Feuille d'exercices n°8
Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. Extrema liés.

Démonstrations de cours

*Les exercices de cette section **ne seront pas** traités en TD, les corrigés se trouvant dans le polycopié. Les exercices marqués ♣ sont exigibles au partiel et à l'examen.*

♣ Exercice 1 – Translation d'une sous-variété

Module A5 – Proposition 1

Soient X une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$. On pose $Y = X + a$.

(a) Soit $y_0 \in Y$. Justifier que $x_0 = y_0 - a$ est un élément de X.

(b) Montrer qu'il existe un voisinage U de x_0 et une submersion $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ tels que

$$X \cap U = \varphi^{-1}(\{0\})$$

(c) On pose

$$\psi : \left\{ \begin{array}{rcl} U + a & \to & \mathbb{R}^{n-d} \\ y & \mapsto & \varphi(y-a) \end{array} \right.$$

En remarquant que, pour tout $x \in X \cap U$, on a

$$\varphi(x) = 0 = \varphi(x + a - a)$$

montrer que ψ est une submersion avec $U + a$ un voisinage de y_0.

(d) Montrer que

$$(X + a) \cap (U + a) = \psi^{-1}(\{0\})$$

En déduire que Y est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension d.

♣ Exercice 2 – Produit cartésien de sous-variétés

Module A5 – Proposition 4

Soient $X \subset \mathbb{R}^n$ et $X' \subset \mathbb{R}^m$ deux sous-variétés, de dimension respective d et d'.

(a) Soit $(x_0, x_0') \in X \times X'$. Justifier qu'il existe un voisinage U de x_0 et une submersion $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ tels que

$$X \cap U = \Big\{ x \in U \mid \varphi(x) = 0 \Big\}$$

et qu'il existe un voisinage U' de x_0' et une submersion $\psi : U' \to \mathbb{R}^{n-d'}$ tels que

$$X' \cap U' = \Big\{ x' \in U' \mid \psi(x') = 0 \Big\}$$

(b) On pose $\tilde{\varphi} : U \times U' \to \mathbb{R}^{d+d'}$ définie par

$$\forall\, (x, x') \in U \times U', \qquad \tilde{\varphi}(x, x') \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \psi(x') \end{pmatrix}$$

Justifier que $\tilde{\varphi}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que

$$\forall\, (x, x') \in U \times U', \qquad J\tilde{\varphi}(x, x') = \begin{pmatrix} J\varphi(x) \\ J\psi(x') \end{pmatrix}$$

(c) Montrer que $\tilde{\varphi}$ est une submersion et que

$$(X \cap U) \times (X' \cap U') = (X \times X') \cap (U \times U') = \Big\{ (x, x') \in U \times U' \mid \tilde{\varphi}(x, x') = 0 \Big\}$$

En déduire que $X \times X'$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+m}$ de dimension $d + d'$.

Exercice 3 – Vecteurs tangents à une sous-variété Module A5 – Proposition 5

Soit X une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Soient $a \in X$ et U un voisinage de a tel que

$$X \cap U = \Big\{ x \in U \mid \varphi(x) = 0 \Big\}$$

avec $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ une submersion. On considère F l'ensemble des vecteurs tangents à X en a. *On admet que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.*

(a) Écrire la définition d'un vecteur v tangent à X en a. En déduire qu'il existe $\delta > 0$ et $\gamma : \,]-\delta\,;\delta\,[\to \mathbb{R}^n$ une application différentiable tels que

$$\forall\, t \in \,]-\delta\,;\delta\,[\,, \qquad \varphi(\gamma(t)) = 0$$

et $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(a) = v$.

(b) Justifier que $\varphi \circ \gamma$ est différentiable. Montrer que, de plus, $\varphi \circ \gamma$ est constante sur $]-\delta\,;\delta\,[$. En déduire que

$$\forall\, t \in \,]-\delta\,;\delta\,[\,, \qquad d_{\gamma(t)}\varphi(\gamma'(t)) = 0$$

et en particulier que
$$d_a\varphi(v) = 0$$

(c) En déduire que $F \subset \ker d_a\varphi$.

(d) Justifier que $d_a\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$ est une application linéaire surjective. En déduire son rang. Montrer que

$$\dim \ker d_a\varphi = n - \operatorname{rg} d_a\varphi = d$$

(e) Soit $w \in \{0\}^{n-d} \times \mathbb{R}^d$. Montrer qu'il existait un voisinage U de a, un difféomorphisme $\phi : V \to U + a$ défini au voisinage V de 0, tel que $\phi(0) = a$ et tel que

$$\phi^{-1}(X \cap U - a) = \big(\{0\}^{n-d} \times \mathbb{R}^d\big) \cap V$$

En déduire qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall\, t \in \,]-\delta\,;\delta\,[\,, \qquad \gamma(t) = a + \phi(t\,w) \in X$$

(f) Montrer que γ est dérivable. Vérifier que sa dérivée vaut

$$\forall\, t \in \,]-\delta\,;\delta\,[\,, \qquad \gamma'(t) = d_{t\,w}\phi \cdot w$$

(g) En déduire que $d_0\phi \cdot w \in V$, puis que $d_0\phi(\{0\}^{n-d} \times \mathbb{R}^d) \subset V$.

(h) En remarquant que $d_0\phi$ est bijective, montrer que

$$\dim\big(d_0\phi(\{0\}^{n-d} \times \mathbb{R}^d)\big) = \dim\big(\{0\}^{n-d} \times \mathbb{R}^d\big)$$

En déduire que $\dim V \geq d$ puis que $\dim V = d$ et $V = \ker d_a\varphi$.

Exercices fondamentaux

Exercice 4 – Paramétrage d'une droite Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$. On considère l'ensemble suivant :

$$X = \Big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a\,x + b\,y = c \Big\}$$

(a) Montrer que X est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$. Quelle est sa dimension ?

(b) Soit $(x, y) \in X$. Montrer que le vecteur $(b, -a)$ est tangent à X en (x, y).

(c) Quelle est la dimension de l'espace tangent à X en (x, y) ? Déterminer $T_{(x,y)}X$.

(d) Représenter graphiquement X et $T_{(x,y)}X$ pour un choix de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $(x, y) \in X$.

Exercice 5 – Paramétrage d'un cercle Soit $(x_0, y_0, r) \in \mathbb{R}^3$ avec $r \neq 0$. On considère l'ensemble suivant :

$$X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2\right\}$$

(a) Montrer que X est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$. Quelle est sa dimension ?

(b) Soit $(x,y) \in X$. Montrer que le vecteur $(y_0 - y, x - x_0)$ est tangent à X en (x,y).

(c) Quelle est la dimension de l'espace tangent à X en (x,y) ? Déterminer $T_{(x,y)}X$.

(d) Représenter graphiquement X et $T_{(x,y)}X$ pour un choix de $(x_0, y_0, r) \in \mathbb{R}^3$ et $(x,y) \in X$.

Exercice 6 – Vecteur tangent On considère l'ensemble suivant :

$$X = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 = 1 \text{ et } z^2 - x^2 = 1\right\}$$

(a) Montrer que X est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ?

(b) Soit $a = (1, 0, \sqrt{2})$. Montrer que $(0,1,0)$ vérifie la définition d'un vecteur tangent à X en a. *On pourra considérer la fonction*

$$\gamma : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & \left(\sqrt{1+t^2}, t, \sqrt{2+t^2}\right) \end{array} \right.$$

Exercice 7 – Lignes de niveau Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que la ligne de niveau a de f, définie par :

$$\mathrm{niv}_a f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = a\right\} = f^{-1}(a)$$

n'est pas vide. Montrer que si $\nabla f(x,y) \neq (0,0)$ pour tout $(x,y) \in \mathrm{niv}_a f$, alors $\mathrm{niv}_a f$ est une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$. Déterminer l'espace tangent à $\mathrm{niv}_a f$ en tout point $(x,y) \in \mathrm{niv}_a f$.

Compléments

Exercice 8 – Théorème des extrema liés On considère le problème d'optimisation sous contraintes suivant :

$$\text{Minimiser } f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \text{ sous les contraintes } \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (y-1)^2 + z^2 = 1 \\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \qquad (\mathcal{P})$$

(a) Justifier que le problème $(\mathcal{P})$ admet au moins une solution.

(b) Montrer que l'ensemble admissible de $(\mathcal{P})$ est une sous-variété.

(c) Soit (x^*, y^*, z^*) une solution de $(\mathcal{P})$. Montrer qu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$x^* = \lambda_1 x^*, \qquad y^* = \lambda_1 y^* + \lambda_2 (y^* - 1) \qquad \text{et} \qquad z^* = \lambda_2 z^*$$

Exercice 9 – *D'après Examen 4MA066 - 2021* Une entreprise de jouets fabrique deux modèles de petites voitures, les modèles X et Y. Le modèle X, le plus abordable, se vend à 1 € pièce. Le modèle Y, plus sophistiqué, se vend à 3 € pièce. Le coût de fabrication, exprimé en €, est donné par

$$C(x,y) = 5\,x^2 + 5\,y^2 - 2\,x\,y - 2\,x - 1000$$

où x est le nombre de petites voitures du modèle X et y est le nombre de petites voitures du modèle Y. On suppose que les jouets fabriqués sont tous écoulés sur le marché. Dans tout l'exercice, on note $D = (\mathbb{R}_+^*)^2$. *Remarque : Même si x et y sont des entiers, on les cherchera dans D.*

(a) Soit $(x, y) \in D$. Déterminer le profit $P(x, y)$ réalisé par l'entreprise lorsqu'elle a vendu x jouets de modèle X et y jouets de modèle Y. *On rappelle que le profit d'une entreprise correspond à la différence entre le gain et le coût de production.*

(b) Montrer que la fonction $-P$ est convexe.

(c) Montrer que la fonction $-P$ est infinie à l'infini.

La capacité de production de l'entreprise est de 20 jouets au total par jour. En supposant que l'entreprise tourne à plein régime, on recherche la répartition optimale entre les modèles de type X et Y permettant de maximiser le profit quotidien.

(d) Écrire le problème considéré comme un problème de minimisation sous contrainte.

(e) Montrer que, si l'on supprime la contrainte $(x, y) \in D$, la solution existe, et est unique. Calculer le profit réalisé.