Feuille de TP n°1
Systèmes linéaires et pivot de Gauss

Objectif : Programmer sous Python la méthode du pivot de Gauss pour résoudre un système linéaire.

1 Systèmes linéaires et pivot de Gauss

On s'intéresse dans ce TP à la méthode du pivot de Gauss pour la résolution du système linéaire suivant

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}\,x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{m1}\,x_1 & + & \ldots & + & a_{mn}\,x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

On rappelle qu'on peut l'écrire sous la forme matricielle :

$$A\,x = b$$

avec $\quad A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \quad x = (x_j)_{1\leq j\leq n} \in \mathbb{R}^n \quad$ et $\quad b = (b_i)_{1\leq i\leq m} \in \mathbb{R}^m$

1.1 Algorithme du pivot de Gauss

Décrivons l'algorithme du pivot de Gauss pour résoudre ce problème. On pose

$$M = \begin{pmatrix} A & b \end{pmatrix}$$

la matrice obtenue en concaténant la matrice A et le vecteur b. Notons L_i la i-ème ligne de la matrice M. *On suppose que le système linéaire admet au moins une solution.*

1. On pose $i = 1$ et $j = 1$.
2. Si $a_{ij} \neq 0$, on effectue les opérations suivantes :
   - $L_i \leftarrow L_i / a_{ij}$;
   - $L_{i'} \leftarrow L_{i'} - a_{i'j}\,L_i$ pour $i' \neq i$.

   On pose
   - $i \leftarrow i + 1$;
   - $j \leftarrow j + 1$

   et on revient à l'étape 1.
3. Si $a_{ij} = 0$, on cherche $i + 1 \leq i_0 \leq m$ tel que $a_{i_0 j} \neq 0$. Si on trouve un tel i_0, on effectue les opérations suivantes :
   - $L_i \leftrightarrow L_{i_0}$ et on revient à l'étape 1.
4. Si un tel i_0 n'existe pas, on pose
   - $j \leftarrow j + 1$

   et on revient à l'étape 1.

Exercice 1 – Définition d'une fonction `methodePivot` Écrire une fonction Python qui implémente l'algorithme décrit plus haut. L'algorithme prend pour argument une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et renvoie la matrice $N \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ obtenue à l'issue des itérations décrites. Voici le prototype d'une telle fonction :

```
def methodePivot(M):
    ... serie d'instructions ...
    ...
    ...
    return ...
```

1.2 Pivot

Dans l'algorithme décrit au paragraphe précédent, lorsque l'on effectue l'opération

$$L_i \leftarrow \frac{L_i}{a_{ij}} \qquad \text{et} \qquad L_{i'} \leftarrow L_{i'} - a_{i'j}\,\frac{L_i}{a_{ij}} \text{ pour } i' \neq i$$

dans l'étape 1, le coefficient a_{ij} est appelé *pivot*. La première opération ci-dessus est alors une *normalisation* de la ligne L_i, tandis que la seconde partie permet d'éliminer dans les autres lignes la présence d'un coefficient associé, dans l'interprétation des systèmes linéaires, à la variable associée au pivot choisi.

Pour des raisons que nous détaillerons dans le cours, il peut être utile d'isoler ces opérations pour un pivot donné.

Exercice 2 – Définition d'une fonction `pivot` Écrire une fonction Python qui implémente les opérations (normalisation et élimination) décrites plus haut dans ce paragraphe. L'algorithme prend pour argument une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, un numéro de ligne i et un numéro de colonne j et renvoie la matrice $N \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ obtenue à l'issue des opérations décrites. Voici le prototype d'une telle fonction :

```
def pivot(M,i,j):
    ... serie d'instructions ...
    ...
    ...
    return ...
```

2 Exercices

Exercice 3 – Résolution d'un système linéaire On s'intéresse au système de 5 équations linéaires à 7 inconnues $(x_i)_{1\leq i\leq 7}$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccccc}
4\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & + & 4\,x_4 & + & 5\,x_5 & + & 6\,x_6 & + & 7\,x_7 & = & 1\\
x_1 & + & 4\,x_2 & - & 6\,x_3 & + & 2\,x_4 & + & 2\,x_5 & & & - & 2\,x_7 & = & 2\\
x_1 & - & 2\,x_2 & + & 3\,x_3 & + & 3\,x_4 & - & 5\,x_5 & + & 6\,x_6 & + & x_7 & = & -10\\
x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & 2\,x_5 & - & 3\,x_6 & - & x_7 & = & -2\\
x_1 & + & x_2 & + & & & 8\,x_4 & + & 2\,x_5 & + & 3\,x_6 & + & 4\,x_7 & = & 3
\end{array}\right.$$

1. Reformuler le problème sous la forme $A\,x = b$.
2. Appliquer la fonction `methodePivot()` à la matrice M définie précédemment. Comment la connaissance de la matrice N permet de trouver une solution de $A\,x = b$?

Exercice 4 – Inversion d'une matrice carrée Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer à l'aide de la fonction `np.linalg.matrix_rank()` le rang de cette matrice. En déduire que A est inversible.
2. Considérons la matrice A' définie par

$$A' = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Appliquer la fonction `methodePivot()` à cette matrice. Comment utiliser le résultat obtenu pour en déduire l'inverse A^{-1} ?

Exercice 5 – Changement de base Considérons la matrice et le vecteur suivants

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -5 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -4 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On considère $B \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ toute matrice extraite de A en retenant trois colonnes de A (parmi les 5 qui la composent), tout en conservant l'ordre dans lequel elles apparaissent dans A. Par exemple, en choisissant les colonnes 1, 2 et 5, on obtient

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Combien de matrices B peut-on ainsi extraire ?
2. Calculer à l'aide de la fonction `np.linalg.matrix_rank()` le rang de toutes les matrices B. En déduire que celles qui sont inversibles.
3. Pour chaque matrice B inversible, utiliser la fonction `methodePivot()` pour calculer leur inverse B^{-1}.
4. Pour chaque matrice B inversible, calculer les produits matriciels $B^{-1}A$ et $B^{-1}b$.
5. On considère à présent le système linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 3\,x_2 & + & 2\,x_3 & - & 5\,x_4 & & & = & 5 \\ 2\,x_1 & + & 7\,x_2 & & & & & - & x_5 & = & -1 \\ -2\,x_1 & - & 4\,x_2 & + & 3\,x_3 & + & 2\,x_4 & - & x_5 & = & -2 \end{array} \right.$$

   Comment interpréter les résultats de la question précédente dans ce contexte ?