AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ

AZƏRBAYCAN TEXNİKİ UNİVERSİTETİ

Fakultə: Energetika, elektrotexnika və avtomatika

Kafedra: Mühəndis Riyaziyyatı

Qrup: 679a2

Fənn: Riyaziyyat

SƏRBƏST İŞ № 1

Bakalavr: Məmmədova Nailə

Müəllim: dos. Bağırova Rəna

Bakı-2020

§1. Ədədi sıralar

1. Sıranın yığılması və cəmi. Tutaq ki,

$$u_1, u_2, ..., u_n, \dots \qquad (1)$$

sonsuz ədədlər ardıcıllığı verilmişdir.

(1) ardıcıllığının hədlərindən düzəldilmiş

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... \qquad (2)$$

ifadəsi *ədədi sira* və ya sadəcə *sıra*, $u_1, u_2, ..., u_n, \dots$ isə uyğun olaraq sıranın *1-ci, 2-ci, ..., n-ci və s. həddi* adlanır. n-ci həddə sıranın *ümumi həddi* də deyilir. (2) sırası qısa şəkildə

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (3)$$

kimi yazılır.

Aşağıdakı kimi işarələmələr aparaq:

$$\begin{cases} S_1 = u_1 \\ S_2 = u_1 + u_2 \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = S_1 \\ u_2 = S_2 - S_1 \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ u_n = S_n - S_{n-1} \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \end{cases}$$

$S_1, S_2, \ ... \ , S_n, \ ...$ sonlu cəmlər ardıcıllığına (1) sırasının uyğun olaraq 1-ci, 2-ci, ..., n-ci və s. *xüsusi cəmləri* deyilir.

Sıranın $\{S_n\}$ xüsusi cəmlər ardıcıllığının sonlu

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \qquad (4)$$

limiti varsa, ona *yığılan ədədi* sıra, S ədədinə isə *sıranın cəmi* deyilir və

$$S = u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

kimi yazılır.

Əgər (4) limiti yoxdursa və ya $\pm\infty$-a bərabərdirsə, onda (2) sırasına *dağılan sıra* deyilir və bu halda deyirlər ki, sıranın cəmi yoxdur.

2. Yığılan sıraların xassələri.

Xassə 1. Əgər $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sırası yığılandırsa və cəmi S-ə bərabərdirsə, onda istənilən c sabiti üçün

$$cu_1 + cu_2 + ... + cu_n + ... \qquad (5)$$

sırası da yığılandır və onun cəmi cS -ə bərabərdir.

Nəticə. (3) sırası dağılan olduqda $\forall c \neq 0$ üçün (5) sırası da dağılan olar.

Xassə 2. Əgər $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ və $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sıraları yığılandırsa və onların cəmləri uyğun olaraq s və σ -ya bərabərdirsə, onda həmin sıraların cəmi və ya fərqi adlanan $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ sıraları da yığılandır və onların cəmləri uyğun olaraq $s \pm \sigma$ -ya bərabərdir.

Xassə 3. Sıra yığılandırsa, onda ona sonlu sayda yeni hədlər əlavə etməklə və ya ondan sonlu sayda hədləri atmaqla alınan sıra da yığılandır.

Qeyd. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ və $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sıralarından biri yığılan, digəri isə dağılan olduqda $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ sırası dağılan olur. Verilən sıraların hər ikisi dağılan olduqda isə $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ sırasının yığılan və ya dağılan olması haqqında heç nə demək olmur.

1. Hədləri həndəsi silsilə əmələ gətirən

$$a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ... \qquad (6)$$

sırasının yığılmasını araşdırın.

Həlli. Həndəsi silsilənin ilk n həddinin cəmi aşağıdakı düsturla təyin edilir:

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q} \qquad (q \neq 1) .$$

1) $|q| < 1$ olduqda, $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right) = \frac{a}{1-q}$$

olur. Deməli, bu halda (6) sırası yığılır və onun cəmi $S = \frac{a}{1-q}$ olur.

2) $|q| > 1$ olduqda isə $\lim_{n\to\infty} |q^n| = \infty$ və $\lim_{n\to\infty} \frac{a - aq^n}{1-q} = \pm\infty$ olur, yəni $\lim_{n\to\infty} S_n$ yoxdur və deməli, (6) sırası dağılır.

3) $q = 1$ olduqda (6) sırası

$$a + a + ... + a + ...$$

şəklini alır. Onda

$$S_n = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n} = na \quad \text{və} \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na = \infty \quad (a > 0)$$

olur, yəni sıra dağılır.

4) $q = -1$ olduqda (6) sırası

$$a - a + a - a + \ldots + (-1)^n a + \ldots$$

şəklində olur və

$$S_n = \begin{cases} 0, & n - \text{cüt ədəd olduqda} \\ a\,, & n - \text{tək ədəd olduqda} \end{cases}$$

olduğundan $\{S_n\}$ ardıcıllığının limiti olmur, yəni sıra dağılır.

Deməli, (6) sırası $|q| < 1$ olduqda yığılır, $|q| \geq 1$ olduqda isə dağılır.

Sıraların yığılmasını araşdırın:

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n+1}{n}$.

Həlli: Sıranın xüsusi cəminə görə

$$S_n = \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ldots + \ln\frac{n+1}{n} = \ln\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n} = \ln(n+1)\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty\,.$$

Deməli, sıra dağılandır.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Həlli: Sıranın ilk n həddinin cəmi:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1\,.$$

Deməli, sıra yığılır və sıranın cəmi $S = 1$.

4. $\displaystyle \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2} + \ldots$

Həlli. Məlum $\displaystyle \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$ düsturundan istifadə edərək n-ci xüsusi cəmi aşağıdakı kimi tapa bilərik:

$$S_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2},$$

$$S_2 = S_1 + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} = \operatorname{arctg}\frac{2}{3},$$

$$S_3 = S_2 + \operatorname{arctg}\frac{1}{18} = \operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{18} = \operatorname{arctg}\frac{3}{4},$$

. . . .

$$S_n = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}.$$

Beləliklə, $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg}\dfrac{n}{n+1} = \operatorname{arctg}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}\right) = \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$.

Deməli, sıra yığılır.

5. $1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots$

6. $1+3+5+\ldots+(2n-1)+\ldots$

7. $2-4+6-8+\ldots+(-1)^{n+1}2n+\ldots$

8. $1+2+3+\ldots+n+\ldots$

9. $1+2+4+\ldots+2^{n-1}+\ldots$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

11. $-1+3-5+7-\ldots+(-1)^n(2n-1)+\ldots$

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$

13. $1+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5^2}+\ldots+\dfrac{1}{5^{n-1}}+\ldots$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-n)$

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{5}{2}+(-1)^n\cdot\dfrac{1}{2}\right)$

17. $\dfrac{3}{1^2\cdot 2^2}+\dfrac{5}{2^2\cdot 3^2}+\ldots+\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+\ldots$

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n+3^n}{4^n}$.

19. $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots$

20. $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{2\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+3)}+\ldots$

21. $\dfrac{1}{1\cdot 7}+\dfrac{1}{3\cdot 9}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+5)}+\ldots$

22. $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ldots$

23. $\dfrac{5}{6}+\dfrac{13}{36}+\ldots+\dfrac{3^n+2^n}{6^n}+\ldots$

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$.

Aşağıdakı sıraların ümumi həddinin düsturunu yazın:

25. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+...$ **26.** $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+...$

27. $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{7}{16}+...$ **28.** $\frac{2}{15}+\frac{6}{75}+\frac{12}{375}+\frac{20}{1875}+...$

Aşağıdakı sıraların cəmini tapın:

29. a) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{11}{12}\right)^n$, b) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n$, c) $\sum_{n=0}^{\infty}7\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Verilmiş xüsusi cəmlərə əsasən sıraları yazın və onların cəmini tapın:

30. a) $S_n=\frac{n+1}{n}$, b) $S_n=\frac{-1+2^n}{2^n}$.

31. $S_n=\text{arctg}n$. **32.** $S_n=\frac{(-1)^n}{n}$.

Göstəriş. $u_n=S_n-S_{n-1}$, $n>1$.

3. Sıranın yığılması üçün zəruri və kafi şərtlər. (3) sırasını $S=S_n+R_n$ şəklində yazaq. Burada

$$R_n=u_{n+1}+u_{n+2}+...+u_{n+m}+...=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k$$

ifadəsi (3) sırasının *qalıq həddi* adlanır.

Teorem. (3) sırasının yığılan olması üçün onun qalıq həddinin limitinin $n\to\infty$-da sıfra bərabər olması ($\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$) zəruri və kafidir.

Koşi kriteriyası. (3) sırasının yığılan olması üçün aşağıdakı şərtin ödənilməsi zəruri və kafidir:

$$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists r\in N)\ (\forall n\ge r\wedge\forall p\in N):\ \left|S_{n+p}-S_n\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{p}u_k\right|<\varepsilon .$$

4. Sıranın yığılması üçün zəruri sərt.

Teorem. *Əgər (3) sırası yığılandırsa, onda $n\to\infty$-da onun n-ci həddinin limiti sıfra bərabərdir:*

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0 .$$

İsbatı. (3) sırasının n-ci həddini $u_n=S_n-S_{n-1}$ kimi yaza bilərik. Beləki şərtə görə sıra yığılandır, onda $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$ və $\lim\limits_{n\to\infty}S_{n-1}=S$. Beləliklə,

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0 .$$

Qeyd edək ki, bu əlamət yığılmanın yalnız zəruri şərtidir, kafi deyil.

Məsələn, *harmonik sıra* adlanan

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$$

sırası dağılır, lakin $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Bu sıranın dağılan olduğunu göstərək. Bunun üçün əvvəlcə sıranın ilk $2n$ və n hədlərinin cəmini yazaq:

$$S_{2n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n},$$

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}.$$

Bunların fərqi $S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n}$ olacaqdır. Bu cəmdə hər bir toplananı $\frac{1}{2n}$ -lə əvəz etsək, belə bir köməkçi bərabərsizlik alarıq:

$$S_{2n}-S_n>\frac{1}{2n}+...+\frac{1}{2n}=n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2} \text{ və ya } S_{2n}-S_n>\frac{1}{2}.$$

Əksini fərz edək, yəni harmonik sıra yığılır, onda $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}=S$ və bərabərsizlikdə limitə keçsək, $S-S\geq\frac{1}{2}$ və ya $0\geq\frac{1}{2}$ alarıq. Bu isə ziddiyyət təşkil edir, yəni harmonik sıra dağılandır.

Nəticə. Əgər (3) sırası üçün $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ limiti yoxdursa və ya sıfırdan fərqli sonlu ədədə bərabərdirsə, onda sıra dağılır.

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ -i ***hesablamaqla sıraların yığılmasını araşdırın.***

33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+1}$.

Həlli. Sıranın ümumi həddinin limitini

$$\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}\neq 0 \text{ olduğundan sıra dağılır.}$$

34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{\ln(n+1)}$.

Həlli. Belə ki, $n\to\infty$ -da $(n+2)\to\infty$ və $\ln(n+1)\to\infty$ olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ -i tapmaq üçün Lopital qaydasını tətbiq edək:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)'}{(\ln(x+1))'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x+1}}=\lim_{x\to\infty}(x+1)=\infty .$$

Deməli, $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{\ln(n+1)}=\infty$ və nəticəyə görə sıra dağılandır.

35. $\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{5}+\dfrac{6}{7}+\ldots+\dfrac{2n}{2n+1}+\ldots$

Həlli: $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{2+\frac{1}{n}}=1$. Sıranın yığılması üçün zəruri şərt ödənmir və deməli, sıra dağılandır.

36. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\dfrac{1}{n}$.

37. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{6}+\ldots+\dfrac{2n-1}{2n}+\ldots$

38. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)^3}$.

39. $0{,}6+0{,}51+0{,}501+\ldots+[0{,}5+(0{,}1)^n]+\ldots$

40. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\,\mathrm{arctg}\dfrac{1}{n}$.

41. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{8}+\ldots+\dfrac{n}{3n-1}+\ldots$.

42. $1-1+1-\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots$

43. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n^3+2}$.

44. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+2}{2n-3}$.

45. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{(n+2)^3}$.

46. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{n+1}$.

47. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{arctg}\dfrac{n^2+1}{n+3}$.

48. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{n}$.

49. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{\ln(n+1)}$.

50. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2+(-1)^n)^n}$.

51. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^n$.

52. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3n-1}$.

53. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{3n-1}{2n+3}$.

54. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\dfrac{1}{n^2}$.

55. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{arcctg}\dfrac{n+1}{n^2-3}$.

56. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n+1]{10}}$.

57. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n}{3^n}$.

58. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n}{\sqrt{n^2+1}}$.

59. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+3}{3n^2-1}$.