Feuille d'exercices n°1
Calcul différentiel

Exercices préparatoires

*Les exercices de cette section ne seront pas traités en TD. Les étudiants sont encouragés à les travailler en autonomie **avant** la séance de TD.*

Exercice 1 – Composition par un opérateur linéaire Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ une matrice et $b \in \mathbb{R}^n$. Après avoir justifié leur différentiabilité, calculer le gradient et la matrice hessienne des fonctions suivantes :

(a) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|A\,x\|_2^2 \end{array} \right.$

(b) $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \langle A\,x, y\rangle \end{array} \right.$

Exercice 2 – Gradient et matrice hessienne Après avoir justifié leur différentiabilité, calculer le gradient et la matrice hessienne des fonctions suivantes :

(a) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^4 + 4\,x\,\mathrm{e}^y \end{array} \right.$

(b) $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & \mathrm{e}^{x-y}\,\sin z \end{array} \right.$

Exercice 3 – Dérivées partielles *versus* gradient On considère la fonction définie par

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.

(b) La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

Exercices fondamentaux

Exercice 4 – Formes linéaires et quadratiques Soit $\mathcal{X}$ un espace de Hilbert, muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. On note $\|\cdot\|$ la norme découlant du produit scalaire. Soit $A \in \mathcal{L}_c(\mathcal{X},\mathcal{X})$ un opérateur linéaire continu et $b \in \mathcal{X}$. Montrer que les fonctions suivantes sont différentiables sur $\mathcal{X}$ et calculer leur différentielle. Que vaut leur gradient ?

(a) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \langle b, x\rangle \end{array} \right.$

(b) $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|A(x) - b\|^2 \end{array} \right.$

Exercice 5 – Fonctions régulières Soient $a > 0$ et $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Après avoir justifié leur différentiabilité, montrer que le gradient des fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ par

(a) $f(x) = \dfrac{1}{2}\,\|M\,x\|_2^2$

(b) $g(x) = \sqrt{\|x\|_2^2 + a}$

est lipschitzien.

Exercice 6 – Directions de descente Soient $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ et $J : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction. Soient $x^0 \in \mathcal{D}$ et $d \in \mathbb{R}^n$ tels que la dérivée directionnelle $J'(x^0;d)$ existe. On dit que d est une direction de descente pour J au point x^0 si

$$J'(x^0;d) < 0$$

(a) Soit d une direction de descente pour J en x^0. Justifier qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall t \in]\, 0\,;\alpha\,], \qquad J(x^0 + t\,d) < J(x^0)$$

La réciproque est-elle vraie ?

(b) On suppose que $J(x) > J(x^0)$ pour tout $x \in \mathcal{D}$. Montrer que J n'admet aucune direction de descente en x^0.

(c) On suppose que J est différentiable au voisinage de x^0. Montrer que d est une direction de descente pour J en x^0 si et seulement si

$$\langle \nabla J(x^0), d\rangle < 0$$

En déduire que $d = -\nabla J(x^0)$ est une direction de descente pour J en x^0 si et seulement si $\nabla J(x^0) \neq 0$.

(d) On suppose que J est deux fois différentiable au voisinage de x^0 et que $\operatorname{Hess} J(x^0)$ est définie positive. Montrer que $d = -(\operatorname{Hess} J(x^0)^{-1}(\nabla J(x^0))$ est une direction de descente pour J en x^0. *Indication : on pourra considérer la diagonalisation de la matrice hessienne.*

Compléments

⋆ Exercice 7 – Calcul des variations Soient $a < b$ deux réels. On considère $E_{[\,a\,;b\,]}$ l'espace des fonctions $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, muni de la norme

$$\|f\| = \max_{x\in[\,a\,;b\,]} \big|f(x)\big| + \max_{x\in[\,a\,;b\,]} \big|f'(x)\big|$$

Soit $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$; on définit la fonctionnelle suivante :

$$\mathcal{F} : \left\{ \begin{array}{ccc} E_{[\,a\,;b\,]} & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_a^b \mathcal{L}\big(x, f(x), f'(x)\big)\mathrm{d}x \end{array} \right.$$

Montrer que $\mathcal{F}$ est différentiable sur $E_{[\,a\,;b\,]}$ et que, pour tous $f, h \in E_{[\,a\,;b\,]}$,

$$d\mathcal{F}(f)\,h = \int_a^b \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}\big(x, f(x), f'(x)\big)\,h(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}\big(x, f(x), f'(x)\big)\,h'(x) \right) \mathrm{d}x$$

⋆ Exercice 8 – Espace de matrices Posons $\mathcal{X} = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ l'ouvert des matrices inversibles.

(a) On considère l'application $$F : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathcal{X} \\ A & \mapsto & A^2 \end{array} \right.$$

Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{X}$ et calculer pour tout $A \in \mathcal{X}$ sa différentielle $dF(A)$.

(b) On considère l'application $$G : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathcal{X} \\ A & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \end{array} \right.$$

Montrer que cette application est différentiable en 0 et calculer sa différentielle $dG(0)$.

(c) On considère l'application $$H : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathcal{X} \\ A & \mapsto & \det A \end{array} \right.$$

Montrer que cette application est différentiable sur $\mathcal{X}$. Calculer sa différentielle en l'identité, puis en toute matrice inversible $A \in \mathcal{Y}$, puis enfin en toute matrice $A \in \mathcal{X}$.

(d) Soit $A \in \mathcal{X}$ telle que $|||A||| < 1$. Montrer que

$$(I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k$$

En déduire que l'application $$J : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{Y} & \to & \mathcal{X} \\ A & \mapsto & A^{-1} \end{array} \right.$$

est différentiable en tout $A \in \mathcal{Y}$, avec

$$\forall\, (A, K) \in \mathcal{Y} \times \mathcal{X}, \qquad dJ(A)\, K = -A^{-1} K\, A^{-1}$$

⋆ Exercice 9 – Méthode de Newton pour la recherche d'un zéro Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $G : U \to \mathbb{R}^m$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle qu'il existe $x^* \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $G(x^*) = 0$. On suppose que $Jg(x)$ est inversible pour tout $x \in U$. On définit l'application suivante :

$$H : \left\{ \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & x - (JG(x))^{-1}(G(x)) \end{array} \right.$$

On considère la suite récurrente définie par

$$x_0 \in \mathbb{R}^n \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} = H(x_k)$$

(a) Déterminer les points fixes de H, s'ils existent.

(b) On suppose que H est lipschitzienne, de constante de Lipschitz $L < 1$. Justifier que la suite récurrente $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un zéro de G.

(c) **Exemple 1 : calcul d'une racine carrée.** Soit $a > 0$. On considère la fonction G définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$G(x) = x^2 - a$$

(i) Justifier que G est de classe $\mathcal{C}^2$ et admet un unique zéro x_a^* strictement positif. Montrer que

$$m = \frac{1}{2}\, \min\{1, a\} < x_a^* < 2\, \max\{1, a\} = M$$

(ii) Montrer que pour tout $x \in [\, m\, ;\, M\,]$, il existe t entre x et x_a^* tel que

$$H(x) - x_a^* = \frac{1}{2}\, \frac{G''(t)}{G'(x)}\, (x - x_a^*)^2$$

En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que $\qquad |H(x) - x_a^*\,| \leq C\, (x - x_a^*)^2$

(iii) Montrer que $\qquad |x - x_a^*\,| \leq \varepsilon \implies |H(x) - x_a^*\,| < \varepsilon \quad$ pour un certain $\varepsilon > 0$.

En déduire que, si $|x_0 - x_a^*| \leq \varepsilon$, alors la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{a}$.

(d) **Exemple 2 : inversion d'une matrice.** Soit $A \in \mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$ une matrice inversible. On considère l'application G définie pour toute matrice inversible $X \in \mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$ par

$$G(X) = A - X^{-1}$$

(i) Donner l'expression explicite $H(X)$. Justifier que H est de classe $\mathcal{C}^1$. Calculer $H(A^{-1})$ et $DH(A^{-1})$.

(ii) En déduire qu'il existe une boule $\mathcal{B}$ centrée en A^{-1} telle que $|||DH(X)||| < 1/2$ pour tout $X \in \mathcal{B}$.

(iii) En déduire que la suite récurrente définie par

$$X_0 \in \mathcal{B} \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad X_{k+1} = H(X_k)$$

converge vers A^{-1}.