Cours n°1

Optimisation linéaire. Méthode du simplexe.

Résolution graphique

Dans ce second cours, on introduit l'optimisation linéaire et ses problématiques à travers deux exemples. On montre en particulier comment un problème peut être résolu graphiquement en dimension 2, et comment, dans certains cas particuliers, on peut se ramener à un problème en dimension 2 pour résoudre un problème de dimension supérieure.

1 Un exemple de problème d'optimisation linéaire

1.1 Le problème

Considérons le problème d'optimisation d'un chiffre d'affaires suivant : un fabricant d'automobiles qui propose deux modèles à la vente :

- des grosses voitures (prix de vente : 16 000 €)
- des petites voitures (prix de vente : 10 000 €)

Pour construire ses voitures, il a besoin :

- pour une grosse voiture : 1 unité de caoutchouc et 2 unités d'acier
- pour une petite voiture : 1 unité de caoutchouc et 1 unité d'acier

Il est certain de vendre tout ce qu'il produit, mais ses quantités de matières premières sont limitées : il n'a en stock que 400 unités de caoutchouc et 600 unités d'acier.

Question : Combien doit-il produire de petites et de grosses voitures avec son stock s'il souhaite maximiser son chiffre d'affaires ?

1.2 Mise en équation

On va mettre en équations mathématiques le problème introduit au paragraphe précédent. Pour cela, on pose x le nombre de grosses voitures produites et y le nombre de petites voitures produites. Le chiffre d'affaires associé à la vente des voitures est noté z et vaut :

$$z = 16000\,x + 10000\,y$$

La quantité de matières premières utilisées pour la production des voitures est, quant à elle, donnée par les formules suivantes :

$$\text{caoutchouc} : x + y, \quad \text{acier} : 2\,x + y$$

En particulier, les contraintes liées au stock limité de matières premières imposent que

$$x + y \leq 400, \quad 2\,x + y \leq 600$$

tandis que, naturellement, on peut ajouter une contrainte de positivité $x, y \geq 0$ sur le nombre de voitures produites. Ainsi, le problème considéré s'écrit mathématiquement :

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{array}{ll} \text{Maximiser} & z = 16000\,x + 10000\,y \\ \text{sous les contraintes} & x + y \leq 400 \\ & 2\,x + y \leq 600 \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{array}$$

2 Résolution par méthode graphique

Pour résoudre le problème $(\mathcal{P})$, on va décrire une procédure qui permet de proposer une solution optimale à l'aide d'une représentation graphique des données du problème. Il faudra garder à l'esprit que cette méthode ne **prouve pas** l'optimalité de la solution proposée (voir §2.3).

2.1 Représentation graphique

Puisque le problème $(\mathcal{P})$ dépend de deux variables x et y, il est possible de représenter dans le plan les données du problème, à savoir les contraintes et la fonction objectif.

Les contraintes du problème considèrent s'interprètent comme l'intersection de quatre demi-plans, délimités respectivement par les droites définies par

$$x + y = 400, \quad 2\,x + y = 600, \quad x = 0 \quad \text{et} \quad y = 0$$

Ainsi, si on se place dans le quart de plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$, on représente dans la figure 1 le demi-plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 400\}$ par le domaine aux rayures verticales, tandis que le demi-plan $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2\,x + y \leq 600\}$ est représenté par des hachures horizontales. Ainsi, l'ensemble des contraintes est le domaine délimité par le polygone rouge. On verra plus tard dans le cours qu'un tel domaine appelé *polyèdre*.

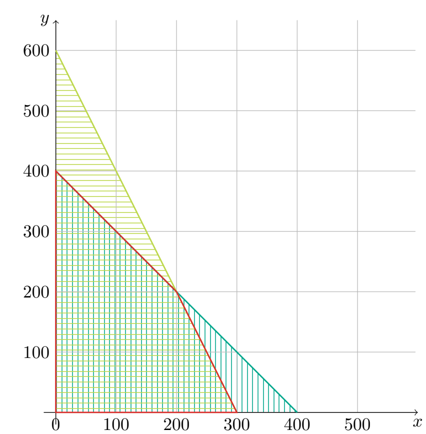


Figure 1 – Polyèdre des contraintes du problème $(\mathcal{P})$.

L'objectif du problème d'optimisation considéré est donc de trouver – s'il existe – un point dans le domaine délimité par le polygone rouge qui maximise la fonction objectif z sur ce même domaine. La fonction z étant une fonction à deux variables, son graphe est une surface dans l'espace $\mathbb{R}^3$, et est donc difficile à représenter dans le plan. Néanmoins, on peut tracer ses *lignes de niveaux*, à savoir les points (x, y) du plan pour lesquels la valeur de z est la même.

Intéressons-nous, par exemple, à la ligne de niveau $z = 4000000$, c'est-à-dire à l'ensemble

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 16000\,x + 10000\,y = 4000000\right\}$$

On voit qu'il s'agit de la droite d'équation

$$y = 400 - 1.6\,x$$

De la même manière, la ligne de niveau $z = 5000000$ est la droite d'équation

$$y = 500 - 1.6\,x$$

tandis que la ligne de niveau $z = 6000000$ est la droite d'équation

$$y = 600 - 1.6\,x$$

Elles sont tracées sur la figure 2. On peut observer (et il est assez facile de le démontrer) que les lignes de niveaux sont toutes parallèles. De plus (on l'admettra), il y a une direction dans laquelle la valeur de la fonction objectif croît : dans l'exemple considéré, z croît quand la ligne de niveau se déplace vers la droite.

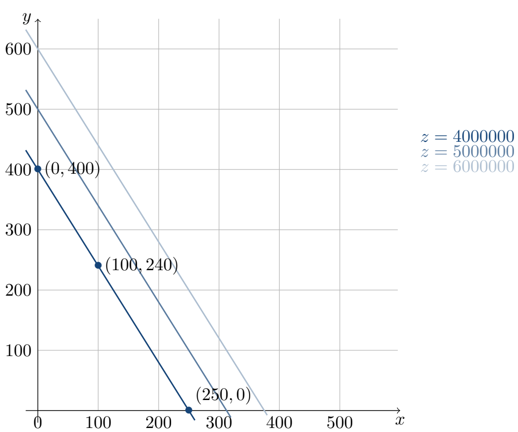


FIGURE 2 – Lignes de niveaux de la fonction objectif z.

2.2 Proposition d'une solution optimale

Ainsi, en utilisant cette observation et en superposant les deux figures 1 et 2, on peut se convaincre (voir figure 3) que le maximum de la fonction objectif z sur l'ensemble des contraintes est réalisé en un point de la ligne polygonale. Plus précisément, il s'agit de l'intersection entre les droites

$$\left\{(x, y) \mid x + y = 400\right\} \text{ et } \left\{(x, y) \mid 2\,x + y = 600\right\}$$

Un calcul rapide montre que cette intersection est réduite au point $(x^*, y^*) = (200, 200)$, pour lequel z vaut 5200000. On notera, et ce n'est pas un hasard, comme on le verra dans un cours prochain, que ce point est un *sommet* de l'ensemble réalisable.

Enfin, l'intersection entre la ligne de niveau passant par le sommet $(200, 200)$ et le polyèdre des contraintes étant réduite au point $(200, 200)$, on en déduit que la solution optimale de ce problème est unique.

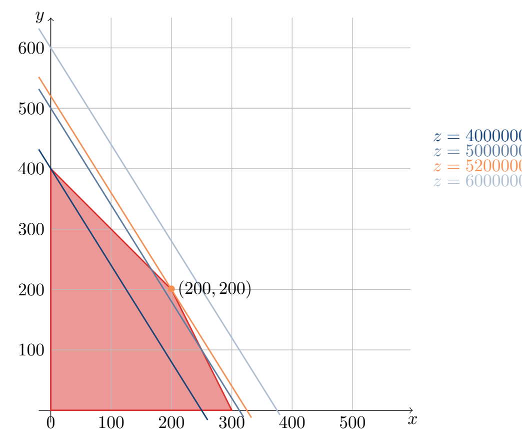


FIGURE 3 – Résolution graphique du problème $(\mathcal{P})$. En rouge, le polyèdre des contraintes. En bleu, quelques lignes de niveaux de la fonction objectif. En orange, la ligne de niveau passant par une solution optimale.

2.3 Optimalité de la solution ?

Dans la méthode décrite dans cette section, l'optimalité de la solution n'est pas démontrée. Aussi, il est abusif de parler de *résolution* graphique. Bien qu'il soit possible d'établir que la solution proposée est bien optimale, il serait fastidieux de le faire à ce stade du cours. **C'est pourquoi on admettra dans ce module que cette méthode dite de résolution graphique fournit bien une solution optimale dans le cas d'un problème de dimension 2, et on pourra l'appliquer aussi bien en exercices qu'à l'examen final.**

3 Problématiques annexes

3.1 Prix marginaux

Considérons une variante du problème précédent. On suppose que le fabricant d'automobiles réussit à augmenter légèrement son stock d'acier, de 100 unités. S'il cherche toujours à optimiser son chiffre d'affaires, il doit à présenter résoudre le problème suivant :

$$(\mathcal{P}_2) \qquad \begin{array}{ll} \text{Maximiser} & z = 16000\,x + 10000\,y \\ \text{sous les contraintes} & x + y \leq 400 \\ & 2\,x + y \leq 700 \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{array}$$

La résolution graphique de ce nouveau problème (voir Figure 4) permet d'obtenir comme solution optimale le point $(x^*, y^*) = (300, 100)$. (On notera que la fonction objectif restant la même, ses lignes de niveaux conservent le même comportement). Ainsi, le chiffre d'affaires maximal passe de 5200000 € à 5800000 €, soit une augmentation de 600000 €. Par conséquent, chaque unité d'acier ajoutée rapporte

$$\frac{600000}{100} = 6000\,€$$

de plus au fabricant. On dit que le *prix marginal* de l'acier est de 6000 €.

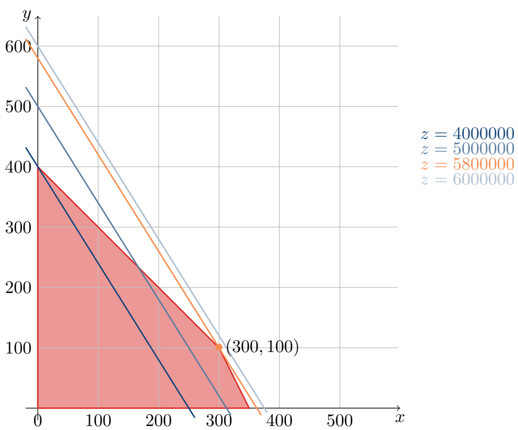


Figure 4 – Résolution graphique du problème $(\mathcal{P}_2)$. En rouge, le polyèdre des contraintes. En bleu, quelques lignes de niveaux de la fonction objectif. En orange, la ligne de niveau passant par une solution optimale.

De la même manière, on peut déterminer le prix marginal du caoutchouc, en considérant le problème suivant :

$$(\mathcal{P}_3) \qquad \begin{array}{ll} \text{Maximiser} & z = 16000\,x + 10000\,y \\ \text{sous les contraintes} & x + y \leq 500 \\ & 2\,x + y \leq 600 \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{array}$$

en ajoutant cette fois 100 unités de caoutchouc. À l'aide de la résolution graphique (voir Figure 5), on peut déterminer que le point $(x^*, y^*) = (100, 400)$ est une solution optimale. Ainsi, le chiffre d'affaires maximal passant de 5200000 € à 5600000 €, on en déduit que le *prix marginal* du caoutchouc est de 4000 €.

Remarque : La manière dont on définit le prix marginal sous-entend une relation linéaire entre la quantité de matières premières et le chiffre d'affaires optimal associé.

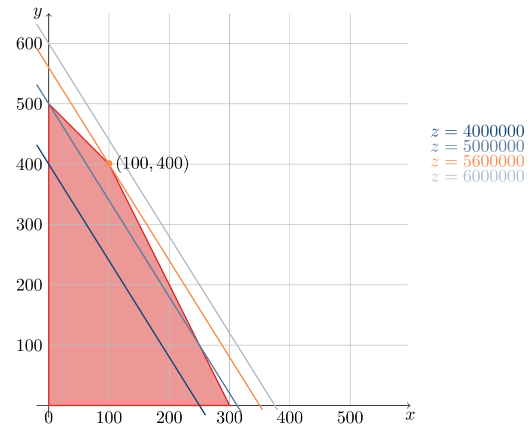


Figure 5 – Résolution graphique du problème $(\mathcal{P}_3)$. En rouge, le polyèdre des contraintes. En bleu, quelques lignes de niveaux de la fonction objectif. En orange, la ligne de niveau passant par une solution optimale.

Voyons ce qu'il en est réellement. Soit C le nombre d'unités de caoutchouc dont dispose le fabricant d'automobiles. En supposant sur le chiffre d'affaires optimal est donné par l'intersection (x^+, y^+) entre les droites

$$\mathcal{D}_1 = \Big\{(x, y) \mid x + y = C\Big\} \text{ et } \mathcal{D}_2 = \Big\{(x, y) \mid 2\,x + y = 600\Big\}$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} (x^+, y^+) \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \quad & \iff \quad \begin{cases} x^+ + y^+ = C \\ 2\,x^+ + y^+ = 600 \end{cases} \\ & \iff \quad \begin{cases} x^+ + y^+ = C \\ x^+ = 600 - C \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \end{cases} \\ & \iff \quad (x^+, y^+) = (600 - C, 2\,C - 600) \end{aligned}$$

Ainsi, si $300 \leq C \leq 600$, le chiffre d'affaires associé au point (x^+, y^+) vaut

$$z^+ = 16000(600 - C) + 10000(2\,C - 600) = 3600000 + 4000\,C$$

et évolue donc linéairement avec le nombre d'unités de caoutchouc. Au-delà de 600 unités de caoutchouc (pour 600 unités d'acier), on peut vérifier que les contraintes ne varient plus, et donc que le chiffre d'affaires optimal n'augmente plus.

Notons toutefois que ce raisonnement suppose que le chiffre d'affaires optimal est bien donné par l'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, ce qui n'a pas été prouvé.

3.2 Le problème dual du concurrent

Considérons à présent un autre problème d'optimisation, lié au premier problème $(\mathcal{P})$. Un concurrent souhaite racheter au fabricant tout son stock de caoutchouc (400 unités) et tout son stock d'acier (600 unités). Le fabricant n'acceptera l'offre de rachat que si le prix proposé par le concurrent est au moins égal à ce qu'il gagnerait en utilisant son stock pour produire des automobiles (et les vendre). Quel est le prix minimal que le concurrent doit proposer pour que l'offre soit acceptée par le fabricant ?

Mettons en équation ce nouveau problème. On pose u le prix de rachat d'une unité de caoutchouc et v le prix de rachat d'une unité d'acier. L'offre de rachat est notée p et vaut :

$$p = 400\,u + 600\,v$$

Les conditions de rachat s'écrivent

$$u + v \geq 10000 \text{ (prix d'une petite voiture)}$$

et

$$2\,u + v \geq 16000 \text{ (prix d'une grosse voiture)}$$

Le problème considéré est donc le suivant :

$$(\mathcal{D}) \qquad \begin{array}{ll} \text{Minimiser} & p = 400\,u + 600\,v \\ \text{sous les contraintes} & u + v \geq 10000 \\ & 2\,u + v \geq 16000 \\ & u \geq 0, v \geq 0 \end{array}$$

Ce problème est appelé *problème dual* du concurrent. Cette notion sera abordée plus en détails lors d'un cours prochain.

La figure 6 permet de résoudre graphiquement le problème dual $(\mathcal{D})$. On obtient en particulier qu'une solution optimale est donnée par $(u^*, v^*) = (4000, 6000)$ et est associée au prix de rachat optimal $p^* = 5200000$. On notera que la solution optimale correspond aux prix marginaux déterminés dans le paragraphe précédent tandis que le prix de rachat optimal est exactement le chiffre d'affaires optimal du fabricant.

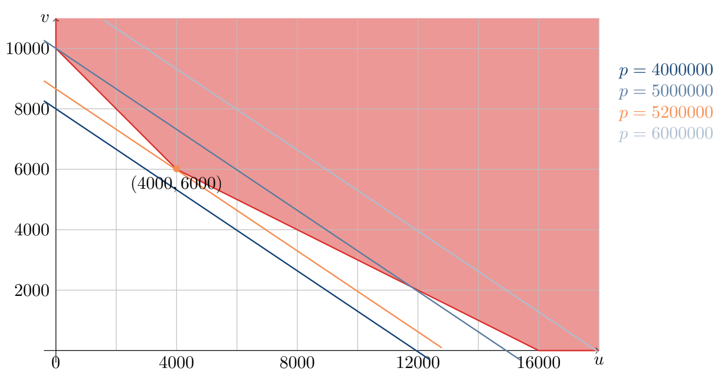
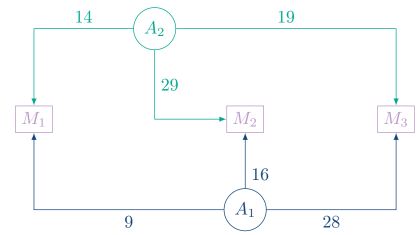


FIGURE 6 – Résolution graphique du problème $(\mathcal{D})$. En rouge, le polyèdre des contraintes. En bleu, quelques lignes de niveaux de la fonction objectif. En orange, la ligne de niveau passant par une solution optimale.

4 Un exemple en dimension 6

4.1 Le problème

Pour produire ses voitures, le fabricant possède trois chaînes de montage M_1, M_2 et M_3, de besoins en acier respectifs de 142, 266 et 192 unités. Son stock d'acier provient de deux aciéries A_1 et A_2, de capacités de production respectives de 206 et 394 unités. Le coût de transport d'une unité d'acier est donné dans le diagramme suivant :



Question : comment répartir la fourniture d'acier pour minimiser le coût de transport ?

Mettons en équation ce problème de transport optimal. Pour $i \in \{1, 2\}$ et $j \in \{1, 2, 3\}$, on pose x_{ij} le nombre d'unités d'acier acheminées depuis l'aciérie A_i vers la chaîne de montage M_j. Le coût total de transport s'écrit donc

$$t = 9\,x_{11} + 16\,x_{12} + 28\,x_{13} + 14\,x_{21} + 29\,x_{22} + 19\,x_{23}$$

Les contraintes des capacités de production des aciéries sont alors données par les inégalités

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 206 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 394 \end{cases}$$

tandis que les contraintes liées aux besoins des chaînes de montage sont

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} \geq 142 \\ x_{12} + x_{22} \geq 266 \\ x_{13} + x_{23} \geq 192 \end{cases}$$

Finalement, le problème s'écrit formellement

$$(\mathcal{P}_T) \qquad \begin{array}{ll} \text{Minimiser} & t = 9\,x_{11} + 16\,x_{12} + 28\,x_{13} + 14\,x_{21} + 29\,x_{22} + 19\,x_{23} \\ \text{sous les contraintes} & x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 206 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 394 \\ & x_{11} + x_{21} \geq 142 \\ & x_{12} + x_{22} \geq 266 \\ & x_{13} + x_{23} \geq 192 \\ & x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \end{array}$$

Il s'agit d'un problème de dimension 6, car il s'écrit à l'aide de six variables x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22} et x_{23}.

4.2 Problème équivalent de dimension 2

Dans cet exemple, la somme des capacités de production des aciéries est égale à la somme des besoins des chaînes de montage :

$$206 + 394 = 600 = 142 + 266 + 192$$

Nous allons montrer que, grâce à cette particularité, ce problème est équivalent à un problème d'optimisation linéaire de dimension 2.

Commençons par réécrire l'ensemble admissible $\mathcal{C}$ à l'aide d'un système linéaire. Pour cela, soit $(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23})$ vérifiant les cinq premières contraintes du problème. Supposons que ce point est tel qu'une d'entre elles est stricte (par exemple la première), c'est-à-dire que $(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23})$ vérifie

$$\begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} < 206 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 394 \\ x_{11} + x_{21} \geq 142 \\ x_{12} + x_{22} \geq 266 \\ x_{13} + x_{23} \geq 192 \end{array}$$

Sommons les deux premières inégalités et les trois dernières :

$$\begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} < 600 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq 600 \end{array}$$

C'est impossible ; donc si $(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23})$ vérifie les cinq premières contraintes, ce sont toutes des égalités. On en déduit que l'ensemble des contraintes s'écrit

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 206 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 394 \\ x_{11} + x_{21} = 142 \\ x_{12} + x_{22} = 266 \\ x_{13} + x_{23} = 192 \\ x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0 \end{array} \right\}$$

Autrement dit, $\mathcal{C}$ est l'ensemble des vecteurs à coefficients positifs solutions du système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 206 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 394 \\ x_{11} + x_{21} = 142 \\ x_{12} + x_{22} = 266 \\ x_{13} + x_{23} = 192 \end{array} \right.$$

Afin de déterminer explicitement l'ensemble admissible du problème, une idée naturelle est donc de résoudre ce système linéaire. La méthode du pivot de Gauss permet de montrer que les solutions de ce système linéaire sont les vecteurs de l'ensemble

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_{21} = 394 - x_{22} - x_{23} \\ x_{13} = 192 - x_{23} \\ x_{12} = 266 - x_{22} \\ x_{11} = -252 + x_{22} + x_{23} \end{array} \right\}$$

Par conséquent, l'ensemble des contraintes s'écrit

$$\mathcal{C} = \mathcal{S} \cap (\mathbb{R}^+)^6 = \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}^+)^6 \;\middle|\; \begin{array}{ll} x_{21} = 394 - x_{22} - x_{23} & (1) \\ x_{13} = 192 - x_{23} & (2) \\ x_{12} = 266 - x_{22} & (3) \\ x_{11} = -252 + x_{22} + x_{23} & (4) \end{array} \right\}$$

Examinons plus en détails cet ensemble. L'égalité (2), combinée avec les contraintes de positivité $x_{13}, x_{23} \geq 0$, implique que $0 \leq x_{23} \leq 192$. De la même manière, l'égalité (3) et les contraintes de positivité $x_{12}, x_{22} \geq 0$ entraînent que $0 \leq x_{22} \leq 266$. Enfin, les égalités (1) et (4) et les contraintes de positivité $x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0$ assurent que $252 \leq x_{22} + x_{23} \leq 394$. Ainsi, on peut réécrire l'ensemble admissible sous la forme suivante :

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} -252 + x_{22} + x_{23} \\ 266 - x_{22} \\ 192 - x_{23} \\ 394 - x_{22} - x_{23} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6 \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 \leq x_{22} \leq 266 \\ 0 \leq x_{23} \leq 192 \\ 252 \leq x_{22} + x_{23} \leq 394 \end{array} \right\}$$

On vient donc de démontrer que

$$\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix} \in \mathcal{C} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (x_{22}, x_{23}) \in \mathcal{C}' \\ x_{21} = 394 - x_{22} - x_{23} \\ x_{13} = 192 - x_{23} \\ x_{12} = 266 - x_{22} \\ x_{11} = -252 + x_{22} + x_{23} \end{cases} \qquad (\star)$$

avec
$$\mathcal{C}' = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x_{22} \leq 266 \\ 0 \leq x_{23} \leq 192 \\ 252 \leq x_{22} + x_{23} \leq 394 \end{array} \right\}$$

La représentation graphique de $\mathcal{C}'$ est donnée dans la figure 7.

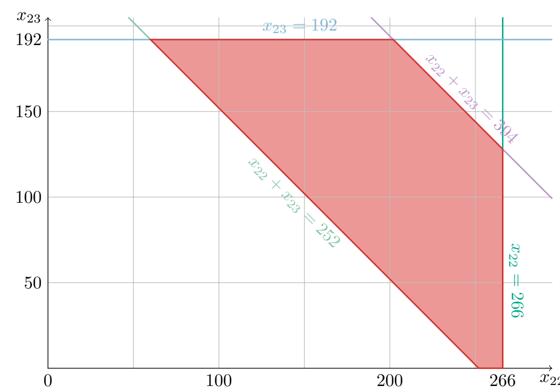


FIGURE 7 – Polyèdre $\mathcal{C}'$

Puisque l'on a réussi à exprimer x_{11}, x_{12}, x_{13} et x_{21} en fonction de x_{22} et x_{23}, on peut réécrire la fonction objectif t en fonction de ces deux mêmes variables : ainsi, pour tout $x \in \mathcal{C}$, on a

$$\begin{aligned} t &= 9\,x_{11} + 16\,x_{12} + 28\,x_{13} + 14\,x_{21} + 29\,x_{22} + 19\,x_{23} \\ &= 9\big(-252 + x_{22} + x_{23}\big) + 16\big(266 - x_{22}\big) + 28\big(192 - x_{23}\big) \\ &\qquad + 14\big(394 - x_{22} - x_{23}\big) + 29\,x_{22} + 19\,x_{23} \\ t &= 8\,x_{22} - 14\,x_{23} + 12880 \end{aligned} \qquad (\star\star)$$

Considérons donc le problème suivant

$$(\mathcal{P}'_T) \qquad \begin{array}{ll} \text{Minimiser} & t = 8\,x_{22} - 14\,x_{23} + 12880 \\ \text{sous les contraintes} & x_{22} \leq 266 \\ & x_{23} \leq 192 \\ & x_{22} + x_{23} \geq 252 \\ & x_{22} + x_{23} \leq 394 \\ & x_{22}, x_{23} \geq 0 \end{array}$$

Vérifions que les deux problèmes $(\mathcal{P}_T)$ et $(\mathcal{P}'_T)$ sont équivalents et explicitons le lien qui relie les solutions optimales des deux problèmes. Plus précisément, nous allons établir que :

- si$(x^*_{11}, x^*_{12}, x^*_{13}, x^*_{21}, x^*_{22}, x^*_{23})$estunesolutionoptimaleduproblème$(\mathcal{P}_T)$, alors (x^*_{22}, x^*_{23}) est une solution optimale du problème $(\mathcal{P}'_T)$;
- si (x^*_{22}, x^*_{23}) est une solution optimale du problème $(\mathcal{P}'_T)$, alors

  $$(-252 + x^*_{22} + x^*_{23}, 266 - x^*_{22}, 192 - x^*_{23}, 394 - x^*_{22} - x^*_{23}, x^*_{22}, x^*_{23})$$

  est une solution optimale du problème initial $(\mathcal{P}_T)$.

Commençons par démontrer le premier point [Fiche méthode 1].

1. Si $(x^*_{11}, x^*_{12}, x^*_{13}, x^*_{21}, x^*_{22}, x^*_{23})$ est une solution optimale du problème $(\mathcal{P})$, alors (par définition) $(x^*_{11}, x^*_{12}, x^*_{13}, x^*_{21}, x^*_{22}, x^*_{23}) \in \mathcal{C}$. Or, d'après $(\star)$, dans ce cas, $(x^*_{22}, x^*_{23}) \in \mathcal{C}'$. Autrement dit, (x^*_{22}, x^*_{23}) est un point admissible du problème $(\mathcal{P}'_T)$.
2. Soit (x_{22}, x_{23}) un point admissible du problème $(\mathcal{P}'_T)$. Toujours d'après $(\star)$, l'unique point associé

   $$(-252 + x_{22} + x_{23}, 266 - x_{22}, 192 - x_{23}, 394 - x_{22} - x_{23}, x_{22}, x_{23})$$

   est alors un point admissible du problème $(\mathcal{P}_T)$. Or, par définition de l'optimalité du point $(x^*_{11}, x^*_{12}, x^*_{13}, x^*_{21}, x^*_{22}, x^*_{23})$, on a

   $$\begin{aligned} & 9\,x^*_{11} + 16\,x^*_{12} + 28\,x^*_{13} + 14\,x^*_{21} + 29\,x^*_{22} + 19\,x^*_{23} \\ \leq\ & 9\,x_{11} + 16\,x_{12} + 28\,x_{13} + 14\,x_{21} + 29\,x_{22} + 19\,x_{23} \end{aligned}$$

   D'après $(\star\star)$, on a donc en particulier

   $$8\,x^*_{22} - 14\,x^*_{23} + 12880 \leq 8\,x_{22} - 14\,x_{23} + 12880$$

La démonstration du second point est laissé en exercice.

4.3 Résolution graphique du problème équivalent

Il nous suffit donc, d'après la preuve de l'équivalence entre les deux problèmes $(\mathcal{P}_T)$ et $(\mathcal{P}'_T)$, de résoudre le problème d'optimisation linéaire de dimension 2 $(\mathcal{P}'_T)$ pour obtenir une solution optimale du problème de dimension 6 $(\mathcal{P}_T)$. Cette solution peut être obtenue par résolution graphique, à l'aide de la figure 8. On y observe qu'une solution optimale de ce problème équivalent est donnée par l'intersection entre les deux droites

$$\Big\{x_{23} = 192\Big\} \text{ et } \Big\{x_{22} + x_{23} = 252\Big\}$$

ce qui donne $(x^*_{22}, x^*_{23}) = (60, 192)$.

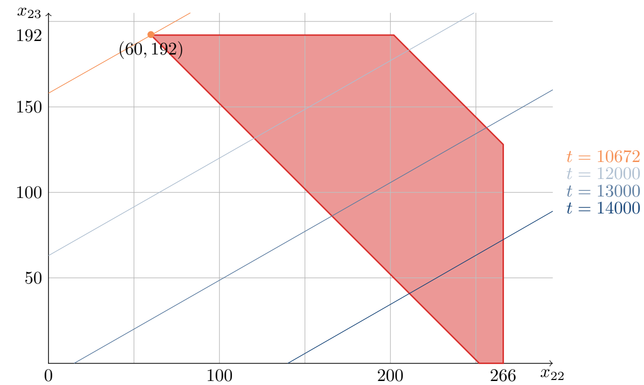


FIGURE 8 – Résolution graphique du problème $(\mathcal{P}'_T)$. En rouge, le polyèdre des contraintes. En bleu, quelques lignes de niveaux de la fonction objectif. En orange, la ligne de niveau passant par une solution optimale.

4.4 Retour au problème initial

On a montré dans le paragraphe §4.2 que si (x^*_{22}, x^*_{23}) est une solution optimale du problème $(\mathcal{P}'_T)$, alors

$$(-252 + x^*_{22} + x^*_{23}, 266 - x^*_{22}, 192 - x^*_{23}, 394 - x^*_{22} - x^*_{23}, x^*_{22}, x^*_{23})$$

est une solution optimale du problème initial $(\mathcal{P}_T)$. On en déduit donc qu'une solution optimale du problème initial est

$$(x^*_{11}, x^*_{12}, x^*_{13}, x^*_{21}, x^*_{22}, x^*_{23}) = (0, 206, 0, 142, 60, 192)$$