FEUILLE D'EXERCICES N°11
Projection sur un convexe

Démonstrations de cours

Les exercices de cette section ***ne seront pas*** *traités en TD, les corrigés se trouvant dans le polycopié. Les exercices marqués ♣ sont exigibles au partiel et à l'examen.*

Exercice 1 – Projection sur un convexe fermé et non vide

Module B6 – Théorème 1

Soit $\mathcal{X}$ un espace de HILBERT. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$ un ensemble convexe, non vide et fermé. Soit $x_0 \in \mathcal{X}$. On s'intéresse au problème d'optimisation sous contraintes

$$\text{Minimiser } \|x - x_0\| \text{ sous les contraintes } x \in \mathcal{C} \qquad (\mathcal{P})$$

(a) Justifier que le problème $(\mathcal{P})$ est-équivalent au problème

$$\text{Minimiser } \frac{1}{2}\|x - x_0\|^2 \text{ sous les contraintes } x \in \mathcal{C} \qquad (\mathcal{P}')$$

c'est-à-dire qu'ils partagent les mêmes solutions.

(b) **Unicité.** Justifier que $(\mathcal{P})$ admet au plus une solution.

(c) **Existence.** Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite minimisante d'éléments du problème $(\mathcal{P})$, c'est-à-dire vérifiant $x_k \in \mathcal{C}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2}\|x_0 - x_k\|^2 = \inf_{x\in\mathcal{C}} \frac{1}{2}\|x_0 - x\|^2 = \alpha$$

(a) À quoi correspond la quantité α ?

(b) *On rappelle l'identité du parallélogramme*

$$\forall\,(a,b) \in (\mathbb{R}^n)^2 \qquad \|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\left(\|a\|^2 + \|b\|^2\right)$$

Soit $(j,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Appliquer l'identité du parallélogramme à $a = x_0 - x_k$ et $b = x_0 - x_j$.

(c) Justifier que
$$4\left\|x_0 - \frac{x_j + x_k}{2}\right\|^2 \geq 8\,\alpha$$

En déduire que
$$0 \leq \|x_j - x_k\|^2 \leq 2\left(\|x_0 - x_j\|^2 + \|x_0 - x_k\|^2\right) - 8\,\alpha$$

(d) Justifier que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de CAUCHY. En déduire qu'elle est convergente. Notons x^* sa limite.

(e) Montrer que $x^* \in \mathcal{C}$ et que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2}\|x_0 - x_k\|^2 = \frac{1}{2}\|x_0 - x^*\|^2 = \alpha$

(f) En déduire que x^* est solution du problème $(\mathcal{P})$.

♣ Exercice 2 – Inéquation variationnelle pour la projection

Module B6 – Proposition 6

Soit $\mathcal{X}$ un espace de HILBERT. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$ un ensemble convexe, non vide et fermé. Soit $x_0 \in \mathcal{X}$. On note $\text{proj}_{\mathcal{C}}(x_0)$ l'unique solution du problème

$$\text{Minimiser } \|x - x_0\| \text{ sous les contraintes } x \in \mathcal{C} \qquad (\mathcal{P})$$

(a) Écrire le problème d'inéquation variationnelle associé au problème $(\mathcal{P})$.

(b) Justifier que ce problème est équivalent au problème $(\mathcal{P})$. En déduire que

$$\forall\, x \in \mathcal{C}, \qquad \langle x_0 - \mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x_0), x - \mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x_0)\rangle \leq 0$$

♣ Exercice 3 – Propriétés de la projection Module B6 – Proposition 5 et Corollaire 1

Soit $\mathcal{X}$ un espace de Hilbert. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$ un convexe non vide et fermé. On définit

$$\mathrm{proj}_{\mathcal{C}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathcal{X} \\ x_0 & \to & x^* \end{array} \right.$$

avec x^* la solution du problème

$$\text{Minimiser } \|x - x_0\| \text{ sous les contraintes } x \in \mathcal{C} \qquad (\mathcal{P})$$

(a) Soit $(x_1, x_2) \in \mathcal{X}^2$. Remarquer que

$$\mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x_1) - \mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x_2) = \mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x_1) - x_1 + x_1 - x_2 + x_2 - \mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x_2)$$

En déduire que

$$\begin{aligned} \|\mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x_1) - \mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x_2)\|^2 = {} & \langle \mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x_1) - x_1, \mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x_1) - \mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x_2)\rangle \\ & + \langle x_1 - x_2, \mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x_1) - \mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x_2)\rangle \\ & + \langle x_2 - \mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x_2), \mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x_1) - \mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x_2)\rangle \end{aligned}$$

(b) Justifier que

$$\langle x_1 - \mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x_1), x_2 - \mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x_1)\rangle \leq 0 \qquad \text{et} \qquad \langle x_2 - \mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x_2), x_1 - \mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x_2)\rangle \leq 0$$

En déduire que $$\|\mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x_1) - \mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x_2)\|^2 \leq \langle x_1 - x_2, \mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x_1) - \mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x_2)\rangle$$

puis $$\|\mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x_1) - \mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x_2)\|^2 \leq \|x_1 - x_2\|\, \|\mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x_1) - \mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x_2)\|$$

(c) En déduire que $\mathrm{proj}_{\mathcal{C}}$ est 1-lipschitzien, puis que $\mathrm{proj}_{\mathcal{C}}$ est continue.

Exercices fondamentaux

Exercice 4 – Projection sur un convexe dans le plan On considère les ensembles suivants

$$\mathcal{C}_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0 \text{ et } y \leq 0\right\} \qquad \mathcal{C}_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2\,x + y \geq 0\right\}$$

$$\mathcal{C}_3 = \left\{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1\right\} \qquad \mathcal{C}_4 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

Pour $i \in [\![\, 1\,;\, 4\,]\!]$, traiter les questions :

(a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}_i$ est convexe, non vide et fermé.

(b) Représenter graphiquement l'ensemble $\mathcal{C}_i$.

(c) Soit $X_0 \in \mathbb{R}^2$. Calculer la projection de X_0 sur l'ensemble $\mathcal{C}_i$ et la représenter graphiquement.

(d) À quoi correspond graphiquement la négativité de la quantité $\langle X_0 - \mathrm{proj}_{\mathcal{C}_i}(X_0), 0 - \mathrm{proj}_{\mathcal{C}_i}(X_0)\rangle$?

Exercice 5 – Projection orthogonale et théorème KKT Pour les ensembles $\mathcal{C}_i$ de l'**Exercice 1**, traiter les questions suivantes :

(a) Écrire le problème de la projection orthogonale comme un problème d'optimisation sous contraintes. On choisira une fonction objectif différentiable.

(b) Justifier que les contraintes sont qualifiées au sens de Slater.

(c) Écrire les conditions KKT pour le problème considéré. Déterminer les points qui satisfont les conditions écrites.

Compléments

⋆ Exercice 6 – Lemme de Farkas–Minkowski Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille **libre** de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On pose

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \widetilde{\lambda}_i \, a_i \mid \forall \, i \in [\![1\,;\,p]\!] \, , \widetilde{\lambda}_i \geq 0 \right\}$$

(a) Montrer que C est un ensemble convexe.

(b) Montrer que l'ensemble C est fermé.

(c) En déduire que la projection sur C est bien définie. On la note proj_C.

(d) Soit $b \notin C$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On définit $v = \operatorname{proj}_C(b) - b$. Montrer que

$$\langle \operatorname{proj}_C(b), v \rangle = 0$$

(e) Montrer que $$\langle b, v \rangle < 0 \qquad \text{et} \qquad \forall \, i \in [\![1\,;\,p]\!] \, , \quad \langle a_i, v \rangle < 0$$

(f) Comment ce résultat permet-il de démontrer le lemme de Farkas–Minkowski dans le cas d'une famille libre ?