Fiche méthode n°1
Comment créer une fiche méthodologique ?

Méthode

L'objectif d'une fiche méthodologique est de :

1. permettre une assimilation rapide et durable du cours ;
2. aider à la résolution des exercices.

Une marche à suivre possible pour créer une fiche efficace :

1. partir d'un énoncé d'exercice (feuille de TD, sujet de partiel ou d'examen) pour identifier une notion ou un savoir-faire utile ;
2. parcourir l'intégralité du cours pour en extraire toutes les définitions et résultats (propositions, théorèmes, corollaires) s'y rapportant ; y inclure si possible les exemples du cours ;
3. reformuler si nécessaire ces énoncés pour les expliciter au maximum.

Cette base est amenée à être mise à jour régulièrement ; ainsi, si dans la suite du cours, de nouveaux énoncés se rapportent à la notion étudiée, il faut les rajouter à la fiche. Par ailleurs, l'expérience acquise en résolvant des exercices permet également de hiérarchiser l'importance des différents énoncés. Elle peut (et devrait !) être reprise dans les années suivantes, tant que de nouvelles propriétés sur la notion sont ajoutées.

Remarque : Même si les premières versions d'une fiche méthodologique peuvent être réalisées sur un support dématérialisé, il est conseillé d'en créer une version finale sur papier (manuscrite ou tapuscrite). Cela permettra en effet une meilleure manipulation dans le cas où plusieurs fiches doivent être utilisées simultanément.

Remarque : Même si elles peuvent aider à la mémorisation du cours, l'objectif premier de ces fiches est de **travailler activement le cours** et le **comprendre**. Les fiches doivent donc être de format raisonnable (A4 ou A5), rédigées dans un style succinct mais précis. Il s'agit d'un outil de travail : les fiches doivent donc être lisibles. Il vaut mieux séparer les fiches.

Exemples de fiches pour 3MA261 : Calcul différentiel et optimisation

- Montrer qu'une fonction admet des dérivées partielles / est différentiable / de classe $\mathcal{C}^1$ / deux fois différentiable.
- Montrer qu'une fonction est convexe / strictement convexe / fortement convexe.
- Montrer qu'un ensemble est convexe.

Appliquons la démarche décrite plus haut sur un exemple tiré de l'UE 2MA216 : Topologie et calcul différentiel.

Étape 1 Considérons le premier exercice de la seconde feuille de TD de l'UE 2MA216 : Topologie et calcul différentiel.

Exercice 1 : (!) **1 2 3 4**

Dans tout l'exercice on représentera graphiquement les ensembles étudiés.

1. (a) Rappeler la définition d'un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Que faut-il faire pour montrer qu'un ensemble est ouvert (reformuler la définition avec vos mots) ?
   (b) Montrer que $]-1,2[$ est un ouvert de $\mathbf{R}$ et que $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ est un ouvert de $\mathbf{R}^2$

On voit que la notion centrale de cette question est celle des *ouverts*. On est donc inspiré à créer une fiche intitulée "Montrer qu'un ensemble est ouvert".

Étape 2 Collectons dans le polycopié du cours tous les énoncés qui concernent les ensembles ouverts (on pourra utiliser la fonction recherche du visionneur de pdf). Ceux du chapitre 2 sont les suivants :

Définition 2.2
Un ensemble $U \subset \mathbb{R}^n$ est dit **ouvert** *relativement à la norme N si pour tout $x \in U$, il existe un $r > 0$ tel que $B_N(x,r) \subset U$. En particulier, quelle que soit la norme choisie sur $\mathbb{R}^n$, l'ensemble vide $\varnothing$ et l'ensemble $\mathbb{R}^n$ sont ouverts relativement à celle-ci.*

Exemple 2.4
Un intervalle ouvert $]a,b[$ est donc un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}$, pour la norme définie par la valeur absolue !

Proposition 2.5
Soient N et N' deux normes équivalentes sur $\mathbb{R}^n$. Alors une partie U de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert pour la norme N si et seulement c'est un ouvert pour la norme N'.

Proposition 2.7
Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$. Toute union d'ouverts pour cette norme est toujours un ouvert pour celle-ci. Toute intersection **finie** *d'ouverts pour cette norme est également un ouvert pour celle-ci.*

Définition 2.9
Un ensemble $F \subset \mathbb{R}^n$ est dit **fermé** *relativement à la norme N si son complémentaire $\mathbb{R}^n \setminus F$ est ouvert (pour la norme N). En particulier, quelle que soit la norme choisie sur $\mathbb{R}^n$, l'ensemble vide $\varnothing$ et l'ensemble $\mathbb{R}^n$ sont fermés relativement à celle-ci.*

Proposition 2.35
Soient $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^\star$, O_1 un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^{n_1}$ et O_2 un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^{n_2}$. Alors le produit cartésien $O_1 \times O_2$ est ouvert dans $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$. La réciproque est aussi vraie si $O_1 \times O_2 \neq \emptyset$.

Au moment de l'étude du chapitre 3, on ajoutera la proposition suivante :

Proposition 3.20
Soient $n, p \in \mathbb{N}^\star$ et une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Se valent :

(i) Pour tout ouvert $V \subset \mathbb{R}^p$, $f^{-1}(V)$ est ouvert dans $\mathbb{R}^n$;

(ii) Pour tout fermé $F \subset \mathbb{R}^p$, $f^{-1}(F)$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$;

(iii) f est continue en tout point de $\mathbb{R}^n$.

REMARQUE : À ce stade, il ne s'agit que d'un travail purement mécanique (il n'est pas nécessaire d'avoir compris son cours ou de l'avoir travaillé). En revanche, il est impératif d'avoir pris des notes de cours fiables ou d'avoir accès au polycopié. Il n'est normalement pas nécessaire d'inclure les remarques présentes dans le cours, ni tous les exemples (on n'en retiendra que les exemples "généraux").

Étape 3 Maintenant, on vient reformuler si nécessaire certains des énoncés collectés à l'étape précédente.

- **Définition 2.2 :** séparons la définition des deux exemples $\mathbb{R}^n$ et $\emptyset$.
- On remarque que les **Proposition 2.5**, **Proposition 2.6** et **Proposition 2.35** sont du même ordre (elles indiquent les opérations qui préservent le caractère ouvert), on va donc les rassembler.
- La **Définition 2.9** implique en particulier qu'un ensemble est ouvert si son complémentaire est fermé. Il faudra donc créer une fiche "Montrer qu'un ensemble est fermé" et s'y référer (ou en résumer le contenu).
- Dans la **Proposition 3.20**, seule l'implication $(iii) \Longrightarrow (i)$ nous intéresse ici. Par ailleurs, elle nécessite la continuité de la fonction f, il faut donc être capable de démontrer la continuité d'une fonction pour l'utiliser (et créer une fiche "Montrer qu'une fonction est continue").
- La **Proposition 2.5** permet d'ignorer la mention de la norme dans la **Définition 2.2**.

Résultat La fiche que l'on a créé ressemble donc à cela :

Fiche : Montrer qu'un ensemble est ouvert

Définition Un ensemble $U \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert (relativement à la norme N) si : $\forall x \in U, \exists r > 0, B_N(x,r) \subset U$.

$\longrightarrow$ Définition d'une norme

Exemples $]\,a\,;b\,[$, $\mathbb{R}^n$ et $\emptyset$ sont des ouverts.

Propriétés Si O_i sont ouverts pour $i \in \mathcal{I}$, alors $\cup_{i\in\mathcal{I}} O_i$, $O_i \cap O_j$ et $O_i \times O_j$ sont ouverts (avec $i, j \in \mathcal{I}$).

Complémentaire U est ouvert si $\complement U$ est fermé.

$\longrightarrow$ Fiche sur les ensembles fermés

Caractérisation séquentielle : U est ouvert si

$$\forall\,(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \complement U^{\mathbb{N}}, x_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} x \Rightarrow x \in \complement U$$

Image réciproque Si $U = f^{-1}(V)$ avec f continue et V ouvert, alors U est ouvert.

$\longrightarrow$ Fiche sur les applications continues
$\longrightarrow$ Définition d'une image réciproque