AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ

AZƏRBAYCAN TEXNİKİ UNİVERSİTETİ

Fakultə: Energetika, elektrotexnika və avtomatika

Kafedra: Mühəndis Riyaziyyatı

Qrup: 679a2

Fənn: Riyaziyyat

SƏRBƏST İŞ № 5

Bakalavr: Məmmədova Nailə

Müəllim: dos. Bağırova Rəna

Bakı-2020

Üçqat inteqral və onun tətbiqi.

1. Üçqat inteqral anlayışı.

2. Üçqat inteqralın hesablanması.

3. Cismin ətalət momenti, kütlə və ağırlıq mərkəzin

koordinatları.

1. Üçqat inteqral anlayışı.

İkiqat inteqralın tərifi müstəvi fiqurların sahəsi anlayışına əsaslandığı kimi, üçqat inteqralın tərifi də fəzada cisimlərinin (fiqurlarının) həcmi anlayışına əsaslanır.

Bundan sora baxdığımız bütün fəza oblastlarının və ya cisimlərinin sonlu həcmi olduğunu (kubların olduğunu) fərz edirik.

Tutaq ki, $W=f(x,y,z)$ funksiyası ($Oxyz$) fəzasının qapalı və kublanan V oblastında təyin olunmuşdur. V oblastını hər hansı qayda ilə ortaq daxili nöqtəsi olmayan $V_1, V_2, \dots V_n$ elementar hissələrə bölək. V oblastının göstərilən şəkildə bölgüsünü T, bölgüdən alınan V_k ($k = 1, 2, \dots, n$) hissələrinin uyğun olaraq həcmini ΔV_k (k = 1, 2,..., n) və diametrini d_k ($k = 1, 2, \dots, n$) ilə işarə edək. T bölgüsünün parametri $\lambda=\lambda(T)$ olsun:

$\lambda=\lambda(T)$ = max($d_1, d_2, \dots d_n$).

Hər bir V_k hissəsində ixtiyari bir $X_k=(\xi_k, \eta_k, \tau_k)$ nöqtəsi götürək və aşağıdakı kimi cəm düzəldək:

$$J_n(T)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \tau_k)\Delta V_k \quad . (1)$$

Bu cəmin qiyməti V oblastının T bölgüsündən və (ξ_k, η_k, τ_k)

nöqtələrinin seçilməsindən asılıdır. (1) cəminə f funksiyasının V oblastında inteqral cəmi deyilir. Hər bir f funksiyası üçün verilmiş V oblastında sonsuz sayda inteqral cəmi düzəltmək olar.

Tərif. (1) *inteqral cəminin* $\lambda(T) \to 0$ *şərtinə*

$$J = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \tau_k) \Delta V_k$$

limiti varsa, onda f funksiyasına V oblastında inteqrallanan [*funksiya*](), *J ədədinə isə onun V oblastında üçqat inteqralı deyilir və* $\int\int_V\int f(x,y,z)dV$ *(və ya* $\int\int_V\int ¿¿ f(x,y,z)▯\, dx\, dy\, dz$ *ilə işarə edilir:*

$$\int\int_V\int f(x,y,z)dV = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \tau_k) \Delta V_k. \quad (2)$$

Burada *f inteqralaltı funksiya, V inteqrallama oblastı, x, y, z inteqrallama dəyişənləri və dV (və ya dV = dx dy dz) həcm elementi adlanır*. Tərifdən aydındır ki, $f(x,y,z) \equiv 1$ olduqda üçqat inteqralın qiyməti V inteqrallama oblastının həcminə (biz V oblastının həcmini də V ilə işarə edirik) bərabərdir:

$$V = \int\int_V\int dV = \int\int_V\int dx\, dy\, dz.$$

Üçqat inteqralın əsas xassələri:

Xassə 1. (xəttilik). V oblastında inteqrallanan sonlu sayda $f_1, f_2, \dots f_n$ funksiyaların xətti kombinasiyası da həmin oblastda inteqrallanandır və sabit $C_1, C_2, \dots C_n$ ədədləri üçün

$$\int\int_V\int \left[\sum_{k=1}^{n} C_k f_k(x,y,z)\right] dV = \sum_{k=1}^{n} C_k \int\int_V\int f_k(x,y,z)\, dV \quad (3)$$

bərabərliyi doğrudur.

Xassə 2. (additivlik). f funksiyası V oblastında inteqrallanarsa və V oblastı ortaq daxili nöqtələri olmayan $V_1, V_2, \dots V_n$ oblastlarının birləşməsindədirsə, onda

həmin funksiya V_k $(k = 1, 2, \dots, n)$ oblastlarının hər birində də inteqrallanandır və

$$\int\int_V\int f(x,y,z)dV = \int\int_{V_1}\int f(x,y,z)dV + \dots + \int\int_{V_n}\int f(x,y,z)dV$$
(4)

bərabərliyi doğrudur.

Xassə 3. (monotonluq). V oblastında inteqrallanan f və φ funksiyaları üçün həmin oblastın bütün nöqtələrində $f(x,y,z) \le \varphi(x,y,z)$ bərabərsizliyi ödənilirsə, onda onların inteqralları üçün də həmin bərabərsizlik ödənilər:

$$\int\int_V\int f(x,y,z)dV \le \int\int_V\int \varphi(x,y,z)dV, \quad (5)$$

yəni bərabərsizliyi verilmiş oblast inteqrallamaq olar.

Xüsusi halda, V oblastında $f(x,y,z) \ge 0$ olduqda

$$\int\int_V\int f(x,y,z)dV \ge 0 \quad ,$$

$f(x,y,z) \le 0$ olduqda isə

$$\int\int_V\int f(x,y,z)dV \le 0$$

olar.