AZƏRBAYCAN TEXNİKİ UNİVERSİTETİ

FAKULTƏ:ENERGETİKA,ELEKTROTEXNİKA VE AVTOMATİKA

KAFEDRA:MÜHƏNDİS RIYAZİYYATI

FƏNN:RİYAZİYYAT 3

QRUP:679 A2

SERBEST IS No4

MÖVZU:2L -DÖVRLÜ FUNKSİYANIN FURYE SIRASI

TƏLƏBƏ:ABIŞOVA CƏMİLƏ

MÜƏLLİM:BAĞIROVA RƏNA

§7. Triqonometrik Furye sırası

1.Furye sırası. Qeyd edək ki, mürəkkəb periodik prosesləri öyrənərkən təbii olaraq bu prosesləri ifadə edən funksiyaların sonlu və ya sonsuz sayda sadə periodik funksiyaların cəmi şəklində göstərilməsi məsələsi meydana çıxır.

Bu cür funksiyalar olaraq sadə harmonikalar, yəni

$$A\sin(\omega x+\alpha) \tag{1}$$

və ya

$$a\cos\omega x+b\sin\omega x$$

şəklində funksiyalar götürülür.

Əgər $\omega=0$ olarsa, onda (1) funksiyası sabit, $\omega\neq 0$ olduqda isə $\frac{2\pi}{\omega}$ periodlu funksiya olur.

Tutaq ki, 2π periodlu $f(x)$ funksiyası $[-\pi,\ \pi]$ parçasında

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right) \tag{2}$$

şəklində sıraya ayrılmışdır, burada a_n, b_n, ($n=0,1,2,\ldots$) hər hansı ədədlərdir. Bu cür sıralar *triqonometrik sıralar*, a_n, b_n, ($n=0,1,2,\ldots$) ədədləri isə onların *əmsalları* adlanır. $\frac{a_0}{2}$ həddi *sərbəst hədd* adlanır.

(2) triqonometrik sırasının $f(x)$ funksiyasına yığılması şərti daxilində bu sıranın əmsallarının $f(x)$ funksiyası ilə ifadə olunan düsturları tapaq. Fərz edək ki, $f(x)$ funksiyası sonlu sayda sadə harmonik funksiyaların cəminə bərabərdir:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right). \tag{3}$$

(3) bərabərliyini x-ə görə $-\pi$-dən π-yə görə inteqrallasaq,

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx \tag{4}$$

alarıq ($\cos nx$ və $\sin nx$ -in inteqralları sıfra bərabərdir).

(3) bərabərliyini $\cos nx$-ə vurub x-ə görə $-\pi$-dən π-yə görə inteqrallasaq,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \qquad (5)$$

$\sin nx$-ə isə vurub x-ə görə $-\pi$-dən π-yə görə inteqrallasaq,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \qquad (6)$$

alarıq.

(2) triqonometrik sırasına əmsalları (4), (5) və (6) olan $f(x)$ funksiyasının *Furye sırası* a_0, a_n, b_n əmsallarına isə bu funksiyanın *Furye əmsalları* deyilir.

Əgər (2) sırası $f(x)$ funksiyasınınn Furye sırasıdırsa, onda

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$$

kimi yazacağıq.

Verilmiş $f(x)$ funksiyasının triqonometrik Furye sırasının nöqtədə yığılması haqqında aşağıdakı kafi şərtini qeyd edək:

Teorem (*Dirixle əlaməti*). $[-\pi, \pi]$ parçasında hissə-hissə monoton və məhdud olan 2π dövrlü $f(x)$ funksiyasının Furye sırası istənilən x nöqtəsində yığılır. Sıranın $S(x)$ cəmi funksiyanın kəsilməz olduğu nöqtələrdə $f(x)$-in qiymətinə, istənilən x kəsilmə nöqtəsində isə $f(x)$-in bu nöqtədəki sol və sağ limitlərinin ədədi ortasına bərabərdir: $S(x) = \frac{1}{2}\left[f(x-0) + f(x+0)\right]$

2. 2π dövrlü tək və cüt funksiyaların Furye sırasına ayrılması.

Lemma. Əgər inteqrallanan $f(x)$, $x \in [-l, l]$ funksiyası cütdürsə, onda

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int_{0}^{l} f(x)dx, \qquad (1)$$

əgər təkdirsə, onda

$$2\int_{0}^{l} f(x)dx = 0 \qquad (2)$$

olar.

İsbatı. Beləki

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{0}^{l} f(x)dx + \int_{-l}^{0} f(x)dx.$$

Sonuncu inteqralda $x = -t$ əvəzləməsi aparaq. Onda

$$\int_{-l}^{0} f(x)dx = -\int_{l}^{0} f(-t)dt = \int_{0}^{l} f(-t)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{0}^{l} f(x)dx + \int_{0}^{l} f(-x)dx$$

alarıq. Buradan isə (1) və (2) düsturlarının doğruluğu alınır.

Onda bu lemmaya əsasən, əgər $f(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$ cüt funksiyadırsa, onda

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad b_n = 0 \quad (n \in N),$$

bu halda

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

şəklində, əgər tək funksiya olarsa, onda

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx, \quad (n \in N) \quad \text{və}$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad \text{olur.}$$

Qeyd edək ki, $(0, \pi)$ yarımperiodla verilmiş funksiyanı $(-\pi, 0)$ yarımperioda uyğun olaraq tək və ya cüt şəkildə davam etdirməklə, ya sinusa görə ya da kosinusa görə sıraya ayırmaq olar.

3. İxtiyari $T = 2l$ $(l > 0)$ dövrlü funksiyaların Furye sırasına ayrılması.

$T = 2l$ $(l > 0)$ dövrlü istənilən $f(x)$ dövrü funksiyasını $x = \frac{l}{\pi}t$ əvəzləməsi ilə 2π dövrlü $\varphi(t) = f(\frac{l}{\pi}t)$ funksiyasına çevirmək olur. Doğrudan da,

$$\varphi(t + 2\pi) = f(\frac{l}{\pi}(t + 2\pi)) = f(\frac{l}{\pi}t + 2l) = f(\frac{l}{\pi}t) = \varphi(t).$$

Əgər $f(x)$ funksiyası yalnız $[-l, l]$ parçasında verilərsə, onda $\varphi(t)$ funksiyası yalnız $[-\pi, \pi]$ parçasında veriləcək.

$\varphi(t)$ funksiyası üçün Furye sırasını yazaq:

$$\varphi(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nt + b_n \sin nt\right).$$

Buradan $t = \frac{\pi}{l}x$ əvəzləməsi vasitəsilə $f(x)$ funksiyası üçün uyğun triqonometrik sıranı almış olarıq:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

burada $a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad n = 1, 2, ...;$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, \qquad n = 1, 2, ...$$

Xüsusi halda $f(x)$ cüt funksiya olduqda,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l},$$

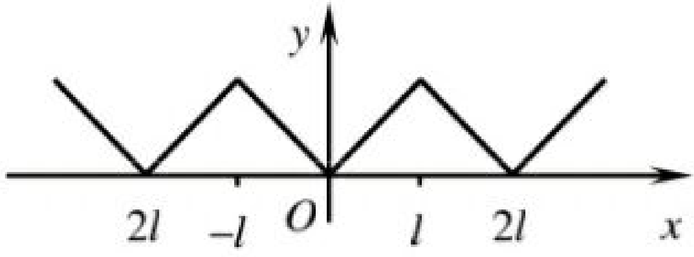
$$a_0 = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad b_n = 0 \quad (n \in N),$$

$f(t)$ tək funksiya olduqda isə

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$a_0 = 0\,,\ a_n = 0\,,$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n \in N)\,.$$



336. $2l$ dövrlü $f(x)=|x|$ funksiyasını $[-l;l]$ parçasında Furye sırasına ayırın.

Həlli: $f(x)=|x|$ tək funksiyadır, ona görə də:

$$b_n = 0, \quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l x dx = \frac{2}{l}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^l = l\,,$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l x\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{l}\left[\frac{lx\sin\frac{n\pi x}{l}}{n\pi}\Bigg|_0^l - \frac{1}{n\pi}\int_0^l \sin\frac{n\pi x}{l}dx\right] =$$

$$= \frac{2l}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{l}\Bigg|_0^l = \frac{2l}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0\,, & n - \textit{tək olduqda} \\ -\dfrac{4l}{n^2\pi^2}, & n - \textit{cüt olduqda} \end{cases}$$

Beləliklə, $f(x)$ funksiyasının Furye sırası aşağıdakı şəkildə olar:

$$|x| = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\left[\cos\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{l} + \ldots + \frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{l} + \ldots\right].$$

Qeyd edək ki, $|x|$ funksiyası Dirixle teoreminin şərtlərini ödəyir və alınan bərabərlik $\forall x \in [-l\,, l]$ üçün doğrudur, bu isə o deməkdir ki, sıra bütün ədəd oxunda yığılır və onun cəmi qrafiki şəkildə göstərilən funksiyadır.

4.Furye sırasının kompleks şəkli. Tutaq ki, 2π dövrlü $f(x)$ dövrü funksiyası Furye sırasına ayrılmışdır:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right). \qquad (1)$$

Bildiyimizə görə

$$\cos y=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2} \text{ və } \sin y=\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\cos nx=\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2},\ \sin nx=-i\,\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2}.$$

Bu iffadələri (1)-də nəzərə alsaq, alarıq:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-ib_n}{2}e^{inx}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-inx}\right).$$

Burada

$$\frac{a_0}{2}=c_0,\ \frac{a_n-ib_n}{2}=c_n,\ \frac{a_n+ib_n}{2}=c_{-n} \qquad (2)$$

işarələmələri aparsaq, alarıq:

$$f(x)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_ne^{inx}+c_{-n}e^{-inx}\right)$$

və ya

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}. \qquad (3)$$

Bu Furye sırasının *kompleks şəkli* adlanır.

Bu Furye sırasının *kompleks şəkli* adlanır.

c_n və c_{-n} əmsallarını inteqral vasitəsilə ifadə edək, onda

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx - i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx\ ,$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx\ .$$

Bu düsturları və c_0 ifadəsini bir düstur şəklində birləşdirmək olar:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \quad (n \in Z). \tag{4}$$

c_n və c_{-n} - ə $f(x)$ funksiyası üçün *kompleks Furye əmsalları* deyilir.

Əgər $f(x)$ funksiyası $2l$ dövrlü dövrü funksiya olarsa, onda onun üçün Furye sırası kompleks şəkildə

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{l}x} \tag{5}$$

kimi olar, burada

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{n\pi}{l}x}dx \quad (n \in Z). \tag{6}$$

Elektrotexnikada və radiotexnikada belə bir terminologiya qəbul edilmişdir. $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\alpha x}$ funksiyasına görə $e^{i\frac{n\pi}{l}x}$ ifadələri *harmonikalar*, $\alpha_n = \frac{n\pi}{l}$ $(n \in Z)$ ədədləri isə *dalğa ədədləri* adlanırlar. Dalğa ədədlərinin toplusu *spektr* adlanır. Əgər bu ədədləri ədəd oxunda qeyd etsək, ayrı-ayrı nöqtələrin toplusunu alarıq. Nöqtələrin bu cür toplusuna *diskret toplu*, uyğun spektrə isə *diskret spektr* deyilir. (6) düsturları ilə təyin olunan c_n əmsalları *kompleks amplituda* adlanır.