Feuille d'exercices n°4

Solutions optimales d'un problème d'optimisation linéaire

Exercice 1 – Mise sous forme standard Mettre chacun des problèmes suivants sous standard. *On donnera la réponse sous forme étendue puis avec l'écriture matricielle.* Expliciter le lien entre les solutions optimales des deux formes. Quel est le rang de la matrice A définissant les contraintes du problème sous forme standard $\{A\,x = b \text{ et } x \geq 0\}$?

$$(\mathcal{P}_1)\quad \begin{array}{ll} \text{Maximiser} & z = 3\,x_1 - x_2 \\ \text{sous les contraintes} & 5\,x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_1 \leq 17 \\ & x_1\ ,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$(\mathcal{P}_2)\quad \begin{array}{ll} \text{Maximiser} & z = x_1 - 5\,x_2 \\ \text{sous les contraintes} & x_1 + 3\,x_2 \leq 3 \\ & x_1 - 2\,x_2 \leq 4 \\ & x_1\ ,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$(\mathcal{P}_3)\quad \begin{array}{ll} \text{Maximiser} & z = x_1 - 12\,x_2 \\ \text{sous les contraintes} & -4\,x_1 - x_2 \leq -3 \\ & 3\,x_1 - 14\,x_2 \leq -1 \\ & -x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1\ ,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$(\mathcal{P}_4)\quad \begin{array}{ll} \text{Maximiser} & z = -x_1 - 3\,x_2 \\ \text{sous les contraintes} & 5\,x_1 + 3\,x_2 \leq 2 \\ & -4\,x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1\ ,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$(\mathcal{P}_5)\quad \begin{array}{ll} \text{Maximiser} & z = x_1 + x_2 - 2\,x_3 \\ \text{sous les contraintes} & 2\,x_1 - x_2 + x_3 \leq 4 \\ & x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 \leq -3 \\ & x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

$$(\mathcal{P}_6)\quad \begin{array}{ll} \text{Maximiser} & z = 10\,x_1 - 20\,x_3 \\ \text{sous les contraintes} & x_1 - 2\,x_2 + 3\,x_3 \leq 0 \\ & x_2 - x_3 \leq -1 \\ & 2\,x_1 + 3\,x_2 + x_3 \leq -5 \\ & x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

Exercice 2 – Variables en base, variables hors base Pour chacun des problèmes d'optimisation linéaire suivant, exprimer la fonction objectif en fonction des variables hors base x_i avec $i \in I$. *On pourra utiliser les résultats obtenus dans la **Feuille d'exercices 1**.*

$$(\mathcal{P}_1)\quad \begin{array}{ll} \text{Maximiser} & z = x_1 - x_2 - 7\,x_3 + 5\,x_4 \\ \text{sous les contraintes} & 2\,x_1 + 2\,x_2 - x_3 + 4\,x_4 = 3 \\ & x_1 + 4\,x_2 - 3\,x_3 = 1 \\ & x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ ,\ x_4 \geq 0 \end{array} \qquad I = \{3, 4\}$$

$$(\mathcal{P}_2)\quad \begin{array}{ll} \text{Maximiser} & z = -2\,x_2 - x_3 + 4\,x_4 \\ \text{sous les contraintes} & 2\,x_2 + 8\,x_3 + 2\,x_4 = 13 \\ & x_1 + x_2 - 6\,x_3 + x_4 = 0 \\ & x_2 + x_3 + 2\,x_4 = 2 \\ & x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ ,\ x_4 \geq 0 \end{array} \qquad I = \{3\}$$

$$(\mathcal{P}_3)\quad \begin{array}{ll} \text{Maximiser} & z = 10\,x_1 + x_2 + 2\,x_3 - 7\,x_4 + x_5 \\ \text{sous les contraintes} & -2\,x_1 + x_2 + x_3 - 4\,x_4 + x_5 = -1 \\ & x_1 - 2\,x_3 + 3\,x_4 + 4\,x_5 = -2 \\ & x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = -2 \\ & x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ ,\ x_4\ ,\ x_5 \geq 0 \end{array} \qquad I = \{1, 4\}$$

Exercice 3 – Optimalité d'une solution de base admissible Considérons les deux problèmes suivants :

$$(\mathcal{P}_1)\quad \begin{array}{ll} \text{Maximiser} & z = 3\,x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{sous les contraintes} & x_1 + x_2 + 2\,x_3 + x_4 = 6 \\ & 3\,x_2 + x_3 + 8\,x_4 = 3 \\ & x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ ,\ x_4 \geq 0 \end{array}$$

$$(\mathcal{P}_2)\quad \begin{array}{ll} \text{Maximiser} & z = x_1 - 2\,x_2 + 3\,x_3 - 4\,x_4 \\ \text{sous les contraintes} & x_1 + x_2 + 3\,x_3 + 4\,x_4 = 18 \\ & 3\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ & 2\,x_1 + 3\,x_2 + 2\,x_3 + 3\,x_4 = 16 \\ & x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ ,\ x_4 \geq 0 \end{array}$$

Pour chaque problème, traiter les questions suivantes.

(a) En se reportant à la **Feuille d'exercices 3**, déterminer l'ensemble $\mathcal{R}$ des bases réalisables du problème $(\mathcal{P})$.

(b) Pour chaque $\gamma \in \mathcal{R}$, calculer le vecteur des prix marginaux associé. En déduire une solution optimale de $(\mathcal{P})$.