Fiche méthode n°2

Montrer qu'une fonction à deux variables admet des dérivées partielles

Méthode

Soient $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $(a, b) \in \mathcal{D}$. La fonction f admet des dérivées partielles en (a, b) si et seulement si les fonctions partielles

$$g : x \mapsto f(x, b) \qquad \text{et} \qquad h : y \mapsto f(a, y)$$

sont dérivables en a et b respectivement. Dans ce cas, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = g'(a) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = h'(b)$$

Pour étudier la dérivabilité des fonctions partielles (à une variable réelle), on peut utiliser les résultats suivants sur les fonctions usuelles :

- les fonctions polynomiales (et en particulier les fonctions affines, linéaires et constantes) sont dérivables sur $\mathbb{R}$;
- les fractions rationnelles (et en particulier la fonction inverse $t \mapsto 1/t$) sont dérivables sur leur ensemble de définition ;
- les fonctions cosinus, sinus, arctan, exponentielle, cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique sont dérivables sur $\mathbb{R}$;
- la racine carrée $t \mapsto \ln t$ et la fonction logarithme népérien ln sont dérivables sur $]\,0\,;+\infty\,[$

ainsi que les règles de calcul suivantes (u et v sont des fonctions à variable réelle) :

- si u et v sont dérivables en $a \in \mathbb{R}$, alors toute combinaison linéaire de u et v est dérivable en a ;
- si u et v sont dérivables en $a \in \mathbb{R}$, alors le produit $u\,v$ est dérivable en a ;
- si u est dérivable en $v(a)$ et v dérivable en $a \in \mathbb{R}$, alors la composée $u \circ v$ est dérivable en a ;
- si u est dérivable en a et que $u(a) \neq 0$, alors $1/u$ est dérivable en a (en particulier, si v et dérivable en a, alors v/u est dérivable en a).

Énoncé Montrer que la fonction suivante admet des dérivées partielles en tout point de $]\,0\,;+\infty\,[\,\times(\mathbb{R}\setminus\{2\})$:

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} [\,0\,;+\infty\,[\,\times(\mathbb{R}\setminus\{2\}) & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \dfrac{\sqrt{x}+y}{y-2} \end{array} \right.$$

Résolution

1. Soit $(a,b)\in\,]\,0\,;+\infty\,[\,\times(\mathbb{R}\setminus\{2\})$. Introduisons les fonctions partielles

$$g(x) = f(x,b) = \frac{\sqrt{x}+b}{b-2} \qquad \text{et} \qquad h(y) = f(a,y) = \frac{\sqrt{a}+y}{y-2}$$

2. La fonction g est une combinaison linéaire entre la fonction racine carrée (dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$) et la fonction constante (polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}$). En particulier, elle est dérivable en a. Sa dérivée vaut

$$\forall\, x\in\,]\,0\,;+\infty\,[, \qquad g'(x) = \frac{1}{2\,(b-2)\,\sqrt{x}}$$

et on a donc $\boxed{g'(a) = \dfrac{1}{2\,(b-2)\,\sqrt{a}} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)}$

3. La fonction h est une fraction rationnelle définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$; elle est en particulier dérivable en b. Sa dérivée vaut

$$\forall\, y\neq 2, \qquad h'(y) = \frac{1\times(y-2)-1\times(\sqrt{a}+y)}{(y-2)^2} = -\frac{2+\sqrt{a}}{(y-2)^2}$$

et on a donc $\boxed{h'(b) = -\dfrac{2+\sqrt{a}}{(b-2)^2} = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)}$