Cours n°3

Optimisation linéaire. Méthode du simplexe.

Solutions optimales d'un problème d'optimisation linéaire

Dans ce troisième cours, on va s'intéresser en détails aux solutions optimales d'un problème d'optimisation linéaire. Dans un premier temps, on s'attachera à étudier les cas d'existence de solutions. Ensuite, on verra qu'une solution optimale, quand elle existe, se trouve parmi des points particuliers de l'ensemble admissible. En considérant une nouvelle forme équivalente du problème d'optimisation, on montrera comment caractériser de tels points. Enfin, on verra comment vérifier l'optimalité d'un de ces points.

1 Solutions d'un problème d'optimisation linéaire

1.1 Existence

Considérons le problème d'optimisation sous forme générale suivant :

$$(\mathcal{P}_g) \qquad \begin{array}{ll} \text{Maximiser} & F(X) \\ \text{sous les contraintes} & X \in \mathbb{R}^Q, G_1(X) \leq 0, \ldots, G_P(X) \leq 0 \end{array}$$

On va s'intéresser aux cas d'existence et de non-existence de solutions optimales pour ce problème. On commence par étudier un cas de non-existence très simple :

Proposition 1 (Cas de non-existence de solution optimale I)

Si l'ensemble admissible du problème $(\mathcal{P}_g)$, donné par

$$\left\{ X \in \mathbb{R}^Q \;\middle|\; G_1(X) \leq 0, \ldots, G_P(X) \leq 0 \right\}$$

est vide, alors le problème $(\mathcal{P}_g)$ n'admet pas de solution optimale.

Exemple

Voici l'exemple d'un problème avec un ensemble admissible vide :

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser} & x + 18 \\ \text{sous les contraintes} & x \in \mathbb{R}, x \leq 0, x \geq 1 \end{array}$$

La proposition 1 nous conduit à introduire la définition suivante :

Définition 1 (Problème réalisable)

Un problème d'optimisation est dit *réalisable* si son ensemble admissible est non vide.

On suppose que le problème considéré est admissible. La prop suivante donne une condition suffisante d'existence de solutions optimales.

Proposition 2 (Cas d'existence de solutions optimales I)

Si l'ensemble admissible du problème $(\mathcal{P}_g)$ est *non vide et borné* dans $\mathbb{R}^Q$, alors le problème $(\mathcal{P}_g)$ admet une solution optimale.

Démonstration :

1. L'ensemble admissible $\mathcal{C}$ du problème $(\mathcal{P}_g)$ définit un compact de $\mathbb{R}^Q$ (c'est-à-dire un ensemble fermé borné de $\mathbb{R}^Q$).
2. La fonction objectif F est continue (car linéaire).

Donc le théorème de Weierstrass assure que F est bornée sur l'ensemble admissible et atteint ses bornes, en particulier son maximum. Autrement dit, il existe un point $X^* \in \mathcal{C}$ tel que pour tout $X \in \mathcal{C}$,

$$F(X^*) \geq F(X)$$

ce qui achève la preuve. ■

Attention, la réciproque est fausse : un problème d'optimisation linéaire à l'ensemble admissible non borné peut admettre une solution optimale, comme le montre l'exemple ci-dessous.

Contre-exemple

Considérons le problème d'optimisation linéaire suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser} & x + 1 \\ \text{sous les contraintes} & x \in \mathbb{R}, x \leq 0 \end{array}$$

L'ensemble admissible $]-\infty, 0]$ est non borné, mais $x^* = 0$ est une solution optimale car pour tout $x \leq 0$,

$$1 \geq x + 1$$

Ainsi, le caractère borné (ou non) de l'ensemble admissible ne suffit pas à déterminer l'existence d'une solution optimale pour un problème d'optimisation linéaire. Il faut pour cela introduire une autre notion.

Définition 2 (Majorant d'une fonction)

Soit $F : \mathbb{R}^Q \to \mathbb{R}$ et $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^Q$ une partie de $\mathbb{R}^Q$. On dit que F est *majorée* sur $\mathcal{C}$ s'il existe un réel M tel que

$$\forall X \in \mathcal{C}, \quad F(X) \leq M$$

On dit alors que M est un *majorant* de F sur $\mathcal{C}$, ou que F est majorée par M sur $\mathcal{C}$.

Les majorants, quand ils existent, ne sont pas uniques. En particulier, si M est *un* majorant de F sur $\mathcal{C}$, alors tous les $M' \geq M$ en sont également.

Le résultat suivant découle immédiatement de la définition de majorant :

Proposition 3 (Cas de non-existence de solution optimale II)

Si F *n'est pas majorée* sur l'ensemble admissible du problème $(\mathcal{P}_g)$, alors le problème $(\mathcal{P}_g)$ n'admet pas de solution optimale.

Pour conclure cette section, on donne le résultat suivant, qui sera admis pour le moment :

Théorème 1 (Existence de solutions optimales)

On suppose que le problème $(\mathcal{P}_g)$ est réalisable. Alors $(\mathcal{P}_g)$ admet une solution optimale si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

(a) son ensemble admissible est borné

(b) F est majorée sur son ensemble admissible

Démonstration : On prouve uniquement le sens direct, la réciproque étant admise pour l'instant. Si $(\mathcal{P}_g)$ admet une solution optimale X^* et que son ensemble admissible $\mathcal{C}$ n'est pas borné, alors, par définition de X^*,

$$\forall Y \in \mathcal{C}, \quad F(X^*) \geq F(Y)$$

Autrement dit, $F(X^*)$ est un majorant de F sur $\mathcal{C}$. ■

1.2 Solutions-sommets

On s'intéresse maintenant au problème d'optimisation linéaire sous forme canonique suivant

$$(\mathcal{P}_c) \qquad \begin{array}{ll} \text{Maximiser} & {}^{t}c\,x \\ \text{sous les contraintes} & M\,x \leq b \\ & \quad x \geq 0 \end{array}$$

avec $x \in \mathbb{R}^q$, $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Rappelons que, d'après le cours précédent, tout problème d'optimisation linéaire sous forme générale peut s'écrire de manière équivalente sous forme canonique. Alors, on a le résultat central suivant :

Théorème 2 (Solutions optimales d'un problème sous forme canonique)

On suppose que le problème $(\mathcal{P}_c)$ sous forme canonique admet au moins une solution optimale. Alors $(\mathcal{P}_c)$ admet une solution optimale parmi les sommets du polyèdre des contraintes

$$\mathcal{C} = \Big\{ x \in \mathbb{R}^q \mid M\,x \leq b, x \geq 0 \Big\}$$

Démonstration : Ce théorème est admis.

On a vu de nombreux exemples en dimension 2 (cours et exercices) illustrant ce résultat. Il faut cependant noter que toutes les solutions optimales d'un problème d'optimisation linéaire sous forme canonique ne sont pas des sommets de l'ensemble admissible. C'est le cas par exemple lorsque les lignes de niveaux sont parallèles à l'un des côtés du polyèdre, et que la ligne de niveau minimale passe par ce côté (cf. Figure 1). On parle alors de *dégénérescence*.

Le théorème 2 et les observations faites au cours précédent à propos des sommets d'un polyèdre dans $(\mathbb{R}^+)^q$, nous conduisent à introduire une nouvelle forme de problème d'optimisation linéaire, qui nous permettra d'utiliser le formalisme des solutions de base pour caractériser les sommets de l'ensemble admissible du problème $(\mathcal{P}_c)$.

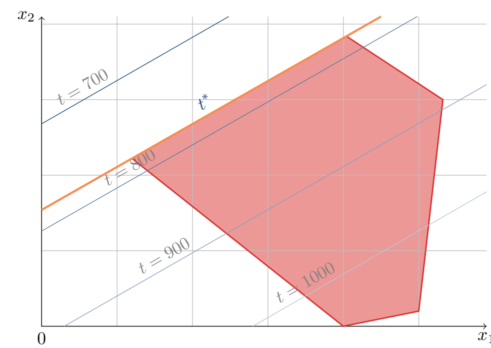

Figure 1 – Cas de dégénérescence

2 Forme standard d'un problème d'optimisation linéaire

2.1 Définition

Définition 3 (Forme standard d'un problème d'optimisation linéaire)

On appelle problème d'optimisation linéaire *sous forme standard* tout problème d'optimisation de la forme

$$(\mathcal{P}_s) \qquad \begin{array}{ll} \text{Maximiser} & {}^{t}C\,X \\ \text{sous les contraintes} & A\,X = b \\ & \quad X \geq 0 \end{array}$$

où

- $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $X \in \mathbb{R}^n$
- la fonction objectif est définie à l'aide du vecteur $C \in \mathbb{R}^n$
- les contraintes sont définies à l'aide de $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^m$

On supposera dans la suite que rang$(A) = m$.

Exemple

Variables d'écart. Considérons le problème sous forme canonique suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser} & z = 2\,x_1 + 2\,x_2 \\ \text{sous les contraintes} & \begin{array}{rcl} x_1 - \ \ x_2 & \leq & 3 \\ x_1 \qquad & \leq & 4 \\ x_1\ ,\ \ x_2 & \geq & 0 \end{array} \end{array}$$

En introduisant les variables d'écart x_3 et x_4 (une par contrainte inégalité – hors celles de positivité), on obtient le problème sous forme standard suivant en transformant les deux premières contraintes inégalités en contraintes égalités :

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser} & z = 2\,x_1 + 2\,x_2 \\ \text{sous les contraintes} & \begin{array}{rcl} x_1 - \ x_2 + x_3 \qquad & = & 3 \\ x_1 \qquad\qquad + x_4 & = & 4 \\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ ,\ x_4 & \geq & 0 \end{array} \end{array}$$

On va généraliser dans le paragraphe suivant cette procédure.

2.2 Équivalence entre les formes canonique et standard

On va commencer par montrer que tout problème d'optimisation linéaire sous forme standard est équivalent à un problème d'optimisation linéaire sous forme canonique.

Proposition 4 (Équivalence entre les formes canonique et standard I)

Soit $(\mathcal{P}_s)$ un problème d'optimisation linéaire sous forme standard. Alors il existe $(q,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $x, c \in \mathbb{R}^q$, $g \in \mathbb{R}^p$, $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ tels que $(\mathcal{P}_s)$ est équivalent au problème sous forme canonique

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser} & {}^{t}c\,x \\ \text{sous les contraintes} & M\,x \leq g \\ & \quad x \geq 0 \end{array}$$

Plus précisément, on va démontrer que les problèmes d'optimisation linéaire

$$(\mathcal{P}_s) \qquad \begin{array}{ll} \text{Maximiser} & {}^{t}C\,X \\ \text{sous les contraintes} & A\,X = b \\ & \quad X \geq 0 \end{array}$$

avec $C = (C_j)_{1\leq j\leq n}$, $X = (X_j)_{1\leq j\leq n}$, $b = (b_i)_{1\leq i\leq m}$ et $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$ et

$$(\mathcal{P}_c) \qquad \begin{array}{ll} \text{Maximiser} & {}^{t}C\,X \\ \text{sous les contraintes} & M\,X \leq g \\ & \quad X \geq 0 \end{array}$$

avec $g = (g_k)_{1\leq k\leq 2m}$ et $M = (m_{kj})_{\substack{1\leq k\leq 2m \\ 1\leq j\leq n}}$ tels que

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \\ -a_{11} & \dots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad g = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ -b_1 \\ \vdots \\ -b_m \end{pmatrix}$$

sont équivalents.

Démonstration : Il suffit de remarquer que les contraintes égalités $A\,X = b$ peuvent se décomposer en contraintes inégalités $A\,X \leq b$ et $A\,X \geq b$ et d'utiliser la section 1.3 du cours 2. ■

On va maintenant montrer que tout problème d'optimisation linéaire sous forme canonique est équivalent à un problème d'optimisation linéaire sous forme standard.

Proposition 5 (Équivalence entre les formes canonique et standard II)

Soit $(\mathcal{P}_c)$ un problème d'optimisation linéaire sous forme canonique. Alors il existe $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $X, C \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ tels que $(\mathcal{P}_c)$ est équivalent au problème sous forme standard

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser} & {}^{t}C\,X \\ \text{sous les contraintes} & A\,X = b \\ & \quad X \geq 0 \end{array}$$

On va cette fois démontrer que les problèmes d'optimisation linéaire

$$(\mathcal{P}_c) \qquad \begin{array}{ll} \text{Maximiser} & {}^{t}c\,x \\ \text{sous les contraintes} & M\,x \leq b \\ & \quad x \geq 0 \end{array}$$

avec $c = (c_j)_{1\leq j\leq q}$, $x = (x_j)_{1\leq j\leq q}$, $b = (b_k)_{1\leq k\leq p}$ et $M = (m_{kj})_{\substack{1\leq k\leq p \\ 1\leq j\leq q}}$, et

$$(\mathcal{P}_s) \qquad \begin{array}{ll} \text{Maximiser} & {}^{t}C\,X \\ \text{sous les contraintes} & A\,X = b \\ & \quad X \geq 0 \end{array}$$

avec $C = (C_\ell)_{1\leq \ell\leq p+q}$, $X = (X_\ell)_{1\leq \ell\leq p+q}$ et $A = (a_{k\ell})_{\substack{1\leq k\leq p \\ 1\leq \ell\leq p+q}}$ tels que

$$A = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1q} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ m_{p1} & \dots & m_{pq} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_q \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

sont équivalents.

Démonstration : On va décomposer cette preuve en deux étapes.
Étape 1 : On commence par montrer que si $x^* = {}^{t}(x_1^*, \dots, x_q^*) \in \mathbb{R}^q$ est une solution optimale du problème d'optimisation linéaire sous forme canonique $(\mathcal{P}_c)$, alors

$$X^* = {}^{t}\big(x_1^*, \dots, x_q^*, b_1 - (M\,x^*)_1, \dots, b_p - (M\,x^*)_p\big) \in \mathbb{R}^{p+q}$$

est une solution optimale du problème d'optimisation sous forme standard $(\mathcal{P}_s)$.

- On vérifie tout d'abord que X^* satisfait les contraintes de $(\mathcal{P}_s)$. Pour cela, on utilise le fait que, x^* étant une solution optimale de $(\mathcal{P}_c)$, il en satisfait les contraintes :

$$M\,x^* \leq b \qquad \text{et} \qquad x^* \geq 0$$

Ainsi, X^* satisfait $X^* \geq 0$ car $x^* \geq 0$ et que $(M\,x^*)_i \leq b_i$ pour tout $i = 1, \ldots, p$. Par ailleurs, X^* satisfait $A\,X^* = b$ car

$$A\,X^* = \begin{pmatrix} M & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ b - M\,x^* \end{pmatrix} = M\,x^* + I_p(b - M\,x^*) = M\,x^* + b - M\,x^* = b$$

- Ensuite, on vérifie que ${}^{t}C\,X^* \geq {}^{t}C\,X$ pour tout X admissible (c'est-à-dire tel que $A\,X = b$ et $X \geq 0$). À nouveau, on utilise l'optimalité de x^*, qui implique que, pour tout x admissible (tel que $M\,x \leq b$ et $x \geq 0$), on a ${}^{t}c\,x^* \geq {}^{t}c\,x$. Ainsi, si X satisfait $A\,X = b$ et $X \geq 0$, alors si on pose

$$x = {}^{t}\big(X_1, \ldots, X_q\big) \quad \text{et} \quad \hat{x} = {}^{t}\big(X_{q+1}, \ldots, X_{p+q}\big)$$

on a $\; A\,X = b \iff \begin{pmatrix} M & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \hat{x} \end{pmatrix} = b \iff M\,x + \hat{x} = b$

avec $\hat{x} \geq 0$. Donc $M\,x \leq b$ et x satisfait les contraintes de $(\mathcal{P}_c)$. De plus, si X satisfait $A\,X = b$ et $X \geq 0$, alors, puisque ${}^{t}C\,X = {}^{t}c\,x$, l'inégalité ${}^{t}c\,x^* \geq {}^{t}c\,x$ implique que ${}^{t}C\,X^* \geq {}^{t}C\,X$.

Étape 2 : Démontrons à présent que si $X^* = {}^{t}\big(X_1^*, \ldots, X_{p+q}^*\big) \in \mathbb{R}^{p+q}$ est une solution optimale du problème d'optimisation linéaire sous forme standard $(\mathcal{P}_s)$, alors

$$x^* = {}^{t}\big(X_1^*, \ldots, X_q^*\big) \in \mathbb{R}^q$$

est une solution optimale du problème d'optimisation sous forme canonique $(\mathcal{P}_c)$.

- Pour cela, il faut d'abord vérifier que x^* satisfait les contraintes de $(\mathcal{P}_c)$. Puisque X^* est une solution optimale de $(\mathcal{P}_s)$, il en satisfait les contraintes :

$$A\,X^* = b \qquad \text{et} \qquad X^* \geq 0$$

Par conséquent, x^* satisfait $x^* \geq 0$. De plus, x^* satisfait $M\,x^* \leq b$ car

$$A\,X^* = \begin{pmatrix} M & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ \hat{x}^* \end{pmatrix} = M\,x^* + I_p(\hat{x}^*) = M\,x^* + \hat{x}^* = b$$

avec $\qquad \hat{x}^* = {}^{t}\big(X_{q+1}^*, \ldots, X_{p+q}^*\big) \geq 0$

- Enfin, on vérifie que ${}^{t}c\,x^* \geq {}^{t}c\,x$ pour tout x admissible , c'est-à-dire tel que $A\,X = b$ et $X \geq 0$). Comme X^* est une solution optimale de $(\mathcal{P}_s)$, on a ${}^{t}C\,X^* \geq {}^{t}C\,X$ pour tout X admissible (tel que $A\,X = b$ et $X \geq 0$).Ainsi, si x satisfait $M\,x \leq b$ et $x \geq 0$, alors si on pose

$$X = {}^{t}\big(x_1, \ldots, x_q, b_1 - (M\,x)_1, \ldots, b_p - (M\,x)_p\big)$$

on a (d'après l'étape 2) $A\,X = b$ et $X \geq 0$. Si x satisfait $M\,x \leq b$ et $x \geq 0$, alors ${}^{t}c\,x^* \geq {}^{t}c\,x$ implique que ${}^{t}C\,X^* \geq {}^{t}C\,X$ car ${}^{t}c\,x = {}^{t}C\,X$. ■

3 Solutions de base admissibles

3.1 Définition

Soit $\gamma \in \mathcal{B}$. On rappelle (voir cours précédent) que $B = A_\gamma$ est une sous-matrice carrée inversible de A, formée des vecteurs colonnes d'indices $\gamma(1), \ldots, \gamma(m)$ de A, tandis que N est la sous-matrice de A formée des vecteurs colonnes restants. De même, X_B désigne le sous-vecteur de X obtenu en extrayant les composantes d'indices $\gamma(1), \ldots, \gamma(m)$ et X_N celui obtenu avec les composantes restantes. Les variables du premier vecteur sont appelées variables en base et ceux du second vecteur variables hors base.

Définition 4 (Solution de base admissible, base réalisable)

Soit $\gamma \in \mathcal{B}$ et X^* la solution de base du système $A\,X = b$ associée. On dit que X^* est une *solution de base admissible* du problème $(\mathcal{P}_s)$ si X^* en est un point admissible.
Dans ce cas, on dit que γ est une *base réalisable* du problème $(\mathcal{P}_s)$, et on note $\mathcal{R}$ l'ensemble des bases réalisables de $(\mathcal{P}_s)$.

Notons que la solution de base X^* du système linéaire $A\,X = b$ est une solution de base admissible du problème $(\mathcal{P}_s)$ dès que $X_B^* \geq 0$ puisque, par définition,

$$A\,X^* = b \qquad \text{et} \qquad X_N^* = 0$$

3.2 Retour sur les sommets d'un polyèdre dans $(\mathbb{R}^+)^q$

On a vu au cours précédent que, dans le quart de plan $(\mathbb{R}^+)^2$, les sommets étaient caractérisés par des solutions de base *positives* d'un certain système linéaire. On peut à présent formaliser cette notion, à l'aide des solutions de base admissibles.

Ainsi, on peut montrer (mais on l'admettra dans ce cours) que les sommets de tout polyèdre

$$\Big\{ x \in \mathbb{R}^q \;\Big|\; M\,x \leq b \text{ et } x \geq 0 \Big\}$$

avec $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ sont associés aux solutions de base à composantes positives du système linéaire $A\,X = b$ avec $A = \begin{pmatrix} M & I_p \end{pmatrix}$. Plus précisément, en extrayant de telles solutions de base donnent les q premières composantes, on obtient les sommets du polyèdre. Autrement dit, les sommets du polyèdre des contraintes du problème sous forme canonique $(\mathcal{P}_c)$ sont associés aux solutions de base admissibles du problème d'optimisation linéaire sous forme standard équivalent, tel que défini dans la preuve de la proposition 5. Aussi, le théorème 2 possède un équivalent pour les problèmes d'optimisation linéaire sous forme standard :

Théorème 3 (Solutions optimales d'un problème sous forme standard)

On suppose que le problème $(\mathcal{P}_s)$ sous forme canonique admet au moins une solution optimale. Alors $(\mathcal{P}_s)$ admet une solution optimale parmi ses sommets de base admissibles.

3.3 Optimalité d'une solution de base admissible

Dans la preuve de la proposition 5, le problème d'optimisation linéaire sous forme standard introduit est défini à l'aide d'une matrice A de la forme $A = \begin{pmatrix} M & I_p \end{pmatrix}$. On dit alors que le problème est sous forme *réduite*. En réalité, tout problème d'optimisation linéaire sous forme standard peut s'écrire sous forme réduite (relativement à une certaine base), comme on va le voir dans l'exemple suivant.

Exemple

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -5 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -4 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

et le problème d'optimisation linéaire sous forme standard associé

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser} & {}^{t}C\,X \\ \text{sous les contraintes} & A\,X = b \\ & X \geq 0 \end{array}$$

Considérons $\gamma \in \Gamma$ défini par

$$\gamma(1) = 1, \quad \gamma(2) = 2, \quad \gamma(3) = 5$$

et on pose $B = A_\gamma$ la sous-matrice carrée extraite selon γ et N celle constituée des vecteurs colonnes restantes :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que $\det B = 1$, ce qui implique que B est inversible (et que, par définition, $\gamma \in \mathcal{B}$). Aussi, l'ensemble admissible du problème considéré peut s'écrire

$$\left\{ X \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; B^{-1}A\,X = B^{-1}b \text{ et } X \geq 0 \right\}$$

Puisque $B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -31 & 49 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & -28 & 1 \end{pmatrix}$ et $B^{-1}b = \begin{pmatrix} -52 \\ 19 \\ 30 \end{pmatrix}$

(voir Feuille d'exercices 1), on en déduit que ce problème peut s'écrire sous forme étendue

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser} & C_1\,X_1 + C_2\,X_2 + C_3\,X_3 + C_4\,X_4 + C_5\,X_5 \\ \text{sous les contraintes} & \begin{array}{ccccccc} X_1 & & -31\,X_3 & +49\,X_4 & & = & -52 \\ & X_2 & +11\,X_3 & -18\,X_4 & & = & 19 \\ & & 15\,X_3 & -28\,X_4 & +X_5 & = & 30 \\ X_1, & X_2, & X_3, & X_4, & X_5 & \geq & 0 \end{array} \end{array}$$

On voit, en particulier, que les variables en base X_1, X_2 et X_5 peut s'exprimer en fonction des variables hors base X_3 et X_4 :

$$\begin{cases} X_1 = -52 + 31\,X_3 - 49\,X_4 \\ X_2 = 19 - 11\,X_3 + 18\,X_4 \\ X_5 = 30 - 15\,X_3 + 28\,X_4 \end{cases}$$

qui s'écrit matriciellement $X_B = B^{-1}b - B^{-1}N\,X_N$

Aussi, on peut écrire la fonction objectif en fonction de ces deux seules variables, ce qui donne

$${}^{t}C\,X = {}^{t}C_B\,X_B + {}^{t}C_N\,X_N = {}^{t}C_B\,B^{-1}b + ({}^{t}C_N - {}^{t}C_B\,B^{-1}N)\,X_N$$

Dans l'expression ci-dessus, on peut remplacer $B^{-1}b$ par X_B^* avec X^* la solution de base associée à γ, et ajouter ${}^{t}C\,X_N^* = 0$ et $0\,X_B = 0$. Ainsi, si on pose

$${}^{t}d_B = 0 \qquad \text{et} \qquad {}^{t}d_N = {}^{t}C_N - {}^{t}C_B\,B^{-1}N$$

cette égalité devient $\qquad {}^{t}C\,X = {}^{t}C\,X^* + {}^{t}d\,X$

On peut définir le vecteur d pour n'importe quel problème d'optimisation linéaire sous forme standard :

Définition 5 (Vecteur des prix marginaux)

Soit $\gamma \in \mathcal{B}$. On appelle d le *vecteur des prix marginaux* associé à γ le vecteur défini par

$$d_B = {}^{t}(0, \ldots, 0) \qquad \text{et} \qquad {}^{t}d_N = {}^{t}C_N - {}^{t}C_B B^{-1}N$$

Ce vecteur va nous permettre de donner un critère d'optimalité pour les solutions de base admissibles d'un problème d'optimisation linéaire sous forme standard. On commence par démontrer le résultat suivant :

Lemme 1

Soit $\gamma \in \mathcal{B}$. Alors toute solution X du système linéaire $A\,X = b$ vérifie

$$X_B = X_B^* - B^{-1}N\,X_N \qquad \text{et} \qquad {}^{t}C\,X = {}^{t}C\,X^* + {}^{t}d\,X$$

avec X^* la solution de base du système $A\,X = b$ associée à γ.

Démonstration : On a vu au cours précédent que si X est solution de $A\,X = b$, alors

$$X_B = B^{-1}b - B^{-1}N\,X_N = X_B^* - B^{-1}N\,X_N$$

où la dernière partie de l'égalité utilise la définition de X^*. Par ailleurs, puisque

$${}^{t}C\,X = {}^{t}C_B\,X_B + {}^{t}C_N\,X_N$$

on peut remplacer X_B par l'expression établie plus haut, et obtenir

$${}^{t}C\,X = {}^{t}C_B\,(X_B^* - B^{-1}N\,X_N) + {}^{t}C_N\,X_N$$

En développant le premier terme, puis en remarquant que ${}^{t}C_B\,X_B^* = {}^{t}C\,X^*$ car $X_N^* = 0$, on obtient le résultat annoncé. ■

Ce résultat permet finalement d'énoncer le corollaire suivant :

Corollaire 1 (Condition d'optimalité d'une solution de base)

Soit $\gamma \in \Gamma$ une base *réalisable* et X^* la solution de base associée à γ. Si le vecteur des prix marginaux d n'a que des composantes *négatives*, alors X^* est une solution optimale du problème $(\mathcal{P}_s)$.

Démonstration : Par définition de γ, X^* est un point admissible du problème $(\mathcal{P}_s)$. Ainsi, d'après le lemme précédent, tout point admissible x du problème (c'est-à-dire solution de $A\,X = b$ et telle que $X \geq 0$) vérifie

$$ {}^{\mathrm{t}}C\,X = {}^{\mathrm{t}}C\,X^* + {}^{\mathrm{t}}d\,X $$

Or, par hypothèse sur d, on a ${}^{\mathrm{t}}d\,X \leq 0$ pour tout $X \geq 0$, donc en particulier ${}^{\mathrm{t}}C\,X \leq {}^{\mathrm{t}}C\,X^*$ pour tout point admissible X. ■