Cours n°5

Optimisation linéaire. Méthode du simplexe. Initialisation

Ce cours est consacré à l'initialisation de la méthode du simplexe, qui se traduit en la recherche d'une première base réalisable pour tout problème d'optimisation linéaire sous forme standard. On verra que cette recherche est parfois facile, parfois aussi difficile que le problème lui-même. On débutera ce cours en introduisant une représentation d'un problème d'optimisation linéaire sous forme réduite qui permettra d'écrire de manière plus compacte les calculs dans la méthode du simplexe.

1 Écriture en tableau

Dans cette section, on va introduire une écriture sous forme de tableau des problèmes d'optimisation linéaire sous forme réduite. À l'instar des systèmes linéaires, cette représentation va faciliter l'implémentation de la méthode du simplexe.

1.1 Exemple

Reprenons le problème sous forme standard suivant, issu de la section 1.2 du cours 4 :

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser} & X_1 + X_2 - X_3 \\ \text{sous les contraintes} & X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 1 \\ & 4X_1 + 5X_2 + 7X_3 = 3 \\ & X_1\,,\ X_2\,,\ X_3 \geq 0 \end{array}$$

qui s'écrit à l'aide des matrices et vecteurs :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Considérons à présent la base γ donnée par $\gamma(1) = 2$ et $\gamma(2) = 3$. Alors, d'après la section 1.2 du cours précédent, la forme réduite relativement à γ de ce problème s'écrit

$$\begin{array}{lccccccc} \text{Maximiser} & -2 & +8X_1 & & & & & \\ \text{sous les contraintes} & & -4X_1 & + & X_2 & & = & -1 \\ & & 3X_1 & & & +\ X_3 & = & 1 \\ & & X_1 & , & X_2 & ,\ X_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Si on note $z = -2 + 8X_1$ la valeur de la fonction objectif, alors on peut réécrire le problème précédent sous la forme

$$\begin{array}{lccccccc} \text{Maximiser} & 8X_1 & & & & & = & z+2 \\ \text{sous les contraintes} & -4X_1 & + & X_2 & & & = & -1 \\ & 3X_1 & & & + & X_3 & = & 1 \\ & X_1 & , & X_2 & , & X_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Alors, par convention, on introduit la matrice augmentée suivante

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 8 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

1.2 Forme réduite dans le tableau

La solution de base X^* associée à γ est donnée par $X^* = {}^{\mathrm{t}}(0, -1, 1)$. On rappelle donc que la fonction objectif s'écrit

$$z = {}^{\mathrm{t}}C\,X = {}^{\mathrm{t}}C\,X^* + {}^{\mathrm{t}}d\,X$$

avec $d = {}^{\mathrm{t}}(8, 0, 0)$, si bien que, dans le cas général, on peut représenter tout problème d'optimisation linéaire sous forme réduite relativement à la base γ

$$\left[\begin{array}{c|c} B^{-1}A & B^{-1}b \\ \hline {}^{\mathrm{t}}d & -{}^{\mathrm{t}}C\,X^* \end{array}\right]$$

On va montrer que comment se traduisent dans cette représentation les changements de bases par pivot.

1.3 Pivot dans le tableau

Reprenons l'exemple introduit plus haut et passons de la base γ à la base δ définie par $\delta(1) = 1$ et $\delta(2) = 3$. On rappelle que cette nouvelle base s'obtient en faisant sortir la variable X_2 de la base γ et en faisant entrer X_1 dans la nouvelle base : il s'agit donc d'un pivot. Pour obtenir la forme réduite du problème relativement à la nouvelle base, il faut

1. normaliser la première ligne des contraintes ($L_1 \leftarrow -L_1/4$)

$$\begin{array}{lccccccc} \text{Maximiser} & 8X_1 & & & & & = & z+2 \\ \text{sous les contraintes} & X_1 & - & X_2/4 & & & = & 1/4 \\ & 3X_1 & & & + & X_3 & = & 1 \\ & X_1 & , & X_2 & , & X_3 & \geq & 0 \end{array}$$

   puis l'utiliser pour éliminer X_1 dans la seconde ligne ($L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$) ;

$$\begin{array}{lccccccc} \text{Maximiser} & 8X_1 & & & & & = & z+2 \\ \text{sous les contraintes} & X_1 & - & X_2/4 & & & = & 1/4 \\ & & & 3X_2/4 & + & X_3 & = & 1/4 \\ & X_1 & , & X_2 & , & X_3 & \geq & 0 \end{array}$$

2. ajouter $(-8) \times \big(X_1 - X_2/4 - 1/4\big) = 0$ dans la fonction objectif, ce qui revient à ajouter $(-8) \times \big(X_1 - X_2/4\big) = (-8) \times \big(1/4\big)$ à l'égalité $8X_1 = z + 2$:

$$\begin{array}{lccccccc} \text{Maximiser} & & & 2X_2 & & & = & z+0 \\ \text{sous les contraintes} & X_1 & - & X_2/4 & & & = & 1/4 \\ & & & 3X_2/4 & + & X_3 & = & 1/4 \\ & X_1 & , & X_2 & , & X_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Ces mêmes opérations peuvent être réalisées dans le tableau, sous la forme des opérations sur les lignes suivantes :

1.a $L_1 \leftarrow -L_1/4$

1.b $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$

2. $L_3 \leftarrow L_3 - 8L_1$

qui se traduisent sous la forme des tableaux successifs :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 8 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 1 & 1/4 \\ \hline 8 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 1 & 1/4 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

On voit donc l'intérêt de cette représentation, puisque le changement de bases par pivot s'écrit comme la méthode du pivot de Gauss. La seule différence réside dans le choix des pivots, qui est plus limité que dans la méthode du pivot de Gauss. En particulier, le pivot courant ne peut pas être choisi dans la dernière ligne (fonction objectif).

1.4 Lecture du tableau

Certaines informations sont immédiatement lisibles dans le tableau, et permettent en particulier de vérifier qu'aucune erreur (calcul ou choix du pivot) n'a été faite. Considérons à nouveau la forme réduite écriture sous forme de tableau :

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -4 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 8 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Alors on peut faire les observations suivantes :

- les variables en base sont facilement identifiables : dans le sous-tableau correspondant à la matrice $B^{-1}A$ (quart en haut à gauche), il s'agit des colonnes dans lesquelles apparaît un unique coefficient non nul, qui vaut 1 (ici, les colonnes 2 et 3) ;
- dans la sous-ligne correspondant au vecteur des prix marginaux (quart en bas à gauche du tableau), tous les coefficients correspondant aux variables en base sont nuls également ;
- dans la sous-colonne correspondant au vecteur $B^{-1}b$ (quart en haut à droite), les coefficients sont tous positifs ou nuls si la base est réalisable ;
- enfin, le coefficient en bas à droite doit décroître si le pivot a été correctement choisi (puisque la valeur de la fonction objectif doit décroître).

1.5 Choix d'un pivot

Décrivons à présent comment s'effectue le choix d'un pivot sous les critères naturel ou de Bland avec l'écriture sous forme de tableau. Pour cela, on s'intéresse à l'exemple suivant :

$$\left[\begin{array}{rrrrrrr|r} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Considérons tout d'abord le choix de la variable *entrante*. Celle-ci s'effectue en regardant le signe des prix marginaux non nuls. Plus précisément, les candidats sont ceux pour lesquels le prix marginal associé est strictement positif. On examine donc la *dernière* ligne, et on repère les coefficients positifs (sauf le dernier élément) :

$$\left[\begin{array}{rrrrrrr|r} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ainsi, la variable entrante peut être choisie parmi les variables X_1, X_2 et X_3. Si le pivot est choisi selon le critère naturel, alors il doit s'agir de la variable associée au prix marginal le plus élevé, à savoir X_2. On examine alors la colonne correspondante et on considère les coefficients strictement positifs (qui correspondent aux lignes appartenant à l'ensemble $S_{\gamma,2}$) :

$$\left[\begin{array}{rrrrrrr|r} 1 & \mathbf{3} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & \mathbf{4} & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & \mathbf{3} & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & \mathbf{5} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ainsi, ici, seuls trois lignes peuvent être choisies ; le critère naturel demande alors d'effectuer la division terme-à-terme entre la colonne courante 2 et la dernière, ce qui donne

$$\begin{cases} 3/3 = 1 \\ 4/4 = 1 \\ 2/3 = 0.66666... \end{cases}$$

La valeur minimale étant atteinte pour la quatrième ligne, le critère naturel permet de faire sortir la variable correspondante ; pour l'identifier, il suffit de regarder quelle est l'unique variable en base qui admet un coefficient non nul sur cette ligne :

$$\left[\begin{array}{rrrrrrr|r} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & \mathbf{3} & -1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \\ \hline 1 & \mathbf{5} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Il s'agit dans cet exemple de la variable X_7.

Si le pivot est choisi selon le critère de Bland, alors la variable entrante est celle associée au premier prix marginal strictement positif, à savoir X_1. On examine alors la colonne correspondante et on considère les coefficients strictement positifs (qui correspondent aux lignes appartenant à l'ensemble $S_{\gamma,1}$) :

$$\left[\begin{array}{rrrrrrr|r} \mathbf{1} & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ \mathbf{2} & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ \mathbf{1} & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline \mathbf{1} & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ainsi, ici, seuls trois lignes peuvent être choisies ; le critère naturel demande alors d'effectuer la division terme-à-terme entre la colonne courante 1 et la dernière, ce qui donne

$$\begin{cases} 3/1 = 3 \\ 4/2 = 2 \\ 2/1 = 2 \end{cases}$$

La valeur minimale étant atteinte pour les troisième et quatrième lignes, le critère de Bland demande de choisir la troisième ligne ; pour identifier la variable en base correspondant, on regarde à nouveau quelle est l'unique variable en base qui admet un coefficient non nul sur cette ligne :

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ \mathbf{2} & 4 & -1 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Il s'agit dans cet exemple de la variable X_6.

2 Trouver une première base réalisable

Dans le cours précédent, on a décrit comment on peut, à partir d'une base réalisable γ, obtenir une autre base réalisable δ, éventuellement plus intéressante (dans le sens où la solution de base associée fait augmenter la valeur de la fonction objectif). Une telle procédure n'est évidemment intéressante que si l'on est capable de l'initialiser, c'est-à-dire de trouver une première base réalisable. On va voir dans cette section que deux cas peuvent se présenter. Dans le premier cas, cette initialisation est immédiate, tandis que dans le second cas, le problème de trouver une première base réalisable est pratiquement aussi complexe (voir plus complexe) que de résoudre le problème d'optimisation lui-même.

Pour caractériser ces deux cas de figure, il faut revenir au problème sous forme canonique

$$(\mathcal{P}_c) \qquad \begin{array}{ll} \text{Maximiser} & {}^{\mathrm{t}}c\,x \\ \text{sous les contraintes} & M\,x \le b \\ & x \ge 0 \end{array}$$

avec $c = (c_j)_{1\le j\le q}$, $x = (x_j)_{1\le j\le q}$, $b = (b_k)_{1\le k\le p}$ et $M = (m_{kj})_{\substack{1\le k\le p\\1\le j\le q}}$.

On peut alors introduire les deux définitions suivantes :

Définition 1 (Problème de première espèce)

On dit que le problème sous forme canonique $(\mathcal{P}_c)$ est de *première espèce* si $b \ge 0$.

Exemple

Problème de première espèce. Le problème

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser} & z = 3\,x_1 - 5\,x_2 \\ \text{sous les contraintes} & \begin{array}{rcrl} x_1 & - & x_2 & \le 1 \\ x_1 & + & 2\,x_2 & \le 7 \\ x_1 & , & x_2 & \ge 0 \end{array} \end{array}$$

est un problème d'optimisation linéaire de première espèce.

Définition 2 (Problème de deuxième espèce)

On dit que le problème sous forme canonique $(\mathcal{P}_c)$ est de *deuxième espèce* s'il n'est pas de première espèce. Autrement dit, le vecteur b possède au moins une composante strictement négative.

Remarque : Attention : ces deux définitions s'appliquent à la forme *canonique* d'un problème, et non à la forme standard. En effet, dans la forme standard, il est toujours possible, comme on le verra dans la section suivante, de revenir à un vecteur à coefficients positifs, car il apparaît dans une contrainte de type *égalité*, contrairement à la forme canonique, où b intervient dans une contrainte de type inégalité.

Exemple

Problème de deuxième espèce. Le problème

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser} & z = x_1 + 2\,x_2 - 7\,x_3 \\ \text{sous les contraintes} & \begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & 3\,x_2 & - & 4\,x_3 & \le -4 \\ 2\,x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \le 2 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \ge 0 \end{array} \end{array}$$

est un problème d'optimisation linéaire de deuxième espèce.

3 Problèmes de première espèce

On va commencer par traiter le cas des problèmes de première espèce. On rappelle que le problème $(\mathcal{P}_c)$ est équivalent au problème sous forme standard suivant :

$$(\mathcal{P}_s) \qquad \begin{array}{ll} \text{Maximiser} & {}^{\mathrm{t}}C\,X \\ \text{sous les contraintes} & A\,X = b \\ & X \ge 0 \end{array}$$

avec $C = (C_\ell)_{1\le \ell\le p+q}$, $X = (X_\ell)_{1\le \ell\le p+q}$ et $A = (a_{k\ell})_{\substack{1\le k\le p\\1\le \ell\le p+q}}$ tels que

$$A = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1q} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ m_{p1} & \dots & m_{pq} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_q \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le problème $(\mathcal{P}_s)$ est sous forme réduite relativement à la base $\gamma(i) = q + i$ avec $i = 1, \dots, p$. Aussi, la solution de base associée est le vecteur

$$X^* = \begin{pmatrix} 0_q \\ b \end{pmatrix}$$

qui satisfait $X^* \ge 0$ car le problème $(\mathcal{P}_c)$ est supposé de première espèce. En particulier, X^* est une solution de base admissible du problème $(\mathcal{P}_s)$.

Exemple

Le problème de l'exemple 1 est équivalent au problème

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser} & z = 3\,x_1 - 5\,x_2 \\ \text{sous les contraintes} & \begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & = 1 \\ x_1 & + & 2\,x_2 & & & + & x_4 & = 7 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \ge 0 \end{array} \end{array}$$

Une solution de base admissible de ce problème est donnée par le vecteur

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

4 Problème de deuxième espèce

On s'intéresse maintenant aux problèmes de deuxième espèce. Comme on va le voir, déterminer une base réalisable pour un problème $(\mathcal{P}_s)$ associé à un problème de deuxième espèce est un problème difficile. Il faut passer par la résolution d'un problème d'optimisation linéaire auxiliaire de dimension plus grande. On va voir dans ce cours deux méthodes différentes, mais d'autres techniques sont envisageables.

4.1 Méthode 1

Dans la première méthode, on commence par définir la fonction sgn: $\mathbb{R} \to \{-1, 1\}$

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

qui donne le signe d'un réel (avec, par convention, 0 de signe positif). On introduit ensuite la matrice suivante :

$$P = \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}(b_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \operatorname{sgn}(b_p) \end{pmatrix}$$

Alors on peut vérifier que

$$P\,A = \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}(b_1)\, a_{11} & \operatorname{sgn}(b_1)\, a_{12} & \dots & \operatorname{sgn}(b_1)\, a_{1,p+q} \\ \operatorname{sgn}(b_2)\, a_{21} & \operatorname{sgn}(b_2)\, a_{22} & \dots & \operatorname{sgn}(b_2)\, a_{2,p+q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \operatorname{sgn}(b_p)\, a_{p1} & \operatorname{sgn}(b_p)\, a_{p2} & \dots & \operatorname{sgn}(b_p)\, a_{p,p+q} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P\,b = \begin{pmatrix} \operatorname{sgn}(b_1)\, b_1 \\ \operatorname{sgn}(b_2)\, b_2 \\ \vdots \\ \operatorname{sgn}(b_p)\, b_p \end{pmatrix}$$

Puisque $\operatorname{sgn}(t)\, t = |t|$, on en déduit que $P\,b \geq 0$. Posons $\tilde{A} = P\,A$ et $\tilde{b} = P\,b$ et considérons le problème suivant :

$$(\mathcal{P}_a) \qquad \begin{array}{ll} \text{Maximiser} & -Y_1 - \dots - Y_p \\ \text{sous les contraintes} & \tilde{A}\,X + Y = \tilde{b} \\ & X, \quad Y \geq 0 \end{array}$$

Il s'agit d'un problème d'optimisation linéaire sous forme standard. Le lien entre ce problème et le problème initial $(\mathcal{P}_c)$ est donné dans le lemme suivant :

Lemme 1

Si le problème $(\mathcal{P}_s)$ est réalisable, alors le problème auxiliaire $(\mathcal{P}_a)$ admet une solution optimale. De plus, le maximum atteint par la fonction objectif sur son ensemble admissible est 0.

Démonstration :

- Si $(\mathcal{P}_s)$ est réalisable, alors, par définition, son ensemble admissible est non vide. Autrement dit, il existe un vecteur $X^* \geq 0$ tel que $A\,X^* = b$. En multipliant les deux membres de cette égalité par la matrice P introduite plus haut, on en déduit que $\tilde{A}\,X^* = \tilde{b}$.
- Ainsi, puisque $\tilde{A}\,X^* + 0_p = \tilde{A}\,X^* = \tilde{b}$ et que $0_p \geq 0$, il s'en suit que $(X^*, 0_p)$ est un point admissible du problème $(\mathcal{P}_a)$.
- Par ailleurs, pour tout point admissible (X, Y) du problème $(\mathcal{P}_a)$, on a

$$-Y_1 - \dots - Y_p \leq -0 - \dots - 0$$

puisque $Y \geq 0$. En particulier, il en découle que $(X^*, 0_p)$ est une solution optimale du problème $(\mathcal{P}_a)$. ■

Un premier corollaire immédiat est le résultat suivant :

Corollaire 1

Si la valeur optimale atteinte dans le problème auxiliaire $(\mathcal{P}_a)$ est strictement négatif, alors le problème initial $(\mathcal{P}_s)$ n'est pas réalisable.

La démonstration du lemme 1 montre qu'en particulier, si le problème initial est réalisable, le maximum atteint dans le problème auxiliaire $(\mathcal{P}_a)$ étant nulle, toute solution optimale (X^*, Y^*) de ce problème vérifie $Y^* = 0$. On en déduit donc le corollaire suivant :

Corollaire 2

On suppose que $(\mathcal{P}_s)$ est réalisable. Si (X^*, Y^*) est une solution optimale du problème auxiliaire $(\mathcal{P}_a)$, alors X^* est une solution optimale du problème $(\mathcal{P}_s)$.

En particulier, ce résultat reste vrai si (X^*, Y^*) est une solution de base optimale du problème auxiliaire $(\mathcal{P}_a)$. Cependant, un résultat plus fort (et plus intéressant pour la suite) est le suivant :

Proposition 1

On suppose que $(\mathcal{P}_s)$ est réalisable. Soit $\tilde{\gamma}$ une base réalisable du problème auxiliaire $(\mathcal{P}_a)$, et soit (X^*, Y^*) la solution de base associée. On définit

$$i_0 = \max\big\{ i = 1, \dots, p \;\big|\; \tilde{\gamma}(i) \leq p + q \big\}$$

Si (X^*, Y^*) est une solution optimale de $(\mathcal{P}_a)$, alors X^* est une solution optimale du problème $(\mathcal{P}_s)$. Par ailleurs, X^* est la solution de base du système $A\,X = b$, associée à la base γ définie comme l'unique application strictement croissante de $\{1, \dots, p\}$ à valeurs dans $\{1, \dots, p+q\}$ vérifiant :

$$\big\{\gamma(1), \dots, \gamma(p)\big\} = \begin{cases} \big\{\tilde{\gamma}(1), \dots, \tilde{\gamma}(p)\big\} & \text{si } i_0 = p \\ \big\{\tilde{\gamma}(1), \dots, \tilde{\gamma}(i_0)\big\} \\ \cup \big\{\tilde{\gamma}(i_0+1) - (p+q), \dots, \tilde{\gamma}(p) - (p+q)\big\} & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration : On décompose la preuve en deux étapes : on commence par montrer que γ définit une base, puis que X^* est la solution de base du système $A\,X = b$ associée à γ. Dans ce cas, elle est bien admissible car $X^* \geq 0$ par définition de $\tilde{\gamma}$.

1. On commence par traiter le cas $i_0 = p$. Dans ce cas, $\tilde{\gamma}$ est à valeurs dans $\{1, \dots, p+q\}$. Aussi, si $\gamma = \tilde{\gamma}$, la matrice $\tilde{A}_\gamma$ est bien définie. Par définition de $\tilde{\gamma}$, la matrice $\tilde{A}_\gamma$ est inversible. Or, puisque $\tilde{A}_\gamma = P\,A_\gamma$ avec P inversible car de déterminant

$$\det(P) = \operatorname{sgn}(b_1) \times \cdots \times \operatorname{sgn}(b_p) = \pm 1 \neq 0$$

on en déduit que A_γ est inversible aussi. Donc γ définit bien une base pour le système $A\,X = b$. Enfin, il reste à vérifier que X^* est la solution de base de $A\,X = b$ associée à γ. Pour cela, il suffit de vérifier que les variables en base pour la base γ sont les $X_{\gamma(1)}$, …, $X_{\gamma(p)}$. C'est bien le cas car, par hypothèse, $\hat{\gamma}(p) \leq p + q$, ce qui signifie en particulier que toutes les variables Y_1, …, Y_p sont hors base pour $\tilde{\gamma}$. Les variables en base pour cette base sont donc les $X_{\tilde{\gamma}(1)}$, …, $X_{\tilde{\gamma}(p)}$.

2. On s'intéresse à présent au cas où $i_0 < p$. Commençons par décrire la matrice du système linéaire $\tilde{A}\,X + Y = b$. Elle est décomposée en trois parties :

$$\begin{pmatrix} \tilde{A} & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P\,M & P\,I_p & I_p \end{pmatrix}$$

où $P\,I_p = \big(\operatorname{sgn}(b_1)\,e_1, \dots, \operatorname{sgn}(b_p)\,e_p\big)$ et $I_p = \big(e_1, \dots, e_p\big)$, avec e_i désignant le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^p$. Ainsi, si on introduit l'indice j_0 comme étant

$$j_0 = \max \big\{ j = 1, \dots, p \;\big|\; \tilde{\gamma}(j) \leq q \big\}$$

la base définie par $\tilde{\gamma}$ est composée des vecteurs suivants :

$$\mathcal{V} = \big\{ \tilde{M}_{\tilde{\gamma}(1)}, \dots, \tilde{M}_{\tilde{\gamma}(j_0)} \big\} \cup \big\{ \tilde{e}_{\tilde{\gamma}(j_0+1)-q}, \dots, \tilde{e}_{\tilde{\gamma}(i_0)-q} \big\} \cup \big\{ e_{\tilde{\gamma}(i_0+1)-(p+q)}, \dots, e_{\tilde{\gamma}(p)-(p+q)} \big\}$$

avec $\tilde{e}_i = \operatorname{sgn}(b_i)\,e_i$. En effet, $\tilde{\gamma}$ extrait i_0 vecteurs dans la matrice $\tilde{A}$, dont j_0 dans la matrice $\tilde{M} = P\,M$, et le reste ($p - i_0$ vecteurs) dans la matrice identité I_p. L'idée est donc d'échanger les vecteurs e_i extraits dans la matrice I_p par leur homologue $\tilde{e}_i$ dans la matrice $P\,I_p$, qui ne diffère éventuellement que d'un signe. Pour cela, il faut d'abord vérifier que l'homologue n'est pas déjà dans la base $\mathcal{V}$. Les vecteurs de l'ensemble $\mathcal{V}$ constituant une base, ils sont en particulier linéairement indépendants. Cela signifie notamment que les vecteurs

$$\tilde{e}_{\tilde{\gamma}(j_0+1)-q}, \dots, \tilde{e}_{\tilde{\gamma}(i_0)-q}, e_{\tilde{\gamma}(i_0+1)-(p+q)}, \dots, e_{\tilde{\gamma}(p)-(p+q)}$$

le sont. Or, puisque $\tilde{e}_i$ et e_i ne sont pas linéairement indépendants, on en déduit que les vecteurs

$$\tilde{e}_{\tilde{\gamma}(j_0+1)-q}, \dots, \tilde{e}_{\tilde{\gamma}(i_0)-q}, \tilde{e}_{\tilde{\gamma}(i_0+1)-(p+q)}, \dots, \tilde{e}_{\tilde{\gamma}(p)-(p+q)}$$

sont linéairement indépendants. On remarque alors qu'il s'agit précisément des vecteurs extraits par γ dans la matrice $P\,I_p$. Ainsi, γ définit bien une base. Pour conclure cette preuve, il suffit d'observer que les variables en base pour $\tilde{\gamma}$ non nulles sont celles dans le vecteur X^*. Celles-ci restent bien en base pour la base γ, car ce sont précisément celles associées à des vecteurs de la matrice $\tilde{M}$, qui ne sont pas affectées par l'échange de vecteurs décrit plus haut. ■

La proposition précédente assure donc que, pour trouver une base réalisable du problème $(\mathcal{P}_s)$, il faut résoudre le problème auxiliaire $(\mathcal{P}_a)$ par la méthode du simplexe, afin d'en obtenir une base réalisable associée à une solution de base optimale. On est donc ramené à devoir trouver une base réalisable pour ce problème. Heureusement, ce dernier a été construit de manière à posséder une base réalisable facile à déterminer. En effet, si on définit $\tilde{\gamma}(i) = p + q + i$ pour $i = 1, \dots, p$, alors $\tilde{\gamma}$ définit visiblement une base (les vecteurs extraits forment la matrice identité I_p), tandis que la solution de base (X^*, Y^*) du système $\tilde{A}\,X + Y$ associée vaut précisément

$$\begin{pmatrix} X^* \\ Y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{p+q} \\ \tilde{b} \end{pmatrix}$$

qui est à composantes positives par définition de $\tilde{b}$. Ainsi, $\tilde{\gamma}$ définit une base réalisable pour le problème $(\mathcal{P}_a)$.

Exemple

Considérons le problème de deuxième espèce présenté dans l'exemple 2. Le problème auxiliaire associé est le problème suivant

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser} & -y_1 - y_2 \\ \text{sous les contraintes} & -x_1 - 3\,x_2 + 4\,x_3 - x_4 + y_1 = 4 \\ & 2\,x_1 - x_2 + x_3 + x_5 + y_2 = 2 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ y_1,\ y_2 \geq 0 \end{array}$$

Une base réalisable évidente est la base $\tilde{\gamma}(1) = 6$ et $\tilde{\gamma}(2) = 7$. La forme réduite relativement à cette base de ce problème est obtenue en éliminant y_1 et y_2 dans la fonction objectif. On obtient alors le tableau suivant :

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} -1 & -3 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & -4 & 5 & -1 & 1 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right]$$

En appliquant à chaque fois le critère naturel pour sélectionner le pivot, on obtient les états successifs

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} -1/4 & -3/4 & 1 & -1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1 \\ 9/4 & -1/4 & 0 & 1/4 & 1 & -1/4 & 1 & 1 \\ \hline 9/4 & -1/4 & 0 & 1/4 & 1 & -5/4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} -1/4 & -3/4 & 1 & -1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1 \\ 9/4 & -1/4 & 0 & 1/4 & 1 & -1/4 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Les prix marginaux étant tous négatifs ou nuls, on a trouvé une solution (de base) optimale du problème auxiliaire, donnée par

$$\begin{pmatrix} X^* \\ Y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

est associée à la base $\tilde{\gamma}(1) = 3$ et $\tilde{\gamma}(2) = 5$. Puisque $\tilde{\gamma}(2) \leq 5$, on en déduit qu'une base réalisable du problème standard initial est donnée par $\gamma(1) = 3$ et $\gamma(2) = 5$.

L'inconvénient principal de cette méthode est que le problème auxiliaire introduit est de grande taille, puisqu'on introduit p variables supplémentaires. On va donc voir une autre méthode, qui ne nécessite que d'introduire une variable supplémentaire.

4.2 Méthode 2

Dans cette seconde méthode, on considère le problème auxiliaire suivant

$$(\mathcal{P}_a) \qquad \begin{array}{ll} \text{Maximiser} & -X_{p+q+1} \\ \text{sous les contraintes} & \bar{A}\,\bar{X} = b \\ & \bar{X} \geq 0 \end{array}$$

où $\bar{X} = {}^{\mathrm{t}}(X_1, \ldots, X_{p+q}, X_{p+q+1})$ et

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} & & -1 \\ & A & \vdots \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'un problème d'optimisation linéaire sous forme standard. En suivant la même démarche que dans la première méthode, on commence par démontrer les résultats suivants :

Lemme 2

Si le problème $(\mathcal{P}_s)$ est réalisable, alors le problème auxiliaire $(\mathcal{P}_a)$ admet une solution optimale. De plus, le maximum atteint par la fonction objectif sur son ensemble admissible est 0.

La preuve est la même que celle du lemme 1 : on commence par montrer que le problème auxiliaire est réalisable ; puisque la fonction objectif est majorée par 0, on en déduit l'existence d'une solution optimale $X*$, dont on démontre qu'elle doit vérifier $X^*_{p+q+1} = 0$. De la même façon, on en déduit le résultat suivant :

Corollaire 3

Si la valeur optimale atteinte dans le problème auxiliaire $(\mathcal{P}_a)$ est strictement négatif, alors le problème initial $(\mathcal{P}_s)$ n'est pas réalisable.

On a alors l'équivalent de la proposition 1 pour cette seconde méthode.

Proposition 2

On suppose que $(\mathcal{P}_s)$ est réalisable. Soit $\bar{\gamma}$ une base réalisable du problème auxiliaire $(\mathcal{P}_a)$, et soit (X^*, X^*_{p+q+1}) la solution de base associée.

(a) Si $\bar{\gamma}(p) < p+q+1$, alors $\bar{\gamma}$ définit une base réalisable pour le problème initial $(\mathcal{P}_s)$.

(b) Si $\bar{\gamma}(p) = p+q+1$, alors il existe un pivot permettant de faire sortir X_{p+q+1} de la base sans changer la solution de base associée.

Dans les deux cas, la solution de base associée est X^*.

Démonstration : Comme dans la première méthode, on peut montrer que

$$X^*_{p+q+1} = 0$$

La démonstration du cas (a) est laissée en exercice. On considère donc le cas (b). Comme dans la démonstration de la prop 1, on va montrer qu'il est possible de faire sortir la variable X_{p+q+1} de la base et faire entrer une variable hors base dans la base γ, tout en conservant la même solution de base.

- Pour cela, on commence par remarquer que, dans la forme réduite relativement à la base $\bar{\gamma}$ du problème auxiliaire, la variable X_{p+q+1} n'apparaît qu'une seule fois dans les contraintes, dans une équation de la forme

$$\lambda_{\bar{\gamma}(1)}\, X_{\bar{\gamma}(1)} + \cdots + \lambda_{\bar{\gamma}(p-1)}\, X_{\bar{\gamma}(p-1)} + X_{p+q+1} = 0 \qquad (\star)$$

- On suppose dans un premier temps que, dans la formule $(\star)$, il existe un coefficient $\lambda_{\bar{\gamma}(j_0)}$ apparaissant devant $X_{\bar{\gamma}(j_0)}$ qui est non nul. Alors on peut diviser toute l'égalité par ce coefficient, ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{\bar{\gamma}(1)}}{\lambda_{\bar{\gamma}(j_0)}}\, X_{\bar{\gamma}(1)} + \cdots + \frac{\lambda_{\bar{\gamma}(i_0-1)}}{\lambda_{\bar{\gamma}(j_0)}}\, X_{\bar{\gamma}(i_0-1)} & \\ + X_{\bar{\gamma}(i_0)} + \frac{\lambda_{\bar{\gamma}(i_0+1)}}{\lambda_{\bar{\gamma}(j_0)}}\, X_{\bar{\gamma}(i_0+1)} + \ldots & \\ + \frac{\lambda_{\bar{\gamma}(p-1)}}{\lambda_{\bar{\gamma}(j_0)}}\, X_{\bar{\gamma}(p-1)} + \frac{1}{\lambda_{\bar{\gamma}(j_0)}}\, X_{p+q+1} = 0 & \end{aligned}$$

  On peut donc utiliser cette équation pour éliminer $X_{\bar{\gamma}(j_0)}$ dans les autres équations du problème, sans changer les termes constants. Par conséquent, cela montre qu'il est possible de faire entrer $X_{\bar{\gamma}(j_0)}$ dans la base et en faire sortir X_{p+q+1}, sans changer la solution de base associée.

- En revanche, si, dans la formule $(\star)$, tous les coefficients $\lambda_{\bar{\gamma}(j)}$ sont nuls, cela signifie que la matrice A est équivalente à une matrice de taille $p \times (p+q)$ qui comporte une ligne constituée exclusivement de zéros. Or, une telle matrice ne peut être de rang p. Puisque, par construction, A admet comme sous-matrice une matrice carrée de taille p, elle est de rang p. On aboutit donc à une contradiction. ■

À nouveau, cette proposition indique que, pour trouver une base réalisable pour le problème $(\mathcal{P}_s)$, on peut chercher une base réalisable optimale pour le problème auxiliaire. Cette base peut être obtenue par la méthode du simplexe, à condition d'être capable de l'initialiser, c'est-à-dire de trouver une première base réalisable. Pour ce faire, on suppose toujours que b admet une composante strictement négative, et on définit

$$i_0 \in \{1, \ldots, p\} \text{ tel que } b_{i_0} = \min_{i=1,\ldots,p} b_i$$

On considère ensuite $\bar{\gamma} \in \Gamma$ tel que $\{\bar{\gamma}(1), \ldots, \bar{\gamma}(p)\} = \{q+1, \ldots, q+p+1\} \setminus \{q+i_0\}$. Alors $\bar{\gamma}$ définit une base car

$$\bar{A}_{q+i} = e_i \text{ pour } i = 1, \ldots, p \quad \text{et} \quad \bar{A}_{q+p+1} = -\sum_{i=1}^{p} e_i$$

En particulier, si on a

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{p} \lambda_i e_i + \lambda_{i_0} \bar{A}_{q+p+1} = 0 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{p} \lambda_i e_i - \lambda_{i_0} \sum_{i=1}^{p} e_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{p} (\lambda_i - \lambda_{i_0}) e_i - \lambda_{i_0} e_{i_0}$$

alors la liberté de la famille des e_i implique que $\lambda_{i_0} = 0$ et $\lambda_i - \lambda_{i_0} = 0$, ce qui entraîne notamment que tous les λ_i sont nuls. Soit (X^*, X_{p+q+1}) la solution de base de $\bar{A}\,\bar{X} = b$ associée à $\bar{\gamma}$. Les variables hors base de ce vecteur sont nulles par définition, c'est-à-dire que

$$\forall\, i = 1, \ldots, q, \qquad X^*_i = 0 \quad \text{et} \quad X^*_{q+i_0} = 0$$

Rappelons que les contraintes s'écrivent sous forme étendue

$$\left\{\begin{array}{l}
m_{11}\,X_1 + \ldots + \quad m_{1q}\,X_q + X_{q+1} \quad - X_{p+q+1} = b_1 \\
m_{21}\,X_1 + \ldots + \quad m_{2q}\,X_q + X_{q+2} \quad - X_{p+q+1} = b_2 \\
\qquad\qquad\vdots \\
m_{(i_0-1)1}\,X_1 + \ldots + m_{(i_0-1)q}\,X_q + X_{q+i_0-1} - X_{p+q+1} = b_{i_0-1} \\
m_{i_01}\,X_1 + \ldots + \quad m_{i_0q}\,X_q + X_{q+i_0} \quad - X_{p+q+1} = b_{i_0} \\
m_{(i_0+1)1}\,X_1 + \ldots + m_{(i_0+1)q}\,X_q + X_{q+i_0+1} - X_{p+q+1} = b_{i_0+1} \\
\qquad\qquad\vdots \\
m_{p1}\,X_1 + \ldots + \quad m_{pq}\,X_q + X_{q+p} \quad - X_{p+q+1} = b_p
\end{array}\right.$$

Ainsi, les composantes de la solution de base vérifient

$$\left\{\begin{array}{l}
X^*_{q+1} \quad - X^*_{p+q+1} = b_1 \\
X^*_{q+2} \quad - X^*_{p+q+1} = b_2 \\
\qquad\vdots \\
X^*_{q+i_0-1} - X^*_{p+q+1} = b_{i_0-1} \\
\qquad\quad - X^*_{p+q+1} = b_{i_0} \\
X^*_{q+i_0+1} - X^*_{p+q+1} = b_{i_0+1} \\
\qquad\vdots \\
X^*_{q+p} \quad - X^*_{p+q+1} = b_p
\end{array}\right.$$

soit $X^*_{p+q+1} = -b_{i_0}$ et

$$\left\{\begin{array}{l}
X^*_{q+1} \quad = b_1 - b_{i_0} \\
\qquad\vdots \\
X^*_{q+i_0-1} = b_{i_0-1} - b_{i_0} \\
X^*_{q+i_0+1} = b_{i_0+1} - b_{i_0} \\
\qquad\vdots \\
X^*_{q+p} \quad = b_p - b_{i_0}
\end{array}\right.$$

Par choix de i_0, le vecteur X^* est à composantes positives et $\bar{\gamma}$ est donc une base réalisable pour le problème auxiliaire.

Exemple

On reprend le problème de deuxième espèce présenté dans l'exemple page 6. Le problème auxiliaire associé selon la méthode 2 est le problème suivant

$$\begin{array}{ll}
\text{Maximiser} & -x_6 \\
\text{sous les contraintes} & x_1 + 3\,x_2 - 4\,x_3 + x_4 \quad - x_6 = -4 \\
 & 2\,x_1 - x_2 + x_3 \quad + x_5 - x_6 = 2 \\
 & x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ ,\ x_4\ ,\ x_5\ ,\ x_6 \geq 0
\end{array}$$

D'après l'étude ci-dessus, une base réalisable est donnée par $\bar{\gamma}(1) = 5$ et $\bar{\gamma}(2) = 6$. La forme réduite relativement à cette base de ce problème est obtenue en éliminant x_6 dans la seconde contrainte et dans la fonction objectif. On obtient alors le tableau suivant :

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r}
-1 & -3 & 4 & -1 & 0 & 1 & 4 \\
1 & -4 & 5 & -1 & 1 & 0 & 6 \\
\hline
-1 & -3 & 4 & -1 & 0 & 0 & 4
\end{array}\right]$$

En appliquant à chaque fois le critère naturel pour sélectionner le pivot, on obtient alors

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r}
-1/4 & -3/4 & 1 & -1/4 & 0 & 1/4 & 1 \\
-1/4 & -1/4 & 0 & -3/4 & 1 & -1/4 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0
\end{array}\right]$$

Les prix marginaux étant tous négatifs ou nuls, on obtient une solution (de base) optimale du problème auxiliaire, donnée par

$$\begin{pmatrix} X^* \\ x_6^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

est associée à la base $\bar{\gamma}(1) = 3$ et $\bar{\gamma}(2) = 5$. Puisque $\bar{\gamma}(2) \leq 5$, on en déduit qu'une base réalisable du problème standard initial est donnée par $\gamma(1) = 3$ et $\gamma(2) = 5$.