FEUILLE D'EXERCICES N°7
Théorème du rang constant

Démonstrations de cours

*Les exercices de cette section **ne seront pas** traités en TD, les corrigés se trouvant dans le polycopié. Les exercices marqués ♣ sont exigibles au partiel et à l'examen.*

♣ Exercice 1 – Composition avec des difféomorphismes
Module A4 – Proposition 1

Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux espaces de BANACH et $\mathcal{U}, \mathcal{U}_0$ deux ouverts de $\mathcal{X}$. Soit $f : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$ une application différentiable. Soient $\phi : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}$ et $\psi : f(\mathcal{U}) \to \psi \circ f(\mathcal{U})$ deux difféomorphismes.

(a) Justifier que l'application $g = \psi \circ f \circ \phi$ est différentiable sur $\mathcal{U}_0$ et calculer sa différentielle.

(b) *On suppose que f est une immersion.* Justifier que $df(\phi(x))$ est injective pour tout $x \in \mathcal{U}_0$. Soient $x \in \mathcal{U}_0$ et $h \in \mathcal{X}$. Montrer que

$$dg(x) \cdot h = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad d\psi(f \circ \phi(x)) \circ df(\phi(x)) \circ d\phi(x) \cdot h = 0$$

En déduire successivement que, si $dg(x) \cdot h = 0$, alors $df(\phi(x)) \circ d\phi(x) \cdot h = 0$ et que $d\phi(x) \cdot h = 0$. Démontrer alors que $dg(x)$ est injective.

(c) *On suppose que f est une submersion.* Justifier que $df(\phi(x))$ est surjective pour tout $x \in \mathcal{U}_0$. Soient $x \in \mathcal{U}_0$ et $y \in \mathcal{Y}$. Justifier qu'il existe un (unique) $y_0 \in \mathcal{Y}$ tel que

$$d\psi(f \circ \phi(x)) \cdot y_0 = y$$

En déduire qu'il existe $x_0 \in \mathcal{X}$ tel que $$df(\phi(x)) \cdot x_0 = y_0$$

puis qu'il existe $h \in \mathcal{X}$ tel que $$d\phi(x) \cdot h = x_0$$

En déduire que $dg(x)$ est surjective.

♣ Exercice 2 – Rang de la différentielle d'une immersion et d'une submersion
Module A4 – Proposition 2

Soient $(n, m) \in \mathbb{N}^*$, $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $a \in U$. Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $x \in U$. On note $r(x)$ le rang de $df(x)$.

(a) Montrer que $$r(x) \leq \min(n, m)$$

(b) *On suppose que f est une immersion.* Justifier que $n \leq m$ et vérifier que $r(a) = n$.

(c) *On suppose que f est une submersion.* Justifier que $n \geq m$ et vérifier que $r(a) = m$.

(d) En déduire que, si f est une immersion (resp. une submersion), alors $r(x) \leq r(a)$.

Exercice 3 – Forme normale d'une immersion
Module A4 – Proposition 3

Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ ouvert contenant 0. Soit $f : U \to \mathbb{R}^3$ une immersion de classe $\mathcal{C}^1$ en 0 telle que $f(0) = 0$. On note $f = (f_1, f_2, f_3)$.

(a) Rappeler la définition de $Jf(0)$. Justifier que la famille $\{\nabla f_1(0), \nabla f_2(0), \nabla f_3(0)\}$ génèrent $\mathbb{R}^2$.

(b) *On suppose à partir de cette question que $\nabla f_1(0)$ et $\nabla f_2(0)$ forment une famille libre.* On s'intéresse alors à l'application suivante :

$$g : \left\{ \begin{array}{ccl} U \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto & (f_1(x), f_2(x), f_3(x) + y) \end{array} \right.$$

Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U \times \mathbb{R}$ et donner une expression de $Jg(x, y)$ pour tout $(x, y) \in U \times \mathbb{R}$.

(c) Montrer que $Jg(0)$ est inversible.

(d) En utilisant le théorème d'inversion locale, montrer qu'il existe un voisinage ouvert de $U_0 \subset \mathbb{R}^3$ de 0 tel que g soit un difféomorphisme de U_0 sur $g(U_0)$. En déduire que g est bijective et g^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $g(U_0)$.

(e) Montrer que pour (x, y) voisin de $(0, 0)$

$$(x, y) = g^{-1} \circ g(x, y) = g^{-1}\big(f(x) + (0, y)\big)$$

(f) En déduire que pour x voisin de 0, $\qquad g^{-1} \circ f(x) = (x, 0)$

(g) *On se place à présent dans le cas général.* Justifier qu'il existe $i, j \in \{1, 2, 3\}$ tels que $\nabla f_i(0)$ et $\nabla f_j(0)$ forment une famille libre. On note k l'unique indice tel que $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.

(h) On s'intéresse à l'application $\qquad \phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (y_1, y_2, y_3) & \mapsto & (y_i, y_j, y_k) \end{array} \right.$

Montrer que ϕ est un difféomorphisme sur $\mathbb{R}^3$.

(i) En appliquant les questions **(b)–(f)** à la fonction $\tilde{f} = \phi \circ f$, montrer qu'il existe $U_0, V_0 \subset \mathbb{R}^3$ deux ouverts et $\tilde{g} : U_0 \to V_0$ un difféomorphisme tel que pour x voisin de 0,

$$\tilde{g}^{-1} \circ \tilde{f}(x) = (x, 0)$$

(j) En déduire que $\tilde{g}^{-1} \circ \phi \circ f(x) = (x, 0)$ pour x voisin de 0.

Exercice 4 – Forme normale d'une submersion

Module A4 – Proposition 4

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert contenant 0. Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ une submersion en 0 telle que $f(0) = 0$.

(a) Justifier que les n vecteurs colonnes de $Jf(0)$ génèrent $\mathbb{R}^m$. En déduire qu'il est possible d'en extraire une sous-famille de m colonnes telles que la sous-matrice carrée constituée de ces m colonnes soit inversible.

(b) *On suppose à partir de cette question que les colonnes en question sont les m premières colonnes de $Jf(0)$.* On s'intéresse à l'application suivante :

$$h : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & (f_1(x), \ldots, f_m(x), x_{m+1}, \ldots, x_n) \end{array} \right.$$

Justifier que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Calculer sa matrice jacobienne et vérifier que

$$Jh(x) = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}} & \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ m+1 \leq j \leq n}} \\ 0 & \mathrm{I}_{n-m} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$$

(c) Montrer que $Jh(0)$ est inversible. En déduire qu'il existe un voisinage ouvert de $U_0 \subset \mathbb{R}^n$ de 0 tel que h soit un difféomorphisme de U_0 sur $h(U_0)$.

(d) Justifier que pour x voisin de 0

$$x = h \circ h^{-1}(x) = \big(f_1 \circ h^{-1}(x), \ldots, f_m \circ h^{-1}(x), (h^{-1}(x))_{m+1}, \ldots, (h^{-1}(x))_n\big)$$

En déduire que $\qquad \forall\, i \in [\![1\,;\, m]\!], \qquad f_i \circ h^{-1}(x) = x_i$

puis que $\qquad f \circ h^{-1}(x) = (x_1, \ldots, x_m)$

(e) *On se place dans le cas général.* En considérant une permutation adaptée, démontrer qu'il existe $V \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert contenant 0 et $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme tel que $\phi(0) = 0$ et, pour $x \in \mathbb{R}^n$ voisin de 0,

$$f \circ \phi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m)$$

♣ Exercice 5 – Théorème du rang constant : cas d'une immersion et d'une submersion

Module A4 – Théorème 3

Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert contenant a. Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. *On suppose dans un premier temps que $a = 0$ et que $f(a) = 0$.*

(a) *On suppose que f est une immersion en 0.* Justifier qu'il existe $\tilde{\psi} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ et $\tilde{\phi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ deux applications linéaires inversibles telles que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \qquad \tilde{\psi} \circ df(0) \circ \tilde{\phi}(x) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$$

puis, à l'aide de la Proposition 3, qu'il existe $W \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert contenant 0 et $\psi : W \to \mathbb{R}^m$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme tel que, pour x voisin de 0,

$$\tilde{\psi}^{-1} \circ \psi \circ f \circ \phi^{-1}(x) = df(0) \cdot x$$

(b) *On suppose que f est une submersion en 0.* Justifier qu'il existe $\tilde{\psi} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ et $\tilde{\phi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ deux applications linéaires inversibles telles que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \qquad \tilde{\psi} \circ df(0) \circ \tilde{\phi}(x) = (x_1, \dots, x_m)$$

puis, à l'aide de la Proposition 4, qu'il existe $V \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert contenant 0 et $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme tel que, pour x voisin de 0,

$$\tilde{\psi}^{-1} \circ f \circ \phi \circ \phi^{-1}(x) = df(0) \cdot x$$

(c) *On revient au cas général où $a \neq 0$ ou $f(a) \neq 0$.* Montrer que si f est une immersion ou une submersion en a, alors il existe $V \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert contenant 0, $W \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert contenant $f(a)$, deux difféomorphismes $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ et $\psi : W \to \mathbb{R}^m$ tels que $\phi(V)$ contient a et, pour x voisin de a,

$$\psi \circ f \circ \phi(x) = df(a) \cdot x$$

Exercices fondamentaux

Exercice 6 – Rang de la différentielle Pour les applications suivantes, déterminer le rang de la différentielle en tout point où f est différentiable :

(a) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 2\,x^2 - x - 6\,y^2 \end{array} \right.$

(b) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (2\,x^2 + 6\,y^2, x^2 - y^2, x + y) \end{array} \right.$

Exercice 7 – Formes normales d'une immersion Montrer que chacune des applications suivantes est une immersion, puis expliciter l'expression du difféomorphisme ψ apparaissant dans la forme normale de f au voisinage de 0.

(a) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (0, 4\,t) \end{array} \right.$

(b) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (0, 2\,x, 3\,y) \end{array} \right.$

Exercice 8 – Formes normales d'une submersion Montrer que chacune des applications suivantes est une submersion, puis expliciter l'expression du difféomorphisme φ apparaissant dans la forme normale de g au voisinage de 0.

(a) $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2 - y \end{array} \right.$ **(b)** $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array} \right.$

Exercice 9 – Théorème du rang constant : un premier exemple On considère la fonction :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2 - y \end{array} \right.$$

(a) Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle.
(b) Déterminer le rang de la différentielle de f.
(c) On considère les deux applications suivantes :

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x, x^2 - y) \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & -t \end{array} \right.$$

Montrer que ϕ et ψ définissent deux $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes.
(d) Calculer $\psi \circ f \circ \phi$.

Exercice 10 – Submersion et gradients Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soit $g_i : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable pour tout $i \in [\![1 ; p]\!]$. On pose

$$G : \left\{ \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (g_1(x), \ldots, g_p(x)) \end{array} \right.$$

Montrer que G est une submersion en $x \in U$ si et seulement si les $\nabla g_i(x)$ forment une famille libre.

Compléments

⋆ Exercice 11 – Théorème du rang constant On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2)$$

(a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
(b) Calculer la différentielle de f en $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Quel est le rang de $d_{(x,y)}f$?
(c) Soit $(x,y) = (1,0)$. Calculer $d_{(1,0)}f$ et $f(1,0)$. Montrer qu'il existe un voisinage V de $(0,0)$, un voisinage W de $(1,1)$ et $\phi : V \to \mathbb{R}^2$ et $\psi : W \to \mathbb{R}^2$ deux $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes tels que $\phi(V)$ contient $(1,0)$ et, sur V,

$$\psi \circ f \circ \phi = d_{(1,0)}f$$

(d) On se propose de calculer explicitement ϕ et ψ.
- **(i)** Montrer que f est constante sur les cercles de centre $(0,0)$.
- **(ii)** En déduire que si on pose $\tilde{\phi}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ pour $r > 0$ et $\theta \in]-\pi;\pi[$, alors

$$\forall (r,\theta) \in]0;+\infty[\times]-\pi;\pi[, \qquad f \circ \tilde{\phi}(r,\theta) = (r, r^2)$$

- **(iii)** Trouver un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\tilde{\psi} :]0;+\infty[\times]0;+\infty[\to]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ tel que

$$\forall r \in]0;+\infty[, \qquad \tilde{\psi}(r, r^2) = (r, 2r)$$

- **(iv)** Montrer que $\tilde{\phi} \circ f \circ \tilde{\phi}$ est bien définie sur $]0;+\infty[\times]-\pi,\pi[$ et que

$$\forall (r,\theta) \in]0;+\infty[\times]-\pi;\pi[, \qquad \tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\phi}(r,\theta) = (r, 2r)$$

- **(v)** En déduire un voisinage V de $(0,0)$, un voisinage W de $(1,1)$ et $\phi : V \to \mathbb{R}^2$ et $\psi : W \to \mathbb{R}^2$ deux $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes tels que $\phi(V)$ contient $(1,0)$ et, sur V,

$$\psi \circ f \circ \phi = d_{(1,0)}f$$