FEUILLE D'EXERCICES N°1
Rappels sur le pivot de GAUSS

Exercice 1 – Systèmes linéaires Résoudre les systèmes linéaires suivants par la méthode du pivot de GAUSS :

(a) $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y &=& 1 \\ 2x+3y &=& 1 \end{array}\right.$ **(b)** $\left\{\begin{array}{rcl} 4x+3y &=& 2 \\ 7x+5y &=& 3 \end{array}\right.$ **(c)** $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+4y &=& 3 \\ 3x+6y &=& 2 \end{array}\right.$ **(d)** $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+4y &=& 2 \\ 3x+6y &=& 3 \end{array}\right.$

Interpréter graphiquement le résultat.

Exercice 2 – Systèmes linéaires Résoudre les systèmes linéaires suivants par la méthode du pivot de GAUSS :

(a) $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+3z &=& 8 \\ x+3y+3z &=& 10 \\ x+2y+4z &=& 9 \end{array}\right.$ **(b)** $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+3z &=& 1 \\ 2x+4y+7z &=& 2 \end{array}\right.$ **(c)** $\left\{\begin{array}{rcl} 4x_1+3x_2+2x_3-x_4 &=& 4 \\ 5x_1+4x_2+3x_3-x_4 &=& 4 \\ -2x_1-2x_2-x_3+2x_4 &=& -3 \end{array}\right.$

Exercice 3 – Inverse d'une matrice Montrer que les matrices suivantes sont inversibles et calculer leur inverse. *Pour les matrices de taille supérieure à 2, on pourra utiliser la méthode du pivot de* GAUSS.

(a) $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ **(b)** $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **(c)** $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **(d)** $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Problème Considérons les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -5 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -4 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad N=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b=\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(a) Quel lien relie les matrices A, B et N ?

(b) Montrer que B est inversible et calculer son inverse.

(c) Calculer $B^{-1}N$ et $B^{-1}A$. Quel lien relie les matrices $B^{-1}A$, I_3 et $B^{-1}N$?

(d) Calculer $B^{-1}b$.

(e) Résoudre le système linéaire suivant par la méthode du pivot de Gauss :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1+3x_2+2x_3-5x_4 &=& 5 \\ 2x_1+7x_2-x_5 &=& -1 \\ -2x_1-4x_2+3x_3+2x_4-x_5 &=& -2 \end{array}\right.$$

On exprimera l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ à l'aide des variables libres x_3 et x_4.

(f) Quel lien existe-t-il entre l'ensemble $\mathcal{S}$ et les matrices $B^{-1}b$ et $B^{-1}N$?

(g) Considérons à présent les matrices suivantes :

$$A'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -31 & 49 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & -28 & 1 \end{pmatrix}, \quad B'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -31 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}, \quad N'=\begin{pmatrix} 49 & 0 \\ -18 & 0 \\ -28 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b'=\begin{pmatrix} -52 \\ 19 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Montrer que B' est inversible et calculer son inverse.

(h) Calculer $(B')^{-1}(A')$ et $(B')^{-1}(b')$.

(i) Vérifier que l'ensemble $\mathcal{S}$ peut s'écrire

$$\mathcal{S}=\left\{\left.\begin{pmatrix} 10+133x_4/15-31x_5/15 \\ -3-38x_4/15+11x_5/15 \\ 2+28x_4/15-x_5/15 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}\right| (x_4,x_5)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

Que peut-on en déduire ?