Feuille d'exercices n°9
Optimisation sous contraintes

Démonstrations de cours

Les exercices de cette section ***ne seront pas*** *traités en TD, les corrigés se trouvant dans le polycopié. Les exercices marqués ♣ sont exigibles au partiel et à l'examen.*

♣ Exercice 1 – Unicité de la solution

Module B4 – Propositions 1 et 5

Soient $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ un ensemble et $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement convexe. On considère le problème d'optimisation sous contraintes

$$\text{Minimiser } f(x) \text{ sous les contraintes } x \in \mathcal{A} \tag{$\mathcal{P}$}$$

(a) *On suppose que $\mathcal{A}$ est convexe.* Supposons que $(\mathcal{P})$ admet deux solutions x_1 et x_2. Montrer que $x_1 = x_2$. *Indication : on pourra s'intéresser à $f((x_1 + x_2)/2)$.*

(b) *On suppose que $\mathcal{A}$ est ouvert et que f est différentiable.* Supposons que $(\mathcal{P})$ admet une solution x^*. Montrer que x^* est minimiseur local de f. En déduire que x^* est point critique de f, puis que $(\mathcal{P})$ admet au plus une solution.

♣ Exercice 2 – Inéquation variationnelle dans le cas convexe

Module B4 – Proposition 11

Soient $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$ un ensemble convexe et $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe Gateaux-différentiable.

(a) *On suppose que $(\mathcal{P}_c)$ admet une solution x^*.* Soit $x \in \mathcal{C}$ et $t \in \,]\,0\,;1\,]$. En utilisant la convexité de $\mathcal{C}$, justifier que

$$f(x^*) \leq f(t\,x + (1-t)\,x^*) = f(x^* + t\,(x - x^*))$$

En déduire que
$$\frac{f(x^* + t\,(x - x^*)) - f(x^*)}{t} \geq 0$$

puis montrer que
$$\forall\, x \in \mathcal{C}, \qquad f'(x^*; x - x^*) \geq 0$$

(b) *On suppose qu'il existe $x^* \in \mathcal{C}$ tel que $f'(x^*; x - x^*) \geq 0$ pour tout $x \in \mathcal{C}$.* Justifier que

$$\forall\, x \in \mathcal{C}, \qquad f(x) = f(x^* + 1 \times (x - x^*)) \geq f(x^*) + 1 \times f'(x^*; x - x^*)$$

En déduire que x^* est solution de $(\mathcal{P}_c)$.

Exercices fondamentaux

Exercice 3 – Étude de fonctions : optimisation sous contraintes

Déterminer les solutions $t^* \in \mathbb{R}$ des problèmes suivants en réalisant une étude de fonctions. Que vaut $f'(t^*)$?

(a) Minimiser $f(t) = t^2$ sous les contraintes $1 \leq t \leq 2$

(b) Minimiser $f(t) = t^2$ sous les contraintes $-1 \leq t \leq 2$

(c) Minimiser $f(t) = -t^2$ sous les contraintes $-1 \leq t \leq 2$

(d) Minimiser $f(t) = t^2$ sous les contraintes $|t| \geq 5$

Exercice 4 – Variables d'écart Soient $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ et $h_j : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ des fonctions, avec $j \in [\![1\,;\, m]\!]$. On considère les deux problèmes d'optimisation sous contraintes suivantes :

$$\text{Minimiser } f(x) \text{ sous les contraintes } \begin{cases} h_1(x) \leq 0 \\ \vdots \\ h_m(x) \leq 0 \end{cases} \qquad (\mathcal{P}_{ci})$$

et

$$\text{Minimiser } F(x, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) = f(x) \text{ sous les contraintes } \begin{cases} h_1(x) + \varepsilon_1^2 = 0 \\ \vdots \\ h_m(x) + \varepsilon_m^2 = 0 \end{cases} \qquad (\mathcal{P}_{ce})$$

(a) Montrer que tout point $(x, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ est admissible pour le problème $(\mathcal{P}_{ce})$ si et seulement si $h_j(x) \leq 0$ pour tout $j \in [\![1\,;\, m]\!]$, et si et seulement si

$$\forall\, j \in [\![1\,;\, m]\!], \qquad |\varepsilon_j| = \sqrt{-h_j(x)}$$

(b) Montrer que $(x^*, \varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_m^*)$ est une solution du problème $(\mathcal{P}_{ce})$ si et seulement si

$$\forall\, j \in [\![1\,;\, m]\!], \qquad h_j(x^*) \leq 0, \qquad |\varepsilon_j^*| = \sqrt{-h_j(x^*)}$$

et que x^* est solution du problème $(\mathcal{P}_{ci})$.

Compléments

Exercice 5 – Optimisation linéaire On considère le problème suivant :

$$\text{Minimiser } f(x,y) = x - y \text{ sous les contraintes } \begin{cases} x \leq 4 \\ x + y \geq 2 \\ y \leq 5 \\ (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \end{cases} \qquad (\mathcal{P}_{ci})$$

(a) Représenter graphiquement l'ensemble admissible.

(b) Tracer les lignes de niveaux $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = c\}$ avec $c \in \{-1, 0, 1\}$. Que peut-on conjecturer quant à la solution optimale ?

(c) Montrer que le problème $(\mathcal{P}_{ci})$ est équivalent au problème suivant :

$$\text{Minimiser } J(x, y, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = -5 + x + varepsilon_3 \text{ sous les contraintes } \begin{cases} x + \varepsilon_1 = 4 \\ -x - y + \varepsilon_2 = -2 \\ y + \varepsilon_3 = 5 \\ (x, y, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in (\mathbb{R}^+)^5 \end{cases}$$

(d) En déduire la solution optimale du problème $(\mathcal{P}_{ci})$.

⋆ Exercice 6 – Pénalisation Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $(g_i)_{1 \leq i \leq p}$ des fonctions convexes et différentiables. On considère le problème suivant :

$$\text{Minimiser } f(x) \text{ sous les contraintes } g_i(x) \leq 0 \text{ pour tout } i \in [\![1\,;\, p]\!] \qquad (\mathcal{P}_{ci})$$

On suppose que ce problème est réalisable et admet une solution x^*. On définit les fonctions suivantes :

$$\Xi : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \Big(\max\big(0, g_i(x)\big) \Big)^2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad f_k = f + k\,\Xi$$

(a) Montrer que f_k est convexe pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Déterminer la limite de $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$.

(c) On suppose que f est fortement convexe de module $\alpha > 0$. Justifier que les f_k admettent un unique minimiseur, que l'on note x_k.

(d) Montrer que
$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad f(x_k) \leq f(x^*)$$
En déduire que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge, de limite notée $\tilde{x}$.

(e) *On admet que $\tilde{x}$ est un point admissible pour le problème $(\mathcal{P}_{ci})$.* En déduire que $\tilde{x}$ est solution de $(\mathcal{P}_{ci})$.