Module A5

Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$
Extrema liés

Dans ce module, E désigne l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}$, muni du produit scalaire usuel et de norme associée la norme euclidienne, notée $\|\cdot\|_2$. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer au module **A2 : Différentiabilité sur les espaces euclidiens**.

1 Sous-variétés

1.1 Définition

Définition 1 (Sous-variété)

Soit $E = \mathbb{R}^n$ un espace euclidien. Soit $X \subset E$. On dit que X est une *sous-variété* de E si pour tout $x \in X$, il existe U un voisinage de x et $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ une submersion tels que

$$X \cap U = \Big\{x \in U \mid \varphi(x) = 0\Big\}$$

On appelle alors d la *dimension* de X.

Notons que la dimension d d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ est toujours inférieure à n.
Lorsqu'une sous-variété est définie comme dans la définition précédente, on dit qu'elle est *(localement) décrite implicitement* par la submersion φ.

> Cette définition est connue sous le nom de *définition par description implicite*. On verra dans la troisième section de ce module qu'il existe d'autres manières équivalentes de définir les sous-variétés.

Exemple

Sous-espaces vectoriels. Tout sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $\dim F$.

Exemple

Noyau d'une submersion. En prenant $V = E$, on montre que l'ensemble

$$\Big\{x \in U \mid \varphi(x) = 0\Big\} = \varphi^{-1}(\{0\})$$

est une sous-variété de E si $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ est une submersion.

Définition 2

Soit X une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension d.

- Si $d = 1$, alors X est appelée *courbe* de E.
- Si $d = 2$, alors X est appelée *surface* de E.
- Si $d = n - 1$, alors X est appelée *hypersurface* de E.

EXEMPLE

Courbe. On s'intéresse à la parabole définie comme l'ensemble des points du plan donné par

$$X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\right\}$$

En posant
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & y - x^2 \end{array} \right.$$

on définit une application différentiable de classe $\mathcal{C}^\infty$ (chaque composante étant une fonction polynomiale), de gradient

$$\nabla\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} -2\,x \\ 1 \end{pmatrix}$$

Puisque $\nabla\varphi$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$, le vecteur $\nabla\varphi(x, y)$ forme une famille libre pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, et φ définit une submersion sur $\mathbb{R}^2$. Par conséquent, $X = \varphi^{-1}(\{0\})$ est une sous-variété.

> On verra dans la troisième section le lien qu'il peut exister entre le graphe d'une fonction et les sous-variété.

EXEMPLE

Cercle. On s'intéresse au cercle unité du plan, défini par

$$X = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$$

En posant
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^2 + y^2 = 1 \end{array} \right.$$

on définit une application différentiable de classe $\mathcal{C}^\infty$ (chaque composante étant une fonction polynomiale), de gradient

$$\nabla\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} 2\,x \\ 2\,y \end{pmatrix}$$

Il est immédiat que $\nabla\varphi$ ne s'annule pas qu'à l'origine, qui n'appartient pas au cercle unité. Ainsi, $\nabla\varphi(x, y)$ forme une famille libre pour tout $(x, y) \in X$, et φ définit une submersion sur X. Par conséquent, $X = \varphi^{-1}(\{0\})$ est une sous-variété.

1.2 Premières propriétés

Proposition 1

Soit X une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et soit $a \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$X + a = \Big\{ x + a \mid x \in X \Big\}$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, de même dimension que X.

En particulier, dans la définition 1, on peut remplacer $\varphi^{-1}(\{0\})$ par l'image réciproque de n'importe quel point.

Démonstration : Soit $y_0 \in X + a$. Alors $x_0 = y_0 - a$ est un élément de X. Par définition d'une sous-variété de dimension d, il existe un voisinage U de x_0 et une submersion $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ tels que

$$X \cap U = \varphi^{-1}(\{0\})$$

Autrement dit, pour tout $x \in X \cap U$, on a

$$\varphi(x) = 0 = \varphi(x + a - a)$$

avec
$$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} U + a & \to & \mathbb{R}^{n-d} \\ y & \mapsto & \varphi(y - a) \end{array} \right.$$

une submersion et $U + a$ un voisinage de y_0. Il s'ensuit que

$$(X + a) \cap (U + a) = \psi^{-1}(\{0\})$$

Autrement dit, $X + a$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension d. ■

On a en réalité le résultat plus général suivant :

Proposition 2

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme. Soit $X \subset U$ une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Alors $f(X)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de même dimension que X.

Démonstration : Soit $y_0 \in f(X)$. Il existe donc $x_0 \in X$ tel que $y_0 = f(x_0)$. Par définition d'une sous-variété, il existe un voisinage U de x_0 et une submersion $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ tels que

$$X \cap U = \Big\{ x \in U \mid \varphi(x) = 0 \Big\}$$

On en déduit que pour tout $x \in X \cap U$,

$$\varphi \circ f^{-1} \circ f(x) = 0$$

avec $\varphi \circ f^{-1} : f(U) \to \mathbb{R}^{n-d}$ une submersion (d'après la proposition 8 du module **A4 : Théorème du rang constant**). On en déduit que

$$f(X \cap U) = f(X) \cap f(U) = \Big\{ y \in U \mid \varphi \circ f^{-1}(y) = 0 \Big\}$$

Autrement dit, $f(X)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, de dimension d. ■

Proposition 3

Soit X une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert de X. Alors U est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de même dimension que X.

> On rappelle que U est un ouvert de X s'il existe $\tilde{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $U = \tilde{U} \cap X$.

En particulier, puisque $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

DÉMONSTRATION : Soit $x_0 \in X$. Par définition, il existe un voisinage V de x_0 et une submersion $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ tels que

$$X \cap V = \left\{ x \in V \mid \varphi(x) = 0 \right\}$$

On en déduit que

$$\tilde{U} \cap X \cap V = (\tilde{U} \cap X) \cap (\tilde{U} \cap V) = \left\{ x \in \tilde{U} \cap V \mid \varphi(x) = 0 \right\}$$

Il suffit donc de considérer la restriction de φ à l'ensemble $\tilde{U} \cap V$ pour conclure. ■

Proposition 4

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ et $X' \subset \mathbb{R}^m$ deux sous-variétés, de dimension respective d et d'. Alors $X \times X'$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+m}$ de dimension $d + d'$.

DÉMONSTRATION : Soit $(x_0, x_0') \in X \times X'$. On a donc $x_0 \in X$ et $x' \in X_0'$. Par définition,

- il existe un voisinage U de x_0 et une submersion $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ tels que
$$X \cap U = \left\{ x \in U \mid \varphi(x) = 0 \right\}$$
- il existe un voisinage U' de x_0' et une submersion $\psi : U' \to \mathbb{R}^{n-d'}$ tels que
$$X' \cap U' = \left\{ x' \in U' \mid \psi(x') = 0 \right\}$$

Ainsi, $\tilde{\varphi} : U \times U' \to \mathbb{R}^{d+d'}$ définie par

$$\forall\, (x, x') \in U \times U', \qquad \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \psi(x') \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad J\tilde{\varphi}(x, x') = \begin{pmatrix} J\varphi(x) \\ J\psi(x') \end{pmatrix}$$

est une submersion et

$$(X \cap U) \times (X' \cap U') = (X \times X') \cap (U \times U') = \left\{ (x, x') \in U \times U' \mid \tilde{\varphi}(x, x') = 0 \right\}$$

de sorte que $X \times X'$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+m}$ de dimension $d + d'$. ■

1.3 Redressement d'une sous-variété

L'idée sous-jacente d'une sous-variété est la possibilité de la transformer localement, et de manière "douce", en un sous-espace vectoriel.

Considérons $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ une submersion définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, avec $a \in U$ et $\varphi(a) = 0$. La proposition 11 du module **A4 : Théorème du rang constant**appliquée à la submersion $\varphi(a + \cdot)$ assure qu'il existe un difféomorphisme $\phi : V \to W$ défini au voisinage V de 0, tel que $\phi(0) = a$ et

$$\forall\, u \in V, \qquad \varphi(a + \phi(u)) = (u_1, \ldots, u_{n-d})$$

Si on considère à présent une sous-variété X globalement décrite implicitement par la submersion $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n-d}$, c'est-à-dire que

$$X = \Big\{ x \in U \mid \varphi(x) = 0 \Big\}$$

Soit $a \in X$. On suppose que $U - a = W$. On constate que, d'après ce qui précède,

$$\forall\, y \in W, \qquad \varphi(a + y) = \big((\phi^{-1}(y))_1, \ldots, (\phi^{-1}(y))_{n-d}\big)$$

de sorte que, en posant $x = a + y$,

$$\forall\, x \in U, \qquad \varphi(x) = \big((\phi^{-1}(x - a))_1, \ldots, (\phi^{-1}(x - a))_{n-d}\big)$$

Ainsi, $x \in X$ si et seulement si $x \in U$ et

$$(\phi^{-1}(x - a))_1 = \cdots = (\phi^{-1}(x - a))_{n-d} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \phi^{-1}(x - a) \in \{0\}^{n-d} \times \mathbb{R}^d$$

Autrement dit, on a

$$\phi^{-1}(X - a) = \big(\{0\}^{n-d} \times \mathbb{R}^d\big) \cap V$$

Ainsi, en appliquant un changement de variables (le difféomorphisme $\phi^{-1}(\cdot - a)$), on transforme la sous-variété X de dimension d en un voisinage de 0 dans le sous-espace vectoriel $F = \{0\}^{n-d} \times \mathbb{R}^d$. On parle de *redressement*. On peut évidemment étendre ce résultat à toute sous-variété, et montrer que, localement, toute sous-variété de dimension est, à un changement de variables près, un voisinage de 0 dans le sous-espace vectoriel $\{0\}^{n-d} \times \mathbb{R}^d$.

EXEMPLE

Aplanir une parabole. On s'intéresse à la parabole définie comme l'ensemble des points du plan donné par

$$X = \Big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 \Big\}$$

En posant
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^2 - y \end{array} \right.$$

on a vu que $X = \varphi^{-1}(\{0\})$ est une sous-variété de dimension 1, avec φ une submersion sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Introduisons l'application suivante :

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x, x^2 - y) \end{array} \right.$$

L'application ϕ est bijective, d'inverse $\phi^{-1} = \phi$. On a par ailleurs

$$\forall\,(x,y) \in X, \qquad \phi(x,y) = (x,0)$$

Autrement dit, le difféomorphisme ϕ transforme la parabole X en la droite $F = \mathbb{R} \times \{0\}$.

EXEMPLE

Redressement local d'un cercle. Dans le cas du cercle unité X, on peut considérer l'application suivante :

$$\phi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*} \\ (x,y) & \mapsto & (x, x^2 + y^2 - 1) \end{array} \right.$$

qui est bien un difféomorphisme, et vérifier que

$$\phi(X \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*})) = \mathbb{R} \times \{0\}$$

ce qui constitue un redressement local de X au voisinage de tout point $(x,y) \in X$ lorsque $y > 0$; on peut procéder de manière analogue avec $y \leq 0$, mais avec une application ϕ différente. Il n'est pas possible de trouver une application qui permette de redresser X dans son intégralité.

> On verra dans la section 3 que le redressement est une manière équivalente de définir une sous-variété. Autrement dit, tout redressement définit une sous-variété.

2 Théorème des extrema liés

2.1 Espace tangent

Définition 3 (Vecteur tangent)

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$. Soit $a \in X$ et $v \in \mathbb{R}^n$. On dit que v est *tangent* à X en a s'il existe $\delta > 0$ et $\gamma : \,]-\delta\,;\delta\,[\, \to \mathbb{R}^n$ une application différentiable tels que

(i) $\gamma(]-\delta\,;\delta\,[) \subset X$

(ii) $\gamma(0) = a$

(iii) $\gamma'(0) = v$

> L'application γ définit une courbe différentiable.

Graphe d'une fonction différentiable. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On s'intéresse à son graphe

$$\mathrm{gr} f = \Big\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\Big\}$$

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $v = (1, f'(a)) \in \mathbb{R}^2$. On considère l'application suivante :

$$\gamma : \left\{ \begin{array}{rcl}]-1\,;1\,[& \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (a+t, f(a+t)) \end{array} \right.$$

On a donc bien $\gamma(]-1\,;1\,[) \subset \mathrm{gr} f$. Par ailleurs, $\gamma(0) = (a, f(a))$ et γ est différentiable, de gradient

$$\forall\, t \in \,]-1\,;1\,[\,, \qquad \gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(a+t) \end{pmatrix}$$

de sorte que $\gamma'(0) = v$. On en déduit que v est tangent à $\mathrm{gr} f$ en $(a, f(a))$.

Exemple

Point intérieur. Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ et $a \in X$. On suppose qu'il existe une boule ouverte $\mathcal{B}(a,\delta)$ contenant a telle que $\mathcal{B}(a,\delta) \subset X$. Alors les vecteurs tangents à X en a sont les éléments de $\mathcal{S}(0,1)$ la sphère unité. En effet, pour tout $v \in \mathcal{S}(0,1)$, en considérant l'application différentiable

$$\gamma : \left\{ \begin{array}{rcl}]-\delta\,;\delta\,[& \to & \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto & a + t\,v \end{array} \right.$$

on a bien $\gamma(]-\delta\,;\delta\,[) \subset \mathcal{B}(a,\delta)$, $\gamma(0) = a$ et $\nabla\gamma(t) = v$ pour tout $t \in \,]-\delta\,;\delta\,[$.

Dans le cas d'une sous-variété, on va décrire plus précisément les vecteurs tangents.

Proposition 5

Soit X une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Soit $a \in X$ et U un voisinage de a tel que

$$X \cap U = \Big\{x \in U \mid \varphi(x) = 0\Big\}$$

avec $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_d) : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ une submersion. Alors les vecteurs tangents à X en a sont les vecteurs $v \in \mathbb{R}^n$ tels que $d_a\varphi(v) = 0$, c'est-à-dire

$$\forall\, j \in [\![\,1\,;\,d\,]\!]\,, \qquad d_a\varphi_j(v) = \langle \nabla\varphi_j(a), v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(a)\, v_j = 0$$

Autrement dit, ils forment le sous-espace vectoriel $\ker d_a\varphi$, de dimension d.

On rappelle que $\ker d_a\varphi$ désigne le noyau de l'application linéaire $d_a\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$. On notera que

$$\ker d_a\varphi = \ker J\varphi(a)$$

Remarque : Si $d = n-1$, alors l'espace tangent T_aX est donc un hyperplan orthogonal à $\nabla\varphi(a)$.

DÉMONSTRATION :

- **Montrons que l'ensemble des vecteurs tangents à X en a forme un espace vectoriel.** Soit v_1 et v_2 deux vecteurs tangents à X en a, associés aux courbes $\gamma_1 :]-\delta_1\,;\delta_1[\to \mathbb{R}^n$ et $\gamma_2 :]-\delta_2\,;\delta_2[\to \mathbb{R}^n$. Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. On pose $\delta = \min(\delta_1/|\lambda|, \delta_2/|\mu|)$ et on considère l'application différentiable
$$\gamma : \left\{ \begin{array}{ccc}]-\delta\,;\delta[& \to & \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto & \dfrac{1}{2}\big(\gamma_1(2\,\lambda\,t) + \gamma_2(2\,\mu\,t)\big) \end{array} \right.$$
On a donc $\gamma(0) = (\gamma_1(0) + \gamma_2(0)) = a$ et $\gamma'(0) = \lambda\,\gamma_1'(0) + \mu\,\gamma_2'(0) = \lambda\,v_1 + \mu\,v_2$. On en déduit que le vecteur $\lambda\,v_1 + \mu\,v_2$ est tangent à X en a.
- **Montrons que l'ensemble des vecteurs tangents à X en a est inclus dans $\ker d_a\varphi$.** On suppose que v est tangent à X en a. Par définition, il existe $\delta > 0$ et $\gamma :]-\delta\,;\delta[\to \mathbb{R}^n$ une application différentiable tels que
$$\forall\, t \in]-\delta\,;\delta[, \qquad \gamma(t) \in X$$
et $\gamma(0) = a$. Ainsi, quitte à choisir un $\delta > 0$ plus petit, on a
$$\forall\, t \in]-\delta\,;\delta[, \qquad \varphi(\gamma(t)) = 0$$
Différentions $\varphi \circ \gamma$, qui est constante sur $]-\delta\,;\delta[$, donc de dérivée nulle :
$$\forall\, t \in]-\delta\,;\delta[, \qquad 0 = (\varphi \circ \gamma)'(t) = d_{\gamma(t)}\varphi(\gamma'(t))$$
En particulier, pour $t = 0$, on obtient :
$$d_a\varphi(v) = 0$$
- **Dimension de $\ker d_a\varphi$.** Commençons par noter que, puisque $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ est une submersion en a, sa différentielle $d_a\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$ est une application linéaire surjective. Donc son rang vaut $n - d$, et le théorème du rang assure que
$$\dim \ker d_a\varphi = n - \operatorname{rg} d_a\varphi = n - (n-d) = d$$
- **Dimension de l'ensemble des vecteurs tangents à X en a.** Pour conclure, on va montrer que l'ensemble des vecteurs tangents à X en a, qui est inclus dans $\ker d_a\varphi$, est de dimension supérieure à d, ce qui nous permettra de conclure à l'identité entre ces deux sous-espaces vectoriels. Soit $w \in \{0\}^{n-d} \times \mathbb{R}^d$. On a vu dans le paragraphe précédent qu'il existait un voisinage U de a, un difféomorphisme $\phi : V \to U + a$ défini au voisinage V de 0, tel que $\phi(0) = a$ et tel que
$$\phi^{-1}(X \cap U - a) = \big(\{0\}^{n-d} \times \mathbb{R}^d\big) \cap V$$
Autrement dit, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $t \in]-\delta\,;\delta[$, le vecteur
$$\gamma(t) = a + \phi(t\,w)$$
soit dans X, avec $\gamma(0) = a$. L'application γ ainsi définie est différentiable, de dérivée :
$$\forall\, t \in]-\delta\,;\delta[, \qquad \gamma'(t) = d_{t\,w}\phi \cdot w$$
On a donc en particulier $\gamma'(0) = d_0\phi \cdot w$. Il s'ensuit que les $d_0\phi \cdot w$ sont tangents à X en a. Or, puisque ϕ est un difféomorphisme, l'application linéaire $d_0\phi$ est bijective. Ainsi, l'image $d_0\phi(\{0\}^{n-d} \times \mathbb{R}^d)$ est de même dimension que $\{0\}^{n-d} \times \mathbb{R}^d$, c'est-à-dire vaut d. Par inclusion, on en déduit que le sous-espace vectoriel des vecteurs tangents à X en a est de dimension supérieure à d. On en déduit donc l'identité entre cet espace et $\ker d_a\varphi$. ■

EXEMPLE

Vecteurs tangents au cercle. On considère à nouveau le cercle unité, décrit implicitement par

$$X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0\right\}$$

Soit $(x_0, y_0) \in X$. On a

$$\nabla\varphi(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 2\,x_0 \\ 2\,y_0 \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \ker d_{(x_0,y_0)}\varphi &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left\langle \nabla\varphi(x_0,y_0), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = 0\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2\,x_0\,x + 2\,y_0\,y = 0\right\} \end{aligned}$$

On en déduit que l'ensemble des vecteurs tangents au cercle X en (x_0, y_0) est l'ensemble des vecteurs $t\,(1, -x_0/y_0)$ avec $t \in \mathbb{R}$ si $y_0 \neq 0$ et la droite $x = 0$ sinon.

Comme le suggère l'exemple précédent, dans le cas du plan, les vecteurs tangents correspondent aux directions des droites tangentes à la sous-variété, mais pas aux droites elles-mêmes. Celles-ci ne passent pas (en général) par l'origine, et ne constituent donc pas des sous-espaces vectoriels.

Définition 4 (Espace tangent)

Soit X une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Soit $a \in X$. On appelle *espace tangent* à X en a l'espace affine des points $x \in \mathbb{R}^n$ tels que le vecteur $x - a$ soit tangent à X en a. Cet espace est noté $T_a X$.

Il est important de noter que, malgré son nom, l'espace tangent n'est en général pas un espace vectoriel, mais un espace affine. Si X est décrit implicitement par φ au voisinage de a, alors on a

$$T_a X = a + \ker d_a\varphi$$

EXEMPLE

Espace tangent au cercle. Si X est le cercle unité, alors on a

$$T_{(x_0,y_0)} = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} y_0 \\ -x_0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Il s'agit d'une droite affine qui passe par (x_0, y_0) et qui est tangente (au sens géométrique) au cercle en (x_0, y_0).

2.2 Théorème des extrema liés

Théorème 1 (Théorème des extrema liés)

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ une submersion. On pose

$$\mathcal{A} = \Big\{x \in U \mid \varphi(x) = 0\Big\} = \varphi^{-1}(\{0\})$$

Soit $a \in U$ tel qu'il existe un voisinage $V \subset U$ de a et

$$\forall\, x \in V \cap \mathcal{A}, \qquad f(x) \geq f(a)$$

Alors il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tels que

$$df(a) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \, d\varphi_j(a)$$

ou encore,

$$\nabla f(a) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \, \nabla\varphi_j(a)$$

On a vu dans le module **B1 : Minimisation d'une fonction. Conditions d'optimalité.**que a est appelé *minimiseur local* de f sur $\mathcal{X}$, et que les fonctions φ_j sont appelées *contraintes*. Les scalaires λ_j sont quant à eux appelés *multiplicateurs de* Lagrange.

Démonstration : Soit $a \in \mathcal{A} = \varphi^{-1}(\{0\})$. Puisque φ est une submersion, alors, d'après la proposition 5, on a $T_a\mathcal{A} = \ker d_a\varphi$. Soit $v \in T_a\mathcal{A}$. La définition de l'espace tangent $T_a\mathcal{A}$ assure l'existence d'une application différentiable $\gamma : \,]-\delta\,;\delta\,[$ telle que $\varphi \circ \gamma(t) = 0$ pour tout $t \in \,]-\delta\,;\delta\,[$, $\gamma(0) = a$ et $\nabla\gamma(0) = v$. Par hypothèse, pour tout $t \in \gamma(]-\delta\,;\delta\,[)$, on a

$$f \circ \gamma(t) \geq f(a) = f \circ \gamma(0)$$

Autrement dit, 0 est minimiseur de la fonction $f \circ \gamma : \,]-\delta\,;\delta\,[\to \mathbb{R}$. On verra dans le module **B1 : Minimisation d'une fonction. Conditions d'optimalité.**que 0 est donc point critique de $f \circ \gamma$, c'est-à-dire

$$(f \circ \gamma)'(0) = \langle \nabla\gamma(0), \nabla f(\gamma(0)) \rangle = \langle v, \nabla f(a) \rangle = 0$$

Autrement dit, $d_a f$ s'annule sur $T_a\mathcal{A}$. En d'autres termes,

$$\ker d_a\varphi = T_a\mathcal{A} \subset \ker d_a f$$

Or,

$$\ker d_a\varphi = \ker(d_a\varphi_1, \dots, d_a\varphi_m) = \bigcap_{j=1}^{m} \ker d_a\varphi_j$$

Il s'ensuit [a] que $d_a f$ est une combinaison linéaire des $d_a\varphi_j$. ■

a. Cf par exemple Denis Monasse, *Mathématiques. Cours complet. Prépa MP & MP**, Proposition 2.4.8.

Interprétons ce théorème en termes de vecteurs tangents. L'égalité

$$\nabla f(a) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla \varphi_j(a) = 0$$

nous permet de déduire que le vecteur $(1, -\lambda_1, \dots, -\lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ appartient au noyau de l'application linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^{m+1} & \to & \mathbb{R}^n \\ \xi & \mapsto & \xi_0 \nabla f(a) + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \xi_j \nabla \varphi_j(a) = d_a F(\xi) \end{array} \right.$$

avec $F = (f, \varphi_1, \dots, \varphi_m)$. Autrement dit, le vecteur $(1, -\lambda_1, \dots, -\lambda_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ est tangent à l'ensemble $F^{-1}(F(a))$ en a. Il existe donc une courbe différentiable $\gamma :]-\delta\,;\delta[\to \mathbb{R}^m$ telle que $(\gamma(0), \gamma'(0)) = (a, 1, -\lambda_1, \dots, -\lambda_m)$ et

$$F \circ \gamma(]-\delta\,;\delta[) = F(a) = (f(a), 0, \dots, 0)$$

> Ce théorème est à la base d'une théorie fondamentale en optimisation sous contraintes, qui sera abordée au module **B5 : Théorème de Karush–Kuhn–Tucker**.

3 Compléments : définitions équivalentes

Dans cette section, on va généraliser la notion de sous-variété en considérant des définitions équivalentes.

3.1 Définition locale par redressement

Commençons par un premier exemple introductif :

Exemple

Projection canonique. Soit $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ la projection canonique de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^m$ (avec $m \leq n$), définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \qquad p(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m)$$

On sait que p définit une submersion en tout point de $\mathbb{R}^n$. Soit $a \in \mathbb{R}^n$. On pose $y = p(a)$ et on considère l'ensemble suivant :

$$p^{-1}(\{y\}) = \Big\{ x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) = y \Big\} = \Big\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \forall\, i \in [\![1\,;m]\!]\,, x_i = a_i \Big\}$$

Autrement dit, $\qquad p^{-1}(\{y\}) = \{(a_1, \dots, a_m)\} \times \mathbb{R}^{n-m}$

Ainsi, en choisissant

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & (x_{m+1}, \dots, x_n, x_1 - a_1, \dots, x_m - a_m) \end{array} \right.$$

qui est un difféomorphisme, on obtient

$$\varphi\big(p^{-1}(\{y\})\big) = \mathbb{R}^{n-m} \times \{0_m\}$$

Il s'ensuit que $p^{-1}(\{y\})$ définit une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-m$.

On peut généraliser ce résultat à n'importe quelle submersion (et donc, à n'importe quelle sous-variété) :

Proposition 6 (Sous-variété définie par redressement)

Soit X une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension d. Soit $x \in X$. Alors il existe un voisinage **ouvert** $\mathcal{V}$ de x, un voisinage **ouvert** $\mathcal{V}_0$ de 0 dans E, un sous-espace vectoriel F de E de la forme $\mathbb{R}^d \times \{0_{n-d}\}$, avec $d \in [\![0\,; n]\!]$, et un difféomorphisme $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}_0$ de classe $\mathcal{C}^k$ tels que

$$f^{-1}(F \cap \mathcal{V}_0) = X \cap \mathcal{V}$$

ou encore

$$f(X \cap \mathcal{V}) = F \cap \mathcal{V}_0$$

Démonstration : Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ une submersion telle que $0 \in \varphi(U)$ et telle que $\varphi^{-1}(\{0\}) = X \cap U$. Soit $a \in X$. Par définition, $\varphi(a) = 0$. Par hypothèse, φ est une submersion en a. Donc, d'après le corollaire 3 du module **A4 : Théorème du rang constant**, il existe $V \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert contenant 0 et $\phi : V \to \mathbb{R}^n$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur son image tels que $\phi(0) = a$ et, pour u dans un voisinage $\mathcal{V}_0 \subset \mathbb{R}^n$ de 0,

$$\varphi \circ \phi(u_1, \dots, u_n) = (u_1, \dots, u_m) + \varphi(a) = (u_1, \dots, u_m)$$

Posons $\mathcal{V} = \phi(\mathcal{V}_0)$. Puisque $\varphi(0) = a$, l'ensemble $\mathcal{V}$ est un voisinage de a. Par ailleurs, d'après ce qui précède, on a

$$\forall\, x \in \mathcal{V}, \qquad \varphi(x) = (\phi^{-1}(x))_{1 \leq i \leq m}$$

On en déduit que

$$X \cap \mathcal{V} = \Big\{ x \in \mathcal{V} \mid (\phi^{-1}(x))_{1 \leq i \leq m} = 0 \Big\} = \mathcal{V} \cap \phi(\{0_m\} \times \mathbb{R}^{n-m})$$

Or, ϕ étant une bijection, on a

$$X \cap \mathcal{V} = \phi(\mathcal{V}_0) \cap \phi(\{0_m\} \times \mathbb{R}^{n-m}) = \phi\big(\mathcal{V}_0 \cap (\{0_m\} \times \mathbb{R}^{n-m})\big)$$

Il suffit alors de définir f à l'aide d'une permutation des coordonnées des arguments de ϕ. ■

On peut interpréter cette proposition de la manière suivante : localement, c'est-à-dire sur un voisinage $\mathcal{V}$ de tout point $x \in X$, il est possible, en appliquant un difféomorphisme adapté f, de transformer ("tordre") X en un (sous-)espace vectoriel. L'application f peut être vue comme un changement de variables.

Notons que si $F = \mathbb{R}^d \times \{0_{n-d}\}$, alors l'ensemble

$$\widetilde{\mathcal{V}} = \Big\{ \tilde{x} \in \mathbb{R}^d \mid (\tilde{x}, 0_{n-d}) \in F \cap \mathcal{V}_0 \Big\}$$

est un ouvert de $\mathbb{R}^d$. En effet, pour tout $\tilde{x} \in \widetilde{\mathcal{V}}$, puisque $\mathcal{V}_0$ est un ouvert, il contient une boule ouverte $\mathcal{B}_r(\tilde{x}, 0_{n-d})$ de rayon r centrée en $(\tilde{x}, 0_{n-d})$. Cette boule contient en particulier tous les éléments

$$(\tilde{y}, 0_{n-d}) \qquad \text{avec} \qquad \|\tilde{y} - \tilde{x}\| < r$$

de sorte que $\widetilde{\mathcal{V}}$ contient la boule ouverte $\mathcal{B}_r(\tilde{x})$. Ainsi, une manière équivalente de définir les sous-variétés est la suivante : pour tout point x de la sous-variété X, on transforme l'intersection entre un voisinage de x (dans l'espace ambiant $\mathbb{R}^n$) et la sous-variété X en un **ouvert** de $\mathbb{R}^d$ en appliquant un difféomorphisme. Dans le cas d'une courbe par exemple, on transforme de la sorte toute intersection entre une boule ouverte contenant x et la courbe X (ce qui donne une portion de courbe) en un intervalle ouvert de la droite réelle.

EXEMPLE

Aplanir une parabole. On s'intéresse à la parabole définie comme l'ensemble des points du plan donné par

$$X = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 \right\}$$

En posant

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x, y - x^2) \end{array} \right.$$

on définit une application différentiable de classe $\mathcal{C}^\infty$ (chaque composante étant une fonction polynomiale), bijective d'inverse

$$f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x, x^2 + y) \end{array} \right.$$

elle-même différentiable de classe $\mathcal{C}^\infty$. Il s'ensuit que f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Par ailleurs, on a

$$f(X) = \mathbb{R} \times \{0\}$$

où $\mathbb{R} \times \{0\}$ est une droite (la droite horizontale d'ordonnée nulle), donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. La parabole X est donc bien une sous-variété de $\mathbb{R}^2$, de dimension 1 (ici, on a choisi $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 = \mathbb{R}^2$). Dans cet exemple, l'application φ transforme la parabole en une droite.

> On dit parfois que f redresse X en un espace vectoriel. Attention cependant : contrairement à ce que cette phrase pourrait laisser entendre, il ne s'agit pas de transformer globalement X en un espace vectoriel. La transformation se fait localement, c'est-à-dire sur des ouverts ; l'application f dépendant du voisinage considéré.

3.2 Définition locale par paramétrage

De même qu'une submersion peut définir une sous-variété, une immersion peut aussi permettre de les définir :

Proposition 7 (Sous-variété définie par paramétrage)

Soit X est une sous-variété de E de dimension d. Soit $x \in X$. Alors il existe un voisinage U de x, un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^d$ et une application $\psi : V \to E$, tels que ψ soit une immersion en 0 et

$$X \cap U = \psi(V)$$

Démonstration : Soit X une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et $x \in X$. Par définition, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x, un voisinage $\mathcal{V}_0$ de 0 dans $\mathbb{R}^n$, un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ de la forme $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ et un difféomorphisme $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}_0$ tels que

$$f^{-1}(F \cap \mathcal{V}_0) = X \cap \mathcal{V}$$

On pose $$V = \left\{ \hat{x} \in \mathbb{R}^d \mid \exists\, z \in \mathbb{R}^{n-d}, (\hat{x}, z) \in F \cap \mathcal{V}_0 \right\}$$

Il s'agit d'un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^d$. On considère la fonction

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} V & \to & \mathbb{R}^n \\ \hat{x} & \mapsto & f^{-1}(\hat{x}, 0) = f^{-1} \circ i(\hat{x}) \end{array} \right.$$

où $i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ est l'injection canonique de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^n$. D'après le module **A4 : Théorème du rang constant**, $f^{-1} \circ i$ est une immersion. ■

Autrement dit, toute sous-variété s'écrit localement comme l'image d'une immersion.

3.3 Définition locale par graphe

Enfin, signalons cette dernière définition équivalente des sous-variétés :

Proposition 8 (Sous-variété définie par graphe)

Soit X est une sous-variété de E de dimension d. Soit $x \in X$. Alors il existe un voisinage U de x, un ensemble V de $\mathbb{R}^d$ et une application $f : V \to \mathbb{R}^{n-d}$, tels que $X \cap U$ est le graphe de f ; autrement dit,

$$X \cap U = \left\{ (x_1, \ldots, x_d, f_1(x_1, \ldots, x_d), \ldots, f_{n-d}(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^n \mid x \in X \cap U \right\}$$

Démonstration : Admis.