ forment une famille libre. On pose

$$\varphi_0 : \left\{ \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R}^{p+1} \\ x & \mapsto & \big(g_1(x), \ldots, g_p(x), h_1(x)\big) \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R}^{p} \\ x & \mapsto & \big(g_1(x), \ldots, g_p(x)\big) \end{array} \right.$$

(a) En observant que $\varphi_0^{-1}(\{0\})$ et $\varphi^{-1}(\{0\})$ sont des sous-variétés, de dimension qu'on précisera, montrer que

$$\dim \ker d_{x^*}\varphi = \dim \ker d_{x^*}\varphi_0 + 1$$

En déduire qu'il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $v \in \ker d_{x^*}\varphi \setminus \ker d_{x^*}\varphi_0$.

(b) Justifier que $\forall\, i \in [\![1\,;\,p]\!]\,, \quad \langle \nabla g_i(x^*), v\rangle = 0 \quad$ et $\quad \langle \nabla h_1(x^*), v\rangle \neq 0$

(c) En déduire que $$\langle \nabla f(x^*), v\rangle = -\mu\, \langle \nabla h_1(x^*), v\rangle$$

(d) Justifier que v est un vecteur tangent à la sous-variété $\varphi^{-1}(\{0\})$ en x^*. En déduire qu'il existe $\gamma :]-\delta\,;\delta[\to \mathcal{U}$ telle que

$$\forall\, t \in\,]-\delta\,;\delta[\,, \qquad \begin{cases} \forall\, i \in \mathcal{I}_{x^*}, \quad g_i(\gamma(t)) = 0,\\ \forall\, j \in \mathcal{J}_{x^*} \setminus \{j_0\}, \quad h_j(\gamma(t)) = 0 \end{cases}$$

et telle que $(\gamma(0), \gamma'(0)) = (x^*, v)$.

(e) Montrer que, pour t voisin de 0, $\quad h_1(\gamma(t)) = t\, \langle \nabla h_1(x^*), v\rangle + o(|t|)$

En déduire que $h_1(\gamma(t))$ change de signe en 0 et que $h_1(\gamma(t)) \neq 0$ pour $t \neq 0$ voisin de 0.

(f) Montrer que, pour t voisin de 0,

$$f(\gamma(t)) = f(x^*) - t\, \mu\, \langle \nabla h_1(x^*), v\rangle + o(|t|)$$

(g) *On suppose que* $\langle \nabla h_1(x^*), v\rangle < 0$. Montrer que $h_1(\gamma(t)) < 0$ pour $t > 0$ voisin de 0. En déduire que $\gamma(t)$ est admissible pour le problème $(\mathcal{P}_c)$ pour de tels t. Justifier alors que $f(\gamma(t)) \geq f(x^*)$. En déduire que $\mu\, \langle \nabla h_1(x^*), v\rangle \leq 0$, puis que $\mu \geq 0$.

(h) *On suppose que* $\langle \nabla h_1(x^*), v\rangle > 0$. En remplaçant v par $-v$ dans les questions précédentes, prouver que $\mu \geq 0$.

♣ Exercice 3 – CS d'optimalité dans le cas convexe

Module B5 – Théorème 2

Soit $U \subset E$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $h_j : U \to \mathbb{R}$, $j \in [\![1\,;\,q]\!]$ des fonctions **convexes** différentiables et $g_i : U \to \mathbb{R}$, $i \in [\![1\,;\,p]\!]$ des fonctions **affines**. On considère le problème d'optimisation sous contraintes suivant

$$\text{Minimiser } f(x) \text{ sous les contraintes } \begin{cases} g_i(x) = 0 \quad \text{pour } i \in [\![1\,;\,p]\!] \\ h_1(x) \leq 0 \end{cases} \tag{$\mathcal{P}_c$}$$

Soit $x^* \in U$ tel que $\quad \forall\, i \in [\![1\,;\,p]\!]\,, \quad g_i(x^*) = 0 \quad$ et $\quad \forall\, j \in [\![1\,;\,q]\!]\,, \quad h_j(x^*) \leq 0$

et tel qu'il existe $p + q$ réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_q$, appelés *multiplicateurs de* LAGRANGE, tels que

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{q} \mu_j \nabla h_j(x^*) = 0$$

avec $\qquad \forall\, j \in [\![1\,;\,q]\!]\,, \quad \mu_j\, h_j(x^*) = 0 \quad$ et $\quad \mu_j \geq 0$

(a) Justifier que le problème $(\mathcal{P}_c)$ est convexe.

(b) Soit x un point admissible. En utilisant la convexité de f , justifier que

$$f(x) \geq f(x^*) - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle \nabla g_i(x^*), x - x^*\rangle - \sum_{j=1}^{q} \mu_j \langle \nabla h_j(x^*), x - x^*\rangle$$

(c) Justifier que pour tout $j \in [\![1\,;\,q]\!]$

$$0 \geq \mu_j\, h_j(x) \geq \mu_j\, h_j(x^*) + \langle \mu_j \nabla h_j(x^*), x - x^*\rangle = \langle \mu_j \nabla h_j(x^*), x - x^*\rangle$$

et que pour tout $i \in [\![1\,;\,p]\!]$

$$0 = g_i(x) = g_i(x^*) + \langle \nabla g_i(x^*), x - x^*\rangle = \langle \nabla g_i(x^*), x - x^*\rangle$$

(d) En déduire que $$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle \nabla g_i(x^*), x - x^*\rangle + \sum_{j=1}^{q} \mu_j \langle \nabla h_j(x^*), x - x^*\rangle \leq 0$$

(e) En conclure que $f(x) \geq f(x^*)$ pour tout point admissible $x \in U$.

Exercices fondamentaux

Exercice 4 – Qualification des contraintes Montrer que les contraintes suivantes sont qualifiées en tout point admissible au sens de l'indépendance linéaire, puis au sens de Slater.

(a) $\mathcal{C} = \left\{(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid x + y \leq 1\right\}$

(b) $\mathcal{C} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 \quad \text{et} \quad x + y \leq 1\right\}$

(c) $\mathcal{C} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^3 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 \leq 1\right\}$

(d) $\mathcal{C} = \left\{x \in (\mathbb{R}^+)^n \mid \|x\|_1 = 1\right\}$

Exercice 5 – Conditions KKT : un premier exemple Soit $(x_0, z_0) \in \mathbb{R}^2$. On considère le problème d'optimisation suivant :

$$\text{Minimiser } f(x,y,z) = \frac{1}{2}(x - x_0)^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}(z - z_0)^2 \text{ sous les contraintes } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ x + z = 1 \end{cases} \qquad (\mathcal{P})$$

(a) Montrer que le problème $(\mathcal{P})$ est convexe.

(b) Montrer que les contraintes sont qualifiées.

(c) Écrire le lagrangien associé au problème $(\mathcal{P})$. *On notera λ le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'égalité et μ celui associé à la contrainte d'inégalité.*

(d) Écrire les conditions de Karush-Kuhn-Tucker pour le problème $(\mathcal{P})$. Sont-elles nécessaires ? suffisantes ?

Soit $(x^*, y^*, z^*, \lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^5$ un point qui satisfait les conditions KKT établies à la question précédente.

(e) Justifier que $1 + 2\,\mu^* > 0$. En déduire que $y^* = 0$.

(f) On suppose que $\mu^* = 0$. Montrer que, dans ce cas, $(x^*, y^*, z^*) = (x_0 - \lambda^*, 0, z_0 - \lambda^*)$. Montrer que ce point satisfait la contrainte d'égalité si et seulement si

$$\lambda^* = \frac{x_0 + z_0 - 1}{2}$$

En déduire l'expression de (x^*, y^*, z^*) en fonction de (x_0, z_0). À quelles conditions sur (x_0, z_0) le point obtenu satisfait la contrainte d'inégalité ?

(g) On suppose désormais que $\mu^* > 0$. En sommant deux des conditions KKT considérées, montrer que

$$(1 + 2\,\mu^*)\,(x^* + z^*) = (x_0 + z_0) - 2\,\lambda^*$$

En déduire que
$$1 + 2\,\mu^* = (x_0 + z_0) - 2\,\lambda^*$$

(h) En élevant ces mêmes inégalités au carré avant de les sommer, montrer que

$$(1 + 2\,\mu^*)^2\,((x^*)^2 + (z^*)^2) = (x_0 - \lambda^*)^2 + (z_0 - \lambda^*)^2$$

En déduire que
$$((x_0 + z_0) - 2\,\lambda^*)^2 = (x_0 - \lambda^*)^2 + (z_0 - \lambda^*)^2$$

(i) Résoudre l'équation du second degré en λ^* obtenue à la question précédente pour obtenir les valeurs possibles de λ^*. En déduire les valeurs associées de μ^*. À quelles conditions sur (x_0, z_0) ces dernières sont strictement positives ? Que valent dans ce cas (x^*, y^*, z^*) ?

(j) En déduire la solution de $(\mathcal{P})$.

Exercice 6 – Conditions KKT Résoudre les problèmes d'optimisation sous contraintes suivants en suivant la démarche décrite à l'**Exercice 2** :

(a)
$$\text{Minimiser } f(x,y,z) = x + y \text{ sous les contraintes } \begin{cases} 2\,x - y = 0 \\ x + z = 1 \end{cases} \qquad (\mathcal{P}_1)$$

(b)
$$\text{Minimiser } f(x,y) = 2\,x^2 + y^2 \text{ sous les contraintes } x^2 + y^2 \leq 1 \qquad (\mathcal{P}_2)$$

(c) Minimiser $f(x,y) = \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(y-1)^2$ sous les contraintes $\begin{cases} x+y=1 \\ (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \end{cases}$ $(\mathcal{P}_3)$

(d) Minimiser $f(x,y,z) = x+y-z$ sous les contraintes $\begin{cases} x+y+z=1 \\ (x,y,z) \in (\mathbb{R}^+)^3 \end{cases}$ $(\mathcal{P}_4)$

Compléments

⋆ Exercice 7 – Minimisation sur le simplexe Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $c \in \mathbb{R}^n$. On considère le problème d'optimisation sous contraintes suivant :

$$\min_{\substack{x \in (\mathbb{R}^+)^n \\ \|x\|_1 = 1}} \langle c, x \rangle + D(x, x^0)$$

où, pour tout $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathbb{R}^*)^n$,

$$D(x, x^0) = \sum_{i=1}^n \left(x_i^0 - x_i - x_i \ln \frac{x_i^0}{x_i} \right) \qquad \text{avec } x^0 = (x_i^0)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathbb{R}^{+*})^n$$

(a) Écrire le lagrangien associé à ce problème.

(b) Résoudre ce problème à l'aide des conditions KKT.