Cours n°4

Optimisation linéaire. Méthode du simplexe.

Pivot dans la méthode du simplexe

Dans ce cours, nous allons aborder une notion centrale dans la méthode du simplexe : le changement de bases réalisables à l'aide d'un pivot. On commencera par étudier la notion générale de changements de bases réalisables dans le cadre de l'optimisation linéaire, puis on s'intéressera plus précisément à ceux effectués à l'aide d'un pivot. En vue de décrire l'algorithme du simplexe, on verra comment choisir préciser le pivot à effectuer. Enfin, en complément, on verra dans une dernière partie de ce cours comment les changements de bases permettent de justifier la résolution graphique décrite dans le cours 1.

1 Changement de bases réalisables

1.1 Forme réduite relativement à une base

On a vu dans un exemple du cours 3 qu'il est possible d'exprimer tout problème d'optimisation linéaire sous forme standard en fonction de ses seules variables hors base. Plus précisément, si on considère le problème sous forme standard suivant :

$$(\mathcal{P}_s) \qquad \begin{array}{ll} \text{Maximiser} & {}^{\mathrm{t}}C\,X \\ \text{sous les contraintes} & A\,X = b \\ & X \geq 0 \end{array}$$

(avec $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$) et que $\gamma \in \mathcal{B}$ définit une base, alors en notant $B = A_\gamma$ et $N = A_{\tilde{\gamma}}$ (voir le cours 2 pour un rappel de ces notations), on a par définition que B est une matrice inversible. Aussi, on peut réécrire les contraintes à l'aide du système linéaire équivalent $B^{-1}A\,X = B^{-1}b$. Dans l'exemple mentionné plus haut de ce cours, on a vu que cela revenait à exprimer dans les contraintes les variables en base en fonction des variables hors base. Dans le cas général, cette réécriture devient (lemme 1 du cours 3) pour tout point admissible X :

$$X_B = X_B^* - B^{-1}N\,X_N$$

où X^* est la solution de base du système $A\,X = b$ associée à la base γ, c'est-à-dire l'unique solution du système $A\,X = b$ vérifiant $X_N = 0$. Par ailleurs, ce même lemme montre que l'on peut exprimer la fonction objectif en fonction des variables hors base uniquement : en effet, cette réécriture fait intervenir le vecteur des prix marginaux, qui, par définition, est nul sur ses variables en base. Ainsi, pour tout point admissible X, on a

$${}^{\mathrm{t}}C\,X = {}^{\mathrm{t}}C\,X^* + {}^{\mathrm{t}}d\,X = {}^{\mathrm{t}}C\,X^* + {}^{\mathrm{t}}d_N\,X_N$$

Le problème $(\mathcal{P}_s)$ peut donc s'écrire

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser} & {}^{\mathrm{t}}C\,X + {}^{\mathrm{t}}d_N\,X_N \\ \text{sous les contraintes} & X_B = X_B^* - B^{-1}N\,X_N \\ & X_B, X_N \geq 0 \end{array}$$

On dira qu'il s'agit de la forme *réduite relativement à la base* γ du problème $(\mathcal{P}_s)$ associée à la base γ. D'après le cours précédent, si le problème considéré admet une solution optimale, alors il existe une base réalisable γ pour laquelle d est à coefficients négatifs, de sorte que la solution de base X^* associée soit un point admissible du problème, et vérifie l'inégalité suivante pour tout point admissible X :

$${}^{\mathrm{t}}C\,X = {}^{\mathrm{t}}C\,X^* + {}^{\mathrm{t}}d\,X \leq {}^{\mathrm{t}}C\,X^*$$

Autrement dit, X^* est une solution optimale du problème $(\mathcal{P}_s)$.

L'objectif de la première partie de ce cours est de montrer comment en pratique on obtient une telle écriture du problème, lorsque celui-ci admet une solution optimale. Plus précisément, partant d'une forme réduite relativement à une base réalisable γ, on peut définir une autre base réalisable δ éventuellement associée à une solution de base optimale.

1.2 Exemple

Illustrons le paragraphe précédent à travers un exemple. Considérons le problème

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{Maximiser} & X_1 & + & X_2 & - & X_3 & & \\ \text{sous les contraintes} & X_1 & + & 2\,X_2 & + & 3\,X_3 & = & 1 \\ & 4\,X_1 & + & 5\,X_2 & + & 7\,X_3 & = & 3 \\ & X_1 & , & X_2 & , & X_3 & \geq & 0 \end{array}$$

L'ensemble Γ comporte trois éléments γ_1, γ_2 et γ_3, définis par

$$\begin{array}{lcl} \gamma_1(1) = 1 & \text{et} & \gamma_1(2) = 3 \\ \gamma_2(1) = 2 & \text{et} & \gamma_2(2) = 3 \\ \gamma_3(1) = 1 & \text{et} & \gamma_3(2) = 2 \end{array}$$

En posant $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

on peut vérifier aisément que les matrices A_{γ_1}, A_{γ_2} et A_{γ_3} sont inversibles. Aussi, les applications γ_1, γ_2 et γ_3 définissent bien des bases. Les formes réduites du problème considéré relativement à ces trois bases sont donc respectivement

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \text{Maximiser} & & & 2\,X_2 & & & & \\ \text{sous les contraintes} & X_1 & - & X_2/4 & & & = & 1/4 \\ & & & 3\,X_2/4 & + & X_3 & = & 1/4 \\ & X_1 & , & X_2 & , & X_3 & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrrcrcrcl} \text{Maximiser} & -2 & +\,8\,X_1 & & & & & & \\ \text{sous les contraintes} & & -\,4\,X_1 & + & X_2 & & & = & -1 \\ & & 3\,X_1 & & & + & X_3 & = & 1 \\ & & X_1 & , & X_2 & , & X_3 & \geq & 0 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{lrrcrcrcl} \text{Maximiser} & 2/3 & & & & - & 3\,X_3/8 & & \\ \text{sous les contraintes} & & X_1 & & & + & X_3/3 & = & 1/3 \\ & & & & X_2 & + & 4\,X_3/3 & = & 1/3 \\ & & X_1 & , & X_2 & , & X_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Pour faciliter la lecture, les variables en base seront désormais en bleu et les variables hors base en rouge. Pour chaque base, il est aisé de calculer la solution de base associée : elle est obtenue en annulant dans les contraintes égalités la variable hors base. On obtient donc respectivement $X^* = {}^{\mathrm{t}}(1/4, 0, 1/4)$, $X^* = {}^{\mathrm{t}}(0, -1, 1)$ et $X^* = {}^{\mathrm{t}}(1/3, 1/3, 0)$. On constate ainsi que seules les bases γ_1 et γ_3 sont réalisables. Enfin, pour ces deux dernières bases, le vecteur des prix marginaux associé vaut respectivement $d = {}^{\mathrm{t}}(0, 2, 0)$ et $d = {}^{\mathrm{t}}(0, 0, -3/8)$. On en déduit que la solution de base optimale est celle associée à la base γ_3.

1.3 Variable entrante, variable sortante

Dans l'exemple précédent, on voit donc qu'en considérant toutes les formes réduites possibles du problème, on finit, si le problème admet une solution optimale, par trouver celle qui permet d'obtenir la solution de base optimale.

Cependant, il apparaît vite que, lorsque l'ensemble Γ est grand, il n'est pas efficace de tester *toutes* les bases. Dans ce cours, on va donc présenter un algorithme qui permet, à partir d'une base réalisable initiale, générer une suite de bases réalisables $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers la base réalisable recherchée. Le passage d'une base γ_k à la base suivante γ_{k+1} se fait à l'aide d'un *pivot*, c'est-à-dire que deux bases successives ne diffèrent exactement que d'un seul indice.

Plus précisément, considérons une base réalisable initiale γ, définie sur l'ensemble des entiers $\{1,\dots,m\}$. Elle est associée à l'application $\hat{\gamma}$, définie sur $\{1,\dots,n-m\}$, qui est telle que les images de γ et $\hat{\gamma}$ forment une partition de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$:

$$\begin{Bmatrix}\gamma(1)\\ \vdots\\ \gamma(m)\end{Bmatrix} \cup \begin{Bmatrix}\hat{\gamma}(1)\\ \vdots\\ \hat{\gamma}(n-m)\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}1\\ \vdots\\ n\end{Bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{Bmatrix}\gamma(1)\\ \vdots\\ \gamma(m)\end{Bmatrix} \cap \begin{Bmatrix}\hat{\gamma}(1)\\ \vdots\\ \hat{\gamma}(n-m)\end{Bmatrix} = \emptyset$$

Considérons alors un indice I entre 1 et m, et un indice J entre 1 et $n-m$. En échangeant d'ensembles les nombres $\gamma(I)$ et $\hat{\gamma}(J)$, on a une nouvelle partition des entiers entre 1 et n :

$$\begin{Bmatrix}\gamma(1)\\ \vdots\\ \gamma(I-1)\\ \hat{\gamma}(J)\\ \gamma(I+1)\\ \vdots\\ \gamma(m)\end{Bmatrix} \cup \begin{Bmatrix}\hat{\gamma}(1)\\ \vdots\\ \hat{\gamma}(J-1)\\ \gamma(I)\\ \hat{\gamma}(J+1)\\ \vdots\\ \hat{\gamma}(n-m)\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}1\\ \vdots\\ n\end{Bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{Bmatrix}\gamma(1)\\ \vdots\\ \gamma(I-1)\\ \hat{\gamma}(J)\\ \gamma(I+1)\\ \vdots\\ \gamma(m)\end{Bmatrix} \cap \begin{Bmatrix}\hat{\gamma}(1)\\ \vdots\\ \hat{\gamma}(J-1)\\ \gamma(I)\\ \hat{\gamma}(J+1)\\ \vdots\\ \hat{\gamma}(n-m)\end{Bmatrix} = \emptyset$$

On peut ainsi définir un nouvel élément de Γ :

Lemme 1 (Définition de δ)

Soit $\gamma \in \mathcal{R}$ et $I = 1,\dots,m$, $J = 1,\dots,n-m$. Alors il existe une unique application $\delta \in \Gamma$ telle que

$$\begin{Bmatrix}\delta(1)\\ \vdots\\ \delta(m)\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\gamma(1)\\ \vdots\\ \gamma(I-1)\\ \hat{\gamma}(J)\\ \gamma(I+1)\\ \vdots\\ \gamma(m)\end{Bmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \begin{Bmatrix}\hat{\delta}(1)\\ \vdots\\ \hat{\delta}(n-m)\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\hat{\gamma}(1)\\ \vdots\\ \hat{\gamma}(J-1)\\ \gamma(I)\\ \hat{\gamma}(J+1)\\ \vdots\\ \hat{\gamma}(n-m)\end{Bmatrix}$$

Si δ définit une base (et on verra dans le prochain paragraphe sous quelles conditions c'est le cas), alors on dit que la variable $X_{\gamma(I)}$ *sort* de la base initiale γ, et que la variable $X_{\hat{\gamma}(J)}$ *entre* dans la nouvelle base δ.

Dans le cadre de la résolution d'un problème d'optimisation linéaire, il faut considérer les trois problématiques suivantes lors de la définition de δ :

1. Quand δ définit-elle une base ?
2. Quand δ définit-elle une base réalisable du problème $(\mathcal{P}_s)$?
3. Quand δ définit-elle une base réalisable plus intéressante que γ ?

2 Définir une nouvelle base réalisable du problème $(\mathcal{P}_s)$

2.1 Réaliser un pivot pour changer de bases

Considérons le problème sous forme réduite suivant :

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{Maximiser} & & & 2\,X_2 & & & & \\
\text{sous les contraintes} & X_1 & - & X_2/4 & & & = & 1/4 \\
 & & & 3\,X_2/4 & + & X_3 & = & 1/4 \\
 & X_1 & , & X_2 & , & X_3 & \geq & 0
\end{array}$$

La base associée est donnée par $\gamma(1) = 1$, $\gamma(2) = 3$. On remarque que les variables en base X_1 et X_3 n'apparaissent chacune qu'une fois dans les contraintes égalités, mais que la variable hors base X_2 apparaît dans les deux équations. Ici, la seule variable que l'on peut faire entrer dans la nouvelle base est la variable X_2 (il n'y a pas d'autre variable hors base). Après changement de base, X_2 ne doit apparaître qu'une seule fois dans les contraintes égalités ; il faut donc l'éliminer dans la première équation ou dans la seconde. Pour cela, on procède comme dans la méthode du pivot de Gauss :

1. soit on multiplie la première ligne par -4, puis on ajoute à la deuxième ligne la ligne obtenue multipliée par $-3/4$:

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{Maximiser} & & & 2\,X_2 & & & & \\
\text{sous les contraintes} & -4\,X_1 & + & X_2 & & & = & -1 \\
 & 3\,X_1 & & & + & X_3 & = & 1 \\
 & X_1 & , & X_2 & , & X_3 & \geq & 0
\end{array}$$

2. soit on multiplie la première ligne par $4/3$, puis on ajoute à la deuxième ligne la ligne obtenue multipliée par $1/4$:

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{Maximiser} & & & 2\,X_2 & & & & \\
\text{sous les contraintes} & X_1 & & & + & X_3/4 & = & 1/3 \\
 & & & X_2 & + & 4\,X_3/3 & = & 1/3 \\
 & X_1 & , & X_2 & , & X_3 & \geq & 0
\end{array}$$

On voit que dans le premier cas, on obtient comme nouvelle base $\delta(1) = 2$ et $\delta(2) = 3$ et dans le second cas, $\delta(1) = 1$ et $\delta(2) = 2$. On en déduit qu'utiliser la première ligne pour éliminer X_2 dans les autres lignes revient à faire sortir X_1 de la base initiale γ, tandis qu'utiliser la seconde fait sortir X_3 de la base. Par ailleurs, notons dès à présent que, dans le premier cas, le fait de multiplier la ligne du pivot (c'est-à-dire la ligne utilisée pour éliminer X_2 des autres lignes) par le coefficient -4 conduit à une solution de base non admissible, donc à une base non réalisable.

De manière générale, une fois que la variable entrante est choisie, on procède de la même manière que dans la méthode du pivot de Gauss pour changer de base : on utilise une des lignes où apparaît la variable entrante pour l'éliminer dans les lignes restantes. Le choix de cette ligne conditionne la variable sortante : il s'agit de celle qui apparaît dans la ligne où se situe le pivot.

2.2 Variables entrantes possibles

Théoriquement, on peut faire entrer dans la nouvelle base n'importe quelle variable initialement hors base. Cependant, l'objectif étant d'aboutir à une réécriture intéressante (dans le sens rappelé dans §1.1), il convient de choisir intelligemment cette variable.

Avant de poursuivre, on commence par supposer que la base initiale ne donne pas de solution de base optimale. Dans le cas contraire, le problème d'optimisation est déjà résolu. On suppose donc en particulier que le vecteur des prix marginaux ne satisfait pas le critère d'optimalité introduit dans le cours précédent (Corollaire 1), à savoir qu'il existe au moins une composante de ce vecteur qui est strictement positif. On peut alors définir l'ensemble non vide suivant :

$$E_\gamma = \left\{ J = 1, \ldots, n-m \;\middle|\; d_{\hat{\gamma}(J)} > 0 \right\}$$

On choisira les variables entrantes parmi les variables $X_{\hat{\gamma}(J)}$ avec $J \in E_\gamma$.

La raison de ce choix peut être justifiée par l'analyse du problème suivant :

$$\begin{array}{llrcl} \text{Maximiser} & z = & 2\,X_2 & -3\,X_4 & \\ \text{sous les contraintes} & & X_1 - 2\,X_2 & -6\,X_4 & = 5 \\ & & X_2 + X_3 & +2\,X_4 & = 7 \\ & & X_1\;,\quad X_2\;,\; X_3\;, & X_4 & \geq 0 \end{array}$$

Écrit sous cette forme, on voit que le problème admet pour base $\gamma(1) = 1$, $\gamma(2) = 3$. Pour changer de bases par pivot, on peut donc faire entrer X_2 ou X_4 dans la nouvelle base. Pour choisir, on commence par remarquer que la solution de base associée à la base γ est le vecteur $X^* = {}^{\mathrm{t}}(5, 0, 7, 0)$, qui donne la valeur ${}^{\mathrm{t}}C\,X^* = 0$. Si on fait entrer, par exemple, X_2 dans la base, cela revient à lui permettre de prendre une valeur non nulle ; en particulier, puisque X_2 est contraint à rester positif, cela revient à lui permettre d'augmenter sa valeur. Or, puisqu'il est affecté d'un coefficient 2, qui est positif, augmenter la valeur de X_2 fait augmenter celle de z, ce qui est intéressant car on cherche à la maximiser. En revanche, on voit que c'est l'inverse qui se produit si on fait entrer X_4 dans la base : sa valeur ne pouvant qu'augmenter (puisqu'elle vaut initialement 0), z ne peut que diminuer. On voit ainsi qu'heuristiquement, il semble plus avantageux à court terme de faire entrer une variable affectée d'un coefficient positif dans le vecteur d, c'est-à-dire $X_{\hat{\gamma}(J)}$ avec $J \in E_\gamma$. Toujours de manière heuristique, on peut penser que, parmi ces variables candidates, il est plus avantageux de faire entrer celle affectée du plus grand coefficient (car l'augmentation de z associée est potentiellement plus grande).

2.3 Variables sortantes possibles

Déterminons maintenant quelles variables peuvent être choisies pour sortir de la base. Pour cela, il faut rappeler la manière dont on fait le pivot (cf. §2.1). On a vu qu'une fois la variable entrante est choisie, il faut choisir une ligne où elle apparaît pour l'éliminer dans les lignes restantes. La ligne retenue donne alors la variable sortante. On voit donc déjà que toutes les variables en base ne peuvent pas sortir de la base : il faut qu'elle apparaisse dans une ligne où apparaît la variable entrante. Or, dans la forme réduite relativement à la base γ, chaque variable X_j de la ligne i est affectée du coefficient $(B^{-1}A)_{i,j}$; en particulier, chaque variable $X_{\hat{\gamma}(J)}$ dans la ligne i est affectée du coefficient $(B^{-1}N)_{i,J}$, tandis que, dans cette même ligne, seule la variable $X_{\gamma(i)}$ est affectée d'un coefficient non nul, qui vaut 1 (cf. cours précédent). Ainsi, l'ensemble

$$U_{\gamma,J} = \left\{ I = 1, \ldots, m \;\middle|\; (B^{-1}N)_{I,J} \neq 0 \right\}$$

correspond à l'ensemble des numéros de lignes où apparaît la variable $X_{\hat{\gamma}(J)}$. Ainsi, seules les variables $X_{\gamma(i)}$ avec i dans cet ensemble sont éligibles pour sortir de la base.

Remarque : Si l'ensemble $U_{\gamma,J}$ est vide, alors cela signifie que la variable $X_{\hat{\gamma}(J)}$ n'apparaît nulle part dans les contraintes égalités, ce qui signifie que l'unique contrainte qui s'applique sur elle est la contrainte de positivité $X_{\hat{\gamma}(J)} \geq 0$. Dans ce cas, trois possibilités se présentent.

1. Soit $X_{\hat{\gamma}(J)}$ n'apparaît pas dans la fonction objectif, auquel cas on peut réécrire tout le problème sans cette variable.
2. Soit $X_{\hat{\gamma}(J)}$ apparaît dans la fonction objectif affecté d'un coefficient strictement négatif, auquel cas la valeur optimale de $X_{\hat{\gamma}(J)}$ pour maximiser la fonction objectif est la valeur nulle ; en particulier, cela signifie que $X_{\hat{\gamma}(J)}$ doit rester hors base.
3. Soit $X_{\hat{\gamma}(J)}$ apparaît dans la fonction objectif affectée d'un coefficient strictement positif (c'est-à-dire que J a été sélectionné dans E_γ. On en déduit donc que, dans ce cas, la fonction objectif n'est pas majorée sur son ensemble admissible, et qu'il est donc vain de tenter de résoudre le problème d'optimisation linéaire associé.

Proposition 1 (Définition d'une nouvelle base)

Soit $\gamma \in \mathcal{R}$ et $J = 1, \ldots, n-m$. Supposons que $U_{\gamma,J}$ est non vide, et soit $I \in U_{\gamma,J}$. Alors l'unique application $\delta \in \Gamma$ introduite dans le lemme 1 définit une base.

Démonstration : On commence par remarquer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^m$, le vecteur $B^{-1}x$ donne les coordonnées du vecteur x dans la nouvelle base $\{B_1, \ldots, B_m\}$ de $\mathbb{R}^m$, de sorte que

$$x = \sum_{i=1}^{m} (B^{-1}x)_i\, B_i = \sum_{i=1}^{m} (B^{-1}x)_i\, A_{\gamma(i)}$$

En particulier, on a donc

$$A_{\hat{\gamma}(J)} = \sum_{i=1}^{m} (B^{-1}A_{\hat{\gamma}(J)})_i\, A_{\gamma(i)}$$

Or, il est aisé de vérifier que, pour tout $i = 1, \ldots, m$, on a $(B^{-1}A_{\hat{\gamma}(J)})_i = (B^{-1}N)_{i,J}$. On en déduit donc la formule suivante :

$$A_{\hat{\gamma}(J)} = \sum_{i=1}^{m} (B^{-1}N)_{i,J}\, A_{\gamma(i)} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq I}}^{m} (B^{-1}N)_{i,J}\, A_{\gamma(i)} + (B^{-1}N)_{I,J}\, A_{\gamma(I)}$$

Puisque $(B^{-1}N)_{I,J} \neq 0$ par choix de I, on en déduit que la famille

$$\{A_{\gamma(1)}, \ldots, A_{\gamma(I-1)}, A_{\gamma(I+1)}, \ldots, A_{\gamma(m)}\}$$

est libre (car sous-famille d'une base) et qu'elle ne peut générer le vecteur $A_{\hat{\gamma}(J)}$, donc la famille $\{A_{\gamma(1)}, \ldots, A_{\gamma(I-1)}, A_{\gamma(I+1)}, \ldots, A_{\gamma(m)}\} \cup \{A_{\hat{\gamma}(J)}\}$ est libre. En particulier, comme elle est de cardinal m, il s'agit d'une base de $\mathbb{R}^m$. ■

Par ailleurs, dans la procédure décrite dans §2.1, on voit que la ligne i où se trouve le pivot choisi ne subit qu'une seule transformation, une *renormalisation*, qui consiste à diviser toute la ligne par le coefficient $(B^{-1}N)_{i,J}$ – non nul – apparaissant devant $X_{\hat{\gamma}(J)}$. Or, à l'issue de cette étape, le coefficient constant vaut $(B^{-1}N)_{i,J} \times (B^{-1}b)_i$, avec $(B^{-1}b)_i \geq 0$ car la base initiale est supposée réalisable. Ainsi, si $(B^{-1}N)_{i,J}$ est *négatif*, alors le nouveau terme constant devient négatif. En particulier, cela signifie que la nouvelle base n'est pas réalisable. Posons alors

$$S_{\gamma,J} = \left\{ I \in U_{\gamma,J} \;\middle|\; (B^{-1}N)_{I,J} > 0 \right\}$$

Comme on le verra dans la proposition suivante, choisir un indice I parmi ceux de l'ensemble précédent est une condition nécessaire, mais non suffisante, pour obtenir une base réalisable. On définit pour cela un troisième ensemble

$$T_{\gamma,J} = \left\{ I \in S_{\gamma,J} \;\middle|\; \frac{X^*_{\gamma(I)}}{(B^{-1}N)_{I,J}} = \min_{i \in S_{\gamma,J}} \frac{X^*_{\gamma(i)}}{(B^{-1}N)_{i,J}} \right\}$$

On notera que, si $S_{\gamma,J}$ est non vide, alors $T_{\gamma,J}$ est non vide.

Proposition 2 (Définition d'une base réalisable)

Soit $\gamma \in \mathcal{R}$ et $J = 1,\ldots,n-m$. On suppose que $S_{\gamma,J}$ est non vide, et soit $I \in T_{\gamma,J}$. Alors l'unique application $\delta \in \Gamma$ introduite dans le lemme 1 définit une base réalisable du problème $(\mathcal{P}_s)$.

Démonstration : On va déterminer la solution de base associée à δ, et montrer qu'elle est positive. Pour cela, on construit un vecteur $Y \in \mathbb{R}^n$, où Y_N vérifie :

$$Y_{\hat{\gamma}(j)} = \begin{cases} 0 & \text{si } j = 1,\ldots,J-1,J+1,\ldots,n-m \\ \dfrac{X^*_{\gamma(I)}}{(B^{-1}N)_{I,J}} & \text{si } j = J \end{cases}$$

avec X^* la solution de base (admissible) associée à la base initiale γ, tandis que

$$Y_B = X^*_B - B^{-1}N\,Y_N$$

c'est-à-dire $\quad \forall i = 1,\ldots,m, \quad Y_{\gamma(i)} = X^*_{\gamma(i)} - \dfrac{X^*_{\gamma(I)}}{(B^{-1}N)_{I,J}}\,(B^{-1}N)_{i,J}$

- Montrons d'abord que $Y_{\hat{\delta}(j)} = 0$ pour tout $j = 1,\ldots,n-m$. Cela revient à montrer que $Y_{\hat{\gamma}(j)} = 0$ pour tout $j = 1,\ldots,n-m$ sauf $j = J$, et que $Y_{\gamma(I)} = 0$. C'est bien le cas d'après la définition de Y_N et de $Y_{\gamma(I)}$.
- Montrons ensuite que $A\,Y = b$. C'est bien le cas car, d'après le cours sur les solutions de base, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ et toute solution de base, on a l'équivalence suivante :

$$A\,x = b \qquad \Longleftrightarrow \qquad X_B = X^*_B - B^{-1}N\,X_N$$

  Par construction, on a donc bien que $A\,Y = b$. Combiné au premier point, cela montre que Y est la solution de base du système $A\,X = b$ associée à la base δ.
- Enfin, montrons que $Y \geq 0$. En utilisant le premier point, cela revient à montrer que $Y_{\delta(i)} \geq 0$ pour tout $i = 1,\ldots,m$, soit encore, par définition de δ, que $Y_{\gamma(i)} \geq 0$ pour tout $i = 1,\ldots,m$ sauf $i = I$ et que $Y_{\hat{\gamma}(J)} \geq 0$. Ce dernier point se vérifie aisément car X^* est une solution de base réalisable. Pour prouver le premier point, il suffit d'utiliser la définition de I, qui assure que, pour tout $i \notin S_{\gamma,J}$, alors $(B^{-1}N)_{i,J} \geq 0$, et que pour tout $i \in S_{\gamma,J}$, alors $(B^{-1}N)_{i,J} \geq 0$

$$\frac{X^*_{\gamma(I)}}{(B^{-1}N)_{I,J}} \leq \frac{X^*_{\gamma(i)}}{(B^{-1}N)_{i,J}}$$

  Dans les deux cas, on en déduit le résultat souhaité. ■

2.4 Critère de Dantzig

On va maintenant combiner les résultats des deux sections précédentes pour montrer que certains choix de I et J conduisent à une solution de base plus intéressante que celle associée à la base initiale.

Théorème 1 (Critère de Dantzig)

Soit $\gamma \in \mathcal{R}$. On suppose que E_γ est non vide, et soit $J \in E_\gamma$. On suppose que $S_{\gamma,J}$ est non vide, et soit $I \in T_{\gamma,J}$. Alors l'unique application $\delta \in \Gamma$ introduite dans le lemme 1 définit une base réalisable du problème $(\mathcal{P}_s)$. De plus, si on note X^* la solution de base du système $A\,X = b$ associée à γ et Y^* celle associée à δ, alors

$${}^{t}C\,X^* \leq {}^{t}C\,Y^*$$

l'inégalité étant stricte si $X^*_{\gamma(I)} \neq 0$.

Démonstration : On sait déjà que δ définit une base réalisable selon la proposition **??**. Par ailleurs, on a

$${}^{t}C\,Y = {}^{t}C\,X^* + {}^{t}d\,Y = {}^{t}C\,X^* + {}^{t}d_N\,Y_N = {}^{t}C\,X^* + d_{\hat{\gamma}(J)}\,\frac{X^*_{\gamma(I)}}{(B^{-1}N)_{I,J}}$$

Or, par hypothèse, on a $d_{\hat{\gamma}(J)} > 0$ et $(B^{-1}N)_{I,J} > 0$. On en déduit le résultat annoncé. ■

Remarque : Dans le critère de Dantzig, on suppose que, pour le choix de l'indice J, l'ensemble associé $S_{\gamma,J}$ est non vide. On verra dans la section **??** une condition qui permet de vérifier que c'est le cas quel que soit le choix de J.

2.5 Choisir de manière déterministe un pivot

Le théorème **??** donne un critère qui permet de choisir un pivot qui permette d'accéder à une nouvelle solution de base, meilleure que la précédente dans le sens où sa valeur par la fonction objectif est au moins aussi grande.

Cependant, dans le cas où les ensembles E_γ et $S_{\gamma,J}$ ne sont pas réduits à un point, le choix de couples (I,J) n'est pas unique. Dans certains cas (en particulier lorsque l'on implémentera la méthode du simplexe), disposer d'une manière déterministe de sélectionner un unique pivot parmi ceux autorisés par le critère de Dantzig peut être utile. On en propose deux dans ce cours, mais d'autres critères peuvent être définis.

Proposition 3 (Critère naturel)

Soit $\gamma \in \mathcal{R}$. On suppose que E_γ est non vide. Alors on choisit

$$J = \min \left\{ j \in E_j \;\middle|\; d_{\hat{\gamma}(J)} = \max d_{\hat{\gamma}(j)} \right\}$$

On suppose que $S_{\gamma,J}$ est non vide. Alors on choisit

$$I = \min \left\{ i \in T_{\gamma,J} \right\}$$

Autrement dit, avec le critère naturel, on choisir J le plus petit rang dans le sous-vecteur d_N du vecteur des prix marginaux d tels que la composante associée soit la plus grande, tandis que I est le plus petit rang tel que le coefficient devant $X_{\hat{\gamma}(J)}$ soit strictement positif. L'idée dans le critère naturel est de choisir une direction qui, localement, semble la meilleure. En effet, comme on l'a vu dans un paragraphe précédent, faire entrer une variable dans la base revient à lui permettre d'augmenter sa valeur (initialement nulle), l'objectif étant e faire augmenter par là-même celle de la fonction objectif. Or, si le coefficient affecté à la variable entrante considérée est grande, l'augmentation de la fonction objectif sera plus importante pour cette variable que pour les autres.

Proposition 4 (Critère de Bland)

Soit $\gamma \in \mathcal{R}$. On suppose que E_γ est non vide. Alors on choisit

$$J = \min\left\{j \in E_j\right\}$$

On suppose que $S_{\gamma,J}$ est non vide. Alors on choisit

$$I = \min\left\{i \in T_{\gamma,J}\right\}$$

Autrement dit, avec le critère de Bland, on choisir J le plus petit rang dans le sous-vecteur d_N du vecteur des prix marginaux d tels que la composante associée soit strictement positive, tandis que I est le plus petit rang tel que le coefficient devant $X_{\hat{\gamma}(J)}$ soit strictement positif. On verra dans le cours suivant pourquoi le critère de Bland peut être plus intéressant que le critère naturel.

Exemple

Considérons le problème sous forme réduite suivant :

$$\begin{array}{llrrrrrrrl}
\text{Maximiser} & z = & & 2X_2 & & +6X_4 & -5X_5 & +6X_6 & & \\
\text{sous les contraintes} & & X_1 & +3X_2 & & +4X_4 & -3X_5 & +6X_6 & = & 4 \\
& & & -X_2 & +X_3 & +3X_4 & +7X_5 & +6X_6 & = & 2 \\
& & X_1, & X_2, & X_3, & X_4, & X_5, & X_6 & \geq & 0
\end{array}$$

Alors le critère naturel conduit à faire entrer X_4 dans le base et à en faire sortir X_3, tandis que le critère de Bland conduit à faire entrer X_2 dans le base et à en faire sortir X_1.

2.6 Cas non majoré

Si l'ensemble E_γ est vide, alors cela signifie que la base γ courante fournit une solution (de base admissible) optimale du problème considéré. Qu'en est-il de l'ensemble $S_{\gamma,J}$? La proposition suivante montre que, lorsque celui-ci est vide (autrement dit, si on n'arrive pas à trouver un couple de variables entrante et sortante suivant les critères présentés dans la section précédente), alors le problème n'admet pas de solution optimale.

Proposition 5 (Cas $S_{\gamma,J}$ vide)

Soit $\gamma \in \mathcal{R}$. On suppose que E_γ est non vide, et soit $J \in E_\gamma$. Si $S_{\gamma,J} = \emptyset$, alors le problème $(\mathcal{P}_s)$ n'admet aucune solution optimale.

Démonstration : On suppose que $S_{\gamma,J} = \emptyset$. Autrement dit, pour tout $i = 1,\dots m$, $(B^{-1}N)_{i,J} \leq 0$. Montrons que, dans ce cas, la fonction objectif n'est pas majorée sur l'ensemble admissible, en montrant que, pour tout $M > {}^tC\,X^*$, il existe un point admissible X tel que ${}^tC\,X > M$.

- Soit $t > 0$ un réel. Construisons $X^t \in \mathbb{R}^n$ le vecteur où X^t_N vérifie :

$$X^t_{\hat{\gamma}(j)} = \begin{cases} 0 & \text{si } j = 1,\dots, J-1, J+1,\dots, n-m \\ t & \text{si } j = J \end{cases}$$

avec X^* la solution de base (admissible) associée à la base initiale γ, tandis que

$$X^t_B = X^*_B - B^{-1}N\,X^t_N$$

c'est-à-dire $\forall\, i = 1,\dots,m,\quad X^t_{\gamma(i)} = X^*_{\gamma(i)} - t\,(B^{-1}N)_{i,J}$

Les calculs de la preuve de la proposition 2 montrent que $A\,X^t = b$ et que $X^t_N \geq 0$. Pour montrer que $X^t_B \geq 0$, il suffit de voir que, pour tout $i = 1,\dots,m$, on a $X_{\gamma(i)} \geq 0$ car $t > 0$ et $(B^{-1}N)_{i,J} \leq 0$ par hypothèse. Ainsi, on en déduit que X^t est un point admissible du problème.

- Soit $M > {}^tC\,X^*$. Montrons qu'il existe $t > 0$ tel que ${}^tC\,X^t > M$. Rappelons que ${}^tC\,X = {}^tC\,X^* + {}^td\,X$ pour tout point X admissible. On a donc en particulier

$${}^tC\,X^t = {}^tC\,X^* + d_N\,X^t_N = {}^tC\,X^* + t\,d_{\hat{\gamma}(J)}$$

Or, $d_{\hat{\gamma}(J)} > 0$ par choix de J. Alors il suffit de choisir

$$t = 2\,\frac{M - {}^tC\,X^*}{d_{\hat{\gamma}(J)}} \qquad \text{car} \qquad {}^tC\,X^* + t\,d_{\hat{\gamma}(J)} = M + M - {}^tC\,X^*$$

d'où le résultat annoncé. ■

On peut alors en déduire le corollaire suivant :

Corollaire 1 (Cas $S_{\gamma,J}$ non vide)

Soit $\gamma \in \mathcal{R}$. On suppose que E_γ est non vide. On suppose par ailleurs la fonction objectif est majorée sur l'ensemble admissible du problème $(\mathcal{P}_s)$. Alors pour tout $J \in E_\gamma$, l'ensemble $S_{\gamma,J}$ est non vide.

3 Interprétation géométrique

Puisque les solutions de base positives du système linéaire $A\,X = b$ avec $A = (M \quad I_p)$ sont associées aux sommets du polyèdre $\{M\,x \leq b \text{ et } x \geq 0\}$, on peut interpréter géométriquement les changements de base induits par les pivots introduits dans la section précédente.

Commençons par considérer l'exemple suivant (tiré du cours 2) :

$$\left\{ \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{rcl} -X_1 - X_2 & \leq & -8 \\ X_1 & \leq & 11 \\ -X_2 + X_2 & \leq & 5 \\ X_1\ ,\ X_2 & \geq & 0 \end{array} \right\}$$

Le polyèdre des contraintes est représenté dans la figure 1(a). Les sommets de ce polyèdre sont les quatre points suivants :

$$S_1 = \begin{pmatrix} 11 \\ 16 \end{pmatrix}, \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 13/2 \end{pmatrix}, \qquad S_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad S_4 = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce polyèdre peut également s'écrire à l'aide de variables d'écart :

$$\left\{ \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{rcl} & \exists\, X_3\ ,\ X_4\ ,\ X_5 \in & \mathbb{R} \\ -X_1 - X_2 + X_3 & = & -8 \\ X_1 \qquad + X_4 & = & 11 \\ -X_2 + X_2 \qquad + X_5 & = & 5 \\ X_1\ ,\ X_2\ ,\ X_3\ ,\ X_4\ ,\ X_5 & \geq & 0 \end{array} \right\}$$

Les solutions de base positives du système linéaire apparaissant dans cette réécriture sont alors :

$$X_1^* = \begin{pmatrix} 11 \\ 16 \\ 19 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad X_2^* = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 13/2 \\ 0 \\ 19/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad X_3^* = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad X_4^* = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on peut associer à chaque sommet une solution de base positive, et la représentation graphique du polyèdre peut faire intervenir les variables d'écart que l'on a introduites (voir Figure 1(b)). En particulier, on voit alors que les sommets du polyèdre peuvent être caractérisés comme intersection de droites de la forme $X_j = 0$, qui correspondent aux variables hors base selon une certaine base. Plus précisément, on a, par exemple, le sommet S_1 qui est associé à la base donnée par $\gamma(1) = 1$, $\gamma(2) = 2$ et $\gamma(3) = 3$. Réalisons un changement de base par pivot, c'est-à-dire considérons une nouvelle base obtenue en faisant entrer une variable hors base et en faisant sortir une variable en base. Ici, *a priori*, deux choix sont possibles pour la variable entrante : X_4 ou X_5. Considérons par exemple X_4. Dans ce cas, on peut soit faire sortir X_1, soit faire sortir X_2, soit faire sortir X_3. Dans le premier cas, on définit $\delta_1(1) = 2$, $\delta_1(1) = 3$ et $\delta_1(3) = 4$, dans le second cas $\delta_2(1) = 1$, $\delta_2(1) = 3$ et $\delta_2(3) = 4$, et dans le dernier cas $\delta_3(1) = 1$, $\delta_3(1) = 2$ et $\delta_3(3) = 4$. Les variables hors base associées sont donc respectivement

$$\begin{cases} X_1 = 0 \\ X_5 = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} X_2 = 0 \\ X_5 = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} X_3 = 0 \\ X_5 = 0 \end{cases}$$

On voit que seul le troisième système définit un sommet S_2, tandis que les deux premiers n'en définissent aucun. Effectivement, on peut vérifier que seule la base δ_3 est réalisable. Ainsi, en termes de changement de bases, si on décide de faire entrer X_4 dans le base, alors on ne définit un sommet qu'en faisant sortir X_3, à savoir le sommet S_2. Enfin, faire entrer X_5 ne permet d'atteindre un nouveau sommet qu'en faisant sortir X_2 (auquel cas on obtient S_4). On voit donc que seuls deux sommets peuvent être atteints par pivot : les sommets S_2 et S_4. Ils correspondent à ce que l'on peut définir comme les (deux) sommets *voisins* de S_1.

De manière plus générale, le changement de bases par pivot s'interprète ainsi. On part d'un sommet du polyèdre, associé à la base réalisable initiale $\gamma \in \mathcal{R}$. Celui-ci est le point défini comme l'intersection des hyperplans $X_{\hat{\gamma}(j)} = 0$. Un changement de bases par pivot consiste alors à choisir un des hyperplans $X_{\hat{\gamma}(J)} = 0$, puis à parcourir une des droites définies par

$$\bigcap_{j \neq J} \left\{ X_{\hat{\gamma}(j)} = 0 \right\}$$

jusqu'à atteindre un nouveau sommet, donné alors par

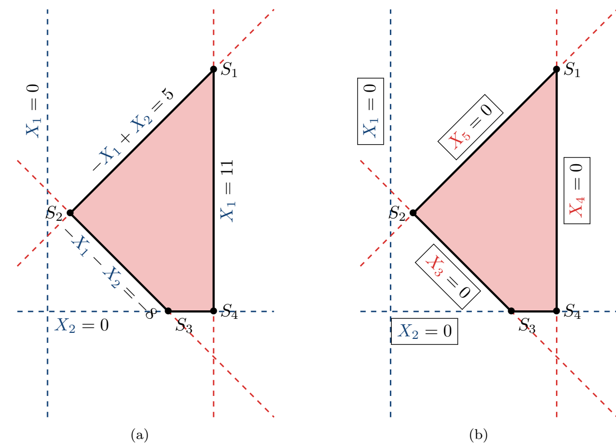

Figure 1 – Interprétation géométrique d'un changement de bases par pivot.

$$\left(\bigcap_{j \neq J} \left\{ X_{\hat{\gamma}(j)} = 0 \right\} \right) \cap \left\{ X_{\gamma(i)} = 0 \right\}$$

4 Retour sur la résolution graphique d'un problème

4.1 Exemple

La notion de changement de bases va nous permettre d'enfin justifier rigoureusement l'optimalité d'un sommet obtenu par résolution graphique telle que décrite dans le cours 1.

Revenons au problème du fabricant d'automobiles :

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{array}{lrcrcl} \text{Maximiser} & z = 16000\,x & + & 10000\,y & & \\ \text{sous les contraintes} & x & + & y & \leq & 400 \\ & 2\,x & + & y & \leq & 600 \\ & x & , & y & \geq & 0 \end{array}$$

Transformons ce problème sous forme canonique en un problème équivalent sous forme standard (canonique), en introduisant des variables d'écart :

$$\begin{array}{lrcrcccccl} \text{Maximiser} & z = 16000\,x & + & 10000\,y & & & & & & \\ \text{sous les contraintes} & x & + & y & + & v_1 & & & \leq & 400 \\ & 2\,x & + & y & & & + & v_2 & \leq & 600 \\ & x & , & y & , & v_1 & , & v_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Ainsi écrit, il est visible que le problème $(\mathcal{P})$ admet pour base réalisable $\gamma(1) = 3$ et $\gamma(2) = 4$, associée à la solution de base admissible ${}^{t}(0, 0, 400, 600)$. Réalisons un changement de base, en faisant sortir x et y de la base (et en faisant donc entrer v_1 et v_2). On rappelle que cela revient à multiplier le système linéaire par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

et en remplaçant dans la fonction objectif les expressions de x et y en fonction de v_1 et v_2. On obtient donc une nouvelle écriture du problème $(\mathcal{P})$:

$$\begin{array}{llrrrrrrl}
\text{Maximiser} & z = 5200000 & & & - & 4000\,v_1 & - & 6000\,v_2 & \\
\text{sous les contraintes} & & & y & - & 2\,v_1 & - & v_2 & \leq 200 \\
& & x & & - & v_1 & + & v_2 & \leq 200 \\
& & x & ,\; y & , & v_1 & , & v_2 & \geq 0
\end{array}$$

On voit donc qu'une solution optimale est bien celle $(200, 200)$ proposée par la résolution graphique.

4.2 Cas général

L'interprétation du critère d'optimalité d'une solution de base admissible peut s'entendre ainsi : si le problème admet une solution optimale, alors il existe une base $\gamma \in \mathcal{R}$ telle que

$$z = z^* + d_N\, X_N \qquad \text{avec } d_N \leq 0$$

avec z^* le maximum de la fonction objectif. Comment utiliser la résolution graphique pour déterminer γ ? Une fois la résolution graphique réalisée,

1. on identifie dans le polyèdre tracé les droites $X_i = 0$;
2. on repère le sommet-solution, que l'on définit comme l'intersection entre deux telles droites $X_{i_1} = 0$ et $X_{i_2} = 0$;
3. la base recherchée est donc celle telle que X_{i_1}, X_{i_2} sont hors base.