Feuille d'exercices n°1
Différentiabilité sur un espace de Hilbert
Différentiabilité de Gateaux

Démonstrations de cours

*Les exercices de cette section **ne seront pas** traités en TD, les corrigés se trouvant dans le polycopié. Les exercices marqués ♣ sont exigibles au partiel et à l'examen.*

Exercice 1 – Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Module A1 – Proposition 6

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathcal{X}$ un espace de Hilbert. Soit $a \in \mathcal{O}$, $\eta > 0$ et $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathcal{B}(a, \eta)$. Soit $x \in \mathcal{B}(a, \eta)$.

(a) Justifier que $\forall\, h \in \mathcal{X}, \quad |df(x) \cdot h - df(a) \cdot h| = |\langle \nabla f(x) - \nabla f(a), h\rangle|$

(b) Montrer que $\forall\, h \in \mathcal{X}, \quad \|h\| = 1 \quad \Longrightarrow \quad |\langle \nabla f(x) - \nabla f(a), h\rangle| \leq \|\nabla f(x) - \nabla f(a)\|$

(c) En déduire que $|||df(x) - df(a)||| \leq \|\nabla f(x) - \nabla f(a)\|$

(d) On suppose que ∇f est continue en a. Montrer que df est continue en a.

(e) Établir que $\forall\, h \in \mathcal{X}, \quad \|h\| = 1 \quad \Longrightarrow \quad |\langle \nabla f(x), h\rangle - \langle \nabla f(a), h\rangle| \leq |||df(x) - df(a)|||$

En appliquant cette relation à $h = \dfrac{\nabla f(x) - \nabla f(a)}{\|\nabla f(x) - \nabla f(a)\|}$, montrer que

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(a)\| \leq |||df(x) - df(a)|||$$

(f) On suppose que df est continue en a. En déduire que ∇f est continue en a.

♣ Exercice 2 – Fonctions différentiables et dérivées directionnelles

Module A1 – Proposition 12

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathcal{X}$ un espace de Hilbert. Soit $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en $a \in \mathcal{O}$.

(a) Soit $U \subset \mathbb{R}$ un ouvert contenant 0 tel que $a + t\,v \in \mathcal{O}$ pour tout $t \in U$. On pose

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(a + t\,v) \end{array} \right.$$

Montrer que la fonction g **dérivable** en 0. Que vaut $g'(0)$?

(b) Justifier que $f'(a, v) = \langle \nabla f(a), v\rangle$ pour tout $v \in \mathcal{X}$. En déduire que f est **différentiable au sens de Gateaux** en a.

Exercices fondamentaux

Exercice 3 – Formes linéaires et bilinéaires

Soit $\mathcal{X}$ un espace de Hilbert, muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $A \in \mathcal{L}_c(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ un opérateur linéaire continu borné et $b \in \mathcal{X}$. Montrer que les fonctions suivantes sont différentiables sur $\mathcal{X}$ et calculer leur différentielle. Que vaut leur gradient ?

(a) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \langle b, x\rangle \end{array} \right.$

(b) $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{2}\,\langle A(x), x\rangle \end{array} \right.$

Exercice 4 – Norme issue d'un produit scalaire Soit $\mathcal{X}$ un espace de HILBERT, muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. On note $\|\cdot\|$ la norme découlant du produit scalaire. Soit $A \in \mathcal{L}_c(\mathcal{X},\mathcal{X})$ un opérateur linéaire continu borné et $b \in \mathcal{X}$. Montrer que les fonctions suivantes sont différentiables sur $\mathcal{X}$ et calculer leur différentielle. Que vaut leur gradient ?

(a) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|x\|^2 \end{array} \right.$ **(b)** $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|A(x)\|^2 \end{array} \right.$ **(c)** $k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|A(x)-b\|^2 \end{array} \right.$

Exercice 5 – Somme séparable Soit $\mathcal{X}$ (resp. $\mathcal{Y}$) un espace de HILBERT, muni d'un produit scalaire noté $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{X}}$ (resp. $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{Y}}$), de norme associée notée $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ (resp. $\|\cdot\|_{\mathcal{Y}}$). Soit $\mathcal{O} \subset \mathcal{X}$ et $\mathcal{O}' \subset \mathcal{Y}$ deux ouverts et $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{O}' \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Soit $a \in \mathcal{O}$ et $b \in \mathcal{O}'$. On suppose que f est différentiable en a et que g est différentiable en b.

On considère la fonction suivante $s : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{O}\times\mathcal{O}' & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x)+g(y) \end{array} \right.$

(a) Montrer que

$$s(a+h,b+k) = f(a)+g(b)+\langle\nabla f(a),h\rangle_{\mathcal{X}} + \langle\nabla g(a),k\rangle_{\mathcal{Y}} + o(\|h\|_{\mathcal{X}}) + o(\|k\|_{\mathcal{Y}})$$

(b) On munit l'espace produit $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ du produit scalaire [1]

$$\forall \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) \in \mathcal{X}\times\mathcal{Y}, \qquad \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} = \langle x,x'\rangle_{\mathcal{X}} + \langle y,y'\rangle_{\mathcal{Y}}$$

La norme qui en découle vérifie

$$\forall\,(x,y)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}, \qquad \left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}^2 = \|x\|_{\mathcal{X}}^2 + \|y\|_{\mathcal{Y}}^2 \geq \max\left(\|x\|_{\mathcal{X}}^2, \|y\|_{\mathcal{Y}}^2\right)$$

Montrer que

$$o(\|h\|_{\mathcal{X}}) + o(\|k\|_{\mathcal{Y}}) = o\left(\left\|\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}\right\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}\right)$$

(c) En déduire que s est différentiable en (a,b). Que vaut $\nabla s(a,b)$?

Compléments

⋆ Exercice 6 – Calcul des variations Soit $a<b$ deux réels. On considère $E_{[a\,;b]}$ l'espace des fonctions $f : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, muni de la norme

$$\|f\| = \max_{x\in[a\,;b]} |f(x)| + \max_{x\in[a\,;b]} |f'(x)|$$

Soit $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$; on définit la fonctionnelle suivante :

$$\mathcal{F} : \left\{ \begin{array}{ccc} E_{[a\,;b]} & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_a^b \mathcal{L}\big(x,f(x),f'(x)\big)\mathrm{d}x \end{array} \right.$$

Montrer que $\mathcal{F}$ est différentiable sur $E_{[a\,;b]}$ et que, pour tous $f,h \in E_{[a\,;b]}$,

$$d\mathcal{F}(f)\cdot h = \int_a^b \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}\big(x,f(x),f'(x)\big)\,h(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial z}\big(x,f(x),f'(x)\big)\,h'(x)\right)\mathrm{d}x$$

1. cf. **Compléments C2 : Éléments d'analyse hilbertienne**