Module A2
Différentiabilité sur les espaces euclidiens

Dans ce module, E (resp. F) désigne un espace euclidien, que l'on identifiera à $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^m$) avec $n \in \mathbb{N}^*$ (resp. $m \in \mathbb{N}^*$), muni du produit scalaire usuel noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de norme associée la norme euclidienne, notée $\| \cdot \|_2$. On notera $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E. Si $E = \mathbb{R}^n$, on choisira la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

L'objectif de ce module est d'abord d'établir des propriétés de la différentielle **propres à la dimension finie**, puis de construire la notion de différentiabilité seconde.

1 Dérivées partielles premières et secondes

1.1 Rappel : dérivées partielles par rapport à une variable

On a vu dans le module **A1 : Différentiabilité sur un espace de Hilbert. Différentiabilité de Gateaux.** la définition d'une dérivée directionnelle suivant un vecteur quelconque. Nous rappelons ici le cas particulier des dérivées directionnelle suivant un vecteur de la base :

Définition 1 (Dérivée partielle par rapport à une variable)

Soient U un ouvert de E et $a \in U$. Soit $f : U \to F$ une application. On dit que f admet une *dérivée partielle* par rapport à sa i-ème variable, avec $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$, au point a si f admet une dérivée directionnelle suivant le vecteur e_i au point a, notée

$$\partial_i f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f'(a; e_i)$$

Notons que la dérivée directionnelle de f suivant le vecteur e_i au point $a = (a_1, \ldots, a_n)$ est la **dérivée** en a_i de l'**application partielle**

$$t \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

En particulier, étudier l'existence de dérivées partielles d'une fonction revient à étudier la dérivabilité d'une fonction réelle.

Exemple

Dérivées partielles d'une fonction. Considérons la fonction suivante :

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & x^2 \cos y - z \end{array} \right.$$

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

- La fonction partielle $g : x \mapsto f(x, b, c) = x^2 \cos b - c$

  est une fonction **polynomiale**, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et en particulier en a. Aussi, f admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable en (a,b,c). Celle-ci vaut

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c) = g'(a) = 2\,a\,\cos b$$

- La fonction partielle $h : y \mapsto f(a,y,c) = a^2\,\cos y - c$

  est le produit entre un scalaire et la fonction **cosinus**, auquel on a ajouté une constante ; elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et en particulier en b. Aussi, f admet une dérivée partielle par rapport à sa deuxième variable en (a,b,c). Celle-ci vaut

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c) = h'(b) = -a^2\,\sin b$$

- La fonction partielle $\ell : z \mapsto f(a,b,z) = a^2\,\cos b - z$

  est une fonction **affine**, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et en particulier en c. Aussi, f admet une dérivée partielle par rapport à sa troisième variable en (a,b,c). Celle-ci vaut

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) = \ell'(c) = -1$$

Finalement, on a montré que, pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, la fonction f admet des dérivées partielles par rapport à ses trois variables.

Exercice

Montrer que la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \,]\,0\,;+\infty\,[& \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & \cos x\,\exp y - \ln z \end{array} \right.$$

est différentiable.

En tant que dérivée directionnelle, les dérivées partielles en partagent les propriétés, comme l'existence de dérivées partielles dès que l'application est différentiable :

Corollaire 1

Soient U un ouvert de E et $a \in U$. Soit $f : U \to F$ une application. On suppose que f est différentiable en a. Alors f admet une dérivée partielle en a par rapport à sa i-ème variable pour tout $i \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$. Par ailleurs, on a

$$\forall\, i \in [\![\,1\,;\,n\,]\!], \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = d_a f(e_i)$$

Démonstration : Il s'agit d'une conséquence de la preuve de la proposition 13 du module **A1 : Différentiabilité sur un espace de Hilbert. Différentiabilité de Gateaux.** (appliquée en $v = e_i$). ■

Un second corollaire découle immédiatement de ce résultat, qui permet d'écrire la différentielle à l'aide des dérivées partielles. En effet, la linéarité de la différentielle en un point assure que

$$\forall\, h \in E, \qquad d_a f(h) = d_a f\left(\sum_{i=1}^{n} h_i\,e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} h_i\,d_a f(e_i)$$

Corollaire 2

Soient U un ouvert de E et $a \in U$. Soit $f : U \to F$ une application. Si f est différentiable en a, alors pour tout $h = h_1\, e_1 + \cdots + h_n\, e_n \in E$, on a

$$d_a f(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i\, \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

Attention ! Une application qui admet des dérivées partielles par rapport à chacune de ses variables n'est pas nécessairement différentiable ! (cf. contre-exemple page 15 du module **A1 : Différentiabilité sur un espace de Hilbert. Différentiabilité de Gateaux.**).

1.2 Lien avec la différentiabilité

Lorsque f est différentiable (que ce soit au sens de Fréchet ou au sens de Gateaux) sur U, elle admet des dérivées partielles en tout point $a \in U$. **En dimension finie**, on peut établir le résultat suivant lorsque les dérivées partielles sont continues :

Proposition 1

Soient $U \subset E$ un ouvert et $a \in U$. Soit $f : U \to F$ une application. On suppose que l'application f admet une dérivée partielle par rapport à sa i-ème variable pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$ sur un voisinage de a **et** que, pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$, la dérivée partielle

$$x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

est **continue** en a. Alors f est différentiable en a.

Démonstration : On va décomposer la preuve en deux étapes, suivant la dimension de l'espace d'arrivée F.

- **Cas où** $F = \mathbb{R}$. On suppose que les dérivées partielles de la fonction f sont continues en a. Soit $h \in E$ voisin de 0. On a

$$f(a+h) = f\left(a + \sum_{i=1}^{n} h_i\, e_i\right) + f(a) - f(a) \pm \sum_{j=1}^{n-1} f\left(a + \sum_{i=1}^{j} h_i\, e_i\right)$$

Réorganisons les termes de cette égalité :

$$\begin{aligned} &f(a+h) \\ &\quad = f(a) + f(a + h_1\, e_1) - f(a) + \sum_{j=2}^{n} \left(f\left(a + \sum_{i=1}^{j} h_i\, e_i\right) - f\left(a + \sum_{i=1}^{j-1} h_i\, e_i\right)\right) \end{aligned}$$

Pour tout $j \in [\![1\,;\, n]\!]$, on définit

$$g_1(t) = f(a + t\, e_1) \qquad \text{et} \qquad g_j(t) = f\left(a + \sum_{i=1}^{j-1} h_i\, e_i + t\, e_j\right)$$

Puisque f admet des dérivées partielles au voisinage de a, les fonctions g_j sont bien définies au voisinage de 0. Par ailleurs, elles sont dérivables sur un voisinage de 0, de dérivée

$$g_1'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a + t\, e_1) \quad \text{et} \quad \forall\, j \in [\![2\,;\, n]\!]\,, \quad g_j'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(a + \sum_{i=1}^{j-1} h_i\, e_i + t\, e_j\right)$$

Remarquons que pour h voisin de 0,

$$f(a+h)-f(a)-\sum_{j=1}^{n} h_j\,\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)=\sum_{j=1}^{n}\left(g_j(h_j)-g_j(0)-h_j\,\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right)$$

Soit $j\in [\![1\,;\,n]\!]$. On a

$$g_j(h_j)-g_j(0)=\Big[g_j(t)\Big]_0^{h_j}=\int_0^{h_j} g_j'(t)\,\mathrm{d}t$$

Effectuons le changement de variables $t=h_j\,u$ (qui donne $\mathrm{d}t=h_j\,\mathrm{d}u$) :

$$g_j(h_j)-g_j(0)=h_j\int_0^1 g_j'(h_j\,u)\,\mathrm{d}u=h_j\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(a+\sum_{i=1}^{j-1}h_i\,e_i+t\,h_j\,e_j\right)\mathrm{d}u$$

de sorte que

$$g_j(h_j)-g_j(0)-h_j\,\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)=h_j\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(a+\sum_{i=1}^{j-1}h_i\,e_i+t\,h_j\,e_j\right)-\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\,\mathrm{d}u$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}f(a+h)-f(a)-&\sum_{j=1}^{n}h_j\,\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\\&=\sum_{j=1}^{n}h_j\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(a+\sum_{i=1}^{j-1}h_i\,e_i+t\,h_j\,e_j\right)-\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon>0$. Puisque les dérivées partielles sont continues en a, il existe $\delta>0$ tel que

$$\|h\|_2\le\delta\qquad\Longrightarrow\qquad\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(a+h)-\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right|\le\varepsilon$$

Soit $\|h\|_2\le\delta$. Puisque $t\in[\,0\,;1\,]$, on a $\|(h_1,\cdot,h_{j-1},t\,h_j,0,\cdot,0)\|_2\le\|h\|_2$, et on obtient la majoration suivante :

$$\begin{aligned}&\left|f(a+h)-f(a)-\sum_{j=1}^{n}h_j\,\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right|\\&\qquad\le\sum_{j=1}^{n}|h_j|\int_0^1\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(a+\sum_{i=1}^{j-1}h_i\,e_i+t\,h_j\,e_j\right)-\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right|\mathrm{d}u\\&\qquad\le\sum_{j=1}^{n}|h_j|\int_0^1\varepsilon\,\mathrm{d}u=\sum_{j=1}^{n}|h_j|\,\varepsilon=\|h\|_1\,\varepsilon\end{aligned}$$

Les normes étant équivalentes en dimension finie, on vient de montrer que

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{\|h\|_2}\left|f(a+h)-f(a)-\sum_{j=1}^{n}h_j\,\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right|=0$$

soit encore
$$f(a+h)=f(a)+\sum_{j=1}^{n}h_j\,\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)+o(\|h\|_2)$$

Puisque
$$L:h\mapsto\sum_{j=1}^{n}h_j\,\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

est visiblement linéaire, et qu'en dimension finie, les applications linéaires sont continues, on en déduit que f est différentiable en a, de différentielle $d_af=L$.

- **Cas où** $\dim F>1$. On pose $f=(f_1,\ldots,f_m)$, où chaque $f_i:U\to\mathbb{R}$ est une fonction. Puisque f admet une dérivée partielle par rapport à toutes ses variables sur un voisinage de a, les limites suivantes existent pour tout x voisin de a

$$\lim_{t\to0}\frac{f(x+t\,e_j)-f(x)}{t}\qquad\text{pour tout } j\in[\![1\,;\,n]\!]$$

Puisque
$$\frac{f(x+t\,e_j)-f(x)}{t}=\left(\frac{f_i(x+t\,e_j)-f_i(x)}{t}\right)_{1\le i\le m}$$

on en déduit que, pour tout $i \in [\![1\,;\,m]\!]$, les limites suivantes existent et sont finies :

$$\lim_{t\to 0} \frac{f_i(x+t\,e_j)-f_i(x)}{t} \qquad \text{pour tout } j \in [\![1\,;\,n]\!]$$

Autrement dit, les fonctions f_i admettent une dérivée partielle par rapport à toutes leurs variables sur un voisinage de a. De plus, on a

$$\forall\, i \in [\![1\,;\,m]\!], \forall\, j \in [\![1\,;\,n]\!], \qquad \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right)_i$$

Ainsi, la continuité des dérivées partielles de f assure celle des dérivées partielles des f_i. On peut donc appliquer le résultat établi au point précédent, qui assure que les f_i sont différentiables en a. Par conséquent, l'application f est différentiable en a. ■

On a le corollaire suivant :

Corollaire 3

Soient $U \subset E$ un ouvert. Soit $f : U \to F$ une application. Alors on a équivalence entre les deux énoncés suivants :

(i) f est une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ;

(ii) pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, f admet une dérivée partielle par rapport à sa i-ème variable sur U **et** que, pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, la dérivée partielle

$$x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

est **continue** sur U.

Remarque : Il faut bien noter que les hypothèses de continuité sont demandées cette fois sur un **voisinage**, et non en point isolé.

Démonstration : Le sens direct est une conséquence directe de la proposition 13 du module **A1 : Différentiabilité sur un espace de Hilbert. Différentiabilité de Gateaux.** Pour démontrer la réciproque, on applique la proposition 1 pour tous les points de U, ce qui démontre que f est différentiable sur U. Le corollaire 2 donne alors l'expression de la différentielle de f en fonction des dérivées partielles. La continuité de ces dernières assure la continuité de la première. ■

Ainsi, si l'on souhaite démontrer qu'une application est différentiable en un point par le biais de ses dérivées partielles, il faut s'assurer de la continuité de celles-ci en ce point.

Exercice

Montrer que la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & x^2\,\cos y - z \end{array} \right.$$

est différentiable.

1.3 Dérivées partielles secondes

Puisque les dérivées partielles d'une application $U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sont des applications $U' \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, on peut étudier l'existence de leurs dérivées partielles. Cela donne lieu à la notion de dérivées partielles secondes :

Définition 2 (Dérivées partielles secondes)

Soient U un ouvert de E, $U' \subset U$ un ouvert de E et $a \in U'$. Soit $f : U \to F$ une application. On suppose que f admet des dérivées partielles par rapport à toutes ses variables en tout point de U'. On dit que f admet des *dérivées partielles secondes* au point a si les dérivées partielles de f admettent des dérivées partielles en a par rapport à toutes leurs variables. On note alors

$$\forall\,(i,j) \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]^2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a)$$

Notation : lorsque $i = j$, on note

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$$

Remarque : Pour des raisons de lisibilité, on choisit ici de ne considérer que le cas où f admet des dérivées partielles par rapport à **toutes** ses variables, et de même pour chaque dérivée partielle.

Exemple

Dérivées partielles secondes d'une fonction. Reprenons la fonction de l'exemple de la page 1. On a montré que f admet des dérivées partielles selon ses trois variables, données pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2\,x\,\cos y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -x^2\,\sin y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -1$$

Considérons la première de ces dérivées partielles. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

- La fonction partielle $g : x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,b,c) = 2\,x\,\cos b$

  est une fonction linéaire, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et en particulier en a, de dérivée

  $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b,c) = g'(a) = 2\,\cos b$$

- La fonction partielle $h : y \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,y,c) = 2\,a\,\cos y$

  est le produit entre un scalaire et la fonction cosinus ; elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée

  $$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b,c) = h'(b) = -2\,a\,\sin b$$

- La fonction partielle $\ell : z \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b,z) = 2\,a\,\cos b$

  est constante, donc dérivable, de dérivée nulle :

  $$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(a,b,c) = \ell'(c) = 0$$

La même étude pour les autres dérivées partielles de f assure que f admet des dérivées partielles secondes en tout point de $\mathbb{R}^3$.

2 Matrice jacobienne d'une application différentiable

Dans cette section, on va généraliser la démarche développée dans le module **A1 : Différentiabilité sur un espace de Hilbert. Différentiabilité de Gateaux.** en représentant la différentielle d'une application définie sur $\mathbb{R}^n$ à l'aide d'une matrice.

2.1 Gradient d'une fonction différentiable

On a déjà vu dans le module **A1 : Différentiabilité sur un espace de Hilbert. Différentiabilité de Gateaux.** que, pour tout espace euclidien, il est possible d'écrire la différentielle d'une fonction f différentiable en $a \in U$ à l'aide d'un produit scalaire avec un vecteur unique, nommé *gradient* et noté $\nabla f(a)$:

$$\forall\, h \in E, \qquad d_a f(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle$$

On va montrer qu'il est possible d'expliciter l'expression du gradient. En effet, la proposition 3 appliquée à $f : U \to \mathbb{R}$ assure que

Proposition 2 (Expression du gradient)

Soient $U \subset E$ un ouvert et $a \in U$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f est différentiable en a. Alors

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Démonstration : Il suffit d'observer que, pour tout $h \in E$,

$$\langle \nabla f(a), h \rangle = \sum_{i=1}^{n} h_i \, \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \quad \blacksquare$$

> En réalité, le gradient d'une fonction en un point peut être écrit sous la forme d'un vecteur ligne ; nous adoptons ici la convention d'un vecteur colonne pour rester cohérent avec les conventions liées au calcul matriciel.

Remarque : Parce que l'existence des dérivées partielles ne suffit pas à assurer la différentiabilité, et donc de l'existence du gradient, on ne peut utiliser la notation $\nabla f(a)$ qu'**après** avoir démontré que f est différentiable en a. Et ce, même si le vecteur des dérivées partielles existe et est calculable. S'il est vraiment utile de considérer ce vecteur sans avoir démontré au préalable la différentiabilité, on s'attachera à lui attribuer une notation différente de $\nabla f(a)$.

Exercice

Donner l'expression du gradient de la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & x^2 \cos y - z \end{array} \right.$$

2.2 Matrice jacobienne d'une application différentiable

Considérons dans ce paragraphe une application g définie sur un ouvert U de $E = \mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $F = \mathbb{R}^m$. Elle se décompose en m composantes :

$$g = (g_1, \ldots, g_m)$$

où chaque g_i pour $i \in [\![1 ; m]\!]$ est une fonction de U dans $\mathbb{R}$. Si g est différentiable en $a \in U$, alors on a vu que sa différentielle en a est une application linéaire de E dans F. Puisque l'on est en dimension finie, il s'ensuit que, si on considère les bases canoniques de E et de F, il existe une unique matrice M représentant cette application linéaire, dans le sens où

$$\forall\, h \in E, \qquad d_a g(h) = M\, h$$

Dans cette définition, le produit entre M et h est un produit matriciel, et $M\, h$ est donc un élément de F.

Définition 3 (Matrice jacobienne)

Soient $U \subset E$ un ouvert et $a \in U$. Soit $g : U \to F$ une application. On suppose que g est différentiable en a. Alors on appelle *matrice jacobienne* de g en a l'unique matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, notée $Jg(a)$ telle que

$$\forall\, h \in E, \qquad d_a g(h) = Jg(a)\, h$$

Autrement dit, si g est différentiable en a, alors on a le développement limité suivant :

$$g(a+h) = g(a) + Jg(a)\, h + o(\|h\|_2)$$

Grâce au corollaire 2, on peut donner l'expression des coefficients de M en fonction de ses dérivées partielles (qui existent car g est différentiable). En effet, le corollaire 2 assure que si g est différentiable en a et si $h = h_1\, e_1 + \cdots + h_n\, e_n$, alors

$$d_a g(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i\, \frac{\partial g}{\partial x_i}(a) = J_g(a)\, h$$

On peut vérifier que, pour tout $j \in [\![1 ; m]\!]$,

$$(d_a g(h))_j = \sum_{i=1}^{n} h_i\, \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a)$$

Proposition 3 (Expression de la matrice jacobienne)

Soient $U \subset E$ un ouvert et $a \in U$. Soit $g : U \to F$ une application différentiable en a. Alors

$$Jg(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Lorsque $m = 1$, on a $\qquad Jg(a) = \nabla g(a)^\top$

REMARQUE : De même que pour le gradient, la matrice jacobienne est définie à l'aide des dérivées partielles de g, ce qui signifie qu'on peut techniquement l'écrire dès lors que g admet des dérivées partielles. Cependant, cette matrice ne porte le nom de *matrice jacobienne* uniquement lorsqu'il a été démontré que g est différentiable.

EXERCICE

Considérons l'application suivante :

$$g : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x^2 \cos y - z, x + y^2 - z^3) \end{array} \right.$$

Montrer que g est différentiable et que

$$\forall\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \qquad Jg(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2\,x \cos y & -x^2 \sin y & -1 \\ 1 & 2\,y & 3\,z^2 \end{pmatrix}$$

3 Différentielle d'ordre supérieur

3.1 Généralités

Soit $\mathcal{X}$ un espace de BANACH. Si f est différentiable sur l'ouvert $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$, alors sa différentielle df est une application qui à tout point $a \in \mathcal{U}$ associe l'application linéaire $df(a)$. Il s'agit donc d'une application définie sur $\mathcal{U}$ à valeurs dans l'espace des applications linéaires continues $\mathcal{L}_c(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. On s'est déjà intéressé à son éventuelle continuité (ce qui a permis d'introduire les applications $\mathcal{C}^1$). On peut maintenant s'intéresser à son éventuelle différentiabilité :

Définition 4 (Différentielle seconde)

Soient $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ un ouvert et $a \in U$. Soit $f : \mathcal{U} \to \mathcal{Y}$ une application. On dit que f est *deux fois différentiable* en a si elle est différentiable sur un voisinage $\mathcal{U}'$ de a et que sa différentielle $df : U' \to \mathcal{L}_c(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ est elle-même différentiable en a. Sa différentielle est appelée *différentielle seconde* de f en a et notée $d^2 f(a)$.

À quel espace appartient $d^2 f(a)$ la différentielle seconde de f en a ? Puisqu'il s'agit de la différentielle de $df : \mathcal{U}' \to \mathcal{L}_c(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, il s'agit d'une application linéaire continue définie sur $\mathcal{X}$ et à valeurs dans $\mathcal{L}_c(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, autrement dit un élément de $\mathcal{L}_c(\mathcal{X}, \mathcal{L}_c(\mathcal{X}, \mathcal{Y}))$. On voit donc qu'il s'agit d'un objet assez difficile à appréhender.

> Il est possible de montrer que l'on peut identifier l'espace $\mathcal{L}_c(\mathcal{X}, \mathcal{L}_c(\mathcal{X}, \mathcal{Y}))$ avec l'espace vectoriel des applications bilinéaires $\mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. C'est pourquoi on utilise la notation suivante
>
> $$\forall\, (h, k) \in \mathcal{X}^2, \qquad (d^2 f(a) \cdot h) \cdot k = d^2 f(a) \cdot (h, k)$$

3.2 Matrice hessienne d'une fonction deux fois différentiable

Plaçons-nous à présent dans le cas d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire que $\mathcal{X} = E = \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$). On a vu dans le module **A1 : Différentiabilité sur un espace de HILBERT. Différentiabilité de GATEAUX.** que la continuité de la différentielle est équivalente à celle du gradient. De même, au lieu d'étudier la différentiabilité de l'application différentielle

$$df : \left\{ \begin{array}{ccc} U' & \to & \mathcal{L}_c(E,\mathbb{R}) \\ a & \mapsto & df(a) \end{array} \right.$$

on peut se contenter de considérer l'application gradient :

$$\nabla f : \left\{ \begin{array}{ccc} U' & \to & E \\ a & \mapsto & \nabla f(a) \end{array} \right.$$

qui est donc à valeurs sur un espace plus "classique", plus familier. On peut alors appliquer les résultats de la section 2 à l'application $g = \nabla f$.

Définition 5 (Matrice hessienne)

Soient $U \subset E$ un ouvert et $a \in U$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f est deux fois différentiable en a. Alors on appelle *matrice hessienne* de f en a la matrice jacobienne du gradient de f en a, élément de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et notée $\text{Hess} f(a)$:

$$\text{Hess} f(a) = J(\nabla f)(a)$$

Si ∇f est différentiable en a, sa matrice jacobienne s'écrit

$$J(\nabla f)(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial(\nabla f)_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial(\nabla f)_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial(\nabla f)_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial(\nabla f)_n}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Puisque les composantes de ∇f sont les dérivées partielles de f, la matrice jacobienne de ∇f en a est une matrice définie à l'aide des dérivées partielles secondes de f en a.

Proposition 4

Soient $U \subset E$ un ouvert et $a \in U$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f est deux fois différentiable en a. Alors

$$\text{Hess} f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

Exercice

Considérons l'application suivante :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & x^2 \cos y - z \end{array} \right.$$

Montrer que f est deux fois différentiable et que

$$\forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \qquad \operatorname{Hess} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2\cos y & -2\,x\sin y & 0 \\ -2\,x\sin y & -x^2\cos y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice hessienne obtenue dans l'exercice précédent est symétrique. Il s'agit d'une propriété communes à toutes les matrices hessiennes :

Théorème 1 (symétrie de SCHWARZ)

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $a \in U$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f est deux fois différentiable en a. Alors

$$\forall\,(i,j) \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]^2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

Ainsi, l'ordre de dérivation partielle importe peu et la matrice hessienne est symétrique.

> En réalité, on peut généraliser ce résultat pour n'importe quel espace de BANACH : si f est deux fois différentiable en a, alors sa différentielle seconde est symétrique :
> $$\forall\,(h,k) \in \mathcal{X}^2, \qquad d^2 f(a)\cdot(h,k) = d^2 f(a)\cdot(k,h)$$

DÉMONSTRATION : On considère la fonction

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (h,k) & \mapsto & f(a+h+k) - f(a+h) - f(a+k) + f(a) \end{array} \right.$$

- Commençons par noter que, pour tout $(h,k) \in E^2$,

  $$\begin{aligned} &|\varphi(h,k) - \langle \operatorname{Hess} f(a)\,k, h\rangle| \\ &= |\varphi(h,k) - \langle \nabla f(a+k) - \nabla f(a), h\rangle + \langle \nabla f(a+k) - \nabla f(a), h\rangle - \langle \operatorname{Hess} f(a)\,k, h\rangle| \\ &\leq |\varphi(h,k) - \langle \nabla f(a+k) - \nabla f(a), h\rangle| + |\langle \nabla f(a+k) - \nabla f(a), h\rangle - \langle \operatorname{Hess} f(a)\,k, h\rangle| \end{aligned}$$

  Majorons les deux termes du membre de droite. On a d'une part, grâce à l'inégalité de CAUCHY–SCHWARZ,

  $$\begin{aligned} |\langle \nabla f(a+k) - \nabla f(a), h\rangle - \langle \operatorname{Hess} f(a)\,k, h\rangle| \\ &= |\langle \nabla f(a+k) - \nabla f(a) - \operatorname{Hess} f(a)\,k, h\rangle| \\ &\leq \|\nabla f(a+k) - \nabla f(a) - \operatorname{Hess} f(a)\,k\|_2\,\|h\|_2 \end{aligned}$$

  Puisque $\operatorname{Hess} f(a) = J_{\nabla f}(a)$, il s'ensuit que

  $$\nabla f(a+k) - \nabla f(a) - \operatorname{Hess} f(a)\,k = o(k)$$

  On en déduit que

  $$\begin{aligned} |\langle \nabla f(a+k) - \nabla f(a), h\rangle - \langle \operatorname{Hess} f(a)\,k, h\rangle| &= \|h\|_2\|k\|_2\varepsilon_1(k) \\ &\leq (\|h\|_2 + \|k\|_2)^2\,\varepsilon_2(\|h\| + \|k\|) \end{aligned}$$

  avec $\varepsilon_i(k)$ qui tend vers 0 lorsque k tend vers 0 pour tout i. En considérant d'autre part la fonction

  $$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} [\,0\,;1\,] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(a+t\,h+k) - f(a+t\,h) - \langle \nabla f(a+k), t\,h\rangle + \langle \nabla f(a), t\,h\rangle \end{array} \right.$$

on remarque que

$$|\varphi(h,k) - \langle \nabla f(a+k) - \nabla f(a), h\rangle| = |\psi(1) - \psi(0)|$$

La fonction ψ est dérivable sur $]\,0\,;1\,[$, avec

$$\forall\, t \in\,]\,0\,;1\,[\,, \qquad \langle \nabla f(a+t\,h+k) - \nabla f(a+t\,h), h\rangle - \langle \nabla f(a+k) - \nabla f(a), h\rangle$$

L'inégalité des accroissements finis assure donc que

$$|\psi(1) - \psi(0)| \leq \sup_{t\in[\,0\,;1\,]} |\psi'(t)|$$

Or, l'inégalité de Cauchy–Schwarz donne la majoration

$$|\psi'(t)| \leq \|\nabla f(a+t\,h+k) - \nabla f(a+t\,h) - \nabla f(a+k) + \nabla f(a)\|_2\, \|h\|_2$$

On a par ailleurs

$$\begin{aligned}
\nabla f(a+t\,h+k) &= \nabla f(a) + \operatorname{Hess} f(a)\,(t\,h+k) + \|t\,h+k\|_2 \varepsilon_3(t\,h+k)\\
\nabla f(a+t\,h) &= \nabla f(a) + \operatorname{Hess} f(a)\,(t\,h) + \|t\,h\|_2 \varepsilon_4(t\,h)\\
\nabla f(a+k) &= \nabla f(a) + \operatorname{Hess} f(a)\,k + \|k\|_2 \varepsilon_5(k)
\end{aligned}$$

de sorte que

$$|\psi'(t)| \leq \|\|t\,h+k\|_2\, \varepsilon_3(t\,h+k) - t\,\|h\|_2\, \varepsilon_4(t\,h) - \|k\|_2\, \varepsilon_5(k)\|_2\, \|h\|_2$$

En remarquant que $\|t\,h+k\|_2 \leq \|h\|_2 + \|k\|_2$ pour tout $t\in [\,0\,;1\,]$, on obtient

$$|\psi'(t)| \leq (\|h\|_2 + \|k\|_2)^2\, \varepsilon_6(\|h\| + \|k\|)$$

On a donc finalement démontré la majoration suivante :

$$|\varphi(h,k) - \langle \operatorname{Hess} f(a)\,k, h\rangle| \leq (\|h\|_2 + \|k\|_2)^2\, \varepsilon_7(\|h\| + \|k\|)$$

- En inversant les rôles de h et k, la symétrie de φ nous permet d'établir que

$$|\varphi(h,k) - \langle \operatorname{Hess} f(a)\,h, k\rangle| \leq (\|h\|_2 + \|k\|_2)^2\, \varepsilon_7(\|h\|_2 + \|k\|_2)$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
&|\langle \operatorname{Hess} f(a)\,k, h\rangle - \langle \operatorname{Hess} f(a)\,h, k\rangle|\\
&\qquad = |\langle \operatorname{Hess} f(a)\,k, h\rangle - \varphi(h,k) + \varphi(h,k) - \langle \operatorname{Hess} f(a)\,h, k\rangle|\\
&\qquad \leq |\langle \operatorname{Hess} f(a)\,k, h\rangle - \varphi(h,k)| + |\varphi(h,k) - \langle \operatorname{Hess} f(a)\,h, k\rangle|\\
&\qquad \leq 2\,(\|h\|_2 + \|k\|_2)^2\, \varepsilon_7(\|h\|_2 + \|k\|_2)
\end{aligned}$$

En particulier, en appliquant cette majoration au couple $(t\,h, t\,k)$ avec $t>0$, on obtient

$$\begin{aligned}
t^2\, |\langle \operatorname{Hess} f(a)\,k, h\rangle - \langle \operatorname{Hess} f(a)\,h, k\rangle| &= |\langle \operatorname{Hess} f(a)\,t\,k, t\,h\rangle - \langle \operatorname{Hess} f(a)\,t\,h, t\,k\rangle|\\
&\leq 2\,t^2 (\|h\|_2 + \|k\|_2)^2\, \varepsilon_7(t\,\|h\|_2 + t\,\|k\|_2)
\end{aligned}$$

En simplifiant par $t^2>0$, on obtient finalement que

$$|\langle \operatorname{Hess} f(a)\,k, h\rangle - \langle \operatorname{Hess} f(a)\,h, k\rangle| \leq 2\,(\|h\|_2 + \|k\|_2)^2\, \varepsilon_7(t\,\|h\|_2 + t\,\|k\|_2)$$

et il suffit de faire tendre t vers 0 pour obtenir que

$$\langle \operatorname{Hess} f(a)\,k, h\rangle = \langle \operatorname{Hess} f(a)\,h, k\rangle$$

soit la symétrie de la matrice hessienne. ■

L'hypothèse selon laquelle la fonction doit être deux fois différentiable est importante, comme en témoigne le contre-exemple suivant :

Contre-exemple

Asymétrie de la matrice hessienne (Peano 1884). On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} x\,y\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction f admet des dérivées partielles par rapport à x et à y en tout point de $\mathbb{R}^2$; on a en particulier pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$$

On en déduit que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$$

En réalité, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} y\,\dfrac{x^4+4\,x^2\,y^2-y^4}{x^4+2\,x^2\,y^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} x\,\dfrac{x^4-4\,x^2\,y^2-y^4}{x^4+2\,x^2\,y^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Posons $g = \nabla f$. Si g est différentiable en $(0,0)$ (autrement dit, si f est deux fois différentiable en $(0,0)$), alors on a par définition de la matrice jacobienne

$$g(h,k) = g(0,0) + Jg(0,0)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o\left(\left\|\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}\right\|_2\right)$$

soit
$$\begin{pmatrix} k\,\dfrac{h^4+4\,h^2\,k^2-k^4}{h^4+2\,h^2\,k^2+k^4} \\ h\,\dfrac{h^4-4\,h^2\,k^2-k^4}{h^4+2\,h^2\,k^2+k^4} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} -k \\ h \end{pmatrix}} + o\left(\left\|\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}\right\|_2\right)$$

si $(h,k) \neq (0,0)$. Or,

$$\frac{h^4+4\,h^2\,k^2-k^4}{h^4+2\,h^2\,k^2+k^4} = 1 + 2\,k^2\,\frac{h^2-k^2}{(h^2+k^2)^2}$$

si bien que
$$\begin{pmatrix} k\,\dfrac{h^4+4\,h^2\,k^2-k^4}{h^4+2\,h^2\,k^2+k^4} \\ h\,\dfrac{h^4-4\,h^2\,k^2-k^4}{h^4+2\,h^2\,k^2+k^4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ -h \end{pmatrix} + 2\,\frac{h^2-k^2}{(h^2+k^2)^2}\begin{pmatrix} k^3 \\ h^3 \end{pmatrix}$$

Or, on a
$$\left|2\,\frac{h^2-k^2}{(h^2+k^2)^2}\begin{pmatrix} k^3 \\ h^3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{h^2+k^2} \times \underbrace{2\,\frac{|h^2-k^2|}{(h^2+k^2)^{5/2}}\sqrt{h^6+k^6}}_{=\varepsilon(h,k)}$$

avec
$$\lim_{t\to 0} \varepsilon(t,0) = \lim_{t \to 0} 2\,\frac{t^2}{t^5}\,t^3 = 2 \neq 0$$

Autrement dit, le reste dans la formule de TAYLOR–YOUNG d'ordre 1 n'est pas un $o(\|(h,k)\|_2)$, ce qui mène à une contradiction avec l'hypothèse de différentiabilité de g.

Établissons maintenant la formule de TAYLOR–YOUNG à l'ordre 2 :

Proposition 5 (TAYLOR–YOUNG)

Soient $U \subset E$ un ouvert et $a \in U$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f est deux fois différentiable en a. Alors on a

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h\rangle + \frac{1}{2}\langle \operatorname{Hess} f(a)\, h, h\rangle + o(\|h\|_2^2)$$

DÉMONSTRATION : Posons pour tout $h \in E$

$$R(h) = f(a+h) - f(a) - \langle \nabla f(a), h\rangle - \frac{1}{2}\langle \operatorname{Hess} f(a)\, h, h\rangle$$

et montrons que $R(h) = o(\|h\|_2^2)$, c'est-à-dire que

$$\lim_{\|h\|_2 \to 0} \frac{R(h)}{\|h\|_2^2} = 0$$

Commençons par remarquer que R est différentiable au voisinage de 0 par composition et somme de fonctions différentiables. On a en particulier pour h voisin de 0

$$\nabla R(h) = \nabla f(a+h) - \nabla f(a) - \operatorname{Hess} f(a)\, h$$

Ainsi, R est GATEAUX-différentiable au voisinage de 0, et pour tout $v \in E$, on a

$$R'(h;v) = \langle \nabla R(h), v\rangle = \langle \nabla f(a+h), v\rangle - \langle \nabla f(a), v\rangle - \langle \operatorname{Hess} f(a)\, h, v\rangle$$

L'inégalité des accroissements finis assure alors que, pour h voisin de 0,

$$|R(h)| = |R(h) - R(0)| \leq \sup_{\substack{x \in [\,0\,;h\,] \\ \|v\|_2 = 1}} |R'(x;v)| \cdot \|h - 0\|_2$$

Or, on a

$$|R'(x;v)| = |\langle \nabla f(a+x) - \nabla f(a) - \langle \operatorname{Hess} f(a)\, x, v\rangle| = |\langle o(\|x\|_2), v\rangle| \leq \|o(\|x\|_2)\|_2\, \|v\|_2$$

Il suffit alors de remarquer que $\|o(\|x\|_2)\|_2 = \|x\|_2\, \|\varepsilon(x)\|_2 \leq \|h\|_2\, \|\varepsilon(x)\|_2$ lorsque $\|x\|_2 \leq \|h\|_2$, avec $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $\|x\|_2 \to 0$, de sorte que

$$|R'(x;v)| \leq \|h\|_2\, \|\varepsilon(x)\|_2\, \|v\|_2$$

Or, puisque $\varepsilon(x)$ tend vers 0 lorsque $\|x\|_2 \to 0$, on a pour tout $\varepsilon > 0$ l'existence d'un $\delta > 0$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \qquad \|x\|_2 \leq \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \|\varepsilon(x)\|_2 \leq \varepsilon$$

En particulier, si $\|h\|_2 \leq \delta$, alors

$$\sup_{x \in [\,0\,;h\,]} \|\varepsilon(x)\|_2 \leq \varepsilon$$

ce qui prouve bien que $h \mapsto \sup_{x \in [\,0\,;h\,]} \|\varepsilon(x)\|_2$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0, et donc

$$|R(h)| \leq \sup_{\substack{x \in [\,0\,;h\,] \\ \|v\|_2 = 1}} \|h\|_2^2\, \|\varepsilon(x)\|_2\, \|v\|_2 = \|h\|_2^2 \sup_{\substack{x \in [\,0\,;h\,] \\ \|v\|_2 = 1}} \|\varepsilon(x)\|_2 = o(\|h\|_2^2)$$

ce qui achève la preuve. ■

REMARQUE : Dans le développement à l'ordre 2, le terme quadratique n'a pas d'écriture unique, dans le sens où il existe d'autres matrices $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall\, h \in E, \qquad \langle A\, h, h\rangle = \langle \mathrm{Hess}\, f(a)\, h, h\rangle$$

En revanche, il n'en existe qu'une seule qui soit symétrique : la matrice hessienne.

3.3 Règles de calcul

Notons que, de même que pour le cas différentiable, le lien entre la différentiabilité d'ordre 2 et l'existence des dérivées partielles secondes doit être examiné avec attention : les équivalents du corollaire 1 et de la proposition 1 nous permettent d'établir que

Proposition 6

Soient $U \subset E$ un ouvert et $a \in U$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f est deux fois différentiable en a. Alors f admet des dérivées partielles secondes en tout point du voisinage de a.

mais la réciproque nécessite une condition de continuité :

Proposition 7

Soient $U \subset E$ un ouvert et $a \in U$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f admet des dérivées partielles secondes en tout point du voisinage de a et que les applications

$$x \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

sont continues en a pour tout $(i,j) \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!]^2$. Alors f est deux fois différentiable en a.

DÉMONSTRATION : Laissées en exercice. Il suffit d'appliquer les corollaire 1 et de la proposition 1 à l'application ∇f.

Tout comme pour la différentiabilité, la proposition 7 permet de démontrer la différentiabilité d'ordre 2 d'une fonction, mais nécessite d'une part de calculer les dérivées partielles secondes **et** d'autre part d'en étudier la continuité. C'est pourquoi on termine ce module avec quelques résultats permettant d'établir sans calcul la différentiabilité d'ordre 2 d'une fonction.

Proposition 8

Soient $U \subset E$ un ouvert et $a \in U$. Soit $f, g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions deux fois différentiables en a. Alors $\lambda\, f + \mu\, g$ est deux fois différentiable en a quel que soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et on a

$$\mathrm{Hess}(\lambda\, f + \mu\, g)(a) = \lambda\, \mathrm{Hess}\, f(a) + \mu\, \mathrm{Hess}\, g(a)$$

DÉMONSTRATION : Il suffit d'observer que l'ensemble des applications différentiables est stable par combinaison linéaire et d'appliquer ce résultat aux différentielles de f et g. ■

Proposition 9

Soient $U \subset E$ un ouvert et $a \in U$. Soit $f, g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions deux fois différentiable en a. Alors $f \times g$ est deux fois différentiable en a.

DÉMONSTRATION : Puisque f et g sont deux fois différentiables en a, leur produit est différentiable au voisinage de a, de gradient (proposition 7 du module **A1 : Différentiabilité sur un espace de HILBERT. Différentiabilité de GATEAUX.**)

$$\nabla(f \times g)(x) = g(x)\, \nabla f(x) + f(x)\, \nabla g(x)$$

Les applications ∇f et ∇g sont également différentiables en a, si bien que, par produit et somme d'applications différentiables, $\nabla(f \times g)$ est différentiable en a. ■

Proposition 10

Soient $U \subset E$ et $U' \subset \mathbb{R}$ deux ouverts et $a \in U$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable en a telle que $f(a) \in U'$ et $j : U' \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable en $f(a)$. Alors $j \circ f$ est deux fois différentiable en a.

DÉMONSTRATION : D'après la proposition 7 du module **A1 : Différentiabilité sur un espace de HILBERT. Différentiabilité de GATEAUX.**, $j \circ f$ est différentiable au voisinage de a. Par ailleurs, on a

$$\nabla(j \circ f)(x) = j' \circ f(x)\, \nabla f(x)$$

où $j' \circ f$ est différentiable en a par composition, et ∇f différentiable en a par hypothèse. En écrivant la composition des développements limités, on montre que $j \circ f$ est différentiable en a. ■