



فرادرس

فراترازیک کلاس درس
www.faradars.org

آموزش یادگیری ماشین (Machine Learning) (تئوری - عملی) - بخش دوم

درس یکم: دسته‌بندی بیز

مدرس:

فرشید شیراوند

دانشجوی دکترای بیو انفورماتیک

دانشگاه تهران



مقدمه



توماس بیز (Thomas Bayes): ریاضی‌دان انگلیسی (قرن ۱۸ میلادی)

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

یادآوری (احتمال)

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

فضای نمونه:



$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$\Omega = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$ انداختن دو سکه:

مثال

احتمال این که در پرتاب دو تاس، مجموع تاس‌های رو شده، حداقل برابر ۱۰ باشد.

تاس اول

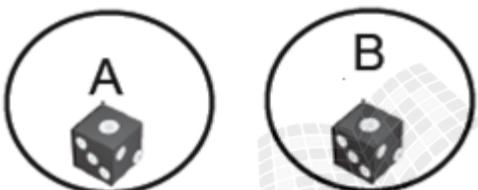
	2	3	4	5	6	7
1	•					
2		•				
3			•			
4				•		
5					•	
6						•
7						

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

پیشامدهای مستقل

$$p(A \cap B) = p(A)p(B)$$

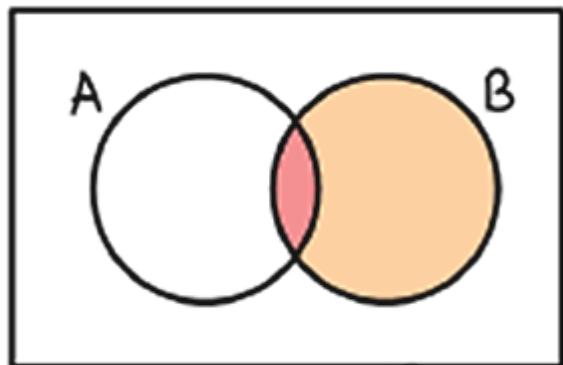
$$A \perp B$$



: مسک

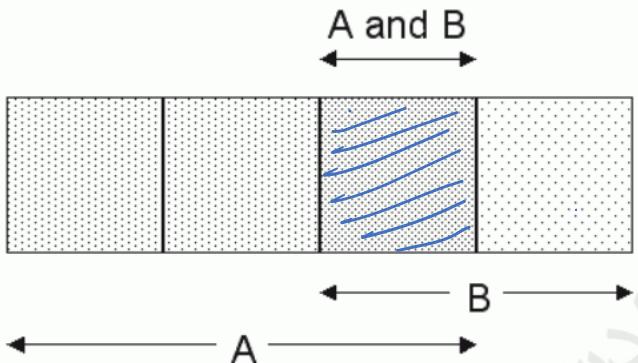
$$\begin{aligned} p(A \cap B) &= p(A) \cdot p(B) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{36} \end{aligned}$$

احتمال شرطی



$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

مثال



$$P(A) = 3/4$$

$$P(B) = 2/4$$

$$P(A \cap B) = 1/4$$

$$P(A|B) = (1/4) / (2/4) = 1/2$$

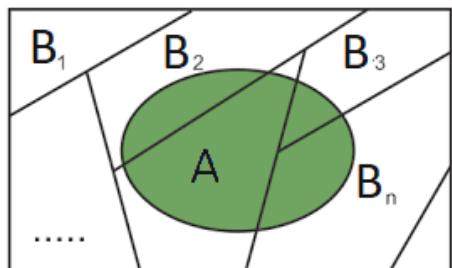
$$P(B|A) = (1/4) / (3/4) = 1/3$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

محاسبه احتمال بر اساس افراز

S

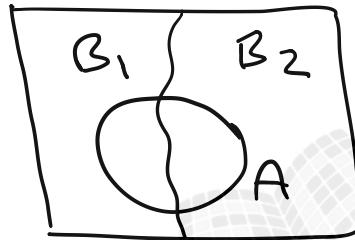


$$P(A) = ?$$

$$P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$$

$$P(X \cap Y) = P(X|Y)P(Y)$$

S



$$B_1 \cup B_2 = S$$

$$B_1 \cap B_2 = \emptyset$$

$$P(A) = P(A \cap S)$$

$$P(A) = P(A \cap (B_1 \cup B_2))$$

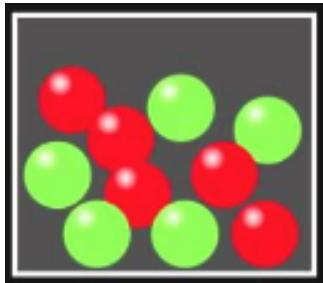
$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2)$$

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)$$

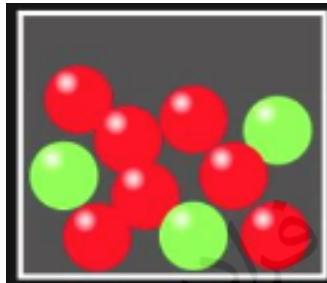
$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i)$$

مثال

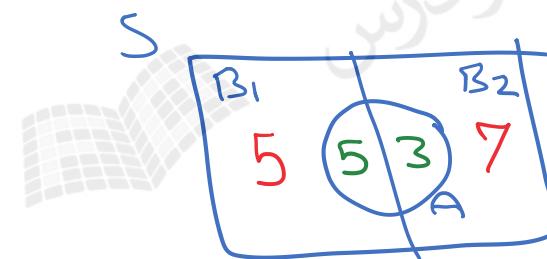
از این جعبه ها یک توپ خارج می کنیم. احتمال اینکه توپ سبز خارج شود چقدر است؟



جعبه ۱



جعبه ۲



$$\begin{aligned}
 p(A) &= p(A | \beta_1) p(\beta_1) + p(A | \beta_2) p(\beta_2) \\
 &= \frac{5}{10} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{2} = 0
 \end{aligned}$$

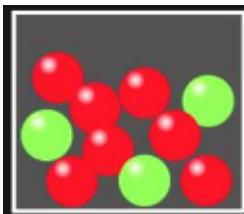
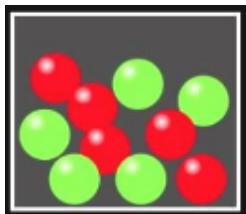
قضیه بیز

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

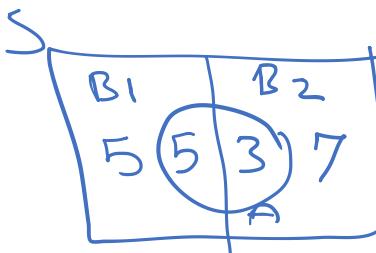


مثال (قضیه بیز)

اگر بدانیم مهره‌ای که از جعبه خارج شده سبز است، احتمال اینکه این مهره از جعبه اول خارج شده باشد چقدر است؟



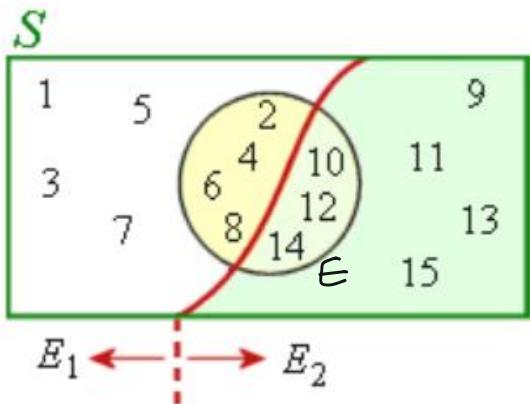
$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$



$$P(\text{سبز} | \text{بیزار}) = ?$$

$$P(B_1 | A) = \frac{P(A | B_1) \cdot P(B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{7} \times \frac{1}{2}}{\frac{5}{7} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{7} \times \frac{1}{2}}$$

مثال



$$P(E_1|E) = \frac{P(E_1) \times P(E|E_1)}{P(E_1) \times P(E|E_1) + P(E_2) \times P(E|E_2)}$$

$$= \frac{\frac{8}{15} \times \frac{4}{8}}{\frac{8}{15} \times \frac{4}{8} + \frac{7}{15} \times \frac{3}{7}} = \frac{4}{7}$$

$$\begin{cases} S \rightarrow 1 \dots 15 \\ E_1 \rightarrow 1 \dots 8 \\ E_2 \rightarrow 9 \dots 15 \end{cases} \quad E \rightarrow \text{زنجیره}$$

$$P(\text{زنجیره}) = ?$$

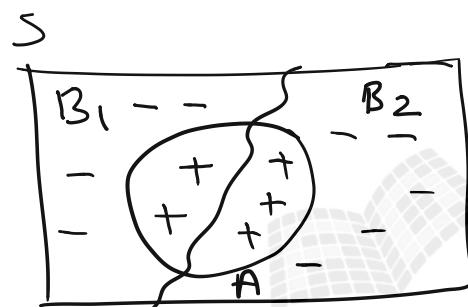
$$P(E_1|E) = \frac{P(E|E_1)P(E_1)}{P(E)}$$

مثال

در یک آزمایش پزشکی:

$$P(A | \beta_1) = 0.8$$

$$P(\bar{A} | \beta_2) = 0.9$$



دیابت یک فرد قندی با احتمال ۰.۸ به درستی تشخیص داده می‌شود و با احتمال ۰.۹ نیز برای افراد سالم نتیجه عدم ابتلا به این بیماری اعلام می‌شود.

اگر از هر ۵۰۰۰ نفر مردم جامعه یک نفر دچار بیماری دیابت باشند (احتمال پیشین)، احتمال اینکه نتیجه مثبت آزمایش بیانگر مبتلا به دیابت باشد، چقدر است (احتمال پسین)؟

$$P(\beta_1 | A) = ?$$

$$P(\beta_1) = \frac{1}{5000}$$

$$= \frac{P(A | \beta_1) \cdot P(\beta_1)}{P(A)}$$

$$= \frac{0.8 \times \frac{1}{5000}}{0.8 \times \frac{1}{5000} + \frac{1}{10} \times \left(1 - \frac{1}{5000}\right)} = \textcircled{0}$$

مثال

	A	$\sim A$
x	248	167
$\sim x$	82	503

$$P(A) = 0.33.$$

$$P(\sim A) = 1 - P(A) = 0.67$$

$$P(A|x) = ?$$

$$P(A|x) = \frac{p(x|A)P(A)}{p(x)}$$

$$p(x) = p(x|A)P(A) + p(x|\sim A)P(\sim A)$$

$$P(x|A) = \frac{248}{248+82}$$

$$P(x|\sim A) = \frac{167}{167+503}$$

مثال

B
 ↓

Tid	Refund	Marital Status	Taxable Income	Cheat
1	Yes	Single	125K	No
2	No	Married	100K	No
3	No	Single	70K	No
4	Yes	Married	120K	No
5	No	Divorced	95K	Yes
6	No	Married	60K	No
7	Yes	Divorced	220K	No
8	No	Single	85K	Yes
9	No	Married	75K	No
10	No	Single	90K	Yes

$$P(\text{cheat} = \text{"No"} | B = \text{"Married"}) = ?$$

$$= \frac{P(B = \text{"Married"} | \text{cheat} = \text{"No"}) \times P(\text{cheat} = \text{"No"})}{P(B = \text{"Married"})}$$

$$= \frac{\frac{4}{7} \times \frac{7}{10}}{\frac{4}{10}} = \textcircled{1}$$

مثال (برای ویژگی پیوسته)



Tid	Refund	Marital Status	Taxable Income	Cheat
1	Yes	Single	125K	No
2	No	Married	100K	No
3	No	Single	70K	No
4	Yes	Married	120K	No
5	No	Divorced	95K	Yes
6	No	Married	60K	No
7	Yes	Divorced	220K	No
8	No	Single	85K	Yes
9	No	Married	75K	No
10	No	Single	90K	Yes

$$P(\text{income} = 120 \mid \text{cheat} = \text{Yes}) = ?$$

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{95 + 85 + 90}{3} = 90 \\ \sigma &= \sqrt{\frac{(95-90)^2 + (85-90)^2 + (90-90)^2}{3-1}} = 25 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \times e^{-\frac{(120-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\ P(x_k \mid c_i) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \times e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

تعمیم قضیه بیز

$$P(Class_j | x) = \frac{P(x | Class_j) \times P(Class_j)}{P(x)}$$

$$Posterior = \frac{Likelihood \times Prior}{Evidence}$$

$$P(x | Class_j) = P(x_1 | Class_j) \times P(x_2 | Class_j) \times \dots \times P(x_k | Class_j)$$

متغیر x_1, \dots, x_k

$$p(x | No) = p(x_1=1 | No) \times p(x_2=1 | No) \times p(x_3=0 | No)$$

$$\begin{cases} p(No | x) = \frac{p(x | No) \times p(No)}{p(x)} \\ p(Yes | x) = \frac{p(x | Yes) \times p(Yes)}{p(x)} \end{cases}$$

x_1	x_2	x_3	class
0	0	0	No
0	1	0	Yes
0	1	1	Yes
:	:	:	

$$x = (x_1=1, x_2=1, x_3=0) \\ \text{class} \rightarrow ?$$

مثال

$$x = (\text{Outlook}=\text{Sunny}, \text{Temp}=\text{Cool}, \text{Hum}=\text{High}, \text{Wind}=\text{strong})$$

Day	Outlook	Temperature	Humidity	Wind	Play Tennis
Day1	Sunny	Hot	High	Weak	No
Day2	Sunny	Hot	High	Strong	No
Day3	Overcast	Hot	High	Weak	Yes
Day4	Rain	Mild	High	Weak	Yes
Day5	Rain	Cool	Normal	Weak	Yes
Day6	Rain	Cool	Normal	Strong	No
Day7	Overcast	Cool	Normal	Strong	Yes
Day8	Sunny	Mild	High	Weak	No
Day9	Sunny	Cool	Normal	Weak	Yes
Day10	Rain	Mild	Normal	Weak	Yes
Day11	Sunny	Mild	Normal	Strong	Yes
Day12	Overcast	Mild	High	Strong	Yes
Day13	Overcast	Hot	Normal	Weak	Yes
Day14	Rain	Mild	High	Strong	No

$$P(\text{Yes} | x) = \frac{P(x|\text{Yes}) \times P(\text{Yes})}{P(x)}$$

$$P(\text{No} | x) = \frac{P(x|\text{No}) \times P(\text{No})}{P(x)}$$

$$\underbrace{P(x|\text{Yes}) \times P(\text{Yes})}_{\frac{9}{14}} = \square$$

$$\underbrace{P(x|\text{No}) \times P(\text{No})}_{\frac{5}{14}} = \square \quad \checkmark \quad \text{بزرگتر}$$

$$P(x|\text{Yes}) = \underbrace{P(\text{sunny}|\text{Yes})}_{\frac{2}{9}} \times \underbrace{P(\text{cool}|\text{Yes})}_{\frac{3}{9}} \times \underbrace{P(\text{high}|\text{Yes})}_{\frac{3}{9}} \times \underbrace{P(\text{strong}|\text{Yes})}_{\frac{3}{9}}$$

مثال

	Diabetes (D)	Smoke (S)	Heart Disease (H)
1	Y	N	Y
2	Y	N	N
3	N	Y	N
4	N	Y	N
5	N	N	N
6	N	Y	Y
7	N	N	N
8	N	Y	Y
9	N	N	N
10	Y	N	N

$x = [Yes, Yes] \rightarrow \text{class} = ?$

$$\left\{ \begin{array}{l} P(Y|x) = \frac{P(x|Y) \cdot P(Y)}{P(x)} \\ P(N|x) = \frac{P(x|N) \cdot P(N)}{P(x)} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P(x|Y) \cdot P(Y) \\ P(D=Y|Y) \times P(S=Y|Y) \times P(Y) \\ \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{10} = \boxed{} \checkmark \end{array} \right.$$

$$P(x|N) \times P(N)$$

$$P(D=Y|N) \times P(S=Y|N) \times P(N) = \frac{2}{7} \times \frac{2}{7} \times \frac{7}{10} = \boxed{}$$

اصلاح لاپلاسین

Tid	Refund	Marital Status	Taxable Income	Cheat
1	Yes	Single	125K	No
2	No	Married	100K	No
3	No	Single	70K	No
4	Yes	Married	120K	No
5	No	Divorced	95K	Yes
6	No	Married	60K	No
7	Yes	Divorced	220K	No
8	No	Single	85K	Yes
9	No	Married	75K	No
10	No	Single	90K	Yes

$$x = (A = \text{No}, B = \text{Married}, C = 120)$$

$$P(x | \text{Yes}) \times P(\text{Yes}) \quad ? \quad P(x | \text{No}) \times P(\text{No})$$

$$\frac{3}{3} \times \frac{0}{3} \times \text{حل نهاد} \times \frac{3}{10}$$

اصلاح
لاپلاسین

$$\frac{0+1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

ستون β در این معنار

$$\frac{4}{7} \times \frac{4}{7} \times \cancel{*} \times \frac{7}{10}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2 \times 3.14 \times 6^2}} e^{-\frac{(120 - 110)^2}{2 \times 6^2}}$$

شبکه‌های باور بیز

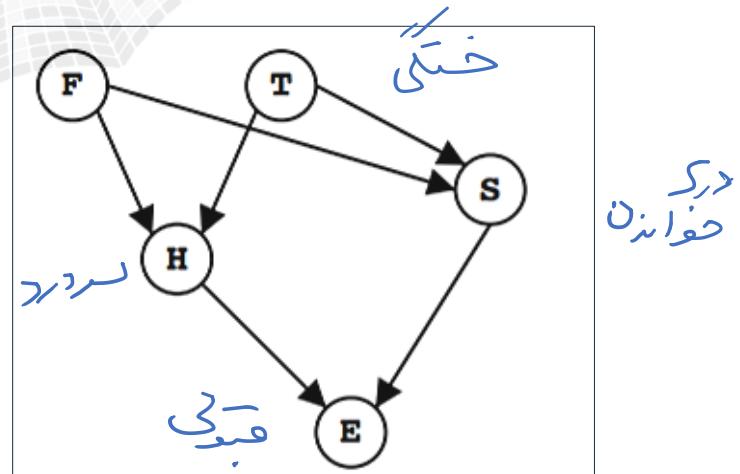
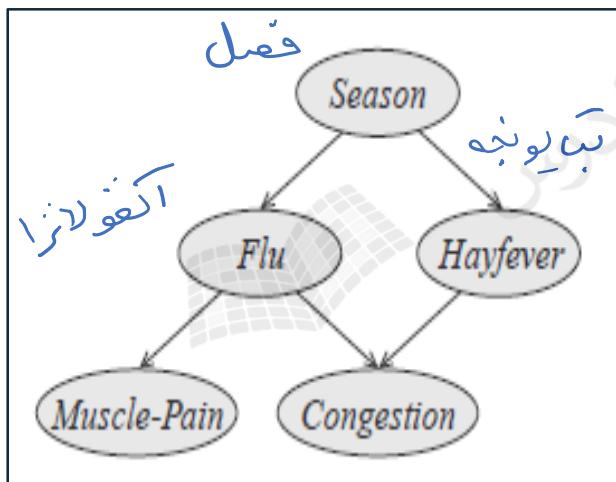
Bayesian Belief Networks

شبکه باور بیز

- ابزاری برای شناسایی روابط احتمالی به منظور پیشگویی کلاس عضویت.

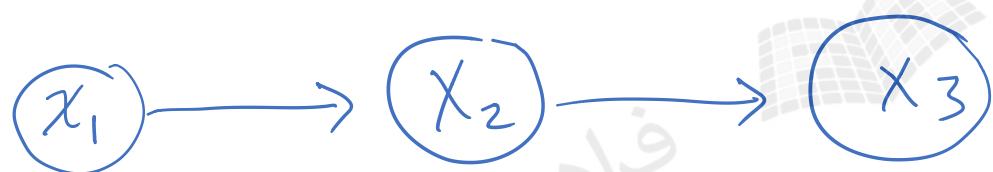
- نمایش رویدادها ووابستگی بین آنها.

- گراف جهت دار و بدون دور. DAG



احتمال توام در شبکه DAG

$$P(X_1, X_2, \dots, X_n) = \prod P(X_i | Parents(X_i))$$



$$P(X_1, X_2, X_3) = P(X_1) \times P(X_2 | X_1) \times P(X_3 | X_2)$$

استقلال شرطی

اگر Z رخ داده باشد، در صورتی متغیرهای X و Y نسبت به هم استقلال شرطی خواهند داشت، که هریک از شرایط زیر برقرار باشد:

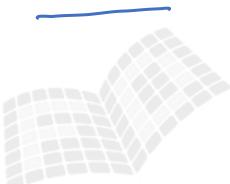
$$P(X, Y | Z) = P(X | Z) \cdot P(Y | Z)$$

۱

$$P(X | Y, Z) = P(X | Z)$$

۲

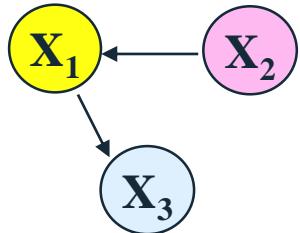
$$P(Y | X, Z) = P(Y | Z)$$



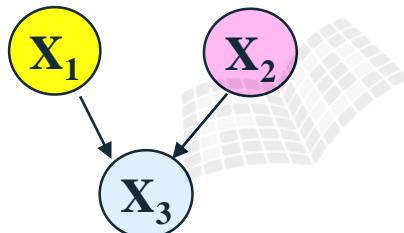
$$X \perp Y | Z$$

مثال

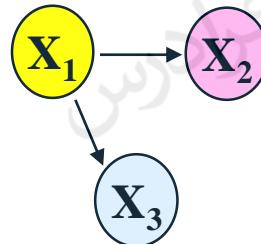
$$p(x_1, x_2, x_3) = ?$$



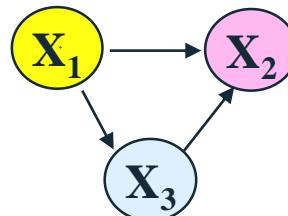
$$p(x_2) \cdot p(x_1 | x_2) \cdot p(x_3 | x_1)$$



$$p(x_1) \cdot p(x_2) \cdot p(x_3 | x_2, x_1)$$

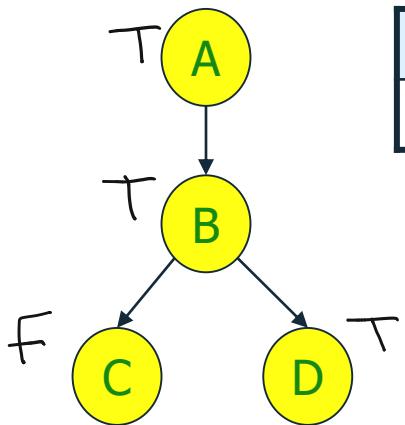


$$p(x_1) \cdot p(x_2 | x_1) \cdot p(x_3 | x_1)$$



$$p(x_1) \cdot p(x_3 | x_1) \cdot p(x_2 | x_3, x_1)$$

مثال



A	P(A)
True	(0.4)
False	

A	P(B A)
False	0.99
True	(0.3)

B	P(C B)
False	0.6
True	(0.1)

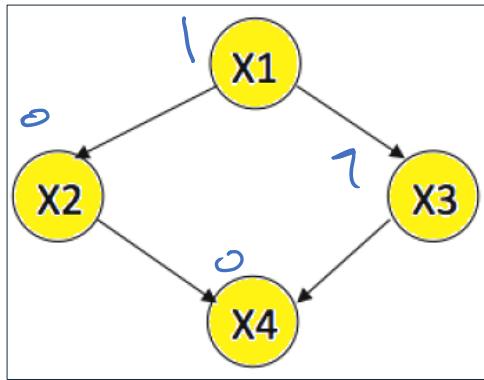
B	P(D B)
False	0.98
True	(0.95)

$$P(A = T, B = T, C = F, D = T) = ?$$

$$P(A, B, C, D) = P(A) \times P(B|A) \times P(C|B) \times P(D|C)$$

0.4 0.3 (1 - 0.1) 0.95

مثال



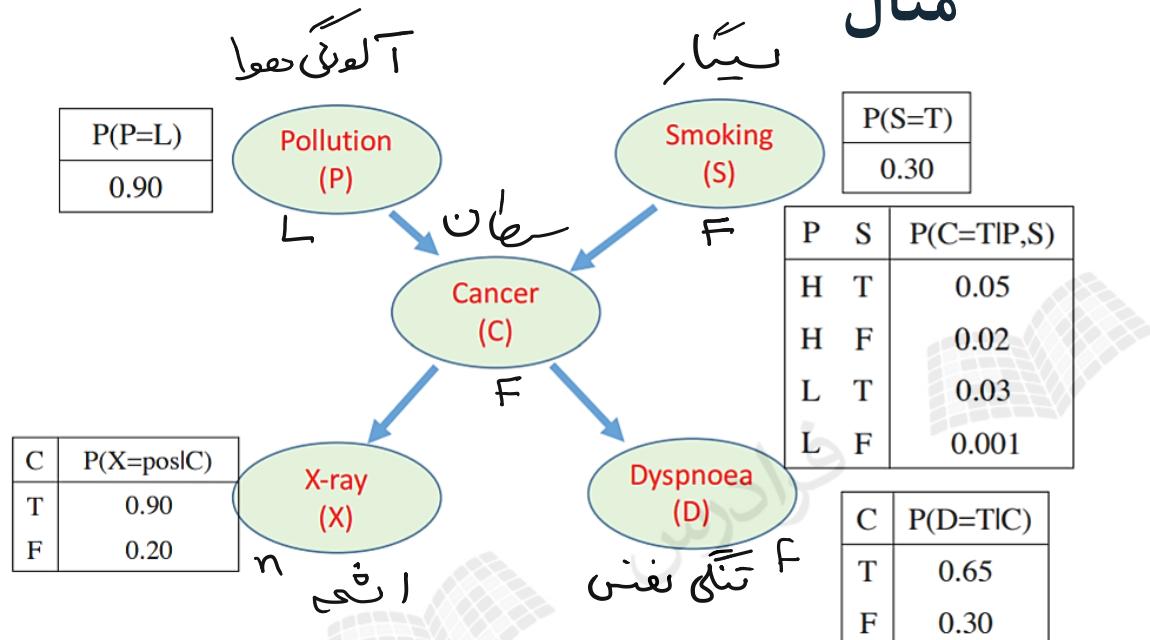
شبکه بیز مقابله روی چهار متغیر دودویی تعریف شده است:

$$P(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1, X_4 = 0)$$

$$P(X_1 = 1)P(X_2 = 0|X_1 = 1)P(X_3 = 1|X_1 = 1)P(X_4 = 0|X_2 = 0, X_3 = 1)$$

$$\begin{aligned} P(X_1, X_2, X_3, X_4) &= P(X_1) \times P(\overline{X}_2 | X_1) \times P(X_3 | X_1) \\ &\quad \times P(\overline{X}_4 | \overline{X}_2, X_3) \end{aligned}$$

مثال



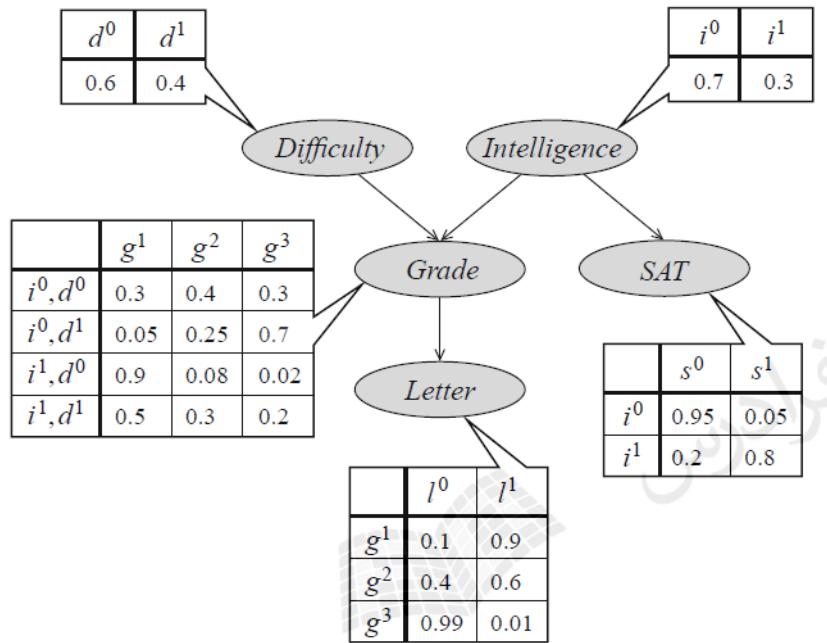
Node name	Type	Values
<i>Pollution</i>	Binary	{low, high}
<i>Smoker</i>	Boolean	{T, F}
<i>Cancer</i>	Boolean	{T, F}
<i>Dyspnoea</i>	Boolean	{T, F}
<i>X-ray</i>	Binary	{pos, neg}

$$P(P=L, S=False, C=False, X=n, D=False) = ?$$

$$P(P, S, C, X, D) = P(P) \times P(S) \times P(C|P, S) \times P(X|C) \times P(D|C)$$

$$0.9 \quad 0.7 \quad 1 - 0.001 \quad 0.8 \quad 0.7$$

مثال

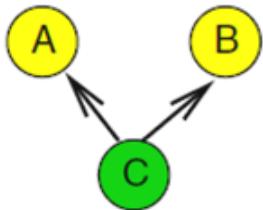


$$\begin{aligned}
 & P(I, D, G, S, L) \\
 &= P(I) \times P(D) \times P(G | D, I) \\
 &\quad \times P(S | I) \times P(L | G)
 \end{aligned}$$

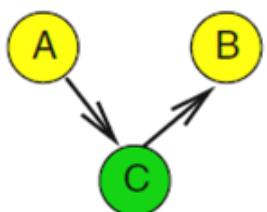
$$P(i^1, d^0, g^2, s^1, l^0) = \underbrace{P(i^1)}_{0.1/3} \underbrace{P(d^0)}_{0.6} \underbrace{P(g^2 | i^1, d^0)}_{0.08} \underbrace{P(s^1 | i^1)}_{0.8} \underbrace{P(l^0 | g^2)}_{0.4}$$

شبکه های بیز معادل

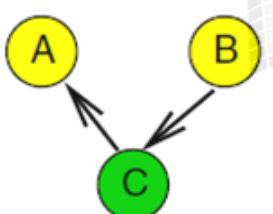
$$P(A, B, C) = ?$$



$$P(C) \times P(A|C) \times P(B|C)$$

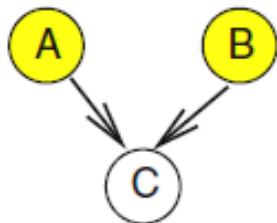


$$P(A) \times P(C|A) \times P(B|C)$$

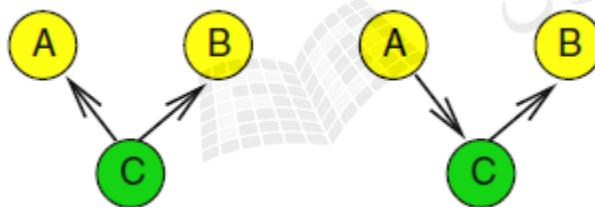


$$P(B) \times P(C|B) \times P(A|C)$$

استقلال



A and B are marginally independent



A and B are conditionally independent

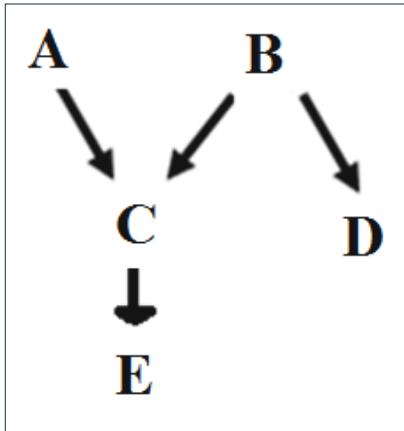
$$A \perp B$$

$$P(A, B) = P(A)P(B)$$

$$A \perp B \mid C$$

$$P(A, B|C) = P(A|C)P(B|C)$$

تعداد پارامترهای احتمالی



$$P(A, B, C, D, E) = \underbrace{P(A)}_1 \cdot \underbrace{P(B)}_1 \cdot \underbrace{P(C|A, B)}_4 \cdot \underbrace{P(D|B)}_2 \cdot \underbrace{P(E|C)}_2$$

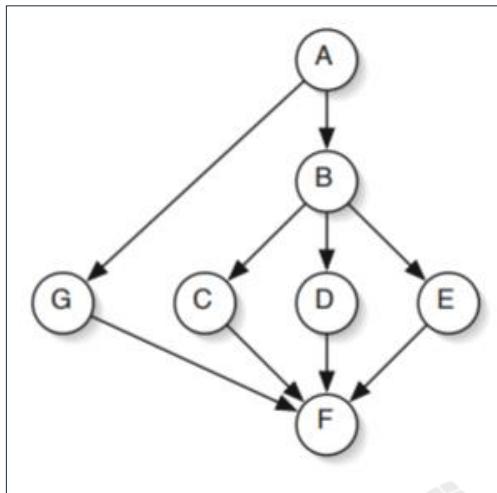
16

$$P(A, B, C, D, E) = \underbrace{P(A)}_n \cdot \underbrace{P(B|A)}_1 \cdot \underbrace{P(C|A, B)}_4 \cdot \underbrace{P(D|A, B, C)}_8 \cdot \underbrace{P(E|A, B, C, D)}_{n-1}$$

31

$$1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

مثال



$$\frac{7}{2} - 1 = 127$$

$P(A), P(B|A), P(C|B), P(D|B), P(E|B), P(F|C,D,E,G), P(G|A)$

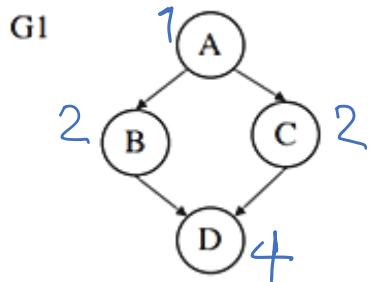
$$\underbrace{P(A)}_1 \times \underbrace{P(B|A)}_2 \times \underbrace{P(C|B)}_2 \times \underbrace{P(D|B)}_2 \times \underbrace{P(E|B)}_2 \times \underbrace{P(G|A)}_2 \times \underbrace{P(F|G,C,D,E)}_{16}$$

27

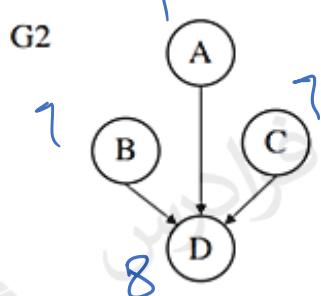
مثال

How many independent parameters are required to specify a Bayesian network?

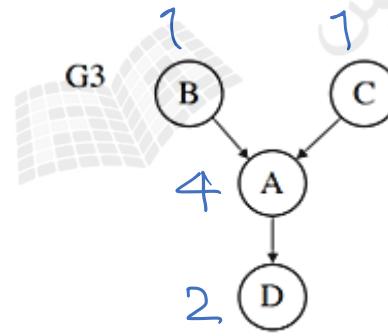
(the nodes are binary.)



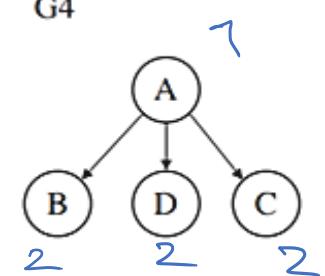
G1: 9



G2: 11



G3: 8



G4: 7

$$1+2+2+4=9$$

$$1+1+1+8=11$$

$$1+1+4+2=8$$

$$1+2+2+2=7$$

این اسلایدها بر مبنای نکات مطرح شده در فرادرس
«آموزش یادگیری ماشین (Machine Learning) (تئوری - عملی) - بخش دوم»
تهییه شده است.

برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد این آموزش به لینک زیر مراجعه نمایید.

faradars.org/fvdm94062