

53.33  
349(362)  
JP

# 相 对 论 导 论

[英] W. G. V. 罗瑟 著

岳曾元 关德相 译

谈稿生 校

科 学 出 版 社

## 内 容 简 介

本书主要对狭义相对论作了详尽的阐述，包括历史背景、理论推导、实验验证等方面。书中特别着重于狭义相对论与经典物理学的原则区别及其联系，介绍了若干关键性实验，叙述了狭义相对论在近代物理学中的若干应用。本书物理概念比较清晰，数学推导比较详尽。读者只需具备大学普通物理与微积分的知识就可以阅读，从而了解狭义相对论的全部基本内容。本书中广义相对论的内容较少，只在最后一章作了简短的介绍。

本书可供高等院校理工科师生，科技工作者阅读。

W. G. V. Rosser  
AN INTRODUCTION TO  
THE THEORY OF RELATIVITY  
Butterworths, London, 1971

## 相 对 论 导 论

〔英〕 W. G. V. 罗瑟 著

岳曾元 关德相 译

谈镐生 校

科学出版社出版  
北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1980年3月第一版 开本：787×1092 1/32

1980年3月第一次印刷 印张：17 1/2

印数：0001—13,230 字数：397,000

统一书号：13031·1156

本社书号：1616·13—3

定价：2.15 元

## 序 言

现在虽然已经有了很多关于相对论的教程，但一般说来，这些书或者是一些高深的论著，或者是一些半科普性读物。本书目的就在于填补这两种书之间的空白，在这个空白中目前还只有一些简短的专论文章或现代物理学教程的零散章节。作者发现，学生们希望有一本书，它对相对论的讨论要比简短的专论文章更为全面。本书水平是要使物理系的一般学生在大学二年级或三年级时都能够看懂。作者在写作本书过程中总是首先记住这一点，虽然他也希望本书对关心相对论的数学工作者也有所帮助。本书也适合于电机工程人员参考，他们对相对论，尤其是其中有关电磁学方面，表现出日益增长的兴趣。作者也希望，本书对那些隔了多年又想阅读相对论的人们也有些用处。本书大部分只用了简单的代数和微积分。至于四维矢量方法，只是在其内容已用较简单的数学方法阐明之后，才在第六章和第十章中引进了。一般实验物理学工作者在理解物理学原理之后，就能够理解四维矢量方法的优越性和简明性。当然他也会认识到，四维矢量方法并没有给狭义相对论物理学加进任何新东西。代数演证过程一般是详细写出的，因为许多学生一定要彻底弄懂之后才能心安。程度较好的学生可能希望快一点进入四维矢量方法。作者给出了较通常大学物理学教程更为全面的论述，因为作者发现，一般说来学生是渴望了解全课题的。每章末尾推荐了一些参考读物，并在适当地方指出了原始参考文献，这些参考文献都列在每章末尾。

霍尔敦 (Holton) 教授在《美国物理杂志》<sup>1)</sup> 上写道：“几年以后，初等和中等大学物理学教程必将包含更多的狭义相对论内容。”作者在美国衣阿华州立大学短期讲课的经验表明，本书大部分内容适合作大学三、四年级中等水平的教材。

因为本书是由一个实验物理学工作者写的，作者尽力在每一阶段都把理论同实验结合起来。理论的假设总是用能够得到的实验证据加以评述。作者力图把每个阶段所作的假设讲述清楚，并且总是把理论结果与实验结果比较。

大学本科时期是一个成型时期，学生要学习很多门课程。一般学生没有那么多时间来完全消化每一事物，并正确理解。学生可能在教学过程中理解了教材，但当这些内容以稍许不同重点引入相对论课程时，他们仍然愿意简短地回忆一下其中的基本内容。为此，本书常常简略地复习一些物理学原理，例如 2.2 节讨论了麦克斯韦方程组，附录二给出了电矢量和磁矢量的定义。当前，大学物理学教程几乎都要讲述麦克斯韦方程组，并且一般采用了矢量分析。因此作者在适当地方毫不犹豫地引进了麦克斯韦方程组和矢量分析，但是这样的章节在第八章以前很少，并且可以略去。

常常有一种说法，认为大多数物理学工作者都只是一些技术人员，意思是说他们只是运用物理学方程，但从不过问所用的定律正确与否，这些定律是怎样引进和为什么引进，以及各种科学定律之间是如何相互关联的。很少有物理学教材包括有历史概述和对所涉及科学方法的评论。狭义相对论课程提供了一个机会，在讨论相对论所引起的观点变化之前，先简短地讨论一下物理学的一些分支（如力学、光学和电磁学）的历史和一些方法，并阐明它们之间的关系。这种办法当然也

---

1) *Amer. J. Phys.* **30**(1962) 462.

应该推广到量子力学教程。散见于书中各处的有关科学方法的简短评述，并不意味着是全面的研究，而只是对与相对论有关的那些部分的简短讨论。作者力图在这些简短讨论中不介绍任何有争议的“学说”；唯一的例外是时钟佯谬，对于它，作者努力尽可能客观地表达出争论双方的观点。

第一章对牛顿力学的范围和界限给出了一个简短评述。第二章继续介绍发展史，试图阐明狭义相对论是如何由经典电磁理论发展出来的。普通的相对论教材一般是从叙述几种有关以太的实验开始，例如恒星的光行差，艾利（Airy）实验，霍克（Hoek）实验，菲索（Fizeau）实验等等。然后借助于狭义相对论的变换，对这些实验加以解释。各种以太理论的确曾在十九世纪引起过极大的混乱，但可以相当肯定地说，它们在二十世纪引起的混乱更大，至少是在学生中间。由于这些理由，本书对这些实验和理论作了相当全面的论述。本书用这么多篇幅介绍它们，可能是过份强调了它们在二十世纪的重要性。第三章中推导了洛伦兹变换。在讨论了理论的假设之后，公理式地发展了理论，然后将理论预言同实验结果加以比较。第四章中推导了速度变换公式，并应用于相对论光学。第五章中讨论了相对论力学。第六章中讨论了洛伦兹变换的两种几何表述法。只用实变量的几何表述法尽管比较复杂，我们仍然讨论了它，这是因为在各种教科书中已广泛采用，例如爱丁顿（Eddington）著的《空间、时间和引力》一书。

第七章根据狭义相对论变换式、电荷守恒原理和库仑定律，以公理方式发展了电磁学。采取这种途径的主要目的是在阐明电磁学的内在统一性。它也是阐明超距作用概念的好方法。本书关于电磁学的章节，即第七、八、九和十章，旨在补充普通电磁学教程的内容，而不是有意同它们竞争。第八章中证明了麦克斯韦方程组是洛伦兹协变的。该章还包括了对

运动电动势的扼要描述，因为这是对电动势构成清楚合理图象的少数情形之一。第九章介绍标势与矢势，并加以扩展，使之包括关于李纳-维切尔斯的简短说明及其对计算运动电荷辐射的应用。第十章将经典电磁方程组表示成矩阵和张量形式。在这种形式下，它们的协变性就更加一目了然了。第十一章相当详细地介绍了时钟佯谬。这一课题总是引起极大兴趣的，可是许多教程中的叙述一般说来比较简短，并且往往带有偏见。第十二章借助于等效原理，对广义相对论的某些要点作了简短叙述。这一章阐明了狭义相对论的一些局限性。

作者得益于阅读许多书籍，特别是爱因斯坦、谬勒 (Møller)、辛基 (Synge) 和托尔曼 (Tolman) 的著作，因此作者希望本书将成为这些或其它一些更高水平书籍的导引。卡尔威克 (Cullwick) 的《电磁学与相对论》(Electromagnetism and Relativity) 对本书的影响从第八章可以明显看出。作者曾受玻恩的《爱因斯坦相对论》(Einstein's Theory of Relativity) 一书的很大影响，并且可以毫不过分地说，也受了奥拉赫里 (O'Rahilly) 的《电磁学》(Electromagnetics) 一书的很大激励。作者也受了巴诺夫斯基 (Panofsky) 和菲利浦 (Philip) 著的《经典电学与磁学》(Classical Electricity and Magnetism) 一书的广泛影响，并曾在不同时期将该书选为教本。威特克 (Whittaker) 的书在历史方面证明是无可估价的。

多数章后附有习题。这些习题是用来帮助学生，而不是为难学生的。有些问题是描述性的，用来检验读者是否掌握了该章内容。有些问题需要代入基本公式。这是为了使读者熟习方程，并了解各种现象的数量级。有些问题是对正文的补充，还列出了参考文献，以便读者研究。

W. G. V. 罗 慈

# 目 录

序言 .....	vii
<b>第一章 历史概述 I 牛顿力学 .....</b>	<b>1</b>
1.1 引言 .....	1
1.2 长度、时间和质量的标准 .....	1
1.3 牛顿力学评述 .....	4
1.4 伽利略变换 .....	10
1.5 在相对于惯性系加速或转动的坐标系中的牛顿运动定律 .....	20
<b>第二章 历史概述 II 以太理论 .....</b>	<b>29</b>
2.1 光以太 .....	29
2.1.1 引言 .....	29
2.1.2 光的线速和波速 .....	31
2.1.3 恒星光行差 .....	35
2.1.4 菲涅耳拖曳系数 .....	38
2.1.5 马司卡脱和贾明的实验 .....	42
2.1.6 艾利实验 .....	45
2.1.7 菲索确定流水中光速的实验 .....	47
2.1.8 以太的早期机械理论 .....	49
2.2 电磁学的兴起 .....	51
2.3 迈克耳逊-莫雷实验 .....	57
2.4 洛伦兹电子论概述 .....	62
<b>第三章 洛伦兹变换 .....</b>	<b>77</b>
3.1 引言 .....	77

3.2 相对性原理 .....	78
3.3 光速不变原理 .....	79
3.4 洛伦兹变换 .....	91
3.5 洛伦兹变换的某些数学推论 .....	103
3.5.1 事件同时性的相对性.....	103
3.5.2 时间膨胀.....	103
3.5.3 洛伦兹-斐兹杰惹缩短 .....	105
3.6 不同地点事件的同时性 .....	107
3.7 洛伦兹-斐兹杰惹缩短 .....	112
3.8 时间膨胀 .....	116
3.8.1 多普勒效应.....	119
3.8.2 宇宙线的 $\mu$ 介子在大气中的衰变.....	123
3.9 真空中球面波的传播 .....	127
3.10 事件之间的间隔 .....	130
3.11 狹义相对论中观察者的作用 .....	135
3.12 光速与源速的关系的一个可能的实验校核 ..	136
<b>第四章 相对论运动学 .....</b>	<b>146</b>
4.1 速度变换 .....	146
4.2 $(1 - u'^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$ 和 $(1 - u^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$ 的变换 .....	150
4.3 粒子加速度的变换 .....	151
4.4 相对论光学 .....	153
4.4.1 线速的变换.....	153
4.4.2 静止物体中的光速.....	155
4.4.3 菲索实验.....	155
4.4.4 恒星光行差.....	158
4.4.5 艾利实验.....	162
4.4.6 真空中平面波的变换.....	162
4.4.7 多普勒效应.....	166
4.4.8 光在运动镜面的反射.....	169

4.4.9 高速运动物体的表观形象	172
<b>第五章 相对论力学</b>	<b>184</b>
5.1 引言	184
5.2 运动粒子的质量	185
5.3 单粒子的相对论动力学	191
5.3.1 力的定义	191
5.3.2 功与动能	192
5.4 单粒子相对论动力学的一些应用	198
5.4.1 在电场中的运动(无磁场)	198
5.4.2 在磁场中的运动(无电场)	201
5.4.3 质量随速度变化的实验验证	204
5.4.4 单位	207
5.4.5 带电粒子加速到高能	211
5.5 粒子的质量和动量以及作用在粒子上的力的变换	214
5.5.1 质量变换	214
5.5.2 动量和能量变换	215
5.5.3 力的变换	218
5.6 弹性碰撞理论	219
5.7 非弹性碰撞和质能相当性	229
5.8 质能相当的一些例子	232
5.8.1 原子核的结合能	232
5.8.2 动能	235
5.8.3 电磁辐射(光量子)	235
5.8.4 电子对的产生和正电子湮没	241
5.8.5 粒子衰变	242
5.8.6 介子的产生	245
5.9 关于相对论力学的评述	250
<b>第六章 洛伦兹变换的几何表示及四维矢量的运用</b>	<b>264</b>

6.1	伽利略变换的几何表示	264
6.2	洛伦兹变换的几何表示	267
6.3	利用复变量 $X_4 = ict$	279
6.4	狭义相对论的四维矢量表述	283
6.5	德布洛意波	294
<b>第七章</b>	<b>电磁学的二级效应</b>	<b>301</b>
7.1	引言	301
7.2	两条相互平行的运载电流之间的力	301
7.3	运动的“点”电荷之间的力	306
7.4	匀速运动的电荷产生的电场和磁场	311
7.5	毕奥-沙伐定律和超距作用	315
7.6	讨论	321
<b>第八章</b>	<b>麦克斯韦方程组的相对论变换</b>	<b>325</b>
8.1	引言	325
8.2	<b>E</b> 和 <b>B</b> 的变换	327
8.3	<b>E</b> 和 <b>B</b> 的变换式的某些应用	333
8.3.1	匀速运动的电荷产生的电场和磁场	333
8.3.2	运动的电动势	336
8.3.3	真空中的平面波	340
8.4	电荷密度与电流密度的变换	340
8.5	<b>D</b> 和 <b>H</b> 的变换	349
8.6	运动介质的电动力学	354
8.6.1	极化矢量 <b>P</b> 的变换	355
8.6.2	磁化矢量 <b>M</b> 的变换	358
8.6.3	本构方程	360
8.6.4	运动介质电动力学的一级理论及其对运动介质中光速计算的应用	361
8.6.5	威尔逊实验	366
<b>第九章</b>	<b>势的相对论变换</b>	<b>374</b>

9.1	关于标势与矢势的复习 .....	374
9.2	势的变换 .....	379
9.3	<b>E</b> 和 <b>B</b> 的变换 .....	383
9.4	匀速运动的“点”电荷产生的标势与矢势 .....	385
9.5	李纳-维切尔势 .....	388
9.6	拉格朗日方程 .....	393
9.7	哈密顿方程 .....	396
<b>第十章 电磁理论的四维矢量与张量表述 .....</b>		401
10.1	引言 .....	401
10.2	洛伦兹变换, 作为 $X_1, X_2, X_3, X_4$ 空间中线性正交变换 .....	401
10.3	势 $\phi$ 和 <b>A</b> 的方程的相对论变换 .....	408
10.3.1	电荷密度和电流密度的变换 .....	408
10.3.2	洛伦兹条件 .....	410
10.3.3	势的微分方程的变换 .....	411
10.4	麦克斯韦方程组的矩阵表示 .....	412
10.5	麦克斯韦方程组的张量表示 .....	420
<b>第十一章 狹义相对论评述与时钟佯谬 .....</b>		430
11.1	狭义相对论评述 .....	430
11.2	时钟佯谬简介 .....	438
11.3	利用多普勒效应检验时钟佯谬的假想实验 .....	449
11.4	时钟佯谬的一种可能的实验检验 .....	453
11.4.1	引言 .....	453
11.4.2	决定 $N_{\text{火箭}}$ .....	454
11.4.3	决定 $N_{\text{实验室}}$ (第一部分) .....	455
11.4.4	决定 $N_{\text{实验室}}$ (第二部分) .....	457
11.4.5	本实验的讨论 .....	458
11.5	时钟佯谬的讨论 .....	460

11.6	关于穆斯堡尔效应与温度的关系的实验	462
<b>第十二章</b>	<b>广义相对论</b>	<b>472</b>
12.1	引言	472
12.2	等效原理	473
12.3	引力场中的时钟速率	476
12.4	谱线的引力移动	479
12.5	用等效原理解释时钟佯谬	481
12.6	卫星内时钟的速率	484
12.7	光线在引力场中的弯曲	486
12.8	旋转参考系	489
12.9	相对固定恒星加速的参考系	496
12.10	广义相对论	498
<b>附录一</b>	<b>矢量分析公式提要</b>	<b>504</b>
<b>附录二</b>	<b>静止物质中 P, D, M 和 H 的定义</b>	<b>507</b>
<b>附录三</b>	<b>运动物体的质量(另一种推导)</b>	<b>517</b>
<b>附录四</b>	<b>矩阵理论概要</b>	<b>521</b>
<b>附录五</b>	<b>二阶笛卡儿张量概述</b>	<b>527</b>
<b>附录六</b>	<b>穆斯堡尔效应</b>	<b>531</b>
<b>习题答案</b>		<b>539</b>
<b>物理常数表</b>		<b>543</b>
<b>参考书</b>		<b>544</b>

# 第一章 历史概述 I 牛顿力学

## 1.1 引 言

牛顿力学解释日常生活中熟悉的大量现象获得了极大的成功，使学生产生了这样的印象，即牛顿力学在每个细节上都是绝对正确的。令人吃惊的是，很多学生对于牛顿力学的一些基本概念，甚至对于像惯性质量和力的定义，竟是模糊不清的。在中学时期，对物理学的理解是大体上是以熟悉物理方程为基础的。对于力学中的问题，如果学生能用适当方程得到问题的正确解答，他们就觉得懂了这一学科。在本章中对牛顿力学某些特点的讨论，将比在中学水平通常所作的讨论多带一些批判性质，以便为过渡到讨论狭义相对论所必需的一些观点变化作好准备。在讲述牛顿力学的过程中，将指出科学理论的几个一般性质。这可能有助于使初次接触相对论的一些读者较易于了解：牛顿力学不是绝对正确的，当粒子速度可以和光速相比时，牛顿力学必须代之以另一种全新的理论。

## 1.2 长度、时间和质量的标准

标志着物理科学在十六和十七世纪兴起的特点，是科学家开始作定量观测，并且开始在所控制的条件下进行实验。为了作定量测量，必须选择标准。因此，本书首先考察一下长度、时间和质量等所谓基本单位的原标准。

长度的国际标准是米。直到不久以前，一直是把它规定为刻在一根铂-铱棒上两个确定点间的距离，棒的温度为冰水混合物的温度。标准米保存在巴黎附近的塞佛尔(Sévres)国际计量局。人们仿照这个标准米做了一些精确的复制品，再用这些副标准来校准其它测量长度的辅助工具，如尺之类。标准米可用红色镉线和其它谱线的波长来校准。例如，应用法布里-珀罗干涉仪(Fabry and Perot interferometer)，贝诺特(Benoit)，法布里和珀罗曾在1913年证明了，在15°C和760毫米压力下的干空气中一米有1,553,164.13个红色镉线的波长。在这种条件下，红色镉线波长是6438.4696埃。这一波长多年来曾被用作长度的副标准，可以用它来校准一个新标准米，能达到至少百万分之一的精度。1960年10月在巴黎召开的第十一次计量大会上，决定取消用铂-铱原器定义米的办法，而重新规定一米就是氪86的橙红谱线波长的1,650,763.73倍。新米与旧米在精确到 $10^7$ 分之一的范围内互相一致。如果一个人处在相对于地球作匀速运动的火箭内，他仍然可用新规定的米作为长度单位，并且可以用火箭上的材料建立一套光学仪器，用来校准相对于火箭为静止的诸如尺之类的副标准。

为了测量时间，我们必须选择一个重复的过程，并假设它以相同的时间间隔重复发生。任何重复的过程都可以选为原标准，实际上选择的一个标准是平均太阳日，它定义为地球相对于太阳绕地轴自转一周所需要的平均时间。因为地球绕太阳作轨道运动，太阳日在一年当中是变化的，因此取其平均值作为标准。天文学家宁愿取地球相对于“固定”恒星的转动周期作为标准，也就是使用恒星时。在实验室中，象振荡摆一类的钟可用平均太阳日来校准。电信号的频率可以非常精确地测出，石英晶体钟可以作为精确的副标准。与某些原子过程和核过程相联系的频率，也曾被用来作为频率的副标准，例如氮

蒸气钟和铯钟。由于地球转动的角速度可能有长期的变化，所以平均太阳日可能一年一年地在改变着。在可能用原子或分子频率对秒重新作定义之前，第十一次计量大会决定，把1900年回归年的 $1/31,556,925.9749$ 定义为一秒。这就确定了时间的单位。如果一个人坐在相对地球运动的火箭中，他可以建立一个作为副标准的原子钟，并能够借助原子过程的频率来校准静止在火箭内的其它钟，这些原子频率事先已用地球上静止的仪器，按照1900年的太阳日确定好了。

质量的国际原标准是千克。它定义为保存在塞佛尔的一个铂-铱圆柱的质量。其它物体的引力质量与该标准比较可用称量的办法实现。要确定惯性质量，涉及到所用的力学理论，这一点留到讲完牛顿运动定律后再讨论。原则上，质子的静止质量可以作为质量的副标准，适用于校准相对地球作匀速运动的火箭内的质量。

其它力学量可用质量、长度和时间表示出来。例如，物体的速度定义为单位时间内物体移动的距离。真空中的光速能够精确地测量出来，因此已有人建议，可采用真空中的光速作为原标准，指定它为一个任意值。于是，时间间隔便可用在该间隔内光在真空中通过的距离来度量，或者也可用光或无线电信号通过该距离所用的时间来度量这一距离。这就是用雷达方法测距时所用的方法（见3.6节）。

对物体进行物理测量，是通过与原标准比较来完成的（或者是与副标准比较，而此副标准是已通过与原标准或其它副标准比较而校准过的）。例如，要确定一个静止物体的长度，实际上可以将此物体两端的位置，与诸如尺之类的副标准来进行比较，而此尺的长度已经分好了许多等分。就这样，静止物体的长度就从实验上确定了，于是物理学工作者就会满意于下述说法：某物体的长度，例如是在13.3到13.4厘米之间

的某一数。一般说来，物理学工作者是不会停下工作，来专为物体的真正（或绝对）长度之类的说法伤脑筋的，尽管他当然始终力求改进实验测量的精确度。

通常的作法是用符号表示物理量相对于原标准的大小。这使物理定律能写成数学形式。力学定律的表达式不取决于质量、长度和时间的任意单位的实际大小。所选择的基本单位的大小，仅仅对表达物理定律的数学方程中常量的值有影响。

### 1.3 牛顿力学评述

在伽利略时代以前，关于运动的流行观点大部分来自亚里斯多德。那些观点如果说不是由不依靠实验的纯推理得来的，一般也只是基于一些定性的观测。十六和十七世纪，在哥白尼、第谷（Tycho Brahe）、开普勒、伽利略等人的影响下，以定量观测和控制条件下的系统的实验为基础，出现了一种新的面貌。从有限数目的观测出发，提出了一些定律。例如，伽利略从研究金属球滚下斜面所需的时间出发，提出了落体定律。在科学发展的这一阶段，物理定律一般说来是从有限数目的定量观测直接“归纳”出来的。关于力学的早期研究工作，在牛顿运动定律和万有引力理论中达到了最高水平。牛顿运动定律的一种典型表述如下：

- (a) 所有物体继续保持其静止或匀速直线运动状态，除非它们受外力而被迫改变这种状态。
- (b) 动量变化率正比于所受的力，并且发生在作用力的方向上。
- (c) 作用和反作用大小相等，方向相反。

如果在一个参考系中，一个不受任何力作用的物体（即当

它远离所有能够对它施力的其它物体)作匀速直线运动,那么牛顿第一定律在此参考系中成立.这样一个参考系就叫做惯性系.惯性系的性质将在3.2节和3.3节中仔细研究.

根据牛顿万有引力定律,宇宙中每个质点都对其它质点有吸引力,其大小正比于两质点的质量的乘积,反比于它们之间距离的平方,作用力方向沿两质点的联线.于是,如果两个“点”状物体的引力质量分别是 $m_1$ 和 $m_2$ ,它们间的距离为 $r$ ,那么

$$f = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (1.1)$$

其中 $G$ 是引力常数.

理论的目的是把一些定律联系起来,使得理论比单个定律更具有广泛性.牛顿熟悉落体定律和开普勒行星运动定律.牛顿指出,如果假设宇宙中每一对质点都以方程(1.1)所给出的力互相吸引,那么根据这一假设,再加上牛顿运动定律,便能导出其它单个定律,解释许多其它现象,如月球绕地球运动等.新理论除解释已知定律外,还用于作出新的预言,这些预言尔后要由实验来验证.一种新理论可被接受的程度主要取决于这些新的预言与实验结果符合得多好.

在一个理论中,总是假设自然界以某种特殊方式行事.因此,一个理论有时可看作是自然界的一个模型;它不一定是一个机械的模型,而可能是象方程(1.1)那样的函数关系.一个理论应当使人们能够预言在给定的一些初始条件下的实验进程.把理论用于特殊情况时,要利用数学推理.用这种方式得到的理论结果应当与实验结果相符合.如果一个理论是完全正确的,那么理论预言和自然过程的符合将是一一对应的.在应用一个理论时,人们总是把所考虑的体系理想化,并且仅考虑那些其效应与所要求精度具有同一量级的量;例如,计算

地面附近一个球的加速度，为了简便起见，将忽略远处星球的引力，虽然从原则上讲，这种引力始终是存在的。

如果一个理论是用来描述实际发生的事物，那么该理论的数学表达式中所出现的量，就必然直接或间接地与能实际测量的量有关。我们现在来讨论在牛顿运动定律表述中所用到的量的意义。对于任意标准的长度和时间的测量已在1.2节中讨论过。一个质点的速度  $\mathbf{u}$  和加速度  $\mathbf{a}$  可用长度和时间来定义和测量。利用牛顿第二定律，作用在一质点上的力  $\mathbf{f}$  可以定义为该质点的动量变化率，其中质点的动量定义为惯性质量和它的速度  $\mathbf{u}$  的乘积，即

$$\mathbf{f} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{u}). \quad (1.2)$$

如果质点的惯性质量与其速度无关，方程(1.2)可写成

$$\mathbf{f} = m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = m\mathbf{a}, \quad (1.3)$$

其中  $\mathbf{a}$  是质点的加速度。因此，力在实验上可以用它对一个已知惯性质量的物体所产生的加速度而测量出来；但是在能够用这种方式测量力之前，人们必须知道物体的惯性质量。如果相等的力作用在惯性质量为  $m_1$  和  $m_2$  的两个物体上，那么根据方程(1.3)，这两个物体的加速度与它们的惯性质量成反比。牛顿第三定律说，作用力和反作用力大小相等，方向相反。因此，如果两个物体相碰撞，那么作用在两个物体上的力的瞬时值应该大小相等、方向相反。一个速度为  $\mathbf{u}_1$ 、惯性质量为  $m_1$  的物体，与另一个惯性质量为  $m_2$  的物体对头碰撞，物体  $m_2$  在碰撞前处于静止状态。设碰撞后  $m_1$  和  $m_2$  两物体分别以速度  $\mathbf{u}'_1$  和  $\mathbf{u}'_2$  在同一方向运动。如果  $\mathbf{f}_1$  和  $\mathbf{f}_2$  是在碰撞过程中任一时刻作用在  $m_1$  和  $m_2$  上的力的瞬时值，那么根据牛顿第三定律，有

$$\mathbf{f}_1 = -\mathbf{f}_2.$$

按碰撞时间积分，得到

$$\int \mathbf{f}_1 dt = - \int \mathbf{f}_2 dt,$$

即

$$\int m_1 \frac{du_1}{dt} dt = - \int m_2 \frac{du_2}{dt} dt.$$

因此，

$$\int_{u_1}^{u'_1} m_1 du_1 = - \int_0^{u'_2} m_2 du_2,$$

$$m_1(u'_1 - u_1) = -m_2 u'_2,$$

即

$$m_1 u_1 = m_1 u'_1 + m_2 u'_2, \quad (1.4)$$

这就是动量守恒定律。重要的是要认识到它是从牛顿运动定律不加任何条件得出的。由方程(1.4)，有

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{u'_2}{(u_1 - u'_1)}. \quad (1.5)$$

因此，如果刚好在碰撞前与碰撞后的速度瞬时值确定了，那么惯性质量便能互相比较。进行该实验的方法之一是把两个质量悬起来做成一对冲击摆，然后让它们碰撞。如果其中一个质量比方说  $m_1$ ，是质量的原标准，那么另一个质点的惯性质量便可以确定。于是，这一质量又可以用作为惯性质量的副标准。在能够说出两个物体的惯性质量如何比较之前，我们不得不先用了牛顿力学的理论。只有在已定义并规定一个物体的惯性质量如何测量之后，物体上所受的力才能通过观测该力作用在一个已知惯性质量的物体上所引起的加速度来测量。于是方程(1.3)就可以用来计算力。这样，象力和质量这样一些量的精确含义是与所用的理论有关的，并且实际上也必须通过由该理论所规定的方法来测量。如果实验证据迫使

我们用一个新的理论来代替旧理论，那么这些量就必须重新定义，并用新理论所规定的方法来测量，这些新定义和新测量方法可能与旧理论的不同。读者将看到，当用相对论力学来代替牛顿力学时，情形正是这样。当新理论发展起来的时候，象质量和力之类的词义也发生变化，并且任何新词所包含的意义，都必须在所用的新理论的讲述过程中予以解释。

与质量一词相联系的另一物质属性，出现于牛顿万有引力定律 [方程 (1.1)] 内。物体的引力质量是物体每个质点对其它质点施加引力的物质属性的量度。惯性质量则和另一种完全不同的物质属性相联系，即为了加速一个质点，必须在它上面作用一个力（不必来源于引力）。在经典理论中，引力质量和惯性质量相等是一个附加假设，它必须由实验来加以检验。对于引力质量为  $m_G$ 、在地面附近下落的物体，引力等于  $G \frac{m_G M_G}{R^2}$ ，其中  $M_G$  是地球的引力质量， $R$  是地球的半径。由此力所产生的加速度，等于此力和受力物体惯性质量的比值。因此，

$$(加速度) = \frac{(引力质量)}{(惯性质量)} \frac{GM_G}{R^2}.$$

如果物体的引力质量不正比于它的惯性质量，那么地球引力场中不同物体的加速度就会不总是同一数值。但实验发现，对所有的物体，这个加速度是同一值，因此实验结果要求引力质量和惯性质量成正比。如果适当选择单位，则可以使引力质量和惯性质量在数值上相等。一个物体的引力质量可以用等臂天秤称量出来。这是实验上确定质量最方便办法。在方程 (1.3) 中使用这些值，包含了引力质量和惯性质量相等这一附加假设。

在牛顿力学理论中还隐含着许多其它假设，在初次教学

时往往不强调指出它们。例如，在方程(1.3)中假设了物体的质量与速度无关；也假设了空间的所有区域和所有方向都是等效的；一般还假设了欧几里德几何学可以用来计算几何量之间的相互关系，并假设存在着刚体。在§1.4中我们将指出，牛顿力学还假设存在绝对时间。这些附加的假设并不是“先验地”给定的，其正确与否必须通过实验来决定。实际上，许多这些想法在讲述狭义相对论和广义相对论时都不得不加以修正。

物理学的进展是一种逐步近似的过程，在发展新理论的每个阶段上，都赋予自然界一个更好的模型。当应用一个理论时，人们考虑一个孤立体系。太阳系就是一个非常好地近似于孤立体系的例子，因为太阳系以外来的作用，如远处星球的引力，虽然它们始终存在，但却是如此之小，以致在实际上一般可以忽略。一般说来，人们总是从尽可能简单的体系，例如从太阳和一个行星的体系开始研究。这使得我们能够相当满意地计算出行星轨道。为了使理论和观测进一步符合，要把其它行星引力所造成的扰动考虑进来。这样一来，这一体系中就出现了新增加的变量，但所用的仍是同一理论。这种处理程序一般说来是令人满意的。但有时出现某种情况，这种处理办法不足以使旧理论与实验结果相符合。例如，利用牛顿引力理论，其它行星引力所造成的水星轨道的扰动，不足以说明水星轨道近日点的进动。这一矛盾只有用一全新的理论即爱因斯坦的基于广义相对论的引力理论来代替牛顿引力理论才能解决，而牛顿引力理论不过是它的一个近似。与此类似，狭义相对论不是对牛顿力学的修正补充，而是一种彻底取代，它甚至需要对质量、长度和时间都加以重新解释。因为物理学是通过一系列逐步近似向前发展的，所以在任何阶段说这种逐步近似过程已经完结，那就是愚蠢的。因此，当人们

用相对论力学代替牛顿力学时，不能认为狭义相对论就是绝对正确的，而必须始终承认，它也可能随时被新的理论所取代，只要新理论与实验结果符合得更好。狭义相对论的正确性，必须根据它解释实验事实所获得的成功来判断。

由于物理学变得日益复杂，所以理论的基本假设也变得更为复杂，而且基本假设并不总是能由实验直接加以验证的，并不总能象卡文迪希（Cavendish）验证牛顿引力定律所做的那样。人们时常提出一些现代理论用来解释实验结果，但它们并不总是以直接实验的“归纳”为依据的。这样一种理论可被接受的程度，不仅取决于基本假设与实验相符的情况，更决定于理论预言作为一个整体是否与实验事实相符合。稍后可以看到，爱因斯坦选作为狭义相对论出发点的公理就是这种类型的，因此整个理论需要在提出以后加以验证。

我们将证明，当所涉及的质点的速度远小于光速时，牛顿力学和相对论力学之间的差别是可以忽略的。因此，当  $v \ll c$  时，如日常生活中的一般情况，可以应用牛顿力学，尽管我们知道狭义相对论方程会给出自然现象的一个更好的模型。在这种情况下，使用特殊相对论方程只是不必要的麻烦。牛顿力学定律具有严格的规定性，对于给定的初始条件，所作的预言总是相同的。实际上，对于比原子尺度大很多的物体，这是成立的，但对于原子粒子，牛顿力学就需要用量子力学来代替。

#### 1.4 伽利略变换

牛顿假设存在一个绝对空间。例如，他写道：“绝对空间，按其本性，不受外界事物的影响，总是保持不变并且不可移动。”

为了便于讨论，将假设存在绝对空间，并且牛顿运动三定

律在绝对空间中成立，至少是在很好的近似程度上成立。考虑一个固定在绝对空间的坐标系，用  $\Sigma$  来表示它。把坐标系  $\Sigma$  想象成为由分别平行于  $x$ ,  $y$  和  $z$  轴的假想尺构成的一个阵列是有益的。这样，原则上一个事件的坐标可直接从尺上读出。如果牛顿第一定律在  $\Sigma$  中成立，那么，一个不受任何力作用的质点  $P$  就应相对  $\Sigma$  作直线运动。选择  $\Sigma$  的坐标轴方向，使  $P$  点在  $xy$  平面内运动。如果质点  $P$  的速度为  $\mathbf{u}$ ，并且在  $t = 0$  时处在原点，那么它在时刻  $t$  的位置将由  $x = u_x t$ ,  $y = u_y t$ ,  $z = 0$  给出，于是它的轨道与  $x$  轴的夹角将为  $\tan^{-1}(u_y/u_x)$ 。

现在考虑另一个坐标系，用  $\Sigma'$  表示，它相对于绝对空间 ( $\Sigma$ ) 以速度  $v$  沿它们的公共的  $x$  轴运动。设二坐标系的原点在  $t = t' = 0$  时相重合，并设  $\Sigma'$  的  $y'$  和  $z'$  轴方向在  $t = 0$  时与  $\Sigma$  的  $y$  和  $z$  轴相重合。设想坐标系  $\Sigma'$  具有自己的一套假想尺，于是任何事件相对于  $\Sigma'$  的坐标都能测量出来。所谓一个事件是指与坐标系无关而发生的某件事情；例如，如果质点  $P$  与另一质点相碰撞，那么无论是静止在  $\Sigma$  中或者是静止在  $\Sigma'$  中的观察者，都会一致认为已发生碰撞；虽然他们将会赋予该事件以不同的空间坐标。

牛顿还假设存在绝对时间。例如，他写道：“绝对的、真正的和数学的时间，按其本性独立地向前均匀流逝，而不受外界任何事物的影响。”

如果存在绝对时间，那么在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中测量时间间隔，应该是同一数值，而由于在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中，时间的零点都选为二坐标系原点重合的瞬间，因此对于所有时刻，都有  $t = t'$ ，其中  $t$  和  $t'$  是分别相对于  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  测出的同一事件的时间。绝对时间的概念是牛顿力学的一个弱点，因为，在它被引入时，不可能引证任何实验依据来支持它或者反对它。本节中绝对时

间的概念将被接受作为牛顿力学的不可缺少的组成部分，尽管它是在没有任何实验依据下先验地引进来的。

为了比较一事件在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中的  $x$  坐标，假想有一把尺沿共同的  $x$  轴置放，如图 1.1 所示（该尺可以相对于  $\Sigma$  及  $\Sigma'$  移

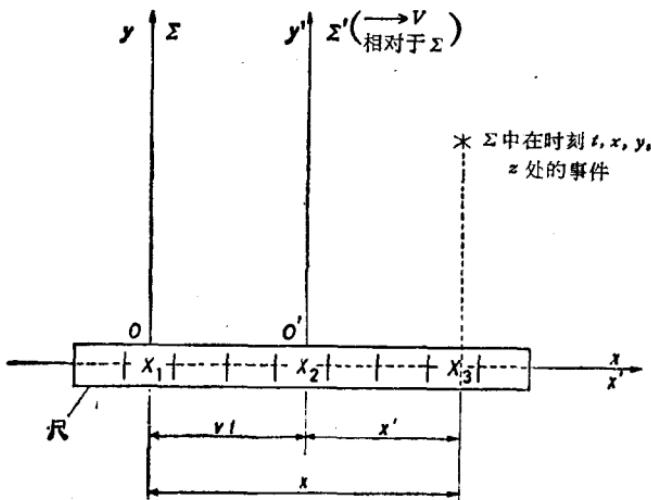


图 1.1 测量事件的坐标  $x$  和  $x'$ 。

动）。如果时间是绝对的，那么分别静止在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中的两个观察者对于同一事件发生的时间，将总是意见一致的。于是两者都会同意， $\Sigma$  的原点  $O$  与尺上的某一位置  $X_1$  相重合，当时， $\Sigma'$  的原点  $O'$  与尺上的位置  $X_2$  相重合，而事件的  $x$  及  $x'$  坐标和另一位置  $X_3$  相重合，如图 1.1 所示。因此，如果时间是绝对的，静止在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中的观察者就都会同意

$$X_1 X_3 = X_1 X_2 + X_2 X_3.$$

如果假设  $x$  和  $x'$  用同一单位测量，那么

$$x = OO' + x'.$$

如果  $v$  是两坐标系的相对速度，则  $OO'$  等于  $vt$ 。

因此

$$x' = x - vt.$$

如果将尺如图 1.2 所示放置在  $y$  方向，那么两个观察者应该同意，他们的  $x$  和  $x'$  轴与尺上的一个位置  $Y_1$  重合，同时事件的  $y$  和  $y'$  坐标与位置  $Y_2$  重合，于是两个观察者对于该事件

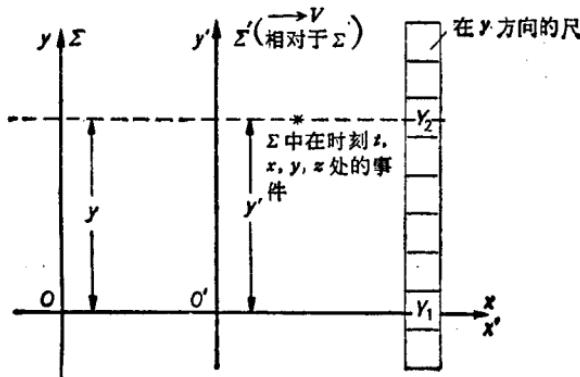


图 1.2 测量事件的坐标  $y$  和  $y'$ .

的  $y$  坐标将给出同一数值，即

$$y = y',$$

类似地有

$$z = z'.$$

把上述变换式整理在一起，得到

$$x' = x - vt \quad \text{或者} \quad x = x' + vt, \quad (1.6)$$

$$y' = y, \quad (1.7)$$

$$z' = z, \quad (1.8)$$

$$t' = t, \quad (1.9)$$

这些变换式一般称为伽利略变换。

当测量一个运动物体的长度时，静止在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中的两观察者都要观测物体两端在尺上的位置，并在同一时刻测量物体的两端。如果时间是绝对的，他们对同时性的看法也将是

一致的。设运动物体的一端在  $t$  时刻处在  $\Sigma$  中的  $x_1, y_1, z_1$  点，此运动物体的另一端在同一时刻  $t$ ，处在  $\Sigma$  中的  $x_2, y_2, z_2$  点。如果这两个事件在  $\Sigma'$  中的坐标分别为  $x'_1, y'_1, z'_1$  和  $x'_2, y'_2, z'_2$ ，根据伽利略变换，若这两个事件在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中都是同时测量的，则有

$$\begin{aligned}(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \\= (x'_2 + vt - x'_1 - vt)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 \\= (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2.\end{aligned}$$

因此在牛顿力学中，运动物体的长度是绝对的，也就是说，它在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中具有相同数值。我们不难看出，这一结果是从绝对时间的假设得来的。

现在考虑在  $\Sigma$  中以匀速  $\mathbf{u}$  运动的质点  $P$ 。在时刻  $t$ ，它的坐标为

$$x = u_x t; \quad y = u_y t; \quad z = 0.$$

利用方程(1.6)，(1.7)和(1.8)，在  $\Sigma'$  中  $t = t'$  时刻，测出的  $P$  的坐标是

$$x' = u_x t - vt; \quad y' = u_y t; \quad z' = 0.$$

当  $t' = 0$  时处在  $\Sigma'$  原点的质点  $P$ ，在  $\Sigma'$  的  $x'y'$  平面内运动，使得

$$\frac{x'}{y'} = \frac{x - vt}{y} = \frac{x/t - v}{y/t} = \frac{u_x - v}{u_y}.$$

因为  $u_x, u_y$  和  $v$  全都是常数，所以  $x'/y'$  也是常数，因此质点  $P$  在  $\Sigma'$  中沿着与  $y'$  轴成角度  $\tan^{-1}[(u_x - v)/u_y]$  的直线运动。于是，如果牛顿第一定律适用于  $\Sigma$ ，那么它也适用于  $\Sigma'$ 。

以上我们只考虑了匀速运动。现在假设质点  $P$  相对于  $\Sigma$  具有加速度  $\mathbf{a}$ 。将方程(1.6)对时间微分，

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v, \quad \text{或} \quad u'_x = u_x - v, \quad (1.10)$$

类似地，对方程(1.7)和(1.8)进行微分，

$$u'_y = u_{yz}, \quad (1.11)$$

及

$$u'_z = u_{zz}, \quad (1.12)$$

这些就是速度变换式。它们表明，质点的速度值取决于所选择的坐标系，即取决于所选择的静止标准。

将方程(1.10)，(1.11)和(1.12)对时间微分，由于  $v$  是常量，得到

$$\frac{du'_x}{dt} = \frac{du_x}{dt}; \quad \frac{du'_y}{dt} = \frac{du_y}{dt}; \quad \frac{du'_z}{dt} = \frac{du_z}{dt},$$

即

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a}. \quad (1.13)$$

在方程(1.13)中， $\mathbf{a}'$  是质点相对于  $\Sigma'$  的加速度，而  $\mathbf{a}$  是相对于  $\Sigma$  的加速度。只要  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  的相对速度  $v$  是常数，在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中的加速度就是相同的。在牛顿力学中假设质点的质量与它的速度无关，即质量是不变量。用  $m$  乘方程(1.13)的两边得到：

$$ma' = ma. \quad (1.14)$$

因为作用在质点上的力可以定义为质点的质量和该力所引起的加速度的乘积， $ma'$  等于  $\Sigma'$  中测量的使质点  $P$  产生加速度的力，而  $ma$  是在  $\Sigma$  中测量的作用在该质点上的力。因此

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}'. \quad (1.15)$$

于是，用所产生的加速度来测量质点所受的力，就应该在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中得到相同的值。

力并不总是用它所产生的加速度来测量的。例如，如果一个物体吊在一弹性绳上，则重力为弹性恢复力平衡。如果此物体处于静止状态，用加速度来测量弹性力是不方便的，杰谟<sup>[1]</sup> (Jemmer)写道：

“因为牛顿把定义和公理(或者运动定律)区别得十分清楚,显然牛顿并没有打算把运动第二定律作为力的定义,虽然关于力学基础的现代作者有时这样解释它。它也不意味着只是表达了一种测量力的方法。力对牛顿来说,是一种先验的概念,最终是从类比于人的臂力而直观地得来的。”

两物体间的引力由方程(1.1)给出,并假设这两个物体即使被约束而不能运动,引力也照样存在。常数  $G$  并不总是根据牛顿第二定律由动力学方法来确定的。例如,玻印亭曾用称量实验测定  $G$ 。用牛顿第二定律作为力的定义,曾得出结论,如果质量是绝对的,力也是绝对的。在牛顿力学中,方程  $f = f'$  可以推广到所有形式的力。例如,我们假定由方程(1.1)给出的引力是不变量。类似地,我们假定弹性力是不变的。我们还证明过,加速度是不变量。因此,如果质量和力是不变量,则力等于质量乘上加速度的方程在任何惯性系中均适用;并且在这些条件下,牛顿第二定律在伽利略变换下是不变式。

至此读者已经理解,在牛顿力学中,存在大量的假设,例如绝对时间、绝对质量和绝对力等。但是,在所有速度远小于光速的范围内,牛顿力学实际上是很有效的。作为一个例子,考虑从匀速运动的船的桅杆顶端落下的一个物体。牛顿力学假设,作用在该物体上的力相对于船和海岸都由  $G(mM/R^2) = mg$  得出。牛顿第二定律可用来计算相对于船或相对于海岸的加速度,因此也能计算相对于两者的运动。质点运动轨道上任一点相对于船和海岸的坐标和时间,由伽利略变换相联系。

如果两个质点相互碰撞或者相互作用,那么若牛顿第三定律在  $\Sigma$ (绝对空间)中是正确的,则在  $\Sigma$  中作用和反作用将大小相等、方向相反。这意味着碰撞质点的相互作用力在  $\Sigma$

中测量时总是大小相等、方向相反。根据方程(1.15)，这些力在  $\Sigma'$  中测量时和  $\Sigma$  中具有完全相同的数值。如果牛顿第三定律在  $\Sigma$  中是正确的，那么在  $\Sigma'$  中也是正确的。

我们已经证明，只要假设时间、质量和力都是绝对的，如果牛顿运动三定律在绝对空间 ( $\Sigma$ ) 中成立，则在相对于绝对空间 ( $\Sigma$ ) 作匀速运动的任何坐标系  $\Sigma'$  中也成立。任何一个这样的坐标系都能用来记录力学现象，并且所得结果都可以用牛顿运动定律来解释。如果一个物理体系中诸质点的位置和速度相对于  $\Sigma'$  都已给定，那么从作用在这些质点上的力（数值与在  $\Sigma$  中的相同），可以计算出这些质点的加速度，并可以计算出这些质点相对于  $\Sigma'$  的以后的运动，而不必参照任何绝对空间。而且，把牛顿定律应用于相对于绝对空间作匀速运动的一个坐标系时，这些定律并不含有坐标系相对于绝对空间运动的速度，而是在相对于绝对空间作匀速运动的任何一个坐标系中，这些定律都取相同的数学形式。从这些运动坐标系中任何一个所作的测量，都无法证明绝对空间的存在。因此，绝对空间对于匀速直线运动而言失去了意义。于是，当坐标和时间按伽利略变换变化时，牛顿定律满足相对性原理。牛顿力学中仍保留了一些绝对量，例如绝对时间和绝对质量（从下述简单例子立刻可以看到，在电磁学中力不可能是绝对的。如果两个电荷在  $\Sigma'$  中是静止的，那么可以应用库仑定律。但这两个电荷都相对于  $\Sigma$  运动，所以在两个电荷之间除存在电力外还应该有取决于速度的磁力。如果力是不变量，则在所有惯性系中，两电荷之间应该只存在与速度无关的库仑静电力。这一点在第七章中将详细讨论）。对于所有速度都远小于光速的力学现象，牛顿运动定律和伽利略变换一般来说是完全足够的。

问题出来了，怎样才能选择牛顿定律在其中成立的坐标

系呢？如果在一个参考系中不受力作用的质点（即它远离能够对它施力的其它质点）作匀速直线运动，则牛顿第一定律在此参考系中成立，于是这一参考系就可以看作是适宜应用牛顿运动定律的参考系。这样的参考系叫做惯性系，或者有时叫做伽利略参考系。可是要移开所有其它物体并不是总能办到的，因此，有必要更仔细地考察惯性系的概念，这一点在讲述狭义相对论时尤为必要。一般说来，只有当质点的速度可与光速相比时，才需要用狭义相对论。在实验室能够得到的粒子中，只有原子粒子才具有这样高的速度。对于原子粒子来说，电力远大于引力，例如，两个 $\alpha$ 粒子间的电力与引力之比是 $\sim 10^{35}$ 。因此，对于原子粒子，如果所有邻近物体都是电中性的并且不产生磁场，那么邻近物体的作用就小得可以忽略。可以在没有电场和磁场情形下作离子运动的实验，实验发现离子确实作直线运动（当然要受测不准原理的限制，并受很小的一般可以忽略的地球引力的影响）。因此，对于实验室研究的大多数原子和核子过程而言，地球在其中静止的坐标系即实验室坐标系是理想的惯性系的一个足够好的近似。对于低速力学现象，地球在其中静止的参考系是对惯性系的一个令人满意的近似，只要把重力看成是一个外加力。在此参考系（一般叫做实验室参考系）中，能用牛顿定律做出精确的预言。但是，地球绕其轴自转并且绕太阳公转。在非常精确的工作中必须考虑这些转动，例如傅科摆实验。惯性系的一个更好近似是相对于“固定”恒星静止的参考系。这些恒星可能具有某些不规则的运动，但是这一参考系，或者相对于它作匀速运动的参考系，对于地球上所有现象来说，是理想惯性系的一个足够好的近似。对于宇宙问题，选择单一惯性系描述整个宇宙是不合适的，所以在讲述广义相对论时，参考系的概念必须加以改进和推广。对惯性系的全面讨论，读者可参阅丁

勒<sup>[2]</sup> (Dingle) 的文章。

当一个质点的位置和速度在一惯性系中为已知，而要计算该质点在相对于此惯性系作匀速运动的另一参考系中的位置和速度时，要利用伽利略变换和速度变换。根据相对性原理，在所有惯性系中物理定律应该是相同的。我们已经说明过牛顿力学定律如何服从相对性原理，以及对于伽利略变换其数学形式是不变的。

本节所讨论的各点，可以用一个在风平浪静的日子以匀速出海的船作为例子来加以说明。在这种条件下，完全可以在船甲板上划出一块网球场来打网球。而且，如果不存在任何加速度，打球者不看船外之物时就不会意识到船在运动。不参照船外事物，在船上所作的任何实验都不能给出船相对于海岸的速度，因为从船内实验所确定的力学定律，都不涉及船相对于地球的速度。由船上来解释网球比赛将是完全令人满意的。坐在岸上的观察者也能观看比赛。按照牛顿力学的叙述，岸上的观察者和船上的观察者都会同意牛顿定律是正确的，至少是一个很好的近似。关于场子大小、比赛各阶段的时间和记分，他们的看法也是一致的，但是两者的描述将不会完全等同。岸上的观察者[根据方程(1.10)，(1.11)和(1.12)]将说，球离开一个打球者的球拍比离开另一个打球者的球拍更快，如果球相对于船是以同一速度离开两个球拍的话。这种当静止标准改变时的两个球速的差别，在读者看来或许会觉得是十分自然的。船上和岸上观察者之间的相互关系是完全可以互易的。如果船上的观察者观看海滩上的比赛，则观察者的作用将倒转过来。

牛顿认识到绝对空间的概念对于匀速直线运动不是必要的，例如他写道：

“因此，在一般事物中，我们不用绝对位置和绝对运动，而用相

对位置和相对运动，这不会有任何不方便之处。但是在物理研究中，我们只好从感觉中作出抽象。因为事实上可能不存在一个静止物体，可以作为其它物体位置和运动之参考。”

牛顿认为绝对旋转是可以观测的，例如他写道：

“用以区别绝对和相对运动的效应是离心力，也就是那些在圆周运动中引起离轴倾向的力。”

下面将讨论相对于惯性系作加速运动的坐标系。

## 1.5 在相对于惯性系加速或转动的坐标系中的牛顿运动定律

在 1.4 节中已经指出，倘若船以匀速运动，就可以在船上比赛网球。然而，船一旦遇上波涛汹涌的海面，它开始承受突然加速时，人们将立刻意识到，运动定律还受参考系相对地球作加速运动的影响。我们现在来证明，如果把相对于惯性系加速或转动的坐标系作为静止的标准，必须怎样修正牛顿运动定律。我们将再次假设存在惯性系  $\Sigma$ ，牛顿运动定律在其中成立，或者至少是很好的近似。如果没有力作用在质点  $P$  上，那么它将在  $\Sigma$  中作直线运动。考虑坐标系  $A$ ，它相对于  $\Sigma$  沿共同的  $x$  轴有一直线均匀加速度  $a_r$ 。设两坐标原点在  $t = t' = 0$  时重合，还设在此时刻两坐标系彼此相对静止。将假设时间是绝对的，即  $t = t'$ 。选择  $\Sigma$  的  $y$  和  $z$  轴与  $A$  的  $y'$  和  $z'$  轴的方向，使质点  $P$  在  $\Sigma$  的  $xy$  平面内以匀速  $u$  运动， $u$  具有分量  $u_x, u_y, u_z = 0$ 。如果在  $t = 0$  时质点处在  $\Sigma$  的原点，那么经过时间  $t$  后，它应该处在  $\Sigma$  中的点  $x = u_x t, y = u_y t, z = 0$ 。它在  $\Sigma$  中的轨迹由方程  $y = \frac{u_y}{u_x} x$  给出。

在时刻  $t$ ， $A$  的原点相对于  $\Sigma$  的  $x$  坐标是  $\frac{1}{2} a_r t^2$ 。如果  $x'$

是质点  $P$  在时刻  $t' = t$  相对于  $A$  的坐标, 那么

$$x = x' + \frac{1}{2} a_r t^2,$$

即

$$x' = x - \frac{1}{2} a_r t^2 = u_x t - \frac{1}{2} a_r t^2. \quad (1.16)$$

类似地.

$$y' = y = u_y t, \quad (1.17)$$

$$z' = z = u_z t \text{ (在本例中等于零).} \quad (1.18)$$

把由方程(1.17)得到的  $t = y'/u_y$  代入方程(1.16)中, 得

$$x' = \frac{u_x}{u_y} y' - \frac{1}{2} \frac{a_r}{u_y^2} y'^2.$$

相对于坐标系  $A$  质点  $P$  沿抛物线运动, 而不是沿直线运动, 虽然没有真实的力(即外加力)作用在  $P$  上. 因此牛顿第一定律在坐标系  $A$  中不适用, 并且质点  $P$  相对于  $A$  好像是具有加速度  $-a_r$ ; 因此  $A$  不是惯性系. 如果人们想要把牛顿第一定律用于参考系  $A$  中, 那么为了解释在其中出现的加速度, 将需要引进作用在质量为  $m$  的质点  $P$  上的虚拟力  $-ma_r$ . 这一虚拟力叫做惯性力; 它不引起相对于固定的恒星的加速度.

现在设质点  $P$  相对于  $\Sigma$  具有加速度  $a$ , 将方程(1.16)对时间两次微分, 得到

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} - a_r. \quad (1.19)$$

类似地,

$$\frac{d^2 y'}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} \quad \text{和} \quad \frac{d^2 z'}{dt^2} = \frac{d^2 z}{dt^2},$$

或者用矢量表示

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_r, \quad \text{或} \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_r, \quad (1.20)$$

其中  $\mathbf{a}'$  是质点  $P$  相对于坐标系  $A$  的加速度. 如果在  $\Sigma$  中测

量的加速度是由外力  $\mathbf{f}$  引起的，那么根据牛顿第二定律（假设它在  $\Sigma$  中是正确的），有

$$\mathbf{f} = m\mathbf{a} = m(\mathbf{a}' + \mathbf{a}_r),$$

因此

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{f} - m\mathbf{a}_r. \quad (1.21)$$

在方程(1.21)中外力  $\mathbf{f}$  必须是由外界因素引起的。它产生相对于固定恒星的加速度。第二项  $-m\mathbf{a}_r$  是虚拟的惯性力，如果要利用牛顿第二定律计算坐标系  $A$  中质点  $P$  的加速度，就必须引进这个惯性力。当一个人坐在正在加速的火车中时，他会感到有外力  $\mathbf{f}$  将他相对于地球加速。如果他想要利用火车静止的坐标系  $A$  来讨论他的运动，并想要把牛顿定律用在这个坐标系中，那么他不得不引入虚拟的惯性力  $-m\mathbf{a}_r$ ，其中  $\mathbf{a}_r$  是火车相对于地球的加速度。如果乘客相对于火车静止，则  $\mathbf{a}'$  为零，于是惯性力  $-m\mathbf{a}_r$  和外力  $\mathbf{f}$  大小相等、方向相反。把火车作为参考系并引进虚拟的惯性力之后，因为乘客相对于火车是保持静止的，所以问题化为静力学问题。如果乘客把一个球从车厢天花板扔下，对于相对地球静止的观察者来说，球将沿抛物线运动。如果火车正在匀速运动，则对于车上乘客来说，球呈现为竖直下落；如果火车正在加速，则对于车上乘客来说，球不作直线运动，而呈现出对铅垂线有偏离，其偏离方向与火车加速方向相反。如果火车上的乘客想要利用牛顿运动定律来解释这种运动，那么为了说明球对铅垂线的偏离，他将不得不再次引入虚拟的惯性力  $-m\mathbf{a}_r$ ，此虚拟力不引起对于固定的恒星的加速度。直线加速度的另一个例子是在重力作用下自由下落的升降机地板上静止的物体的情形。

图 1.3(a) 所示的是另一种形式的加速运动。一个质量为  $m$  的质点  $P$  用绳子与  $O$  点相联结，它以匀角速度  $\omega$  绕通过  $O$  点的轴在光滑的水平桌面上旋转，如图 1.3(a) 所示。对于地

球来说，质点  $P$  具有指向  $O$  点的加速度  $r\omega^2$ ，这里地球被看作是一个近似的惯性系。为了产生这一加速度，必须有等于  $mr\omega^2$  的力作用在质点  $P$  上。这一向心力是由绳子拉质点  $m$  引起的。根据牛顿第三定律，存在一个大小相等、方向

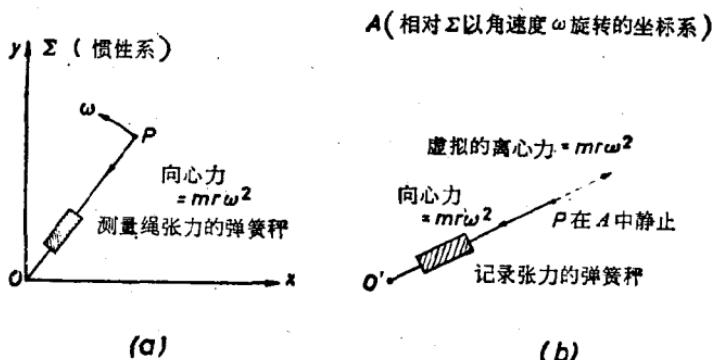


图 1.3 (a) 质点  $P$  在一光滑水平桌面上以匀角速度  $\omega$  转动。 (b) 在与  $P$  一起转动的坐标系  $A$  中，如果想要应用牛顿运动定律，则必须引入虚拟的离心力  $mr\omega^2$ 。

相反的力作用在绳子上。这个力是由这样事实所造成的，即质点  $P$  具有相对于地球作直线运动的倾向，换句话说，它倾向于要沿圆运动的切线飞开，而绳子迫使它作圆周运动。绳的张力可以用弹簧秤测量出来。现在考虑一个与质点  $P$  一起旋转的坐标系，记为  $A$ ，于是相对于  $A$ ， $P$  是静止的，如图 1.3(b) 所示。在  $A$  中，仍然存在一个由于绳子张力所引起的力作用在  $P$  上，就是等于  $mr\omega^2$ ，并指向  $O$  的向心力；此力仍可以用弹簧秤测量出来。如果想要在此转动坐标系中应用牛顿运动定律，那就不得不引进一个向外作用的虚拟惯性力  $-mr\omega^2$ ；于是作用在  $P$  上的“合力”将为零，因此  $P$  在转动坐标系中将保持静止。这个向外的虚拟力有时称做离心力。它不产生相对于固定恒星的加速度。

考虑相对于地球具有角速度  $\omega$  的旋转木马，如图 1.4(a) 所示。设在木马的  $Q$  位置上有一颗子弹相对于木马以速度  $u'$  沿垂直于木马的圆周方向射出。相对于地球，枪弹在切线方向具有速度  $r\omega$ 。其中  $r$  是木马半径。因此，相对于地球，子

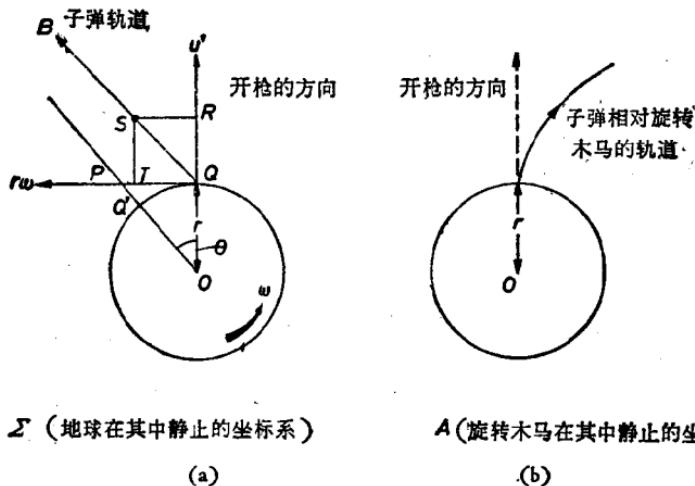


图 1.4 (a) 相对于地球，子弹沿  $QB$  走直线；(b) 相对于旋转木马，子弹走弯曲轨道。

弹沿  $QB$  方向前进。经过一段时间  $t$  后，在  $Q$  点方向的观察者将运动到  $Q'$  点，弧长  $QQ'$  等于  $r\omega t$ 。假如对于站在旋转木马上的观察者来说，子弹呈现直线运动，那么时间  $t$  后，子弹就会位于  $OQ'$  延线上的某处。在木马边缘的  $Q$  点引切线与  $OQ'$  延线交于  $P$  点，那么

$$PQ = r \tan \theta = r \left( \theta + \frac{1}{3} \theta^3 + \frac{2}{15} \theta^5 + \dots \right).$$

因此， $PQ$  长度大于弧长  $QQ'$ 。设  $QT = r\theta = r\omega t$ 。如果  $QR$  等于  $u't$ ，那么利用矢量平行四边形得出，在时间  $t$  后子弹必然位于  $S$  点，如图 1.4(a) 所示。因此，子弹不能达到

$OQ'$  延线上。对于木马上  $Q'$  点的观察者来说，子弹将呈现出沿顺时针方向偏转，如图 1.4(b) 所示。该观察者将看到子弹沿螺旋线运动。如果他想要应用牛顿运动定律来解释这种运动，那么除了虚拟的离心力外，他还必须引入虚拟的科里奥利力。

一般来说，如果要在相对于固定恒星作转动的坐标系中应用牛顿运动定律，那么就必须引入虚拟的离心力  $-m\omega \times (\omega \times r)$  和虚拟的科里奥利力  $-2m\omega \times u'$ 。这些虚拟的力不产生相对于固定恒星的加速度。由于地球以  $7.29 \times 10^{-5}$  弧度/秒的角速度绕其轴转动，因此严格说来，实验室坐标系不是惯性系，牛顿运动定律在其中严格来说是不成立的。当把与地球一起转动的坐标系作为静止标准时，如果想要用牛顿第二定律来描述质点相对于地球的运动，那么对于精确的工作，就必须引入虚拟的离心力和科里奥利力。由于地球的角速度非常小，不计这些力所引起的误差一般来说是可以忽略的。但它们有时也是重要的，例如当讨论傅科摆实验时必须考虑离心力，而在远射程海军舰炮学中和在解释信风时，科里奥利力就是重要的了。在惯性系中与在相对惯系转动或加速的坐标系中，对同一个力学现象的解释是不同的。牛顿曾指出绝对转动是可以确定的。例如他曾写道：

“例如假若有两个球，用绳连结着，使彼此保持固定距离，并令它们围绕着其公共重心转动，从绳的单纯张力就能发现两个球都有一种要离开转动轴的趋势，而根据这点，就能计算出圆运动的大小来。如果将任意相等的两个力同时加在两球的互相对立的面上以增加或减小其圆运动，那么我们就可以从绳张力的增加量，判断出转动是增加还是减小；因此也就能发现，要使球的运动显著增加，应该把力加在哪一面，就是说，要加在二球的背面，即在圆周运动中跟后的那一面。但是当我们一旦知道了哪一面跟在后面，当然

也就知道了哪一面走在前面，于是我们就同时知道了运动的方向。用这种方法，我们既知道了圆运动的大小，也知道了运动的方向，即使是所考虑的运动是处在无限的真空中，不存在任何外界的和能感觉到的事物可用来同两球相比较……”

根据爱因斯坦的广义相对论，运动定律（在引力场中）在所有参考系中都可以表示成一个相同的形式，无论参考系加速与否。本书除了第十二章外几乎全部讨论狭义相对论，它只涉及惯性系。

### 参 考 文 献

- [1] Jammer, M. *Concepts of Force*, p. 124. Harper Torchbook, Harper New York, 1962.
- [2] Dingle, H. *Sci. Progr.* L(1962) 568.

### 补 充 读 物

M. 玻恩 (Max Born) 所著的《爱因斯坦的相对论》 (*Einstein's Theory of Relativity*) 对牛顿力学作了基本说明。G. 霍尔敦和 D. H. D. 罗勒 (D. H. D. Roller) 合著的《现代物理科学基础》 (*Foundations of Modern Physical Science*) 对科学方法作了基本说明。

很多教科书讲了牛顿力学的应用，其中有 J. L. 辛基和 B. A. 格里菲斯 (B. A. Griffith) 的《力学原理》 (*Principles of Mechanics*)，G. 尤斯 (G. Joos) 的《理论物理》 (*Theoretical Physics*) 及 R. L. 霍夫曼 (R. L. Halfman) 的《动力学》第一卷，《质点、刚体和系统》 [*Dynamics. Volume 1. Particles, Rigid Bodies and Systems* (Addison-Wesley 1962)]。这些书对加速参考系作了清晰的论述。

### 习 题

#### 1.1 说明质量、长度和时间的标准。在相对地球做匀速

运动的火箭中,你如何建立与此相似的标准?

1.2 区别牛顿力学的惯性质量与引力质量. 讨论物体的惯性质量与引力质量成正比的实验依据(包括讨论厄缶 Eötvös 实验).

1.3 如果你被关在洞中,与外界隔绝,你做哪些实验(假若有的话)可以表明(a)地球在其绕日轨道上具有一定的线速度,(b)地球在转动. 你能确定自己所处的纬度吗? [提示: 对于(b), 利用傅科摆或者利用斯特鲁维(Struve)在《初等天文学》(Elementary Astronomy) 第 51 页所述类型的加速器.]

1.4 证明当坐标和时间都按伽利略变换式变换时牛顿运动定律服从相对性原理. 说清所做的全部假设.

1.5 一块石头在行速为 15 米/秒的船的桅杆上从静止落下. 选择  $\Sigma$ (实验室坐标系)和  $\Sigma'$ (船静止的坐标系)的原点,使得在石头开始下落的  $t = 0$  时刻石头与两原点重合. 证明相对于  $\Sigma'$ (船)石头的轨迹是一条直线,由  $x' = 0, y' = -gt^2$  给出. 证明如果船沿  $x$  轴行驶, 相对实验室坐标系石头的轨迹则为一抛物线,由  $x = 15t, y = -gt^2$  给出. 说明这两轨迹方程如何按伽利略变换式相互关联.

1.6 一质点吊在匀速行驶的火车车厢的天花板上,如果质点相对火车做圆周运动(即一圆锥摆), 利用伽利略变换证明, 相对于地球, 其轨迹为旋轮线.

1.7 如果把相对于固定恒星作转动的坐标系选做我们的静止标准, 讨论在牛顿力学中要引进哪些“虚拟”的惯性力.

1.8 一质点竖直地落向地面. 证明经时间  $t$  后它向东的偏离量为  $(\omega gt^3/3) \cos \lambda$ , 其中  $\omega$  是地球的角速度,  $g$  是重力加速度,  $\lambda$  是纬度(参阅尤斯的《理论物理》第一版 223 页).

1.9 证明傅科摆的摆动面以速度  $\omega \sin \lambda$  转动，其中  $\lambda$  是纬度， $\omega$  是地球的角速度（参阅斯特鲁维的《初等天文学》第 48 页）。

1.10 一质点相对地球静止。对于旋转木马上的观察者来说，这质点好像是以角速度  $\omega$  转动。对于木马，虚拟的离心力  $mr\omega^2$  向外作用。对于转动参考系，怎样才能使质点保持为作圆周运动？[提示：注意科里奥利力。]

1.11 证明用单摆在海平面上测量的重力加速度的数值由于地球转动在两极与赤道相差百分之 0.3。[提示：证明在赤道上（要考虑离心力） $g \approx g_0(1 - \omega^2 R/g_0)$ ，其中  $g_0$  是两极的重力加速度， $\omega = 7.29 \times 10^{-5}$  弧度/秒是角速度， $R = 6.367$  公里是地球的半径。]

## 第二章 历史概述 II 以太理论

### 2.1 光 以 太<sup>1)</sup>

#### 2.1.1 引言

在牛顿力学和牛顿万有引力理论获得初步成功后，似乎有理由可以尝试用力学来解释所有的自然现象，尤其因为人们在日常生活中对力学概念比较熟悉。这种用力学解释全部自然现象的企图，是从笛卡儿（生于 1596 年）开始的，一直延续到十九世纪末。例如，到这段时期的末期，开尔文曾写道：“只有对我所研究的事物建立了力学模型，我才感到满意。如果我成功地建立了这样的模型，我就理解了；否则我就还没有理解。”这种途径对声音的情况证明是很成功的。声音被解释为在媒质中传播的纵波。声音不能在真空中传播，媒质是它传播的基础。牛顿曾证明了波在弹性流体中的传播速度等于  $\left(\frac{\text{弹性模量}}{\text{密度}}\right)^{1/2}$ ，此处弹性模量是适用于所出现的形变的。拉

普拉斯曾经证明，将此公式用于声音在气体中的传播时，若假设压缩和膨胀过程是绝热的，则公式化成  $(\gamma p/\rho)^{1/2}$ ，其中  $\gamma$  是气体的比热比， $p$  是气体压力， $\rho$  是它的密度。此公式与许多气体中声速的实验值相符合。尽管声速依赖于传声媒质的运动速度和方向，也即是在气体情况下依赖于风的强度和方

1) 仅介绍一些以太理论的简单轮廓，读者想充分讨论可参阅维塔克著的《以太和电理论的历史》(*History of Theories of Aether and Electricity*)。2.2 节稍详细讲述了一些以后用狭义相对论才能解释的实验。

向，但声速不依赖于声源的速度。

同样，曾作过用力学模型来解释光的尝试，由此出现了两种理论。一种是把光描绘成微粒子流的微粒说，它假设这些微粒子遵守力学定律，打到眼睛上便产生光的感觉。另一理论是波动说。它最初由胡克提出，以后由惠更斯全面地加以系统化。这种理论认为光是一种通过空间传播的波动形式。在牛顿时代和此后一段时期，曾假设光波是纵波，但用纵波不能解释光的偏振。当时牛顿却能用微粒说较满意地解释偏振现象。他还认为微粒说比波动说能更好地说明光的直线传播，因为根据波动说，光应该像声音一样发生绕射；那时光的波长还没有确定过。直到十九世纪初，杨 (Young) 研究两束光线的干涉现象之前，微粒说一直保持着优势地位。杨和菲涅耳 (Fresnel) 根据波动说能够解释新观察到的干涉和衍射现象，从此以后光的波动说才被接受下来。由于声音不能通过真空，一定要有物质媒质来传递它，所以有理由假设，如果光是一种波动形式，那么在真空中和在物质中都必须存在能够传递光振动的某种媒质，这种媒质就叫做以太。

以太的想法在古希腊科学中就已经出现。它作为四种元素——火、土、水、气之外的元素被引入。当时认为上层空气是由以太组成的，因而古代宇宙学中假设以太占据天空区域。笛卡儿第一个赋予以太以力学性质，他否认超距作用的存在。他假设仅当物体相接触时才能相互作用。笛卡儿还假设以太充满整个空间，能够传递力和施加力于浸在其中的物体上。笛卡儿试图用以太中的涡旋说明天体的运动，例如，他提出涡旋携带行星围绕太阳运动。牛顿的著作中也时常提到以太，例如他谈到以太说：

“那么这种媒质不是比空气远为稀薄和微妙，远为富有弹性和活力吗？并且它不是渗透到所有的物体中吗？同时它不是（由于

它的弹力)扩展至整个天空吗?”

牛顿提出以太可能伴随引力作用、电磁现象和热辐射的传播,但他觉得光“既不是以太,也不是以太的振动,而是在透明物体中传播的另一种东西”。

当杨建立光的波动说时,他假设光是靠一种假想以太的振动来传播是有理由的,这种以太与当时认为传播电力的以太可能相同,也可能不相同。例如杨写道:“不管电以太和光以太是否可认为是同一种,如果这种流体存在,那么在将来某时或许可以通过实验发现它。”本节只考虑光以太,即假定能以传播光波的以太。为简短起见,简称为以太。杨提出以太“渗透到所有物质中时阻力很小或不受阻力,或许正像风通过树丛那样自由”。

采用声学类比法,即用声音的传播与光的传播相比较,往往是很有用的,在这类比中空气或传声物质相应于以太,而声波相应于光波。由于声速不依赖于声源速度,所以波动说也假设光速不依赖于光源速度。但是声速受传声媒质相对于观察者的运动的影响,也就是受风的影响。如果地球相对以太运动,那么这种相对运动应该影响光相对于地球的速度,并且应产生一些可观察到的光学效应。使我们能够确定地球相对于以太的运动。

### 2.1.2 光的线速和波速

根据经典理论,如果传播波动的媒质(有时也称介质)相对实验室运动,那么应该区分单色波的波速和线速(*ray velocity*),即使在真空中也是如此(波速和线速两词在晶体光学中经常使用)。考虑在实验室中为静止的一个光源  $S$ ,它发射一系列球面波,如图 2.1(a)所示。设这些球面波由于传输媒质相对于实验室运动而向右漂移。考虑发射后  $t$  时刻到达  $M$  点的波阵

面。此时波阵面中心在  $C$  点, 它与光源  $S$  的距离是  $SC = vt$ , 其中  $v$  为传输媒质相对实验室的速度。波速定义为在波法线方向也就是  $CM$  方向波阵面的速度。如果想要利用望远镜看见光源, 必须沿  $MS$  方向观察。对于这一点, 只要假想沿  $SM$  线有一系列狭缝, 就可以明白了。光将通过这些窄缝。望远镜把光源(物体)各部分发出的光线汇集起来形成物像。 $SM$  方向即为线速方向, 在实验室系统中, 它的大小等于

$$u = SM/t. \quad (2.1)$$

线速  $u$  是光波能量传播的速度。

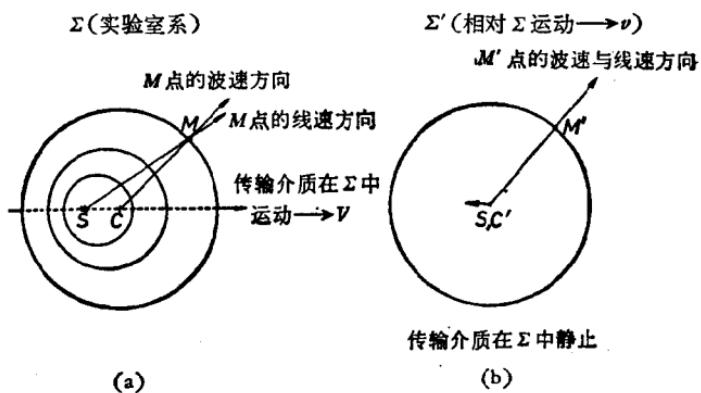


图 2.1 (a) 由于传输介质运动,  $\Sigma$  中静止的光源  $S$  发出的球面波向右移动。波速沿  $CM$  方向, 线速沿  $SM$  方向; (b) 传输介质静止, 光源以速度  $v$  向左运动。光源在  $C'$  发出的光的波速和线速在  $\Sigma'$  中具有相同方向  $C'M'$ 。

在相对实验室以速度  $v$  运动的坐标系中, 传输媒质处于静止状态, 如图 2.1(b) 所示。在这种情况下, 根据经典理论, 运动光源  $S$  与  $C'$  重合时发出的光波以  $C'$  为波阵面中心向外扩展。波速  $C'$  和线速  $u'$  都在  $C'M'$  方向。为了观察光源与  $C'$  重合时发出的光, 必须把在  $\Sigma'$  中静止的望远镜摆在  $M'C'$  方向。光波能量沿  $C'M'$  方向传播。在  $\Sigma'$  中光的线速等于

$$u' = C'M'/t = CM/t. \quad (2.2)$$

在图 2.1(a) 中媒质的速度是

$$\mathbf{v} = SC/t. \quad (2.3)$$

现在  $CM$ 、 $SC$  和  $SM$  构成了一个三角形的三边，于是分别等于  $CM/t$ 、 $SC/t$  和  $SM/t$  的  $\mathbf{u}'$ 、 $\mathbf{v}$  和  $\mathbf{u}$  构成一个矢量三角形，因此根据经典理论，有

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{v}. \quad (2.4)$$

因此，球面波线速像质点速度一样，按照伽利略速度变换公式，从传输媒质在其中静止的坐标系  $\Sigma'$  变换到相对于  $\Sigma'$  运动的坐标系  $\Sigma$ ，如图 2.1 所示。

现在讨论传输媒质运动对平面波的影响。考虑如图 2.2(a) 所示的平面波。设在  $t$  时刻波阵面在  $PQ$  位置，于是波

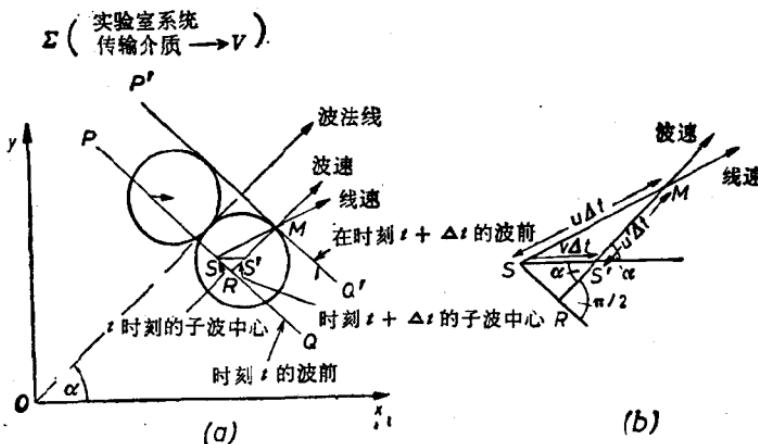


图 2.2 (a) 运动媒质中平面波的传播。在  $t$  时刻波阵面在  $PQ$  位置，在  $t + \Delta t$  时刻在  $P'Q'$  位置。传输媒质以匀速  $v$  沿正  $x$  方向运动。根据经典理论，波法线方向不受传输介质的运动影响，虽然波速和线速值改变。(b) 放大了的三角形  $SMR$ 。

法线在  $xy$  平面上，与  $x$  轴的夹角为  $\alpha$ 。根据惠更斯原理，波阵面上的每一点都可以看作二次子波源。这些子波在媒质中以光速向四面传播。根据经典理论，当传输媒质相对实验室运动

时,子波中心发生位移,例如在图 2.2(a) 所示的情况下,二次子波中心从  $S$  点移到  $S'$  点,其中  $SS'$  等于  $v\Delta t$ . 在  $t + \Delta t$  时刻,波阵面处在  $P'Q'$  位置. 如果媒质是静止的,那么波速  $c'$  和线速  $u'$  都由下式给出:

$$c' = u' = \frac{S'M}{\Delta t}. \quad (2.5)$$

另一方面,当媒质运动时,线速  $u$  等于  $SM/\Delta t$ . 矢量  $u'$ 、 $u$  和  $v$  又构成一个矢量三角形,于是线速从一个坐标系变换到另一个坐标系的方式和质点速度相同.(谬勒证明,根据经典理论,不论波阵面形状如何,这一点都是正确的.)

从图 2.2(a) 可以看出,不管传输媒质速度如何,波法线  $RM$  (或  $S'M$ ) 始终在同一方向,因此根据经典理论,平面波的法线方向不受传输媒质运动的影响.但是,两种情况的波速数值是不同的.在传输媒质运动的实验室坐标系中,波速由下式给出:

$$c = \frac{RM}{\Delta t}, \quad (2.6)$$

这是因为在  $\Delta t$  时间内波阵面从  $PQ$  位置运动到  $P'Q'$  位置.

在传输媒质为静止的坐标系中,波速等于

$$c' = \frac{S'M}{\Delta t} = \frac{u'\Delta t}{\Delta t} = u',$$

其中  $c'$  是在传输媒质为静止的坐标系中的波速,而  $u'$  是线速.从图 2.2(b),可以看出,

$$\begin{aligned} RM &= S'M + S'R, \\ c\Delta t &= c'\Delta t + v\Delta t \cos \alpha, \\ c &= c' + v \cos \alpha. \end{aligned} \quad (2.7)$$

而线速由下面的矢量关系给出:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{v}.$$

因此,

$$u = \sqrt{u'^2 + 2u'v \cos \alpha + v^2} \\ = u' \sqrt{1 + \left( 2 \frac{v}{u'} \cos \alpha + \frac{v^2}{u'^2} \right)}.$$

用二项式定理展开到  $v/u'$  的一级量, 得到

$$u = u' + v \cos \alpha = c' + v \cos \alpha. \quad (2.8)$$

比较方程(2.7)和(2.8), 可以看出, 精确到  $v/u'$  的一级量, 平面波的线速和波速的大小是相同的, 因此, 当讨论光速的大小时, 我们一般不区分它们. 通常都是用同一符号  $c$  表示波速和线速的大小, 此处我们也用这一方法. 波速和线速值依赖于波法线和传输媒质运动方向的夹角  $\alpha$ , 两种速度值均在  $c' - v$  到  $c' + v$  范围内变化. 精确到  $v/c$  的一级量, 可用方程(2.4)把平面波的波速和线速从以太静止的坐标系变换到相对以太匀速运动的坐标系. 虽然波法线方向不随传输媒质运动而变化, 但线速方向从  $S'M$  变到  $SM$ . 在 2.1.3 节中将看到, 线速方向的变化能够说明恒星光行差. 如果  $v \ll c$ , 则准确到  $v/c$  的一级量, 有

$$\widehat{SMR} \approx (v/c) \sin \alpha. \quad (2.9)$$

### 2.1.3 恒星光行差

1728 年, 天文学家布莱德雷 (Bradley) 发现了光行差现象. 布莱德雷观察到, 恒星在一年的不同时间表观位置有变化. 这种现象是由于地球在绕太阳轨道运动的有限速度而引起的. 用粒子速度变换公式, 可以由微粒说满意地解释这种现象. 根据波动说, 假定以太不受地球相对于太阳速度方向变化的影响, 也能解释这种现象. 我们先假设以太相对太阳静止. 考察太阳和以太都为静止而望远镜在运动的绝对坐标系  $\Sigma$ . 设从“固定”恒星来的光线进入望远镜, 如图 2.3(a) 所示. 望远镜接收到一束光线, 其方向受以太风的影响. 如果在  $\Sigma$

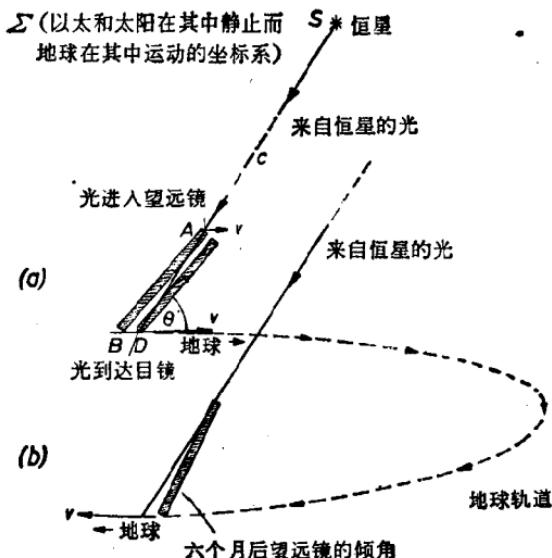


图 2.3 (a) 在以太静止的坐标系中, 说明固定恒星的光行差。望远镜必须沿  $AB$  方向, 以使在  $A$  点进入望远镜的光到达  $D$  点的目镜。 (b) 望远镜的倾角必须随地球绕太阳的速度方向而变化。

中以太静止, 那么这束光线进入望远镜后将沿  $SA$  方向继续前进。设光通过望远镜需时间  $t$ 。在这段时间内, 望远镜的目镜通过距离  $vt$ , 其中  $v$  是地球相对以太的速度。为保证光线到达望远镜目镜, 望远镜必须装在  $BA$  方向, 它与光线入射方向成  $BAD$  角, 使  $BD = vt$ , 如图 2.3(a) 所示。现在  $AD$  等于  $ct$ , 其中  $c$  是光速。因为  $v$  远小于  $c$ , 所以精确到  $v/c$  的一级量, 有

$$\widehat{BAD} = (v/c) \sin \theta. \quad (2.10)$$

六个月以后, 地球反向运动, 如图 2.3(b) 所示。此时望远镜必须装在  $SA$  方向的另一边。于是, 如果以太不受地球绕太阳运动速度方向变化的影响, 那么恒星的表观位置应随季节而

变化。

从地球静止的参考系(叫做地心参考系)解释光行差现象是很有意义的。在该参考系中,以太运动的速度  $\mathbf{w}$  等于  $-\mathbf{v}$ ,如同声学类比中的风一样。与图 2.3(a) 相对应的地心参考系如图 2.4 所示。望远镜必须指向从恒星射来光的方向。2.1.2

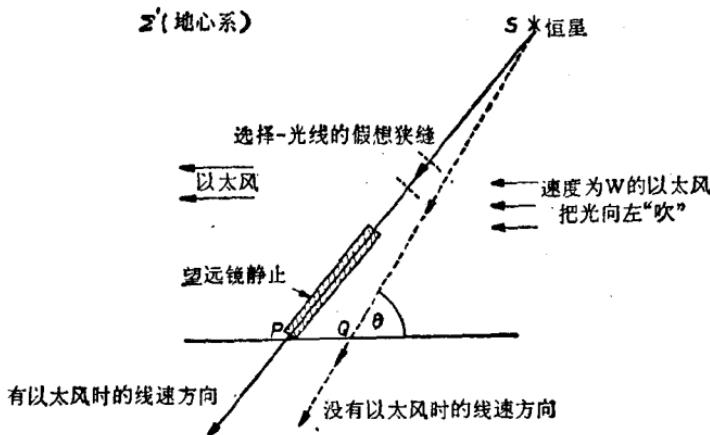


图 2.4 地心坐标系表示固定恒星光行差。由于以太风的作用,线速方向从  $SQ$  变到  $SP$ 。望远镜必须摆在  $PS$  方向才能使光沿望远镜轴线进入望远镜。六个月以后以太风反向。

节已证明了,光线方向在以太风影响下会发生变化。如果  $\mathbf{c}'$  是相对于静止以太的线速,那么在地心参考系中(此参考系中以太风的速度为  $\mathbf{w}$ ),线速等于  $\mathbf{w} + \mathbf{c}'$ ,并沿图 2.4 中  $SP$  方向。精确到  $v/c$  的一级量,有

$$\widehat{PSQ} \approx \frac{w}{c'} \sin \theta = \frac{v}{c'} \sin \theta.$$

必须将望远镜放在沿地心参考系中光的线速方向,即沿  $PS$  方向,才能保证光线沿轴线进入望远镜。六个月以后“以太风”在地心参考系中反向,因此,望远镜必须装在  $QS$  的另一边向上。

为便于讨论，假设了以太相对于太阳为静止的。现在太阳可能相对以太在运动，在这种情况下，就会有相对太阳的以太风，如图 2.5 所示。这种“以太风”把光线从  $SN$  方向“吹向” $SM$  方向，如图 2.5 所示。如果“以太风”相对于太阳，大小和方向始终是相同的，那么从恒星来的光线相对太阳终年都是沿  $SM$  方向。再把地球的运动考虑进去，那么地球上望远镜的倾角必须围绕  $SM$  方向而变化，如图 2.5 所示。

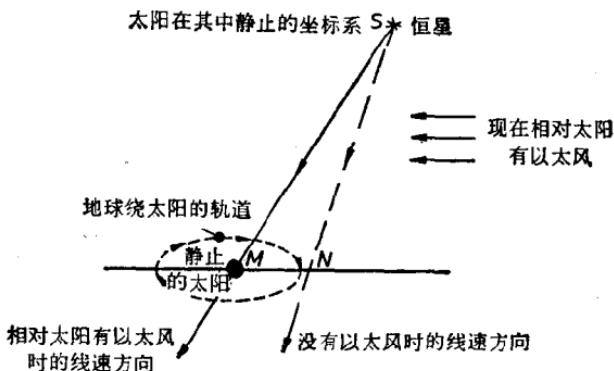


图 2.5 相对太阳静止的坐标系的“以太风”。结果相对太阳，“以太风”大小和方向终年不变，那么来自固定恒星的光线相对太阳始终沿  $SM$  方向。

根据以太理论，正是假设地球相对以太的速度有变化，才产生光行差现象。由这种解释能够得出光行差的正确值，精确到  $v/c$  的一级量。用观察恒星光行差的办法，不可能测出地球相对于以太的总速度，只能测出当时认为是地球相对以太的速度变化。

#### 2.1.4 菲涅耳拖曳系数

玻璃的折射率决定于光在玻璃内外的波速之比。如果在地球上静止的玻璃块相对于以太运动，那么以太便穿过玻璃流出。根据经典以太理论，传输媒质的这一运动同时影响玻

璃内外的光的波速。在以太静止的参考系中，设  $c'$  是空气中平面波的波速， $w$  是空气中相对实验室的“以太风”速，则空气中相对于实验室的光波速由方程(2.7)给出，等于

$$c = c' + w \cos \alpha.$$

合成波速的大小依赖于光线方向和“以太风”方向间的夹角  $\alpha$ 。于是，根据经典理论，当光线的方向相对“以太风”变化时，空气中光的波速大小也随之变化，其变化区间从  $c' + w$  到  $c' - w$ 。这意味着空气中从不同方向来的光的波速是不同的。类似地，对于在实验室中静止、在以太中运动的玻璃块内部，光的波速也应该依赖于内部光线方向和“以太风”方向间的夹角，因此对于以不同方向穿过玻璃的光线也应该是不同的。玻璃折射率等于两合成波速度之比，从而应该随着穿过玻璃的光线方向变化而变化。通过测量玻璃在空间不同方向的折射率，原则上应能够检测出地球相对于以太的运动。

1810 年阿拉果 (Arago) 把消色差棱镜放在望远镜前，从而观察到当望远镜指向天空不同位置的恒星时，棱镜使各恒星光线偏离的程度。如果玻璃的折射率依赖于光线相对于“以太风”的方向，那么棱镜引起的偏离也应该随恒星光线的方向而变化。阿拉果发现，不论恒星在天空的位置如何，棱镜引起的偏离都没有任何变化，因此利用阿拉果的实验不可能发现地球相对于以太的运动。可以指出，阿拉果的仪器是否灵敏得足以发现这一效应(如果存在的话)是值得怀疑的。此实验是有历史意义的，因为阿拉果曾写信给菲涅耳，问他能否根据波动理论解释这一实验。菲涅耳在回信中根据波动理论解释了该实验的否定结果，并首先引入了拖曳系数。现在简要叙述一下菲涅耳的理论。

考虑如图 2.6 所画的一块横截面为  $A$  的玻璃块。设长边平行于它相对于以太的运动方向，并设它在正  $x$  方向有相对

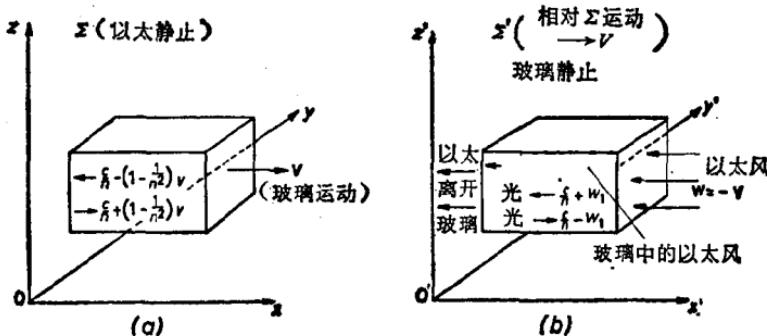


图 2.6 (a) 玻璃块以速度  $v$  相对于以太静止的绝对坐标系运动。根据菲涅耳理论，在玻璃相对以太运动方向玻璃内的光速等于  $(c/n) + (1 - 1/n^2)v$ ，在相反方向等于  $(c/n) - (1 - 1/n^2)v$ 。(b) 在玻璃静止的坐标系  $\Sigma'$  中，空气内存在速度  $w = -v$  的“以太风”。玻璃中“以太风”方向的光速等于  $c/n + w_1$ ，在相反方向等于  $c/n - w_1$ ，其中根据菲涅耳理论  $w_1 = v/n^2$ 。

于以太的速度  $v$ ，如图 2.6(a) 所示。考虑参考系  $\Sigma'$ ，玻璃块在其中静止，如图 2.6(b) 所示。在此坐标系内存在以太风，如图 2.6(b) 所示的，速度为  $w = -v$ （在真空中）。假设以太风进入此玻璃并不绕边流过。当在单位时间内离开玻璃块末端的以太量与进入玻璃块前端的以太量相等时，便达到了动力平衡状态。设以太在真空中的密度是  $\rho$ ，在玻璃中是  $\rho_1$ 。设在玻璃中以太风的速度为  $w_1$ ，如图 2.6(b) 所示。每单位时间进入玻璃块的以太量是  $\rho w A$ ，而流出量是  $\rho_1 w_1 A$ ，此处  $A$  是玻璃块的横截面积，如果玻璃块内没有以太的积累，那么

$$\rho_1 w_1 A = \rho w A$$

或者

$$w_1 = \frac{\rho}{\rho_1} w = \frac{\rho}{\rho_1} v \quad (2.11)$$

在声音的情况，声速等于传输媒质的弹性系数与密度之比的平方根。菲涅耳建议，在以太静止的折光媒质中，光速反比于该媒质中以太密度的平方根。（如果以太的弹性在所有物质

中都是相同的，那么这是符合于声学类比的。) 如果  $n$  是当玻璃相对以太静止时玻璃的折射系数，那么  $n$  由下式给出：

$$n = \frac{\text{以太静止时真空中的光速}}{\text{以太静止时玻璃中的光速}} = \frac{1/\sqrt{\rho}}{1/\sqrt{\rho_1}},$$

或者

$$\frac{\rho_1}{\rho} = n^2. \quad (2.12)$$

代入方程(2.11)，得到：

$$w_1 = \frac{w}{n^2} = \frac{v}{n^2} \quad (2.13)$$

这是在坐标系  $\Sigma'$  中玻璃内的以太风速，如图 2.6(b) 所示，在  $\Sigma'$  中玻璃是静止的。设当以太和玻璃相互静止时玻璃内的平面波速为  $c'_1$ 。如果  $c$  是没有以太风时真空中的光速，那么

$$c' = c/n. \quad (2.14)$$

在 2.1.2 节证明了，线速和波速按方程 (2.4) 从没有以太风的坐标系变换到有以太风的坐标系。所以在此情况，如果  $c_1$  是玻璃内有以太风  $w_1$  时相对于玻璃的光速，那么

$$c_1 = c'_1 + w_1. \quad (2.15)$$

区分下述两种情况是很重要的：

(a) 当光和以太风同方向，也就是沿图 2.6(b) 的负  $x$  方向时，

$$\begin{aligned} c_1 &= c'_1 + w_1 = c'_1 + \frac{w}{n^2} = \frac{c}{n} + \frac{v}{n^2} \\ &= \frac{c}{n} - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)v + v; \end{aligned} \quad (2.16)$$

(b) 当光和以太风反方向，也就是沿图 2.6(b) 的正  $x$  方向时，

$$c_1 = c'_1 - w_1 = c'_1 - \frac{w}{n^2} = \frac{c}{n} - \frac{v}{n^2}$$

$$= \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)v - v; \quad (2.17)$$

采用以太在其中静止的坐标系  $\Sigma$  有时会更方便。利用伽利略速度变换可以得到玻璃中相对于  $\Sigma$  的光速。当光和玻璃运动方向相同时，也就是正  $x$  方向时，从方程(2.17)得到玻璃内相对于  $\Sigma$  的光速等于  $c/n + v(1 - 1/n^2)$ ，而当光和玻璃运动方向相反时，它等于  $c/n - v(1 - 1/n^2)$ ，如图 2.6(a) 所示。在以太为静止的坐标系  $\Sigma$  中，玻璃相对以太运动时好像是拖着一部分以太和它一起走。玻璃内的以太不是全被拖走，因为玻璃内光速不等于  $c/n + v$ 。因子  $(1 - 1/n^2)$  通常称做菲涅耳拖曳系数。空气的拖曳系数  $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$  非常接近于零，一般可以忽略。菲涅耳证明了，如果相对以太运动的玻璃拖曳以太的量恰为此数，那么在精确到  $v/c$  的一级项时，由棱镜引起的光折射将不受地球相对以太运动的影响。（关于这点的证明，请读者参阅威特克的文章<sup>[3]</sup>。）

阿拉果实验不够精确，还不足以发现玻璃折射率随光线方向的变化。后来根据相同原理，利用干涉仪又做了几个实验，例如霍克<sup>[4]</sup>，以及马司卡脱（Mascart）和贾明（Jamin）等人<sup>[5]</sup>所做的。下面介绍后两人的实验。

### 2.1.5 马司卡脱和贾明的实验

马司卡脱和贾明采用的实验装置如图 2.7 所示。从光源  $S$  发出的光射到半镀银镜  $M$  上。一部分光被玻璃板  $P$  的上表面反射，沿路径 1 走；而另一部分光沿路径 2 走。用直角棱镜代替普通贾明干涉仪的第二块板。于是，除了光线 1 是沿顺时针方向通过水槽  $W$  而光线 2 是沿反时针方向通过水槽外，它们的光路径是相同的。两股光线相会，产生干涉条纹，由望远镜  $T$  观察。

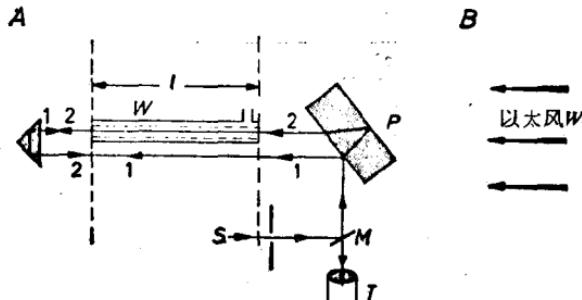


图 2.7 马司卡脱和贾明的以太移动实验。路径 1 和 2 的区别仅在于路径 1 沿顺时针方向通过水槽，而路径 2 沿反时针方向。水槽  $W$  中的水相对仪器静止，仪器转动时没看到条纹移动。

为便于讨论，假设地球沿  $AB$  方向以速度  $v$  相对以太运动，于是对于实验室来说存在速度为  $w = v$  的从右向左的以太风，如图 2.7 所示。对于路径 1 和 2，仅需考察图 2.7 中一段长为  $l$  的水和一段等长  $l$  的空气，其余路径全是相同的。设  $c$  是以太和空气相对静止时空气中相对以太的光速。如果是相对以太静止的水的折射率，那么此时水中的光速，当在以太静止的坐标系中测量时，等于  $c/n$ 。在有以太风  $w$  的实验室坐标系中考察光线 1。将  $n = 1$  代入方程 (2.16)，得到光线 1 在长为  $l$  的一段空气中的速度等于  $c + w$ ，此段光线顺以太风而行。在长为  $l$  的一段水中光线 1 逆以太风而行，根据方程 (2.17)，光线相对实验室的速度等于  $(c/n + fw - w)$ ，其中  $f$  是拖曳系数。光线 1 顺时针方向经过长度为  $l$  的一段空气和长度为  $l$  的一段水的总时间等于

$$t_1 = \frac{l}{c + w} + \frac{l}{\frac{c}{n} + fw - w}. \quad (2.18)$$

光线 2 在水中顺以太风而行，而在回来的空气中逆以太风而行。光线 2 反时针经过长度为  $l$  的一段水和长度为  $l$  的一段

空气的时间等于

$$t_2 = \frac{l}{\frac{c}{n} - fw + w} + \frac{l}{c - w} \quad (2.19)$$

一般说来不能期望这两个时间是相等的。如果仪器转动 180 度使“以太风”相对仪器正好调转方向，那么可以期望会出现条纹移动。但是当贾明和马司卡脱做实验时，无论干涉仪的方向如何都看不到条纹移动。马司卡脱和贾明做出结论：对干涉仪的所有方位， $t_1 = t_2$ ，即

$$\begin{aligned} \frac{l}{c + w} + \frac{l}{\frac{c}{n} + fw - w} &= \frac{l}{\frac{c}{n} - fw + w} + \frac{l}{c - w} \\ \frac{l}{c - w} - \frac{l}{c + w} &= \frac{1}{\frac{c}{n} - w(1-f)} - \frac{1}{\frac{c}{n} + w(1-f)} \\ \frac{2w}{c^2 - w^2} &= \frac{2w(1-f)}{\frac{c^2}{n^2} - w^2(1-f)^2} \\ c^2 \left[ \frac{1}{n^2} - \frac{w^2}{c^2} (1-f)^2 \right] &= c^2 \left( 1 - \frac{w^2}{c^2} \right) (1-f). \end{aligned}$$

如果假设  $w$  远小于光速  $c$ ，那么数量级为  $w^2/c^2$  的各项可以忽略，于是精确到  $w/c$  的一级量，有：

$$\frac{1}{n^2} = 1 - f,$$

或

$$f = 1 - \frac{1}{n^2}. \quad (2.20)$$

这与菲涅耳理论一致。如果  $f$  不为此特殊值，那么贾明和马司卡脱的实验原则上应该能检测出地球相对以太的运动。

霍克的实验原理与此相同，结果也相同。贾明和马司卡

脱实验的优点是，整个实验都有干涉条纹，他们要找的是已存在的条纹发生的移动。霍克的实验在开始时没有条纹，而是期望转动仪器时发现条纹。人们不能断定实验条件是否正好能检测出霍克要找的效应。

### 2.1.6 艾利实验

菲涅耳在给阿拉果的回信中，将他的以太理论用于波斯卡维奇 (Boscovich) 1776 年提出的实验，该实验利用装满水的望远镜观测恒星光行差现象。当望远镜充满水时，望远镜内的光速要除以因子  $n$ ，其中  $n$  是水的折射率。如果“以太风”速在水中和空气中是相同的，那么可以期望行差角会增加。菲涅耳预言，如果由于水相对以太运动，水拖曳以太的量由方程(2.20)给出，那么镜内装水时的行差角(从而望远镜的仰角)与装空气时应该正好相同。艾利 1871 年做此实验时，在  $v/c$  一级量的精确范围内证实了菲涅耳的预言。艾利的实验解释如图 2.8(a) 所示，图中为绝对坐标系，以太静止而地球和望远镜以速度  $v$  运动。假设盛水的望远镜和盛空气时一样也装在  $BA$  方向，如图 2.8(a) 所示。因为光线不是沿望远镜的法线射入，所以光线进入望远镜要发生折射。如果以太静止并不被水拖曳，那么折射后的光线沿图 2.8(a)  $AC$  方向进行。因为水中的光速小于空气中光速，所以可以期望光线到达  $C$  点时目镜到达  $E$  点。菲涅耳的意见是，由于水相对以太运动，水拖曳部分以太，使得光线从  $AC$  方向被拖至  $AE$  方向，于是光线在  $E$  点到达目镜。

如果光线经过盛空气的望远镜时目镜移动的距离是  $BD$ ，那么光线经过盛水的望远镜时目镜移动的距离便是  $BE = nBD$ ，因为水中光速要小一个因子  $n$ 。由斯涅耳(Snell) 折射定律，由于夹角很小，有：

$$BD = nBC,$$

因此

$$BE = nBD = n^2BC.$$

如果  $v'$  是在  $BE$  方向水拖曳光的速度， $v$  是地球相对于以太的速度，那么因为目镜从  $B$  到  $E$  的同时，光必须从  $C$  被拖至  $E$ ，所以有：

$$\frac{v'}{v} = \frac{CE}{BE} = \frac{BE - BC}{BE} = 1 - \frac{BC}{BE},$$

或

$$v' = v \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

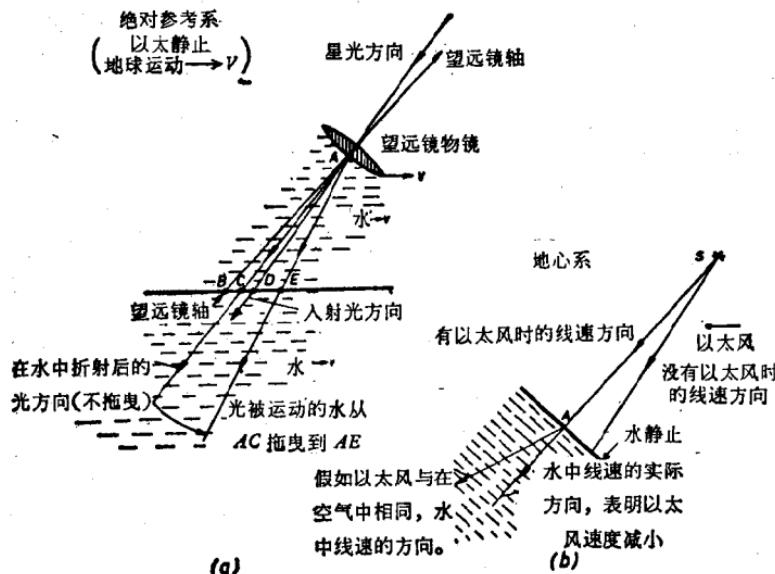


图 2.8 (a) 空气内以太静止的绝对坐标系。来自恒星的光线沿  $AD$  方向，盛空气的望远镜需沿  $BA$  方向装置以使光线到达  $D$  点的目镜，艾利实验中望远镜盛水和盛空气的望远镜倾角相同。根据菲涅耳理论运动的水拖曳水中部分以太与其同行，因此光被从  $AC$  方向拖至  $AE$  方向。(b) 地心坐标系，其中望远镜和地球都静止。

如果当望远镜盛水时行差不变，那么根据以太理论，运动的水拖曳以太的量必须为菲涅耳所预言的数值。用图 2.8(b)的地心系解释该实验是很有趣的。地心系中充空气的望远镜内存有速度为  $w = v$  的“以太风”。空气中此风把光线“吹”到  $SA$  方向。如果“以太风”速在水中仍等于  $v$ ，则光线将被吹过更大的角度，也就是吹到  $AP$  方向，因为水中光速比空气中小。根据菲涅耳理论，地心系中水的作用是减低“以太风”速，使光线  $SA$  方向不发生变化。

根据以太理论，假设光的传播必须与以太静止的绝对坐标系相联系，还假设相对以太的运动能影响光速。为了说明艾利的实验中望远镜内盛空气和盛水时行差角没有任何不同，以及在霍克和贾明与马司卡脱的实验中看不到条纹移动这些事实，必须引入拖曳系数作为补偿效应。这些实验说明，在只精确到  $v/c$  的一级量范围内，不能用实验检测出地球相对于以太的运动。

### 2.1.7 菲索确定流水中光速的实验

早在 1851 年菲索就做了运动媒质中光速的实验。菲索的实验装置如图 2.9。由狭缝光源  $S$  发出的光在玻璃板  $G$  上反射，经透镜  $L_1$  后形成平行光，然后被狭缝  $A$  和  $B$  分成两束。经图中所示的水后，两束光线被透镜  $L_2$  焦点处的镜子反射。回来时两束光线路程互相交换，然后在  $S'$  处汇合，形成干涉带。如果水是静止的，由贾明和马司卡脱的实验知道，两束光线的路程是完全相同的。当水按图 2.9 的方向流动时，由狭缝  $A$  进入的那束光线始终与水流方向相反，而由狭缝  $B$  进入的那束光线始终与水流方向相同。如果水拖曳以太使得与水流方向相同的光速是  $(c/n) + fv$ ，而与水流方向相反的光速是  $(c/n) - fv$ ，那么两束光线经过水所需时间之差是

$$\Delta t = \frac{2l}{(c/n) - fv} - \frac{2l}{(c/n) + fv},$$

其中  $v$  是水相对于实验室的速度,  $f$  是拖曳系数。当水开始流动时, 这一光程差就将引起干涉条纹的移动。倒转水流方向, 效应会增加一倍。当水速是 7 米/秒时, 菲索发现有可观测到的条纹移动。此实验精确到能发现  $f$  是小于一的分数。1886 年麦克耳逊和莫雷用更精确的实验装置又重复了该实验。他们发现, 当  $l$  大约是六米,  $v$  大约是 8 米/秒时, 条纹移动对应于  $f$  为  $0.434 \pm 0.02$  的数值。菲涅耳公式给出:

$$f = 1 - \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{1.33^2} = 0.438.$$

它与实验结果符合得很好。

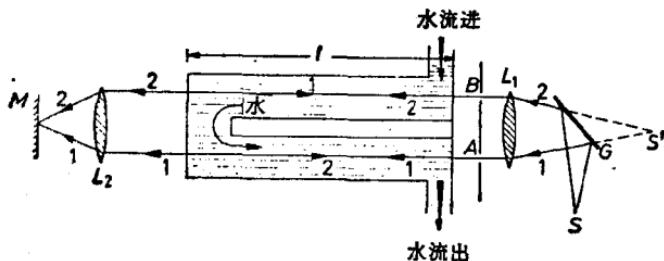


图 2.9 菲索确定水流中光速的实验

到此为止已经说明了, 在精确到  $v/c$  的一级量, 用光学仪器如何不能检测出地球相对于以太的绝对运动。这些否定结果可用菲涅耳的拖曳系数来解释。当光通过的媒质相对实验室运动时, 看到了干涉条纹的移动, 例如菲索测量水流中光速的实验。这样, 观察者和水之间的相对运动在精确到  $v/c$  的一级量时就引起可观测的效应。此结果虽然能用以太理论解释, 但也不是没有困难的。拖曳系数依赖于折射率  $n$ 。由于媒质的折射率随着所用光的频率而变化, 所以拖曳系数不得

不随所用光的颜色而变化。白光是由各种频率的光组成的，所以解释白光在水流中的传播就遇到了困难。当然这里假定我们不准备提出另一种不同的以太，它对于所用的光的各种频率被拖曳的量不同。

### 2.1.8 以太的早期机械理论

在开展测量地球相对以太速度的有关实验的同时，用以太机械性和弹性来解释所设想的以太中光波传播实际机理的各种理论也发展了。开始时，假设光波是纵波。纵波可以在液体和气体中传播。于是根据这种模型，可以把以太描述成一种气体。大约在 1820 年杨和菲涅耳发现，为了根据波动理论解释光的偏振现象，必须把光描述为一种横波运动。当时人们早已知道，有像水波之类的横向表面波，但关于横波在固体中的传播还没做过实验或理论的研究。菲涅耳指出，如果以太具有刚性，也就是具有抵抗形状扭曲的能力，那么以太就可能传播横波。此后泊桑 (Poisson) 在 1828 年发展了弹性固体中波的传播理论。泊桑指出，在固体中纵波和横波都可以传播，横波速度是  $(\eta/\rho)^{1/2}$ ，而纵波速度是  $\left[\left(k + \frac{4\eta}{3}\right)/\rho\right]^{1/2}$ ，

其中  $\eta$  是弹性媒质的刚性模量， $k$  是体积弹性模量， $\rho$  是密度。气体和液体没有刚性，因此横波通常不能通过流体容积来传播。另一方面，固体具有刚性，于是不得不把以太描绘为具有某些弹性固体的性质。既然物体(例如行星)能够自由地通过假想以太，而几乎不受什么阻力，而同时以太本身却又要具有固体的弹性性质。这是以太理论在此阶段所遇到的主要困难之一，直到后来斯托克斯指出，像沥青和果子冻之类的物质既有足够刚性，能够承受弹性振动，又有充分的流动性，允许其它物体从中通过，尽管要走得很慢。斯托克斯建议，以太

就是具有这种性质的物质，对于构成光的非常快速的振动它像弹性固体，但是对于像行星这种慢得多的行进速度它又像流体一样易于变形。

以太的弹性固体模型此时面临的另一个困难是怎样解释不存在纵波，而在固体中则是应该有纵波与横波相伴的。1839年哥西(Cauchy)建议以太具有负压缩性从而恰使  $k + \frac{4}{3}\eta$  为零。于是纵波的速度为零。这个理论后来叫做“可缩”或“不稳”理论。开尔文进一步发展了这个理论。格林(Green)曾指出这样的以太是不稳定的，随时倾向收缩。为了克服这个困难，开尔文建议以太像不含空气的均匀泡沫，由于它粘在固体上而维持不破。上述诸理论都是根据于固体和流体的各种已知的弹性的。

1839年马克可拉(James MacCullagh)提议说以太是一种与已知的弹性物质不同的新型弹性物质。马克可拉建议以太的各单元能够抵抗扭转应力，但不能抵抗纵向应力。基于这点马克可拉能够解释许多光学现象。马克可拉以太理论方程组的结果是与麦克斯韦方程组在数学形式上相似，在十九世纪后半叶马克可拉的理论获得广泛发展。1889年开尔文建立了马克可拉的以太单元的模型。开尔文用四根棒将正四面体的四角和中心联结起来。每根棒作为一对反向旋转陀螺飞轮的轴。此模型能抵抗所有转动扰动，但不能抵抗平移运动。

另外，为了解释光的传播机理，以太理论还被进一步推广试图解释光的折射和反射定律、光的偏振、晶体光学等等。各种理论中引入了关于以太的密度和弹性之类性质的大量附加假设，也引入了各种边界条件。必须把这些以太理论看作是设计以太的尝试，要把以太设计得具有这样的性质，能够从动力学基础来解释光的性质。通过对以太力学性质的任意假

设，可以在一定范围内从动力学基础上解释光学现象。

从 1820 年起，在奥斯特发现电流磁场之后，经典电磁学急速发展，其最高峰是麦克斯韦方程组和光与电磁辐射的统一。在此期间，以太变得既和光的传播，又和电磁力的传播相联系。下节将回顾电磁学的兴起。

## 2.2 电磁学的兴起

从古以来就知道琥珀经过摩擦后能吸引轻物体。永磁现象也是自古即知的。但直到十八世纪才发现了电荷间和磁“极”间作用力的平方反比定律。直到 1820 年奥斯特才发现，导线通过电流时，导线附近的磁针会偏转。电磁学这门科学只有不到一个半世纪的历史。牛顿力学的出现比它要早一个半世纪。1820 年光的波动说正在盛行，把光解释为光以太的振动。因为电力与磁力能在真空中传播，好像有理由假设有一种以太对传播这些力起作用。在奥斯特的发现之后，电磁学迅速发展。由安培、毕奥和沙伐的实验工作建立了电流单元之间和恒定电流线圈之间的作用定律。此后法拉第和亨利又接着发现了电磁感应。

法拉第用力线描绘电力和磁力，麦克斯韦又用电场和磁场的概念发展了这个图象。麦克斯韦假设真空中电力线处于拉紧状态。根据这种模型，假设力线从正电荷开始到负电荷终止，它们像绷紧的橡皮带一样把正负电荷向一起拉。为满足以太在静电力影响下必须处于平衡状态的条件，假设电力线还横向相互排斥，产生与力线垂直的压力。假设这种压力由以太传递。用此压力能够解释同种电荷间的排斥作用。类似地，借助磁力线解释了磁力的传播。麦克斯韦应力张量概括了这些结果。假设作用在空间任意体积上的力可由该体积表

面的电场和磁场值利用此应力张量计算出来。当体积表面经过真空时，假设由此应力张量推得的作用在这部分面积上的力是由以太传递的。

经典电磁学定律可概括成熟知的麦克斯韦方程组的形式。利用矢量分析和米·千克·秒单位制，麦克斯韦方程组取如下形式<sup>1)</sup>：

$$\operatorname{curl} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.21)$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.22)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (2.23)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (2.24)$$

方程(2.21),(2.22),(2.23)和(2.24)中出现的所有量都是指某一时刻空间中某一点的值。麦克斯韦方程组中， $\rho$  是真实的体积电荷密度， $\mathbf{J}$  是真实的电流密度，也就是穿过某点处单位截面积的电流。场量  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  和  $\mathbf{D}$  在不同教科书中定义方式各不相同。附录 2 中对它们概括地给出了最适于建立狭义相对论的定义和解释。为对一些问题求解，麦克斯韦方程组需要补充上联系  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$  和  $\mathbf{E}$  以及  $\mathbf{J}$  和  $\mathbf{E}$  的本构方程 (constitutive equation)。在麦克斯韦时代，这些关系式是根据物质的宏观实验建立的。

根据方程(2.24)，磁感应  $\mathbf{B}$  的线是连续的，即不存在自由磁“极”。

如果将方程(2.23)对有限体积积分，得到

$$\int \operatorname{div} \mathbf{D} dV = \int \rho dV,$$

但由高斯定理有

1) 还不熟悉麦克斯韦方程组和矢量分析的读者可跳过这段讨论。在第八章以前，我们不广泛使用麦克斯韦方程组和矢量分析。

$$\int \operatorname{div} \mathbf{D} dV = \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS,$$

其中  $\mathbf{n}$  是垂直于面积元  $dS$  的单位矢量。因此有

$$\int \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \int \rho dV. \quad (2.25)$$

根据方程(2.25)，流出某体积表面的  $\mathbf{D}$  总通量等于该体积内的总真实电荷。于是方程(2.23)代表有电介质存在时的高斯定理。

将方程(2.21)在一块面积上积分，得到

$$\int \operatorname{curl} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = - \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS,$$

但由斯托克斯定理，有

$$\int \operatorname{curl} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l},$$

因此

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2.26)$$

根据方程(2.26)， $\mathbf{E}$  沿封闭回路的积分(即电动势)等于回路内  $\mathbf{B}$  通量的变化率。方程(2.21)代表法拉第感应定律。

将方程(2.22)在一块面积上积分，得到

$$\begin{aligned} \int \operatorname{curl} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} dS &= \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS + \int \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS. \end{aligned} \quad (2.27)$$

根据方程(2.27)， $\mathbf{H}$  沿封闭回路的积分(磁动势)等于回路内的总真实电流与  $\int \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS$  这一项之和。方程(2.21)中

$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  项是麦克斯韦提出的，叫作“位移电流”。因为任意矢量旋度的散度必然为零， $\operatorname{div} \operatorname{curl} \mathbf{H}$  必须为零。假如方程(2.22)

中不存在  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  这一项,  $\operatorname{div} \mathbf{J}$  将必须为零。这意味着此时方程(2.22)仅能适用于完整电路中的稳恒电流,对于后者  $\operatorname{div} \mathbf{J}$  才为零。由实验知道交流电可通过含有电容器的回路,因此需把方程  $\operatorname{curl} \mathbf{H} = \mathbf{J}$  加以扩充。如果电荷守恒,那么在电流变化的空间点必然有相应的电荷密度变化,即

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (2.28)$$

这就是连续性方程。代入  $\rho = \operatorname{div} \mathbf{D}$ , 得到

$$\operatorname{div} \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0.$$

虽然一般  $\operatorname{div} \mathbf{J}$  不能为零,但  $\operatorname{div} \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)$  可能等于零。因此可以象方程(2.22)那样,令量  $\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  等于矢量  $\mathbf{H}$  的旋度。因此在数学上有理由引入位移电流

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P},$$

从而,

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}.$$

现今把电介质的极化现象解释为在外加电场影响下,分子中正负电荷的分离。极化矢量  $\mathbf{P}$  的变化意味着正负电荷的相对运动。于是有理由期望,当电荷运动从而造成  $\partial \mathbf{P} / \partial t$  项时,它们也产生一磁场。 $\epsilon_0 (\partial \mathbf{E} / \partial t)$  这一项在真空中的点上也存在,而根据现代观点这不能用在真空中一点上真实电荷的位移来解释。在麦克斯韦时代电子还没发现,也没有完善的原子理论。当时假设机械以太在真空中传播电力和磁力。法拉第发展一种想法,认为当把电介质放入电场时,其内出现电荷位移。麦克斯韦将位移的想法推广到真空中的以太,并借

助假想机械以太微小单元的位移(或变形)来解释电力。(麦克斯韦用了一种很具体的模型,详见维塔克<sup>[6]</sup>的书。)因此,在麦克斯韦时代,把  $\epsilon_0(\partial\mathbf{E}/\partial t)$  这一项联系于以太微元的“实际”变化,正如现在我们把  $\partial\mathbf{P}/\partial t$  这项联系于电介质中正负离子位置的实际变化一样。(关于位移电流的现代解释,读者可参看9.5节。)

麦克斯韦方程组具有相当于在真空中以速度  $(\mu_0\epsilon_0)^{-\frac{1}{2}}$  传播的波动解。波动解的预见取决于位移电流  $\partial\mathbf{D}/\partial t$ 。没有这一项就没有波动方程。代入  $\mu_0$  的值  $4\pi \times 10^{-7}$  和  $\epsilon_0$  的实验值表明此速度数值等于光速。1888年赫兹用实验证明了电磁波的存在。赫兹发现,当在包含感应线圈的电路的微小间隙中产生火花时,则在金属线弯成并带有小间隙的副电路中也感应出火花,即使两个电路之间并无金属联结。赫兹把这种现象解释为主电路发出的电磁波被副电路检测出来。赫兹证明这些波可以被反射,可以造成干涉。赫兹还证明电磁波以有限速度传播,现在知道这个速度就等于光速。麦克斯韦方程组能够说明光的折射和反射定律、光的偏振和晶体光学等,此理论迄今仍用以解释物理光学。

光和电磁的统一,使人们把当时认为传播电力和磁力的以太和当时认为传播光的光以太看成一种。此阶段出现了许多以太模型。这些理论试图借助于作用在以太单元上的直线力和扭转力说明电力和磁力的传播。光被看作是在以太中传播的波动形式。麦克斯韦方程组的数学形式几乎与马克可拉以太方程组相同,于是马克可拉理论得到了广泛发展。开尔文甚至建立了马克可拉以太单元的机械模型。某些以太理论甚至企图用以太理论来解释物质的性质。例如1867年开尔文建议物质的原子是以太中的涡环,也就是类似于空气中烟圈的某种东西。随着机械以太理论试图解释越来越广泛的现

象，它们变得越来越复杂。详细讨论这些理论将超出本书范围，感兴趣的读者可参考维塔克的书<sup>[7]</sup>。到十九世纪末开始出现了另一种观点，即人们只应该接受电磁学定律描述电磁现象的行为，而不应该试图借助机械模型来解释电磁学定律。

我们特别希望强调指出，麦克斯韦方程组有一个特点是，当坐标按伽利略变换转换时，麦克斯韦方程组不服从相对性原理。也就是说，如果假设麦克斯韦方程组在一个坐标系中成立，那么若利用伽利略变换

$$x' = x - vt; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = t$$

转换到另一相对该坐标系作匀速运动的坐标系时，则在新坐标系中转换后的方程组不能具有如原坐标系中麦克斯韦方程组同样的数学形式。认识到这一事实是很重要的，试图用此事实来解释以后的发展也是很有意义的，至少在一定程度如此。

如果假设伽利略变换是正确的，那么麦克斯韦方程组仅能在一个坐标系中成立。当时相信，此坐标系就是以太静止的坐标系。这使得测量地球相对以太的速度成为头等重要的事情。在 1887 年麦克耳逊和莫雷作了精确到足以测出  $v^2/c^2$  量级效应的实验。此实验将在 2.3 节详细介绍。

洛伦兹的思路是从绝对坐标系的麦克斯韦方程组出发，然后看需要怎样修改方程组才能适用于相对绝对坐标系作匀速运动的坐标系。此方法将在 2.4 节讨论。

爱因斯坦的思路是根据两个主要假设，即相对性原理和光速不变原理。3.3 节和第八章中将证明，这等价于假设麦克斯韦方程组服从相对性原理。爱因斯坦的途径使得抛弃伽利略变换而采用洛伦兹变换成为必需。

### 2.3 迈克耳逊 (Michelson)-莫雷 (Morley) 实验

迈克耳逊-莫雷实验的物理原理可用游泳比赛的比喻来说明。正如风带动声音一样，假设以太的运动带动光波。类似地，河水带动游泳者。不论游泳者方向如何，河流都影响游泳者的速度。设  $A$  和  $B$  是河对岸的两点，河水相对河岸流速为  $v$ ，如图 2.10 所示。设  $l$  是从跳台  $A$  到对岸的河宽。 $C$  是上游距离  $A$  为  $l$  的一点。我们将考虑两游泳者的比赛，一个在  $A, B$  间往返，另一个在  $A, C$  间往返。假设两个游泳者在静水中的速度都是  $c$ 。现在要问：哪个游泳者获胜？显然在静水中 ( $v = 0$ ) 不分胜负，但是当水流动时，怎样比较游泳者的时间呢？

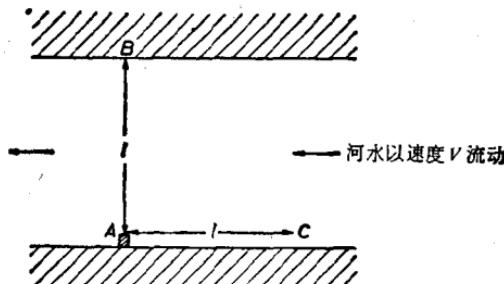


图 2.10 游泳比赛。一个游泳者在  $A, B$  间往返；另一个游泳者在  $A, C$  间往返。根据经典以太理论，这等价于迈克耳逊-莫雷实验。

考虑到河水流动，从  $A$  到  $B$  的游泳者为使合成速度沿  $AB$  方向，必须偏向上游。此合成速度等于  $(c^2 - v^2)^{1/2}$ ，所以从  $A$  到  $B$  的时间等于  $l/(c^2 - v^2)^{1/2}$ 。类似地，从  $B$  返回  $A$  时游泳者也必须偏向上游，时间也等于  $l/(c^2 - v^2)^{1/2}$ 。 $A, B$  间往返的总时间为

$$t_1 = \frac{2l}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (2.29)$$

另一个游泳者，从  $A$  到  $C$  的速度为  $c - v$ ，从  $C$  到  $A$  的速度为  $c + v$ ，于是总时间为

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{l}{c - v} + \frac{l}{c + v} = \frac{2lc}{c^2 - v^2} \\ &= \frac{2l}{c(1 - v^2/c^2)} = \frac{t_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

$v$  必须小于  $c$ ，否则第二个游泳者将永远到不了  $C$  点，于是  $1/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$  必然大于 1，所以  $t_2$  比  $t_1$  大  $1/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$  倍。如果已知  $c$  和  $l$ ，并用秒表测出时间  $t_1, t_2$ ，则可算出  $v$ 。

1887 年迈克耳逊和莫雷根据以太理论做了一个与上述游泳比赛等效的光学实验。他们的干涉仪原理如图 2.11 所示。

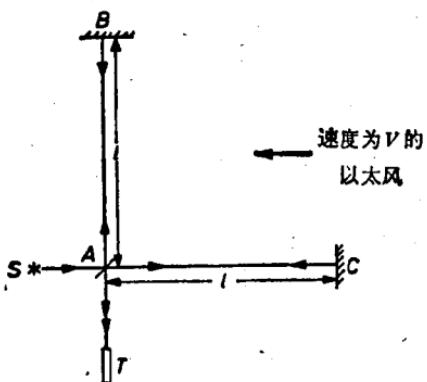


图 2.11 迈克耳逊-莫雷实验略图。

从光源  $S$  发出的光在半镀银镜  $A$  上分成两部分，一部分沿  $AB$  方向，另一部分沿  $AC$  方向。光线在  $B$  和  $C$  镜上被反射。然后两股光线会合产生干涉条纹，由望远镜  $T$  观察。关于迈克耳逊干涉仪理论的叙述，读者可参阅光学教科书。

为了便于讨论，假设实验室坐标系中存在沿  $C$  到  $A$  方向速度为  $v$  的“以太风”，如图 2.11 所示。在真空中，或者实际上在空气中，不存在以太的拖曳，于是根据以太理论，相对实验室的光速在  $A$  到  $C$  方向应该是  $c - v$ ，在  $C$  到  $A$  方向是

$c + v$ , 在  $A$  到  $B$  和  $B$  到  $A$  方向是  $(c^2 - v^2)^{1/2}$ . 因此这个实验与游泳比赛等效. 如果  $AB = BC = l$ , 那么光在  $AB$  间往返和在  $AC$  间往返所需的时间分别由方程(2.29)和(2.30)给出.

因此,

$$\begin{aligned}\Delta t &= t_2 - t_1 \\ &= \frac{2l}{c} \left\{ \frac{1}{(1 - v^2/c^2)} - \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right\} \\ &= \frac{2l}{c} \left\{ (1 - v^2/c^2)^{-1} - (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \right\}.\end{aligned}$$

用二项式定理展开并忽略  $v^2/c^2$  以上的高阶项, 得到

$$\Delta t = \frac{2l}{c} \left\{ 1 + v^2/c^2 - 1 - \frac{1}{2} v^2/c^2 \right\} = \frac{lv^2}{c^3}. \quad (2.31)$$

相应的光程差  $\Delta_1$  为

$$\Delta_1 = c \Delta t = \frac{lv^2}{c^2}. \quad (2.32)$$

如果干涉仪转动 90 度使得以太风从  $A$  到  $B$ , 那么  $AB$  间往返时间比  $AC$  间往返时间大了一个量  $lv^2/c^3$ , 于是光程差为

$$\Delta_2 = -lv^2/c^2.$$

因此, 干涉仪旋转 90 度后光程差总变化等于  $\frac{2lv^2}{c^2}$ . 如果  $\lambda$

为所用光的波长, 那么此光程差的改变相应于条纹移动.

$$n = \frac{2l}{\lambda} \frac{v^2}{c^2}. \quad (2.33)$$

迈克耳逊和莫雷的实验<sup>1)</sup> 长度  $l$  为 11 米, 波长为  $5.9 \times 10^{-7}$  米. 如果假设以太风速就是地球在绕太阳轨道上的速度, 即 30 公里/秒, 那么  $v/c \approx 10^{-4}$ , 所以

1) 由 McGraw-Hill 出版的, W. F. Magie 著的 *Book in Physics* 中重印了迈克耳逊和莫雷自己对他们实验所作的说明.

$$n = \frac{2 \times 11}{5.9 \times 10^{-7}} \times (10^{-4})^2 \approx 0.37. \quad (2.34)$$

这接近半个条纹。为了保证精确度和不受震动（特别是当干涉仪转动时），迈克耳逊和莫雷把仪器浮在水银上并当整个仪器缓慢转动时连续读数。迈克耳逊和莫雷发现的最大位移是不到一个条纹的百分之一。如果有 0.37 条纹的移动，他们本该很容易地检测出的。也可能碰巧在他们作实验时地球相对以太为静止。但是当他们在当天的不同时间以及六个月以后（这时地球正在相反方向相对太阳运动）做实验时，都未发现任何条纹移动。后来迈克耳逊-莫雷实验曾被重复多次，除了弥勒（Miller）（1925 年）的某些结果外，都没发现条纹移动。1958 年塞德霍姆（Cedarholm），勃兰德（Bland），海文斯（Havens）和汤斯（Townes）<sup>[8]</sup> 利用双脉塞（Maser）光做了非常精确的以太移动实验。他们的结果表明，如果真有以太流存在，则它的速度应小于地球轨道速度的 1/1000。

当时人们是怎样解释迈克耳逊-莫雷实验的否定结果呢？现在对迈克耳逊-莫雷实验的否定结果的重要性有一种不能正确评价的趋势。正为这个原因才用游泳比赛作比喻。迈克耳逊-莫雷的否定结果等效于游泳比赛的不分胜负。读者将怎样解释这种不分胜负呢？第一个建议可能是河水速度为零。另一个可能是尽管河水在流动，两个游泳者的游速还是相同，但是如果他们在静水中游速相同的话，这就与伽利略变换发生了矛盾。人们将很快开始想到长度  $AB$  和  $AC$  不等，或者计时的表有毛病。为说明迈克耳逊-莫雷实验的否定结果提出了类似的种种解释。一个建议是  $v$  始终为零，也就是假设以太静止的参考系相对地球也总是静止的。但是这使地球在宇宙中处于优越地位，自哥白尼时代以来人们就不愿接受这一观点。

另一个解释是地球拖着它周围的以太一起走，因此地面附近的以太相对地球始终是静止的，但地球相对宇宙中其余的以太还是运动的。为了验证运动的物体能否拖曳周围的以太一道前进，罗基 (Lodge) 做了一个实验，把干涉仪放在两个直径为 1 米的大钢盘中间，如图(2.12)所示。两圆盘相距 2.5 厘米，装在能高速转动的公共轴上。干涉仪在实验时是静止的。他认为如果圆盘转动时能带动中间的以太，那么当转动开始就会有干涉条纹的移动。但没有观测到任何移动，于是得出结论：以太不能被转动钢盘拖在一起动。

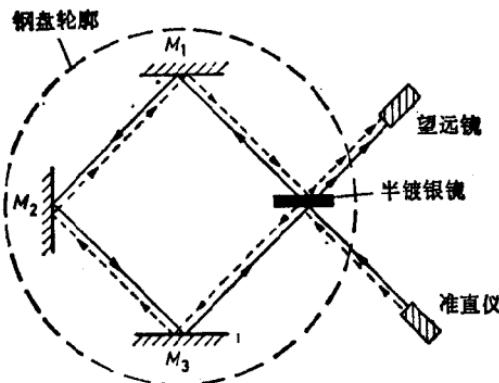


图 2.12 罗基的实验。干涉仪放在直径为 1 米相距为 2.5 厘米的两钢盘之间。一束光线顺时针走，另一束反时针走。两束光线汇合产生干涉条纹，用望远镜观察，钢盘转动时没有看到条纹移动。此结果作为转动钢盘不拖曳周围以太运动的证据。

迈克耳逊-莫雷实验的另一个解释是由斐兹杰惹 (Fitz-Gerald) 和洛伦兹各自独立地提出的。其想法是相对以太运动的物体可在运动方向缩短，使得长度  $l_0$  减小为  $l_0(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ ，其中  $v$  是物体相对以太的速度。于是图 2.11 的干涉仪臂  $AC$  将会缩短为  $l_0(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ ；这就会得出  $t_1$  和  $t_2$  [分别由方

程(2.29)和(2.30)给出]相等。因为尺子也以相同比例缩短，所以  $AC$  的测量长度将仍为  $l$ 。在提出这一假设的当时这是一个特定的假设，但是后来洛伦兹偶然用他的电子论能解释这个缩短(参阅 2.4 节)。瑞利(Rayleigh)提出如果透明媒质由于相对以太运动真发生实际收缩，那么它应该变为有双折射现象，正如玻璃块承受单向应力时出现的情况。瑞利<sup>[9]</sup>力图用实验检测这个效应，但得到否定的结果。布雷斯(Brace)<sup>[10]</sup>把实验精确度提高，但也没发现此效应，因此相对于假想以太的运动显然不能使物体产生任何应变状态。

迈克耳逊-莫雷实验的另一个可能的解释是光速在  $AC$  方向和  $AB$  方向相同。那么根据以太理论，这等于说两游泳者相对河岸始终具有相同的速度，所以不管河水流速如何游泳比赛不分胜负。这个解释与以太理论是不相容的，以太理论中光速必须是相对于传播媒质而言。根据狭义相对论，所有惯性坐标系中电磁定律和光学定律都具有相同的数学形式。用任何一个惯性坐标系都可以，于是我们可采用地球静止的坐标系。如果不存在光速必须与之有关的优越空间方向和绝对坐标系，那么相对于地球，光速在所有方向应该是相同的。如果真是这样，就能期望在迈克耳逊-莫雷干涉仪转动时没有条纹移动。迈克耳逊-莫雷实验对最终接受上述观点具有极大的贡献。

## 2.4 洛伦兹电子论概述

从 1890 年到 1905 年洛伦兹对运动物体的电动力学做了一系列理论研究。麦克斯韦时代还没有原子结构的理论，所以麦克斯韦理论是宏观理论，物质性质是通过本构方程  $\mathbf{B} = \kappa_m \mu_0 \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D} = \kappa \epsilon_0 \mathbf{E}$  和  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$  引进的，其中  $\kappa_m$  是相对导磁

率， $\kappa$  是介电系数，而  $\sigma$  是电导率。 $\kappa$ ,  $\kappa_m$  和  $\sigma$  值是根据对宏观物体的实验确定的。在洛伦兹进行他的理论研究的时代，阴极射线的性质已众所周知，已用正、负离子的概念解释电解导电，并且汤姆森（J. J. Thomson）已在测量电子的  $e/m$ 。洛伦兹的总计划是把物质电磁学的全部复杂情况简化成由弥散在以太中的正、负离子组成的基本情况。洛伦兹假设电介质的每个分子都包含正、负微粒或离子。（在某些情况下，负离子后来被认证为就是电子）。存在电场时电介质的分子都被极化，正、负电荷分开。罗兰德（Rowland）在 1876 年证明运动电荷产生磁场。在电介质中的离子相对以太运动时，这些离子等效于运载电流并对总磁场有贡献。洛伦兹假设在以太静止的绝对坐标系中麦克斯韦方程组在微观尺度内也是正确的。在微观理论中每个正离子和电子可看做产生电场的分开的真实电荷，即使这些电荷是分子的组成部分。因为所有微观电荷可看做真实电荷，所以在微观理论中没有必要引进极化矢量，而可以记  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ ，于是高斯定律变为

$$\operatorname{div} \epsilon_0 \mathbf{E} = \rho. \quad (2.35)$$

其中  $\rho$  是在某一点微观尺度的电荷密度。洛伦兹假设甚至在电子内部，方程(2.35)也成立。根据安培磁理论，原子偶极子的磁性是由于原子电荷（电子）的运动。微观尺度上这些安培电流可表为真实的运载电流，不必引入磁化矢量，而可以记  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ 。微观尺度上通常把传导电流解释为宏观尺度上电中性导体中电子的运动，导体中正离子电荷与运动电子的电荷相抵消。微观尺度上在某一点仅能存在一个正离子或负离子，它的运动产生该点的运载电流。于是在微观尺度上麦克斯韦方程组应该变为<sup>1)</sup>

---

1) 我们不采用洛伦兹的原始形式，本书中全都采用米·千克·秒制。

$$\operatorname{curl} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.36)$$

$$\operatorname{curl} (\mathbf{B}/\mu_0) = \rho \mathbf{u} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2.37)$$

$$\operatorname{div} (\varepsilon_0 \mathbf{E}) = \rho, \quad (2.38)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (2.39)$$

洛伦兹假设方程(2.36),(2.37),(2.38)和(2.39)在用  $\Sigma$  表示的以太静止的绝对坐标系中成立. 洛伦兹假设以太不变形, 不承受应力, 并且不传播机械力. 洛伦兹进一步假设作用在带电物体上的仅是由下式表示的电磁力:

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \rho \mathbf{u} \times \mathbf{B}. \quad (2.40)$$

方程(2.40)给出电荷密度值为  $\rho$  速度为  $\mathbf{u}$  的一点上每单位体积的力. 方程(2.40)叫做洛伦兹力, 虽然海维塞德(Heaviside)在1889年就首次得出了此方程. 洛伦兹意识到, 如果假设在真空中不存在作用在以太上并由以太传播的力, 那么当电流和电荷分布改变时, 方程(2.40)与作用和反作用大小相等、方向相反的牛顿第三定律相矛盾. 关于牛顿第三定律洛伦兹<sup>[11]</sup>写道: “但依我看来没有任何理由使我们一定要把这一命题抬高为无限正确的基本定律.” 这点留到7.5节再详细讨论.

方程(2.36)到(2.39)不必再附加本构方程. 洛伦兹从这些方程出发, 并假设电介质的分子由正、负离子组成, 当存在电场时这些离子被极化, 如图2.13(a)所示. 洛伦兹证明了, 这样就能导出宏观物体的介电常数的概念. 为便于计算可用面电荷密度分布  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$  和体电荷密度分布  $-\operatorname{div} \mathbf{P}$  代替极化了的电介质, 其中  $\mathbf{n}$  是与表面垂直的单位矢量. 对于导磁率和电导率可采用类似的推理. 现在看来, 洛伦兹的想法是理所当然的, 附录2中概述了典型的现代方法. 必须记住当洛

伦兹提出他的理论时，电子和原子结构的概念还是新颖和奇妙的；麦克斯韦的理论原本是为宏观物体建立的。

洛伦兹把他的电子论用到运动着的电介质的情况。它的目的是建立一个能给出菲涅耳拖曳系数的电磁理论。菲涅耳曾经假设，当物体相对以太运动时，物体内过剩的以太被拖走。洛伦兹假设以太不被运动物体拖走，而假设了正离子和电子自由地穿过以太。此处不打算详细讲述洛伦兹的理论，因为 8.6 节中将用狭义相对论的观点讨论运动介质的电动力学。洛伦兹已能证明，对于运动的非磁化电介质，在宏观尺度上磁感应由下式给出：

$$\operatorname{curl}(\mathbf{B}/\mu_0) = \mathbf{J}_{\text{true}} + \rho_{\text{true}} \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \operatorname{curl}(\mathbf{P} \times \mathbf{u}). \quad (2.41)$$

方程(2.41)右端第一项是传导电流，第二项是运载电流，第三项是位移电流。根据方程(2.41)，第四项  $\operatorname{curl}(\mathbf{P} \times \mathbf{u})$  也像传导或运载电流一样也产生磁场。考虑图 2.13(a) 所示的电介质。假设电介质在电场中均匀极化。电介质内部正离子和负离子的效应在宏观尺度上相互抵消，于是计算磁场时可用表面电荷分布代替极化了的电介质，如图 2.13(b) 所示。这

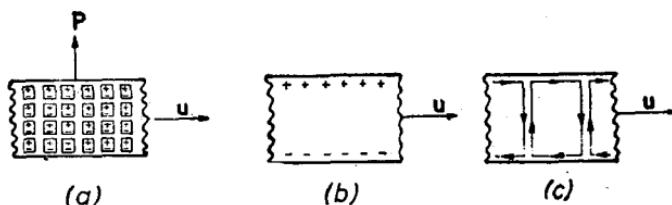


图 2.13 运动介质产生磁场示意图。为计算磁场可用图 (b) 的表面电荷分布代替图 (a) 的均匀极化电介质。如果电介质正在运动，那么为了计算磁场可用图 (c) 的一系列电流环代替该运动电介质。这样分布的电流环将产生垂直纸面背向读者的磁场。

些运动的表面电荷分布等效于图 2.13(c) 所示的一系列电流环。这些电流环产生一垂直于  $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{u}$  并与  $\text{curl}(\mathbf{P} \times \mathbf{u})$  项相一致的磁场。一般将  $\text{curl}(\mathbf{P} \times \mathbf{u})$  项叫做电介质运载电流。伦琴 (Röntgen) 在 1885 年用实验证实了它的存在，所以有时也把它叫做伦琴电流。根据方程 (2.41)，洛伦兹能证明当光线方向与  $\mathbf{u}$  平行时，以速度  $\mathbf{u}$  相对绝对空间运动的电介质中的电磁波相对绝对空间的速度是  $c/n + (1 - 1/n^2)\mathbf{u}$ 。这与菲涅耳理论相符合(见 8.6.4 节)。菲涅尔理论的困难之一是，因为运动媒质的折射系数依赖于光的频率，所以，由于光线的颜色不同，而使运动媒质中的以太被拖曳的量不同。此困难在洛伦兹理论中是不存在的，因为洛伦兹假设以太静止，是电介质中的电子和离子在运动。在经典电磁理论中假设折射介质中的电子由于入射光的作用而受迫振动，然后以这种方式发出辐射，使得折射媒质中的光速减小量取决于光的频率和折射介质相对于绝对坐标系的速度。

洛伦兹假设方程 (2.36) 到 (2.39) 仅在以太静止的坐标系中成立。他觉得电磁方程组在相对于绝对坐标系运动的坐标系中将是不同的。此看法可用特鲁敦 (Trouton) 和诺贝尔 (Noble)<sup>[12]</sup> 的实验说明。考虑用长为  $l$  的“刚性”杆连接的两个具有相同电量的正、负电荷  $+q$  和  $-q$ ，它们如图 2.14 所示相对地球静止。如果存在绝对坐标系，地球多半不会相对它为静止。设地球相对绝对坐标系的速度是  $\mathbf{v}$ 。如果麦克斯韦方程组必须用在绝对坐标系中，那么两电荷间存在图 2.14 所示的磁力。利用毕奥-沙伐定律，两电荷间相互作用的磁力为：

$$f = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q^2 v^2}{l^2} \sin \theta.$$

这两个磁力产生的力偶值为：

$$\hat{G} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q^2 v^2}{l^2} \sin \theta l \cos \theta.$$

如果  $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$ , 那么

$$G = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 c^2} \frac{v^2}{l^2} \frac{q^2 \sin \theta \cos \theta}{l}. \quad (2.42)$$

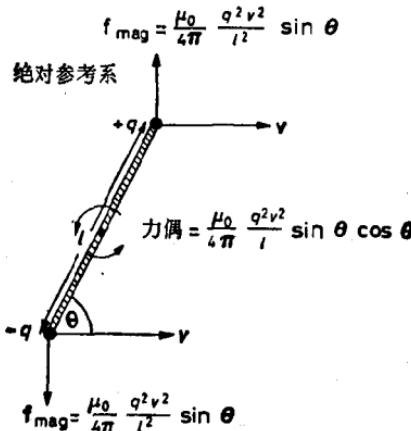


图 2.14 特鲁敦-诺贝尔实验。两电荷  $+q$  和  $-q$  以速度  $v$  相对绝对坐标系运动。假定麦克斯韦方程组必须用在绝对坐标系。绝对坐标系中由于电荷运动产生的磁场引起倾向于反时针转动此装置的力偶。实验时没有见到此力偶。

此力偶倾向于如图 2.14 所示使该装置反时针方向转动，于是该装置应该转动。两电荷间的电力应该沿着它们的联线，所以对力偶无贡献。通过测量转动就可算出  $v$ 。特鲁敦和诺贝尔做了这种实验，他们用磷铜线悬吊一个充了电的平行板电容器，使得电容器两板处在铅直平面内。如果  $v$  是地球绕太阳轨道速度的量级，那么方程(2.42)确定的力偶（它为  $v^2/c^2$  的量级）在特鲁敦和诺贝尔的实验中应该观测得出来，但实验没有见到此力偶的任何迹象。

洛伦兹想弄清，如果在相对绝对坐标系  $\Sigma$  [假设方程

(2.36)到(2.39)在此坐标系中成立]中以匀速  $v$  运动的坐标系  $\Sigma'$  中测量坐标, 那么电磁方程组将采取什么样的数学形式. 开始洛伦兹忽略了  $v/c$  以上的高阶项并用伽利略变换转换  $x, y, z$  坐标. 当坐标和时间按伽利略变换转换时, 方程 (2.36)–(2.39)不服从相对性原理. 但是洛伦兹发现, 如果做替换

$$t' = t - vx/c^2, \quad (2.43)$$

也就是如果在运动坐标系  $\Sigma'$  中使用新的时间测量方法, 那么运动坐标系中的电磁方程组的数学形式简化了, 他发现新方程组在  $\Sigma'$  中可写成与方程(2.36)–(2.39)在绝对坐标系  $\Sigma$  中相同的数学形式. 洛伦兹把  $t'$  叫做“当地时间”或坐标时间. 最初引进它是由于数学原因. 洛伦兹的一阶理论不能说明迈克耳逊-莫雷实验的否定结果. 他接着在他的理论中引入了洛伦兹-斐兹杰惹缩短(起初是作为一个特定的假设)以便解释迈克耳逊-莫雷实验. 洛伦兹然后发现, 如果坐标和时间从  $\Sigma$  转换到  $\Sigma'$  时使用下述关系:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, & y' &= y, \\ z' &= z, & t' &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

那么真空情况下的方程(2.36)–(2.39), 可以变成运动坐标系  $\Sigma'$  中的同样数学形式的表达式, 只要场量也以特殊方式变换. 对于  $v/c$  的各次项都是正确的. 现在“当地”时间由  $t' = (t - vx/c^2)/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$  给出. 庞卡莱(Poincare)将洛伦兹的工作推广, 导出电荷和电流密度的变换式, 于是如果坐标和时间按方程组 (2.44) 变换, 那么完整方程组 (2.36)–(2.39) 在  $\Sigma'$  中变为具有相同数学形式的方程组. 庞卡莱提议把方程组 (2.44) 叫做洛伦兹变换, 直到今天也一直用这个

名字，虽然实际上沃依格特（Voigt）早在 1887 年就给出了这组方程式。

洛伦兹在发展了他的理论之后，想用因果方式解释洛伦兹-斐兹杰惹缩短如下。如果由正、负离子组成的物体相对以太运动，那么假若麦克斯韦方程组在（并仅在）假想以太静止的绝对坐标系中成立，则在相对以太运动的物体中离子之间将既有电力也有磁力。洛伦兹证明，如果这一理论正确，那么由于离子间总作用力的变化，离子的平衡位置将改变，使得相对以太运动的物体其长度在运动方向减小的量与洛伦兹-斐兹杰惹缩短所预言的相同。按洛伦兹的见解，地上静止的杆由于相对以太运动将会缩短。另一方面，相对以太静止但相对地球运动的杆在地上观察时却不缩短。

洛伦兹的工作可以看成是对原有理论的一系列逐渐的修补，而以找到保证麦克斯韦方程组（真空中）数学形式不变的坐标变换而达其最高峰。许多狭义相对论的变换在爱因斯坦 1905 年的论文之前就已经有了。但是洛伦兹仍认为存在一个麦克斯韦方程组成立的优越坐标系。洛伦兹把当地时间的概念看作为一个数学手段，当作最奇怪的事。与爱因斯坦不同，洛伦兹不相信  $t'$  是在运动坐标系  $\Sigma'$  中实际测量到的时间。他在 1927 年说<sup>[13]</sup>：

“因为必须变换时间，所以我引入了当地时间的概念，它在相互运动的不同坐标系中是不同的。但是我从未认为它与真实时间有任何联系。对我来说，真实时间仍由原来经典的绝对时间概念表示，它不依赖于参考特殊的坐标系。在我看来仅存在一种真正的时间。那时，我把我的时间变换仅看作为一个启发性的工作假设，所以相对论实际上完全是爱因斯坦的工作。因此毫无疑问，即使所有前人在此领域的理论工作根本不曾做过，爱因斯坦也会想到它的，在这方面他的工作是与以前的各种理论无关的。”

洛伦兹理论的某些形式缺陷都由庞卡莱以推理方式弥补了。庞卡莱的某些想法可由下面的两段话看出来，这两段话是从他在 1904 年 9 月 24 日给美国圣路易艺术与科学会议所做的讲演<sup>[14]</sup>摘录下来的。在这篇讲演中庞卡莱评论了当时的理论物理状况。当列举重要的物理原理时，他说：

“这些是：

卡诺原理，或能量降阶原理\*。

牛顿原理，或作用和反作用相等原理。相对性原理，根据此原理，无论观察者固定还是匀速运动，物理现象的定律应是相同的；于是我们没有也不可能有办法看出我们是否处在匀速运动中。

质量守恒原理，或拉瓦锡（Lavoisier）原理。我想再加上最小作用原理。”

这样，庞卡莱在重要的物理原理表中包括了相对性原理。在讨论完各种物理理论 1904 年所面临的困难之后，庞卡莱预见性地作出如下结论：

“或者类似地，我们应该建立一个全新的力学（关于它，我们还只是见到了一点迹象），其中惯性随速度而增加，光速将成为不可逾越的极限。

较简单的普通力学，因为在速度不太高时成立，将保持为一级近似，所以在新的力学中仍然能找到旧的动力学……”

这些想法与爱因斯坦作为狭义相对论出发点的基本假设是非常相似的。1905 年爱因斯坦<sup>[15]</sup>发表了他的题为《论运动物体的电动力学》的论文。这篇论文没有提到前人的著作，并且似乎是在不知道洛伦兹和庞卡莱在 1904—1905 年间工作的情况下写成的。关于狭义相对论起源的评述，读者可参阅霍尔敦（Holton）<sup>[16]</sup> 的文章。

---

\* 指熵增加原理。——译者注

爱因斯坦的思路与洛伦兹完全不同。洛伦兹试图修补已有的理论，而爱因斯坦则把他的理论建筑在两个主要假设，即相对性原理和光速不变原理的基础上。第三和第八章将证明，接受这两条原理与要求麦克斯韦方程组在所有惯性系都成立是一致的。爱因斯坦的途径迫使人们放弃建立在绝对时间概念基础上的牛顿力学和伽利略变换。爱因斯坦准备用建立在不同的质量、长度和时间概念基础上的全新的理论来代替旧的理论。我们从第三章起讲述爱因斯坦开辟的途径。上面已阐明了狭义相对论怎样直接从经典电磁学特别是从运动介质电动力学产生出来。洛伦兹的工作是经典电磁学的直接发展，而爱因斯坦工作的本来目的可从他的 1905 年论文的题目《论运动物体的电动力学》看出来。

如果光速在所有惯性系中数值都相同，并且电磁学和光学定律在所有惯性系也都相同，那么利用电学和光学实验不可能测出地球相对于绝对参考系的速度。正如牛顿力学中绝对空间对匀速直线运动失去意义一样，在狭义相对论中以太失去了作为电磁现象的绝对参考系的意义。除了作为绝对系统外，过去引进以太还曾作为传播光振动和电磁力的假想媒质。当试图用以太解释所有现象时，以太的力学模型变得越来越复杂，并在十七世纪后半叶复杂到了顶点。赋予以太的力学性质纯粹是假想的，不能用实验观察到；实验能观察到的只是电磁力本身。正如玻恩<sup>[17]</sup>所述：

“如果我们要逐字地接受它们，那么以太将是具有由看不见的齿轮、陀螺和传动装置以极复杂的方式组合起来的奇异机构。并且在所有这一团混乱之中，所能观测的不过是表现为电磁场的几种比较简单的力。”

到十九世纪末开始出现了这样的观点，即人们仅应该接受电磁定律描述运动电荷间的电磁力，而不应该试图用一个

性质不能测量的机械以太来解释电磁力本身。洛伦兹的以太观点可概括在希尔伯斯坦 (Silberstein)<sup>[18]</sup> 的下段话中：

“洛伦兹的以太是不变形的，它也不会受到任何应变，所以也不会形成任何机械振动。因此它当然没有任何种类的弹性，也没有惯性或密度。于是它远没有菲涅耳的以太那样具体。人们实际上不能看到它还剩有什么性质，它只能是电磁矢量  $E, B$  的无特色的位置（我们甚至不能说是基础）之外。虽然洛伦兹本人 1909 年继续告诉我们，他“不能不认为以太具有一定度物性”，但就他对以太的运用而言，本来也可以把它叫做  $E, B$  及其活动的空洞舞台，或者纯几何坐标系。”

对洛伦兹来说，以太只是麦克斯韦方程组成立的绝对坐标系；以太几乎失去了全部力学性质。1900 年拉摩 (Larmor)<sup>[19]</sup> 写道：

“我们不应该企图把已找到用来确定以太活动的这组关系式解释为以太中的未知结构的力学结果。我们应该满足于已经得到了它们的精确动力学相互关系式，正如几何学寻找空间的描述性质与度规性质，而不加解释一样。”

这是狭义相对论出现以后流行的观点。它可概括在玻恩<sup>[17]</sup>的下一段话中：

“光和电磁力除非与物体相联系是永不可能观察到的。没有任何物质的空洞空间根本不是观察的对象。全部我们所能肯定的只是，作用从一个物体开始，经过一段时间到达另一个物体。中间过程纯粹是假想的，或者更精确地说，是任意的。这表明理论工作者可以根据他们自己的判断用位相参量（表示状态），场或类似的东西来装备真空，只要这些量能将观察到的物体的变化表示成简单明了的关系。此观点是沿更高级的抽象方向和将我们从似乎是思想界必要成份的普通想法中解放出来的新步骤。但同时它又是通往下述理想的途径：即只承认由经验直接给出的东西作为物理

界的构造元素是正确的，起源于更原始、更粗糙经验状态的所有多余描述和比喻都被消除。

从现在起原来被认为是实物的以太从理论中消失了。我们用抽象的电磁场，作为只是便于描述物质过程及其规则关系的数学工具，来代替以太。”

电磁方程组给出运动电荷体系在空间某点产生的电场和磁场。作用在真空中该点试验电荷上的力可利用洛伦兹力由这些场计算出来。实验观察到的正是这些力对电荷的影响。必须指出，经典电磁学仅在由普朗克常数  $h$  值有限而引起的全部效应可以忽略的情况下才是正确的。为了把量子化效应结合进去，还必须将经典电磁学加以推广。

现今，我们不再用力学模型解释电磁力，反而试图借助原子理论和量子力学用电磁力来解释固体和流体的力学性质。现在用不连续的分立的光子（把它作为一种基本粒子对待）的运动来解释光的性质。根据量子力学，分立的光子的“波”动性质可用如同与分立的电子相联系的“波”相同的统计方式来解释。人们自然会承认光子及其“波”能够穿过真空。但十九世纪人们曾认为，光像声音一样是连续媒质中连续波的运动。在这种条件下提出机械以太的假说是可以理解的。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Møller, C. *The Theory of Relativity.* p. 15. Oxford University Press, London, 1952.
- [ 2 ] Fresnel, A. *Ann. Chim. (Phys.)* 9(1818) 57
- [ 3 ] Whittaker, E. *A History of the Theories of Aether and Electricity.* Vol. I, p. 111. Thomas Nelson, Edinburgh, 1951.
- [ 4 ] Hoek, M. *Arch. néerl. Sci.* 3(1868) 180.
- [ 5 ] Mascart, E. and Jamin, J. *Ann. Ec. norm.* 3(1874) 336
- [ 6 ] Whittaker, E. *A History of the Theories of Aether and Electricity.* Vol. I, p. 250. Thomas Nelson, Edinburgh, 1951.
- [ 7 ] Whittaker, E. *A History of the Theories of Aether and Elec-*

- tricity.* Vol. I, Chs 4, 5, 8 and 9. Thomas Nelson, Edinburgh, 1951
- [8] Cedarholm, J. P., Bland, G. F., Havens, B. L. and Townes, C. H. *Phys. Rev. Letters* 1(1958) 342
  - [9] Lord Rayleigh *Phil. Mag.* 4(1902) 678
  - [10] Brace, D. B. *Phil. Mag.* 7(1904) 317
  - [11] Lorentz, H. A. *Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Karpern.* p. 28. Brill, Leiden, 1895
  - [12] Trouton, F. T. and Noble, H. R. *Phil. Trans. Roy. Soc.* 202 (1903) 165
  - [13] Lorentz, H. A. *Astrophys. J.* 68(1928) 350
  - [14] Poincaré, H. *Monist* 15(1905) 1
  - [15] Einstein, A. *Ann. Phys., Lpz.* 17(1905) 891
  - [16] Holton, G. *Amer. J. Phys.* 28(1960) 627
  - [17] Born, M. *Einstein's Theory of Relativity.* Ch. 5. Methuen, London, 1924
  - [18] Silberstein, L. *The Theory of Relativity.* p. 42. Macmillan, London, 1914
  - [19] Larmor, J. *Rep. Brit. Ass.* (1900) 618

### 补充读物

关于详尽解释以太理论和电磁学的论述，读者可参阅维塔克著的《以太的历史和电学》。象拉摩的《以太和物质》和希尔伯斯坦的《相对论》之类的较老的教科书也是有价值的。特别要向读者推荐玻恩的《爱因斯坦的相对论》。关于相对论由来的评述，读者可参阅霍尔敦的著作<sup>[16]</sup>。关于历史参考文献的一览表可见霍尔敦教授编的 *Resource Letter SRT-1 on Special Relativity Theory.* [*Amer. J. Phys.* 30(1962)462].

### 习题

2.1 区别光波阵面的波速和线速。证明根据经典以太理论，在折射媒质中光的线速从一个坐标系到对之作匀速运动的另一个坐标系的转换方式与粒子的速度转换方式相同。

波速从一个坐标系到另一个怎样转换? (参阅: 谬勒的《相对论》第一章。)

2.2 根据经典以太理论, 说明在一个坐标系中真空内的平面光波在相对于这个坐标系匀速运动的所有其它坐标系中如何呈现为平面波。证明波阵面的法线在所有这些坐标系中具有相同的方向。那么根据经典以太理论如何说明光行差?

2.3 描述阿拉果实验。说明菲涅耳如何解释否定的结果。(参阅: 维塔克的著作。)

2.4 描述菲索的流水中的光速实验。如果水(折射系数为 1.33)以 20 米/秒的速度相对实验室运动, 计算(a)拖曳系数, (b)与水流方向平行时的光速和与水流方向相反时的光速。

2.5 讨论麦克斯韦方程组总结出的物理原理。麦克斯韦引入位移电流有哪些依据? 描述位移电流怎样与麦克斯韦对以太假设的模型相一致。在现代原子理论中如何解释位移电流? [提示: 对最后一个问题请参考 9.5 节, 也可见 A. M. Bork, *Amer. J. Phys.*, 31(1963)854.]

2.6 评论在十九世纪中发展起来的以太力学理论。

对比马克可拉以太理论的数学方程与麦克斯韦方程。(对后一部分请参考维塔克的《以太理论和电学》第一卷。)

2.7 在十九世纪开尔文说: “只有对我所研究的事物建立了一个力学模型之后, 我才感到满意。如果我成功地建立了这样的模型, 我就理解了; 否则我就还没有理解。”

按照二十世纪的进展, 特别是已经抛弃电磁力和光的传播的力学以太理论以后的论点, 讨论开尔文的这一说法。在量子力学中使用力学模型能到什么程度?

2.8 详细描述关于地球相对以太速度的迈克耳逊-莫雷实验。评论那时提出的对否定结果的各种解释。

2.9 描述 Kennedy-Thorndike 实验. 它与迈克耳逊-莫雷实验有什么不同? 解释 Kennedy-Thorndike 实验的否定结果需要哪些附加假设? [参考: Kennedy and Thorndike, *Phys. Rev.*, **42**(1932)400.]

2.10 说明运动介质电动力学的赫兹理论. 讨论它与洛伦兹理论有何不同. (参考: 玻恩的《爱因斯坦的相对论》第五章.)

2.11 讨论洛伦兹选择的以太模型. 说明洛伦兹的电子理论并描述洛伦兹怎样利用一系列修正和假设得到了洛伦兹变换. 讨论洛伦兹理论中“当地时间”的意义及解释.

## 第三章 洛伦兹变换

### 3.1 引言

洛伦兹的电子理论可以看作是对原有理论的修正和发展。爱因斯坦的途径却完全不同。爱因斯坦根据两个主要假设建立了狭义相对论，其中一个假设（光速不变原理）与牛顿力学完全抵触。因此，必须把狭义相对论看作是对牛顿力学的彻底取代，而不是对它的推广。

爱因斯坦的两个主要假设，按他 1905 年的论文<sup>[1]</sup>中的说法是：

“下述想法是根据相对性原理和光速不变原理。我们把这两个原理定义如下：

1. 不论是相对于作均匀运动的两个坐标系中的哪一个来说，物理体系状态变化所遵循的定律是不受影响的。
2. “静止”坐标系中所有光线都以确定速度运动，不论光线是由静止物体还是由运动物体所发出的。

通常把光速不变原理写成稍许不同的形式，即“在所有惯性（伽利略）坐标系中，真空内的光速具有相同的数值。”这后一说法当然意味着光速不依赖光源的速度。两种说法的关系在 3.3 节中将会清楚。我们将用后一种说法来阐述狭义相对论。

必须指出，在狭义相对论中还隐含了一些附加的假设。例如，它假设了存在惯性坐标系，而且在此坐标系中，物体的运动若不受外力作用便保持为匀速和直线的运动。这一定义取自牛顿力学。同时它还假设在这样的坐标系中，光在自由空

间内的传播是直线的和各向同性的。这样就假设了空间的所有区域和所有方向都是等价的。在狭义相对论中，还假设可用欧几里得几何计算各种几何量间的关系。假设所有时间间隔是等价的。这些额外假设的正确性不是先验的，必须用实验来检验。实际上，在讲广义相对论时，这些假设有的还必须加以修改。广义相对论引起的修正一般是很小的，仅在测量精度提高时才必须引入。在十二章讲述广义相对论之前我们将不讨论它们。对于大多数实用目的，无论实验室坐标系，还是相对于固定恒星为静止或作均匀运动的坐标系，都是满足上述这些假设的惯性系的一个充分好的近似。

在爱因斯坦<sup>[1]</sup>提出狭义相对论时，这两个主要假设还没被实验直接证实。爱因斯坦的途径（这里将采用这一途径）就是由这些假设出发来发展理论。然后再看看理论的预言是否与实验符合。对导出狭义相对论的归纳法感兴趣的读者可参阅罗伯逊（Robertson）<sup>[2]</sup> 的文章。

在建立理论之前，我们先讨论相对性原理和光速不变原理，看一看这些假设是否合理。

### 3.2 相对性原理

现在将相对性原理扩展到包括光学和电磁学的所有物理学定律。根据相对性原理，如果从相互作匀速运动的两个不同惯性系观察一个孤立系统，虽然在两个惯性系中对孤立系统所作的观察，会对某些量得出不同的数值，但是根据这些观察导出的定律在两惯性系中的数学形式却应该是相同的。物理定律不应该包含任何涉及绝对坐标系的项。1.4 节中曾举出了相对性原理的一个例子，其中证明了牛顿运动定律在伽利略变换下仍变换成牛顿定律。这可用在出海航行的船的甲

板上举行网球比赛的例子来加以说明。尽管海岸上观察者的某些测量结果与船上观察者的测量结果可能不同（例如测量球速），但这两个观察者都会同意：只要船速和球速远小于光速，牛顿定律在他们各自静止的坐标系中都是很好地成立。今天，相对性原理已被普遍接受，与狭义相对论不同的任何严肃理论也都承认相对性原理。必须强调指出，可以存在象牛顿力学这样的理论，它满足相对性原理，但与光速不变原理相矛盾。正是后者将狭义相对论与其它的相对性理论区别开来。关于不同惯性系中各种量的数值，相对性原理没有告诉我们任何东西。它只是说定律是相同的。正是光速不变原理以我们将要采取的形式，对不同惯性系中的测量数值作了精确的叙述。

### 3.3 光速不变原理

在本节中将简要评述一下支持光速不变原理的一些间接证据。如果在所有惯性系中光速具有相同数值，那么光速必然与光源相对于观察者的速度无关，并且在真空中的所有方向和所有区域内都必须具有相同数值。

最著名的和狭义相对论不同的理论是由里兹 (Ritz) (1908 年) 提出的。里兹曾假设相对观察者的光速等于  $c + v_r$ ，其中  $v_r$  是发光时光源相对观察者在其联线方向的速度分量。狄塞特<sup>[3]</sup> (de Sitter) 将里兹理论用于双星情况。双星是在围绕公共重心的轨道上运动的两个靠得很近的星。为简化起见，我们将假设两个星作圆运动，虽然一般说来，它们的轨道更复杂些，但在很好的近似上符合牛顿运动定律和牛顿万有引力理论。令双星之一的轨道如图 3.1 所示。设此星周期为  $T$ ，速度为  $v$ ，并设它在时间  $t, t + T, t + 2T, \dots$  处在

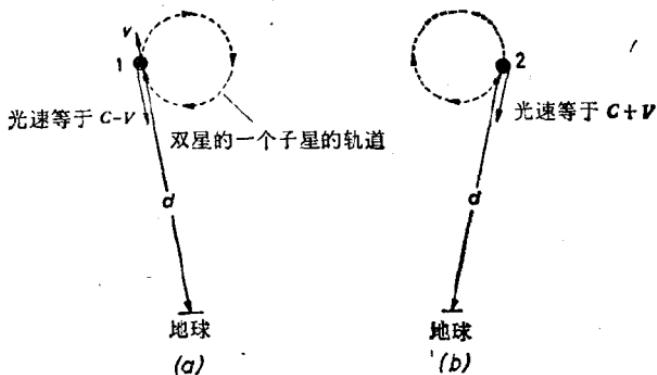


图 3.1 双星之一的圆形轨道. (a) 在位置 1, 这星正背离地球. 根据里兹的假设, 从位置 1 向地球方向发出的光速等于  $c - v$ . (b) 同一星在位置 2 向地球接近, 根据里兹假设, 在这种情况下向地球发出的光速应等于  $c + v$ .

位置 1, 如图 3.1(a) 所示. 设同一星在时刻  $t + \frac{1}{2}T, t + \frac{3}{2}T,$

… 处在位置 2, 如图 3.1(b) 所示. 由该星发出的光到达地球需要一个有限的时间. 如果里兹的假设是正确的, 则该星在位置 1 时向地球发射的光速将为  $c - v$ , 因为当光发出时该星正背离地球运动. 而在位置 2 时光速将为  $c + v$ , 因为此时光源正朝向地球运动. 光以不连续的光子形式发射出来, 通常假设这些光子离开了光源后, 其速度便不再受光源运动变化的影响. 如果  $d$  是该星到地球的距离, 那么如果里兹的假设是正确的, 该星在位置 1 发出的光到达地球的时刻将

为  $t + \frac{d}{c - v}, t + T + \frac{d}{c - v} \dots$ . 在位置 2 发出的光到达

地球的时刻将为  $t + \frac{T}{2} + \frac{d}{(c + v)}, t + \frac{3T}{2} + \frac{d}{(c + v)}, \dots$ .

于是该星从位置 1 到位置 2 的时间为  $t + \frac{T}{2} + \frac{d}{(c + v)} -$

$\left\{ t + \frac{d}{c - v} \right\}$ , 即为  $\frac{T}{2} - \frac{2dv}{(c^2 - v^2)}$ . 另一方面, 该星从位置 2 到位置 1 的时间为  $\frac{T}{2} + \frac{2dv}{(c^2 - v^2)}$ . 于是, 若里兹的假设正确, 则从地球看来, 该星从位置 1 到位置 2 比从位置 2 到位置 1 好象走得快. 实际上, 如果

$$\frac{T}{2} = \frac{2dv}{(c^2 - v^2)}, \quad (3.1)$$

那么此星将在位置 1 和位置 2 同时出现. 考虑一个典型的星,  $T$  为 10 天,  $v$  为 20 公里/秒. 那么如果方程(3.1)成立,  $d$  需等于  $\sim 100$  光年. 已知有大量的双星具有的  $T$ ,  $d$  和  $v$  值, 能使得如果里兹假设正确, 则从地球上看来它们将具有偏心轨道. 从测量双星光的多普勒效应对时间的关系算出的轨道表明, 在地球上观察轨道时并不显示出偏心率. 如果假设光速不依赖于光源的速度, 地球上实际观察到的这一结果, 可用牛顿运动定律和牛顿万有引力理论满意地加以解释. 狄塞特断定, 如果光速等于  $c + kv_{star}$ , 则  $k$  小于 0.002.

关于狄塞特对双星所作分析的意义, 福克 (Fox<sup>[4]</sup>) 曾提出怀疑. 福克指出, 当光入射到折射率为  $n$  的媒质中时, 其速度降低到  $c/n$ . 引用玻恩和沃耳夫<sup>[5]</sup>的话来说:

“埃沃德 (Ewald) 和欧辛 (Oseen) 的所谓消失原理表明, 在真空中以光速传播的外部电磁扰动在物质中怎样被较小速度传播的二次扰动所完全抵消和代替.”

于是入射光在媒质中被抵消, 而由媒质中的受迫振动的电子所发出的光来代替. 对于固体, 此速度变化发生在很薄的表面层中 ( $\sim 10^{-6}$  米). 福克的建议是, 如果光速依赖于光源的速度, 那么当在静止的折射媒质中建立起二次波后, 应采用的光源速度不是起始光源的速度, 而是静止的折射媒质中

电子的速度。福克指出，有迹象表明双星通常被气体层包围，气体厚度大概足以应用消失原理，于是从双星近傍离开的光具有相应于气体层的速度，而不是相应于双星的速度。从而可以怀疑狄塞特对双星所作的分析，而后者是赞成光速不依赖于光源速度通常引用的证据。如果光经过静止的玻璃透镜，对地球上运动光源所作的实验，也必须应用消失原理。

罗瑟 (Rosser<sup>[12]</sup>) 曾提出了根据测量  $\pi^0$  介子衰变放出的高能光子来验证光速不变性的可能方法。该实验将留到 3.12 节讨论，以便先讨论一下不同地点事件的同时性问题。

现在证明，如果假设麦克斯韦方程组是正确的，并服从相对性原理，那么便可得出光速不变原理<sup>[1]</sup>。如果人们想要将狭义相对论扩充到电磁现象和电子光学，至少还必须再作一个附加假设。通常还把电荷守恒原理当作一个公理。根据这一原理，一个粒子的总电荷数值在所有惯性系中都是相同的。索末菲<sup>[6]</sup>曾强调指出这一原理的重要性，并写道：

“电荷守恒原理与光速不变原理同样重要。电荷在所有参考系中都相同，这一点并不是显然的，但如果我们承认麦克斯韦方程组在所有参考系中都成立，我们便可从这个方程组得出来”。

现在我们从麦克斯韦方程组出发，来讨论光速不变原理和总电荷守恒原理。如果假设麦克斯韦方程组在惯性系  $\Sigma$  中成立，则有

$$\operatorname{curl} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (3.2)$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (3.4)$$

1) 还不熟习麦克斯韦方程组的读者，应跳过本节其余的绝大部分。它们可以与第八章一起阅读。

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho. \quad (3.5)$$

上面方程中的各种量，都是指在时刻  $t$  时在同一点  $x, y, z$  上的值。这些方程所依据的物理原理在 2.2 节中已讨论过了。假设相对  $\Sigma$  以匀速度  $\mathbf{u}$  运动的、电量为  $q$  库仑的电荷，在真空中  $P$  点（此处电场是  $\mathbf{E}$  伏/米，磁感应是  $\mathbf{B}$  韦伯/米<sup>2</sup>）所受的力由洛伦兹力给出，即

$$\mathbf{f} = q\mathbf{E} + q\mathbf{u} \times \mathbf{B}, \quad (3.6)$$

则可用方程(3.6)来定义相对于  $\Sigma$  的  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$ 。方程(3.6)右边第一项叫做电力（记作  $\mathbf{f}_{elec}$ ），第二项叫做磁力（记作  $\mathbf{f}_{mag}$ ）。如果试验电荷  $q$  在  $\Sigma$  中是静止的，那么在  $\Sigma$  中测量到的作用在  $q$  上的力将只是  $\mathbf{f}_{elec}$ ，从而  $\mathbf{E}$  可由下述关系确定

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{f}_{elec}}{q}. \quad (3.7)$$

如果试验电荷  $q$  以匀速  $\mathbf{u}$  相对  $\Sigma$  运动，那么根据方程(3.6)，作用在  $q$  上的总加除电力  $\mathbf{f}_{elec}$  外还有别的力（即  $\mathbf{f}_{mag}$ ）。磁力  $\mathbf{f}_{mag}$  由以下方程给出：

$$\mathbf{f}_{mag} = q\mathbf{u} \times \mathbf{B}. \quad (3.8)$$

此方程可用来定义  $\mathbf{B}$ 。磁力的大小正比于试验电荷  $q$  的速度，它还依赖于  $\mathbf{u}$  的方向。当  $\mathbf{u}$  与  $\mathbf{B}$  垂直时磁力最大，当  $\mathbf{u}$  与  $\mathbf{B}$  平行时磁力为零。 $\mathbf{B}$  的方向可定义为试验电荷不承受磁力时的运动方向。磁感应强度可借助于  $\mathbf{u}$  与  $\mathbf{B}$  垂直时得到的最大磁力来定义，即

$$B = \frac{(\mathbf{f}_{mag})_{\max}}{qu}. \quad (3.9)$$

$\mathbf{B}$  的方向这样定义： $\mathbf{f}_{mag}$ ， $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{u}$  服从常用的左手定则，即左手姆指指向  $\mathbf{f}_{mag}$  方向，食指指向  $\mathbf{B}$  方向，而中指指向  $\mathbf{u}$  方向（对正电荷而言）。此方向与罗盘针北“极”在真空中所指的方向一致，这样电场  $\mathbf{E}$  和磁场  $\mathbf{B}$  便已相对于  $\Sigma$  定义好了。量

**H** 和 **D** 由下述关系定义：

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (3.10)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}), \quad (3.11)$$

其中 **P** 是极化矢量, **M** 是磁化矢量(参阅附录二). 如果对方程(3.2)取散度, 对于存在电流和电荷分布的任意点, 得到

$$\operatorname{div} \operatorname{curl} \mathbf{H} = \operatorname{div} \mathbf{J} + \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

但是任何矢量旋度的散度都为零, 并且由方程(3.5),  $\operatorname{div} \mathbf{D}$  等于  $\rho$ , 因此,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0, \quad (3.12)$$

这是连续性方程, 它表明在一点上的电荷密度随时间变化时, 在该点上就会出现电流. 对方程(3.12)积分, 得到

$$-\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int \operatorname{div} \mathbf{J} dV.$$

对右边应用高斯定理, 得到

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (3.13)$$

其中 **n** 是垂直于面元  $dS$  的单位矢量. 如果包围运动电荷体系的表面远离所有电荷, 那么便没有电荷穿过表面, 因而方程(3.13)右边为零. 在这些条件下,

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = 0. \quad (3.14)$$

于是如果麦克斯韦方程组正确, 则电荷体系的总电荷的变化率为零, 不论个别电荷的速度如何变化, 这个结论总成立. 如果表面仅包围一个加速电荷, 那么此电荷值将为不变量, 不依赖于电荷的速度和加速度, 当然它应该等于静止在惯性系  $\Sigma$  中的电荷值. 假若电荷值随速度变化, 例如象质量那样, 那么氢原子将会不是电中性的, 因为相对于实验室, 平均说来, 电

子比质子运动得快。

现在考虑以匀速  $v$  相对于  $\Sigma$  沿公共  $z$  轴运动的坐标系  $\Sigma'$  中的同一电荷分布。将假设麦克斯韦方程组服从相对性原理，于是在  $\Sigma'$  中  $t'$  时刻  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  点，有

$$\operatorname{curl}' \mathbf{E}' = -\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'}, \quad (3.15)$$

$$\operatorname{curl}' \mathbf{H}' = \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t'} + \mathbf{J}', \quad (3.16)$$

$$\operatorname{div}' \mathbf{D}' = \rho', \quad (3.17)$$

$$\operatorname{div}' \mathbf{B}' = 0. \quad (3.18)$$

这些方程与方程组(3.2)——(3.5)具有相同的数学形式，但是方程组(3.15)——(3.18)中  $\operatorname{curl}'$  和  $\operatorname{div}'$  表达式中的坐标量是  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ 。例如  $\operatorname{div}' \mathbf{B}'$  等于  $(\partial B'_x / \partial x') + (\partial B'_y / \partial y') + (\partial B'_z / \partial z')$ 。场  $\mathbf{E}'$  和  $\mathbf{B}'$  相对于  $\Sigma'$  必须以  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$  相对于  $\Sigma$  定义的相同方式来定义。根据洛伦兹力，作用在以匀速  $\mathbf{u}'$  相对  $\Sigma'$  运动的电荷  $q'$  上的力等于

$$\mathbf{f}' = q' \mathbf{E}' + q' \mathbf{u}' \times \mathbf{B}' = \mathbf{f}'_{\text{elec}} + \mathbf{f}'_{\text{mag}},$$

其中的各种力此时均应相对于  $\Sigma'$  测量。关系式  $\mathbf{E}' = \mathbf{f}'_{\text{elec}} / q'$  和  $\mathbf{f}'_{\text{mag}} = q' \mathbf{u}' \times \mathbf{B}'$  可用来定义相对于  $\Sigma'$  的电场和磁场。电力  $\mathbf{f}'_{\text{elec}}$  将是作用在  $\Sigma'$  中的静止电荷上的力。(这样一个电荷相对于  $\Sigma$  运动，并且在  $\Sigma$  中将受到磁力作用。)

象在  $\Sigma$  中一样处理，可以证明：

$$\operatorname{div}' \mathbf{J}' + \frac{\partial \rho'}{\partial t'} = 0.$$

因而不论电荷速度怎样变化，在  $\Sigma'$  中电荷体系的总电荷为不变量。对于单电荷，电量仍为不变量，但现在等于电荷在  $\Sigma'$  中静止时的电量。考虑相对于实验室( $\Sigma$ )和相对于对实验室作匀速运动的火箭都做加速运动的单个质子。在这种情况

下,为使电荷守恒原理成立,现在所做的假设只是:当它相对  $\Sigma$  静止和相对  $\Sigma'$  静止时具有相同的电量。因为如果麦克斯韦方程组在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中都成立,电量不依赖于它在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中的速度。狭义相对论通常假设:相对于一个惯性系  $\Sigma$  为静止的基本粒子所具有的质量、电荷、寿命等种种性质及其数值都与相同的基本粒子在同样条件下相对于另一惯性系  $\Sigma'$  静止时所具有的相同,只要在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中的单位用相同方式定义。如果作此假设,那么假若麦克斯韦方程组服从相对性原理,基本粒子电荷守恒原理就可从麦克斯韦方程组导出。连续的电荷分布是由大量的质子和电子构成的。如果这些单个电荷的电量是不变量,那么连续电荷分布的总电量也是不变量。3.5 节中将证明,体积的尺度随所选惯性系而变化。如果这是对的,那么电荷的密度从一个惯性系变到另一惯性系时应该变化。

现在用同一观点考虑光速不变原理。考察真空中内惯性系  $\Sigma$  中  $t$  时刻在  $x, y, z$  处的一点  $P$ ,如图 3.2(a) 所示。加速电荷体系在  $P$  点产生一个电场和一个磁场。对于真空  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ , 于是方程(3.2),(3.3),(3.4)和(3.5)变为

$$\operatorname{curl} \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (3.19)$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (3.20)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (3.21)$$

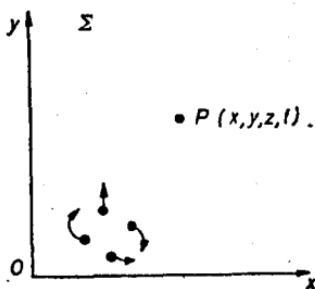
其中  $\epsilon_0$  和  $\mu_0$  是  $\Sigma$  内电和磁的空间常数。对方程(3.19)取旋度并由方程(3.20)代入  $\operatorname{curl} \mathbf{H}$ , 得到:

$$\operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{curl} \mathbf{H} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

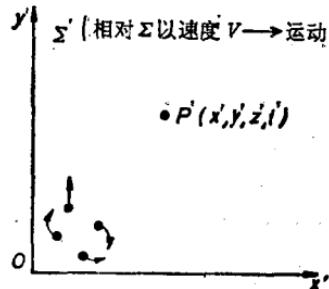
既然  $\operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E}$ . 由于在真空中  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ ,

所以有

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.22)$$



(a)



(b)

图 3.2 (a) 加速电荷的分布在真空中  $P$  点产生电磁辐射, 其相对于  $\Sigma$  的速度为  $(\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$ . (b) 对于惯性坐标系  $\Sigma'$  画出的相同的加速电荷, 这些电荷在真空中  $P'$  点产生相对  $\Sigma'$  速度为  $(\mu_0 \epsilon_0')^{-1/2}$  的电磁辐射.

方程 (3.22) 是一个波动方程, 并把它解释为描述由加速电荷体系在  $t$  时刻  $P$  点所引起的电磁辐射的电矢量性质. 这些波的速度等于  $(\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$ , 它等同于光速. 该速度不依赖于产生电磁波的电荷速度, 这便阐明了何以根据麦克斯韦方程组, 光速不依赖于光源的速度.

现在考察真空中  $\Sigma'$  内  $t'$  时刻在  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  处的一点  $P'$ , 如图 3.2(b) 所示. 我们将考虑以上相对  $\Sigma$  研究过的同一加速电荷体系在  $P'$  点引起的电场和磁场. 在真空中对于惯性系  $\Sigma'$ , 方程 (3.15), (3.16), (3.17) 和 (3.18) 变为:

$$\operatorname{curl}' \mathbf{E}' = -\mu'_0 \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t'}, \quad (3.23)$$

$$\operatorname{curl}' \mathbf{H}' = \epsilon'_0 \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t'}, \quad (3.24)$$

$$\operatorname{div}' \mathbf{E}' = \operatorname{div}' \mathbf{H}' = 0, \quad (3.25)$$

其中  $\epsilon'_0$  和  $\mu'_0$  是相对于  $\Sigma'$  的电和磁空间常数。对方程(3.23)取旋度得到方程

$$\nabla'^2 \mathbf{E}' - \mu'_0 \epsilon'_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}'}{\partial t'^2} = 0. \quad (3.26)$$

因此在  $\Sigma'$  中电磁波的速度等于  $(\mu'_0 \epsilon'_0)^{-\frac{1}{2}}$ 。该速度又不依赖于辐射光源的速度。

安培的定义为：

安培是一恒定电流强度，若保持在真空中相距 1 米的两无限长的圆截面极小的平行直线内，这电流在这两导线之间每米长度上产生的力等于  $2 \times 10^{-7}$  牛顿。

如果麦克斯韦方程组在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中都成立，那么两平行电流间的力应由  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中的毕奥——沙伐定律给出。假如在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中，安培以同一方式定义，则按定义，这便意味着  $\mu_0 = \mu'_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ 。为使在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中光速具有相同数值，还必须有  $\epsilon_0 = \epsilon'_0$ 。原则上根据经典物理学，人们可以把两个质子放在真空中相隔已知的距离（比如说  $x$  米），并可以测量它们在惯性系  $\Sigma$  中静止时相互间的力。类似地可以将两个质子以间隔  $x$  米放置，并测量它们在惯性系  $\Sigma'$  中静止时相互间的力。如果麦克斯韦方程组在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中都成立，那么在两种情况都可以应用库伦定律。为使  $\epsilon_0$  等于  $\epsilon'_0$ ，要求在  $\Sigma$  中静止（在  $\Sigma$  中测量）的两质子间的力与在  $\Sigma'$  中静止（在  $\Sigma'$  中测量）的这两个质子间的力具有相同的数值。虽然不总是明确讲明，但狭义相对论通常假设：如果在两个各方面都是一样的惯性系  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中在相同条件下做两个实验，那么在实验误差范围内它们给出相同的数值结果。如果作了这个假设，那么  $\epsilon_0$  应该等于  $\epsilon'_0$ 。因为按定义， $\mu_0$  等于  $\mu'_0$ ，所以  $(\mu_0 \epsilon_0)^{-\frac{1}{2}}$  应该等于  $(\mu'_0 \epsilon'_0)^{-\frac{1}{2}}$ 。根据麦克斯韦的理论，后边两个表达式分别等于在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中自由空间电磁波的速度。于是，如果假设麦克斯韦

方程组正确并服从相对性原理，便得出光速不变原理。在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中同时测量光速，不是在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中等同条件下完成的，因为相对于分别在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  静止的两个观察者光源速度是不同的，于是不存在光速应该具有相同数值的先天理由；但是根据麦克斯韦方程组它们应该如此。按高斯单位制，因为在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中光速具有相同的数值，所以电磁单位和静电单位之比在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中将具有相同的数值。

反过来，如果假设光速不变原理和电荷守恒原理成立，那么这意味着假若麦克斯韦方程组正确，则  $\epsilon_0 = \epsilon'_0$ 。于是，根据狭义相对论，在  $\Sigma$  或  $\Sigma'$  中静止的两电荷间的力在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中在相同条件下具有相同的数值。根据狭义相对论， $\Sigma$  和  $\Sigma'$  对于描述磁及静电现象是完全等价的，只要在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中以同样方式选择单位制。

光速在所有惯性系中具有相同数值这一说法意味着，在所有惯性系中长度和时间的基本单位以相同方式定义。标准米现在用氪 86 的橙红谱线波长来定义。相对于地球作匀速运动的惯性系中静止的观察者可以用他周围的材料建立光学仪器，并用它来校准长度的副标准。在相对于地球作匀速运动的惯性系中静止的观察者还可以建立原子钟并用它做为时间的副标准，如 1.2 节所述。如果长度和时间用以这种方式校准的尺和钟来测量，那么若光速不变原理正确，则测得的真空中光速在两个惯性系中应具有相同的数值，不论光源速度如何。有人建议过，把真空中光速选做为一个原标准。这在讲狭义相对论时是特别方便的，因为根据该理论在所有惯性系中光速应具有相同的数值。于是时间间隔可用光在此间隔内在真空中走的距离来测量。原则上质子的静止质量可用作校准运动坐标系中质量的新标准。为了建立电磁学，除质量、长度和时间之外还必须选择另一个基本单位。在本书专采用的

MKSA 制中，选择做为标准的电量是安培，它可用平行电流间的力来定义。

如果相对性原理和光速不变原理是正确的，那么迈克耳逊-莫雷实验将无需解释。所有惯性系都可用来解释该实验，但是最简单的是从干涉仪静止的惯性系来考虑这个实验。如果干涉仪的两臂长相对地球是相等的；并且正如光速不变原理所规定的那样，光速在所有方向是相同的；那么根据狭义相对论，光通过干涉仪两等臂的时间将是相等的，不论干涉仪的方位如何；于是干涉仪相对地球转动时就能预期没有条纹移动。

从图 2.14 的两电荷静止的参考系解释特鲁敦-诺贝尔实验同样是最简单的。根据相对性原理，在此参考系中电磁定律是成立的，于是此二电荷间的力应为静电荷间的作用力，由库伦定律给出；在两电荷都静止的惯性系中电荷间不应存在磁力。在两电荷静止的参考系中合力沿电荷的联线因而不产生力偶，于是在任何参考系中不应观察到电荷转动。

狭义相对论能解释迈克耳逊-莫雷实验的否定结果这一事实不应赋以重大意义，因为在此理论引入之前实验结果就已经知道了。理论是根据已知的实验事实而提出；而迈克耳逊-莫雷实验结果显然影响以后所有理论的发展。用格兰堡<sup>[13]</sup> (Grünbaum) 的话说：“并且正如我们所见，爱因斯坦远非把迈克耳逊-莫雷实验的结果解释为更基本原理的结果，而是把它的否定结果做为公理编入他的光原理中。”山兰特 (Shankland)<sup>[15]</sup> 曾经报导他与爱因斯坦 1950 年的谈话，其中爱因斯坦说，他写他的 1905 年论文时并不熟悉迈克耳逊-莫雷实验。山兰特指出，爱因斯坦在他的 1905 年论文中确实提到那些“企图发现地球相对光媒质的任何运动的不成功的尝试”。这暗示爱因斯坦已知道光学实验的否定结果，即使

不知道个别实验细节的话。（也见霍尔敦<sup>[7]</sup>）。狭义相对论的成功，除成功地解释了当时已知的实验事实外，还必须根据理论的新预言和为检验这些预言而做的实验之间的符合情况来判断。

### 3.4 洛伦兹变换

我们已经说明，有一些间接证据支持光速不变原理。现在我们将把此原理以及相对性原理和与空间各向同性、自由空间光的直线传播及欧几里德几何适用性有关的原理都当作公理。3.4和3.5节中将导出这些公理的某些结果，然后看这些预言与实验结果是否符合。我们并不宣称狭义相对论是绝对正确的，因为所有理论都可以被新理论取代，只要新理论与实验结果符合得更好。必须强调，我们一定要准备全面更换牛顿力学。这样根本的变化是必需的，考虑一个简单的例子，就可立刻看出这一点。考察两个惯性系  $\Sigma$  和  $\Sigma'$ ， $\Sigma'$  相对  $\Sigma$  以匀速  $v$  沿公共正  $Ox$  轴运动。设一束光线在  $t = t' = 0$  时刻沿公共的  $x$  轴发出，此时  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  的原点重合。设光在  $t$  时刻到达  $\Sigma$  中  $x$  位置处的接受器。设在  $\Sigma'$  中静止的观察者记录此件事为在  $t'$  时刻  $x'$  位置，那么根据光速不变原理，在  $\Sigma$  中有  $x/t = c$ ，而在  $\Sigma'$  中有  $x'/t' = c$ ，其中  $c$  是光速。因为  $\Sigma'$  原点已相对  $\Sigma$  移动，所以  $x'$  必然比  $x$  小。因此  $t'$  必然小于  $t$ ，按照狭义相对论，时间不能是绝对的，不能写  $t = t'$ 。从而我们必须准备改变自己关于绝对时间的直观概念，即在我们所生活的宏观世界（即所有速度通常远小于光速的世界）中形成的概念。一开始，我们并不能说所有这些观点的变化应当是什么。理论所用符号的精确意义开头必然隐藏在内容之中，一直要到理论发展到一定阶段，使得名词可以定义和解释

时，才能清楚。在 1.3 节中说明了从牛顿力学的考虑出发，只是借助于特殊理论，才使得像力和质量等词取得意义。人们现在必须准备改用狭义相对论的说法，甚至要重新解释长度和时间的测量。

按照相对性原理，在所有惯性系中物理定律的数学表达式应该具有相同的形式。实际上为描述物理现象的过程仅需一个这样的坐标系，并且对于大多数实用目的都取实验室坐标系。有时相对另一惯性系做计算更方便些，它相对前一个惯性系作匀速运动。现在要讨论的问题是，如果相对一个惯性系作出测量并解释了结果，那么对另一个惯性系（它对第一个惯性系作匀速运动）怎样计算变量的数值。我们将首先考虑，假若把狭义相对论的假设作为公理，在一个惯性系中某事件的坐标和时间与在相对第一个惯性系匀速运动的另一惯性系中测量的同一事件的坐标和时间相互之间的关系应当是怎样的。

假若有两个惯性系  $\Sigma$  和  $\Sigma'$ ，各自都有自己一套假想的尺子，于是在任一参考系中静止的观察者可以看到事件发生时的坐标。因为  $\Sigma$  中两事件的时间间隔可能不等于  $\Sigma'$  中测量的相同两事件的时间间隔，所以一个测绝对时间的钟是不够用的，于是假想在整个空间分布两套钟，一套相对  $\Sigma$  静止，另一套相对  $\Sigma'$  静止。假设  $\Sigma$  中静止的所有钟相互校准，而  $\Sigma'$  中静止的钟也都相互校准。（怎样可以校准钟的讨论见 3.6 节。）假设所有钟都走得很准，一经校准便保持同步。令  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中的零时选为  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  的原点重合的时刻 ( $t = t' = 0$ )。设  $\Sigma'$  以匀速  $v$  沿公共的  $x$  和  $x'$  轴运动，并设  $Oy$  和  $Oy'$  轴及  $Oz$  和  $Oz'$  轴在  $t = t' = 0$  时重合。必须强调，我们假设惯性系已经开始并且一直以匀速相互运动，从而不存在一个参考系相对另一个的加速。一个参考系相对另一个加速的可能

效应留到第十一章讨论，在那里将讨论时钟佯谬。还假设  $\Sigma'$  中用的测量仪器不是在  $\Sigma$  中建立而后加速进  $\Sigma'$  的，而是  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中的观察者利用各人从周围找到的材料建立各自的仪器，并用相同的单位制校准它们，正如 1.2 和 1.3 节讨论的那样。这就克服了由于测量仪器加速可能引起的效应所导致的任何困难。

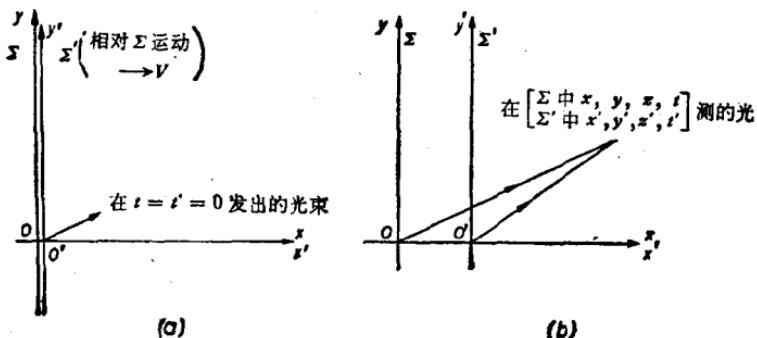


图 3.3 (a) 当  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  的原点在  $t = t' = 0$  重合时发出一股光。此光以后在 P 点被收到。 (b) 相对  $\Sigma$  光呈现为沿  $OP$  路径进行，而对于  $\Sigma'$  沿  $O'P'$  路径。

考虑当  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  的原点在  $t = t' = 0$  重合时发出的一股光，如图 3.3(a) 所示。令光到达 P 点的接收器。设此事件用静止在  $\Sigma$  中的尺和钟测量并记录为在时刻  $t$  和  $x, y, z$  处。假设光在惯性系  $\Sigma$  中直线传播，那么  $\Sigma$  中静止的观察者将说光沿  $OP$  路径行进，于是

$$\frac{OP}{t} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{t} = c,$$

或者

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0, \quad (3.27)$$

其中  $c$  是光速。

$\Sigma'$  中静止的观察者将同意光确实到达接收器（它可能相

对于  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  都在运动). 利用  $\Sigma'$  中静止的尺和钟, 设  $\Sigma'$  中静止的观察者记录此事件在  $t'$  时刻  $x', y', z'$  处. 对于  $\Sigma'$  光好象是经过了路径  $O'P$ , 如图 3.3(b) 所示, 于是

$$\frac{O'P}{t'} = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{t'} = c, \quad (3.28)$$

或者

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0. \quad (3.29)$$

注意在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中光速采用相同值, 以便与光速不变原理相一致.

我们将不加证明地暂且假定

$$y = y', \quad (3.30)$$

$$z = z'. \quad (3.31)$$

方程(3.30)和(3.31)的推导留到 3.7 节, 在那里将从基本原理出发来考虑它们. 为使数学简化, 对坐标变换的形式作一猜测. 假设

$$x' = K(x - vt) \quad (3.32)$$

或

$$x = K'(x' + vt'), \quad (3.33)$$

其中假设  $K$  和  $K'$  不依赖于  $x, x', t$  和  $t'$ , 但是  $K$  和  $K'$  可以依赖于两惯性系的相对速度  $v$ , 假定它为常量. 如果  $\Sigma$  中静止的观察者记录  $\Sigma'$  的原点速度为  $v$ , 则  $\Sigma'$  中静止的观察者应把  $\Sigma$  原点的速度记录为  $-v$ . 这一点可由下述论证看出. 首先假设. 令  $\Sigma'$  相对于  $\Sigma$  以速度  $v$  沿正  $Ox$  轴运动, 而  $\Sigma$  相对于  $\Sigma'$  以速度  $-v'$  沿负  $Ox$  轴运动, 如图 3.4(a) 所示. 假设在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中使用同样的长度和时间单位. 假设  $v$  和  $-v'$  数值的差别仅是由正  $Ox$  方向的运动与负  $Ox$  方向的运动比较引起的. 现在将  $x$  和  $z$  方向以及  $x'$  和  $z'$  方向反转. 又得到图 3.4(b) 所示的右手坐标系, 但此时  $\Sigma$  相对  $\Sigma'$  以速度  $v'$  沿正

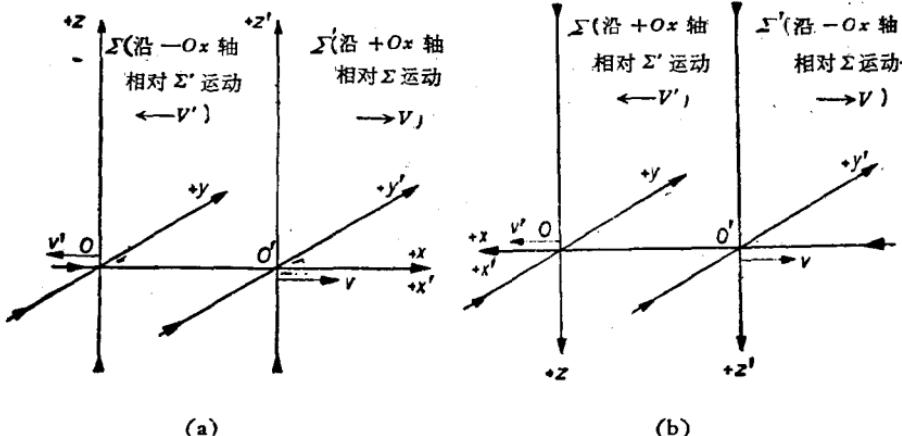


图 3.4 (a) 假设  $\Sigma'$  相对于  $\Sigma$  以速度  $+v$  沿  $+Ox$  方向运动, 而  $\Sigma$  相对于  $\Sigma'$  以速度  $-v'$  沿  $-Ox$  方向运动。 (b)  $\Sigma$  的  $x$  和  $z$  轴与  $\Sigma'$  的  $x'$  和  $z'$  轴反向。那么  $\Sigma$  相对于  $\Sigma'$  以速度  $+v'$  沿新的  $+Ox$  轴运动, 而  $\Sigma'$  相对  $\Sigma$  以速度  $-v$  沿新的  $-Ox$  轴运动。

$Ox$  方向运动, 而  $\Sigma'$  相对  $\Sigma$  以速度  $-v$  沿负  $Ox$  轴运动。在这种情况下, 正  $x$  方向的运动产生数值为  $v'$  的速度, 而沿负  $Ox$  方向的运动产生数值为  $-v$  的速度。狭义相对论假设空间所有方向是等价的, 从而按照我们前边的假设  $\Sigma$  应该以速度  $v$  运动, 因为它现在正沿正  $x$  方向运动。因此必然得出:  $v$  等于  $v'$ 。在  $\Sigma$  中测量的  $\Sigma'$  原点  $O'$  在  $t$  时刻的  $x$  坐标为  $x = vt$ , 而在  $\Sigma'$  测量的  $\Sigma$  原点  $O$  在  $t'$  时刻相对  $\Sigma'$  的位置为  $x' = -vt'$ 。如果在方程(3.32)中令  $x' = 0$  得到  $x = vt$ , 而如果在方程(3.33)中令  $x = 0$ , 则得到相对于  $\Sigma'$  的  $\Sigma$  原点位置为  $x' = -vt'$ 。于是方程(3.32)和(3.33)可以描述  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  原点的相互位置。

可以期望从  $\Sigma$  到  $\Sigma'$  和从  $\Sigma'$  到  $\Sigma$  的坐标转换对于坐标和时间都是线性的。例如, 假若有

$$x' = K \left( x - \frac{1}{2} at^2 \right),$$

那么令  $x' = 0$  时发现  $\Sigma'$  的原点相对于  $\Sigma$  将具有匀加速度  $a$ , 这与  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  相互作匀速运动的假设矛盾. 方程(3.32)和(3.33)对坐标和时间都是线性的.

在第五章中将把相对性原理和狭义相对论变换推广到力学现象. 对于低速, 牛顿运动定律很好地说明力学现象. 牛顿运动定律在伽利略变换下服从相对性原理. 如果狭义相对论的坐标和时间变换可用于力学现象, 则在所有速度都非常小的极限条件下它们应该化为伽利略变换. 只要当  $v$  趋于零时  $K$  和  $K'$  趋于一, 方程(3.32)和(3.33)确实变为伽利略变换. 因此变换采取方程(3.32)和(3.33)形式的假设, 是有多种理由的. 此假设将使洛伦兹变换的推导简化.

将方程(3.32)的  $x'$  代入方程(3.33), 得到

$$x = K'(Kx - Kvt + vt'),$$

即

$$t' = K \left[ t - \frac{x}{v} \left( 1 - \frac{1}{KK'} \right) \right]. \quad (3.34)$$

将从方程(3.32), (3.33), (3.34)得到的  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  和  $t'$  代入方程(3.29), 即

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0 \quad (3.29)$$

重新整理后,

$$\begin{aligned} & x^2 \left[ K^2 - \frac{c^2 K^2}{v^2} \left( 1 - \frac{1}{KK'} \right)^2 \right] \\ & + xt \left[ \frac{2c^2 K^2}{v} \left( 1 - \frac{1}{KK'} \right) - 2K^2 v \right] \\ & + y^2 + z^2 - t^2 [cK^2 - v^2 K^2] = 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

但是  $x$ ,  $y$ ,  $z$  和  $t$  指相应于光在  $P$  点被接收 (参阅图 3.3) 的事件的坐标和时间. 因此, 对于同一个事件, 由方程(3.27),

有

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0. \quad (3.27)$$

方程(3.35)和(3.27)中  $x^2$ ,  $xt$  和  $t^2$  的系数必须是相同的。令  $t^2$  的系数相等, 有:

$$c^2 K^2 - v^2 K^2 = c^2,$$

或

$$K^2 = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)},$$

即

$$K = \frac{1}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}}. \quad (3.36)$$

令方程(3.35)和(3.27)中  $xt$  的系数相等, 有:

$$\frac{2c^2 K^2}{v} \left(1 - \frac{1}{KK'}\right) - 2K^2 v = 0.$$

因为由方程(3.36),  $K^2$  不等于零, 所以

$$\left(1 - \frac{1}{KK'}\right) = \frac{v^2}{c^2},$$

即

$$KK' = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)}.$$

代入方程(3.36)的  $K$  值, 得到:

$$K' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (3.37)$$

将方程(3.36)和(3.37)的  $K$  和  $K'$  分别代入方程(3.32)和(3.33),

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{及} \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (3.38)$$

由方程(3.36)和(3.37)

$$\frac{1}{KK'} = (1 - v^2/c^2),$$

因此

$$\left(1 - \frac{1}{KK'}\right) = \frac{v^2}{c^2}.$$

将  $K$  和  $(1 - 1/KK')$  代入方程(3.34), 得到:

$$t' = K \left[ t - \frac{x}{v} \left( 1 - \frac{1}{KK'} \right) \right] = \frac{(t' - vx'/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (3.39)$$

由方程(3.38)和(3.39)

$$t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (3.40)$$

将变换公式集中在一起:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma(x - vt), \quad (3.41)$$

$$y' = y, \quad (3.42)$$

$$z' = z, \quad (3.43)$$

$$t' = \frac{(t - vx/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma(t - vx/c^2), \quad (3.44)$$

而对于逆变换, 有

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma(x' + vt'), \quad (3.45)$$

$$y = y', \quad (3.46)$$

$$z = z', \quad (3.47)$$

$$t = \frac{(t' + vx'/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma(t' + vx'/c^2). \quad (3.48)$$

注意逆变换可从方程(3.41)–(3.44)通过将带撇号和不带撇号的量互换并用  $-v$  代替  $v$  而得到。(所有相对论的逆变换都可用这种办法得到。) 方程(3.41)–(3.44)通常叫做洛伦兹变换。我们将常常简记为

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (3.49)$$

其中  $v$  是一个惯性系相对另一惯性系的速度。有些作者用  $\beta$  代表  $1/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ 。但是符号  $\beta$  广泛被用于粒子速度与光速之比，尤其在大量使用狭义相对论的高能核物理中。因此我们将仅用符号  $\gamma$  代表  $1/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ 。必须强调，洛伦兹变换给出的是分别在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中测量的同一事件的坐标和时间之间的关系。“事件”的意义是与个别坐标系的选择无关的事情，即所有惯性系的观察者都同意是发生了的事情，例如二粒子的碰撞。所有参考系的观察者都将同意二粒子发生了碰撞。方程 (3.27) 和 (3.28) 是关于图 3.3 所示在  $P$  点检测到光这一事件的坐标和时间的。光可由相对于  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  都运动的光电倍增器检测到。 $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中的观察者将同意光使光电倍增器中产生电脉冲，但是他们将赋予此事件以不同的坐标和时间。在这个意义上，要说某一点的电场强度和磁场强度是与一个事件有关系的，看来很不明显。3.3 节中电场和磁场是借助于作用在运动电荷上的力来定义的。某一点的电场强度和磁场强度是对运动着的试验电荷位于空间该点（电场和磁场给定）将发生的事情的一种度量。如果一个试验电荷果真放在该点，这试验电荷将承受使它加速的力。 $\Sigma'$  中静止的观察者和  $\Sigma$  中静止的观察者将一致同意这试验电荷有加速度。一个观察者将把一定的坐标和时间赋予此事件，而另一个将把不同的坐标和时间赋予同一事件。按照狭义相对论此事件的坐标和时间应由洛伦兹变换相联系。测量场的实验不常作，理论预言假如做实验的话将会发生什么。

这里，我们只对特殊情况推导了（参阅习题 3.4）洛伦兹变换。利用线性变换理论可更普遍地导出它们。感兴趣的读者请参阅斯特芬森（Stephenson）和克米斯特（Kilmister）的文章，他们还评论了推导洛伦兹变换的几种其它方法。洛伦兹变换适用于相互匀速运动的两个惯性系。它们不能用于相

对惯性系作加速运动或转动的坐标系。坐标轴和时间零点这样选择：在  $t = t' = 0$  时  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  的原点重合，并且此时  $\Sigma$  的  $x, y$  和  $z$  轴与  $\Sigma'$  的  $x', y'$  和  $z'$  轴重合，而且相对运动是沿着  $x$  轴。这里仅用此简单形式的洛伦兹变换。一些更高深的教科书采用洛伦兹变换的矢量形式。关于如何将洛伦兹变换推广到矢量形式，这里作一简短叙述。再次假设原点在  $t = t' = 0$  时重合。令  $\mathbf{r}$  为从  $\Sigma$  原点到发生在  $t$  时刻， $x, y, z$  处的事件的位置矢量。令  $\mathbf{r}'$  为从  $\Sigma$  原点到发生在  $\Sigma'$  中  $t'$  时刻  $x', y', z'$  处的同一事件的位置矢量。令  $\mathbf{v}$  代表两惯性坐标系的相对速度。将  $\mathbf{r}$  和  $\mathbf{r}'$  分别分解为平行于  $\mathbf{v}$  的  $\mathbf{r}_{\parallel}$  和  $\mathbf{r}'_{\parallel}$  以及垂直于  $\mathbf{v}$  的  $\mathbf{r}_{\perp}$  和  $\mathbf{r}'_{\perp}$ 。由洛伦兹变换得到：

$$\mathbf{r}'_{\parallel} = \gamma(\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{v}t); \quad \mathbf{r}'_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp}; \quad t' = \gamma[t - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})/c^2].$$

现在

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r}'_{\parallel} + \mathbf{r}'_{\perp}, \\ \mathbf{r}' &= \gamma(\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{v}t) + \mathbf{r}_{\perp}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

而

$$\mathbf{r}_{\parallel} = \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}}{v^2} \quad \text{和} \quad \mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_{\parallel} = \mathbf{r} - \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}}{v^2}.$$

将  $\mathbf{r}_{\parallel}$  和  $\mathbf{r}_{\perp}$  代入方程(3.50)，得到：

$$\mathbf{r}' = \gamma \left[ \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}}{v^2} - \mathbf{v}t \right] + \mathbf{r} - \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}}{v^2},$$

即

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \frac{\mathbf{v}}{v^2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) [\gamma - 1] - \gamma \mathbf{v}t, \quad (3.51)$$

它和

$$t' = \gamma[t - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})/c^2] \quad (3.52)$$

一起构成洛伦兹变换。方程(3.51)有时写成形式

$$\mathbf{r}' = \gamma(\mathbf{r}^* - \mathbf{v}t), \quad (3.53)$$

其中

$$\mathbf{r}^* = \frac{\mathbf{r}}{\gamma} - \frac{(1-\gamma)\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})}{\gamma v^2}. \quad (3.54)$$

如果假设  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中笛卡儿坐标轴具有相同的方向,但是  $\Sigma'$  的原点相对于  $\Sigma$  的原点以速度  $\mathbf{v}$  (具有分量  $v_x$ ,  $v_y$  和  $v_z$ ) 运动,那么把方程(3.51)和(3.52)写成分量形式,得到:

$$\begin{aligned} x' &= [1 + (\gamma - 1)v_x^2/v^2]x + (\gamma - 1)\frac{v_x v_y}{v^2}y \\ &\quad + (\gamma - 1)\frac{v_x v_z}{v^2}z - \gamma v_x t, \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} y' &= (\gamma - 1)\frac{v_y v_x}{v^2}x + \left[1 + (\gamma - 1)\frac{v_y^2}{v^2}\right]y \\ &\quad + (\gamma - 1)\frac{v_y v_z}{v^2}z - \gamma v_y t, \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} z' &= (\gamma - 1)\frac{v_z v_x}{v^2}x + (\gamma - 1)\frac{v_z v_y}{v^2}y \\ &\quad + \left[1 + (\gamma - 1)\frac{v_z^2}{v^2}\right]z - \gamma v_z t, \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$t' = \gamma \left[ t - \frac{v_x x}{c^2} - \frac{v_y y}{c^2} - \frac{v_z z}{c^2} \right]. \quad (3.58)$$

到此为止,仅考虑了相对于  $\Sigma$  以匀速  $v$  运动的惯性系  $\Sigma'$ . 现在考虑相对于  $\Sigma'$  沿公共  $x$  轴以匀速  $w$  运动的坐标系  $\Sigma''$ .  $\Sigma''$  也是惯性系. 按照洛伦兹变换,有:

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{(x' - wt')}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}; \quad y'' = y'; \quad z'' = z'; \\ t'' &= \frac{(t' - wx'/c^2)}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

如果  $\Sigma'$  相对于  $\Sigma$  沿公共  $x$  轴以匀速  $v$  运动,得到

$$x' = \frac{(x - vt)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad y' = y; \quad z' = z;$$

$$t' = \frac{(t - vx/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.60)$$

将方程(3.60)的  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  和  $t'$  代入方程(3.59), 得到

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{(x - vt) - w(t - vx/c^2)}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)(1 - w^2/c^2)}} \\ &= \frac{x(1 + vw/c^2) - t(w + v)}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)(1 - w^2/c^2)}}. \end{aligned}$$

上下全用  $(1 + vw/c^2)$  除, 有

$$x'' = \frac{x - [(w + v)/(1 + vw/c^2)]t}{\sqrt{[(1 - v^2/c^2)(1 - w^2/c^2)]/(1 + vw/c^2)^2}}.$$

现在分母的平方等于

$$\begin{aligned} &\frac{1 - v^2/c^2 - w^2/c^2 + w^2v^2/c^4}{(1 + vw/c^2)^2} \\ &= \frac{(1 + vw/c^2)^2 - \{(v^2/c^2) + (w^2/c^2) + (2vw/c^2)\}}{(1 + vw/c^2)^2} \\ &= 1 - \frac{(w + v)^2}{c^2(1 + vw/c^2)^2}. \end{aligned}$$

因此

$$x'' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (3.61)$$

其中

$$V = \frac{w + v}{1 + vw/c^2}, \quad (3.62)$$

类似地有

$$y'' = y; z'' = z \text{ 及 } t'' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (3.63)$$

因此相同方向的二次相继洛伦兹变换等同于一次洛伦兹变换, 但  $\Sigma$  和  $\Sigma''$  原点的相对速度等于

$$(w + v)/(1 + vw/c^2),$$

不是  $w + v$ , 而如果伽利略速度变换正确, 它就会是  $w + v$ .

如果有一粒子静止在  $\Sigma''$  的原点，那么它将以速度  $w$  相对于  $\Sigma'$ ，而以速度  $(w + v)/(1 + wv/c^2)$  相对于  $\Sigma$  运动，因此沿  $\Sigma'$  中  $x'$  轴的速度  $u'_x$  相对于  $\Sigma$  应变换为速度  $(u'_x + v)/(1 + vu'_x/c^2)$ 。

在本节中洛伦兹变换是从相对性原理和光速不变理论导出的。下面将讨论洛伦兹变换的某些含意。

### 3.5 洛伦兹变换的某些数学推论

现在，我们不再过多地考虑理论的物理意义，并且暂时不管符号的精确含义，先推导出洛伦兹变换的某些数学推论，然后在 3.6, 3.7 和 3.8 节中讨论其含意。

#### 3.5.1 事件同时性的相对性

设二事件发生在惯性系  $\Sigma$  中分开的两点  $x_1$  和  $x_2$ 。设在  $\Sigma$  中测得它们在同一时刻  $t$  发生。按照洛伦兹变换，用在  $\Sigma'$  中静止的钟将记录它们在  $t'_1$  和  $t'_2$  时刻，其中  $t'_1$  和  $t'_2$  为

$$t'_1 = \gamma \left[ t - \frac{v}{c^2} x_1 \right] \quad \text{和} \quad t'_2 = \gamma \left[ t - \frac{v}{c^2} x_2 \right].$$

由于  $x_1$  不等于  $x_2$ ，因此  $t'_1$  不等于  $t'_2$ ，假若洛伦兹变换是正确的，那么在  $\Sigma$  中测量为同时的两个不同地点的事件在  $\Sigma'$  中测量将不是同时的。类似地，如果  $\Sigma'$  中二事件同时发生在空间不同两点  $x'_1$  和  $x'_2$ ，根据洛伦兹变换它们在  $\Sigma$  中将不同时。于是根据狭义相对论，不同地点事件的同时性不是像牛顿力学中所假设的那样有绝对的性质。

#### 3.5.2 时间膨胀

令如图 3.5(a) 所画的静止在  $\Sigma$  中  $x$  点的钟，在  $t_1$  和  $t_2$  时

刻发出信号，于是在  $\Sigma$  中测量到的发信号的时间间隔为

$$\Delta t = t_2 - t_1. \quad (3.64)$$

设该二事件相对于  $\Sigma'$  的坐标和时间分别为  $x'_1$  和  $x'_2$  以及  $t'_1$  和  $t'_2$ ，如图 3.5(b) 所示。 $\Sigma'$  中事件的时间间隔等于

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1.$$

利用洛伦兹变换，有

$$\begin{aligned} \Delta t' &= \gamma \left[ t_2 - \frac{vx}{c^2} \right] \\ &- \gamma \left[ t_1 - \frac{vx}{c^2} \right] = \gamma [t_2 - t_1], \end{aligned} \quad (3.65)$$

或者

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}}.$$

按照狭义相对论，二事件的时间间隔，在  $\Sigma'$  中应该比在  $\Sigma$  中长。这就是时间膨胀现象。注意在  $\Sigma$  中测量时间间隔  $\Delta t$  仅需在  $x$  点的一个钟。而由于  $x'_1 = \gamma(x - vt_1)$  不等于  $x'_2 = \gamma(x - vt_2)$ ，所以在  $\Sigma'$  中测量时间间隔  $\Delta t'$  需要在  $x'_1$  和  $x'_2$

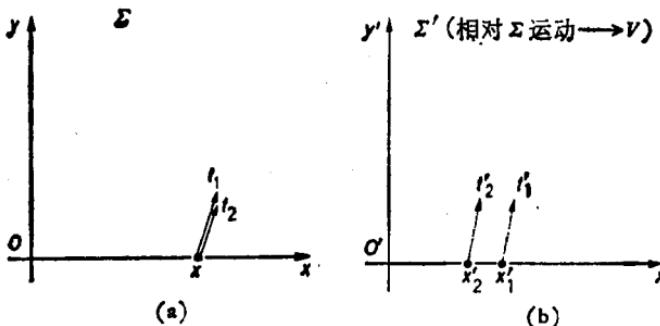


图 3.5 (a)  $\Sigma$  中二事件发生在同一点  $x$ 。(b)  $\Sigma'$  中它们不是发生在同一点。

的两个钟。这便带来了  $\Sigma'$  中不同地点的钟的校准问题。在 3.6 节中将详细讨论这一点。在惯性系中，同一点发生的两事件，并用静止在该点的一个钟测量到的时间间隔，叫做两事

件的原时间隔。如果狭义相对论是正确的，必须修改牛顿的绝对时间观念，虽然当  $v \ll c$  时， $\Delta t' \approx \Delta t$ 。因此在我们日常生活中，对于绝对时间的偏离是非常小的。

如果静止在  $\Sigma$  中  $x'$  点处的钟在  $t'_1$  和  $t'_2$  时发出信号，那么在  $\Sigma$  中此二事件将在  $t_1$  和  $t_2$  时记录下来，于是

$$t_2 - t_1 = \gamma [t'_2 + vx'/c^2] - \gamma [t'_1 + vx'/c^2],$$

或

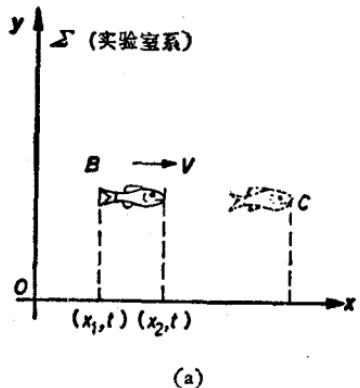
$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (3.66)$$

此时  $\Delta t'$  是原时间间隔并由一个钟测量，相反  $\Delta t$  为非原时间间隔并必须用  $\Sigma$  中分开的二个钟测量。比较方程 (3.65) 和 (3.66) 将发现，根据洛伦兹变换，无论  $\Sigma$  中还是  $\Sigma'$  中的原时间间隔在另一惯性系中测量应膨胀  $\gamma$  倍。

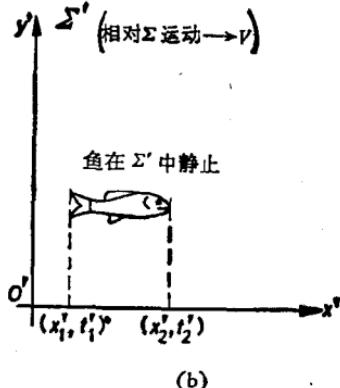
### 3.5.3 洛伦兹-斐兹杰惹缩短

为了测量静止物体的长度，原则上可将物体放在尺上，然后相继观察物体每端的位置。如果物体在运动，那么必须同时测量物体的两端。这点可由黎伯和黎伯 (Lieber and Lieber<sup>[9]</sup>) 给出的例子生动说明，并如图 3.6 所示。如果一条鱼以速度  $v$  相对于实验室坐标系（它将用  $\Sigma$  表示）游动，人们不会在测量  $B$  点的鱼尾位置之后，等待鱼嘴已达到  $C$  点以后才测量另一端。即使最热心钓鱼人也不会同意那么干，而是坚持人们应该相对于实验室同时测量运动鱼的两端。和鱼一起运动的参考系将用  $\Sigma'$  表示。

设鱼的两端位置在  $\Sigma$  中同时被测量并记录为  $x_1$  和  $x_2$  点，如图 3.6(a) 所示。这鱼将分别在时间  $t'_1 = \gamma [t - vx_1/c^2]$  和  $t'_2 = \gamma [t - vx_2/c^2]$ ，在地点  $x'_1 = \gamma [x_1 - vt]$  和  $x'_2 = \gamma [x_2 - vt]$  处，记录下与其长度测量相联系的事件。因为鱼在  $\Sigma'$  中



(a)



(b)

图 3.6 (a) 测量相对  $\Sigma$  以匀速  $v$  游动的鱼的长度. (b) 在惯性坐标系  $\Sigma'$  中, 鱼是静止的.

不动, 所以在  $\Sigma'$  中可以在任何时刻测量它的端点, 于是即使  $t'_1$  不等于  $t'_2$ ,  $\Sigma'$  中测量的鱼长也等于  $x'_2 - x'_1$ . 因此

$$x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1),$$

或

$$x_2 - x_1 = \sqrt{1 - v^2/c^2}(x'_2 - x'_1). \quad (3.67)$$

因此

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (3.68)$$

其中  $l_0 = (x'_2 - x'_1)$  是在鱼静止的坐标系中测量的鱼长;  $l_0$  叫做鱼的原长度, 而  $l = (x_2 - x_1)$  是鱼在其中以匀速  $v$  运动的惯性系中测得的长度. 这就是长度缩短现象. 由于  $t'_2$  不等于  $t'_1$ , 因此这鱼将“说”, 按照“它的”钟测量不是同时进行的. 长度的测量涉及到不同地点事件的同时性问题. 按照狭义相对论, 长度缩短是互逆的. 例如, 如果鱼在  $\Sigma'$  中在同一时刻  $t'$  测量静止在实验室中的物体长度, 并发现物体的两端在  $x'_1$  和  $x'_2$  点, 则按照洛伦兹变换, 将有

$$x_2 - x_1 = \gamma[x'_2 + vt'] - [x'_1 + vt'],$$

或

$$x'_2 - x'_1 = \sqrt{1 - v^2/c^2}(x_2 - x_1). \quad (3.69)$$

因此,一般说来,与由相对于物体为静止的观察者所测量得的物体长度相比,当物体相对观察者运动时,沿运动方向测量得的物体长度较为小些。注意,这是说,在人们同时观察物体两端处于尺上的位置的意义上,运动物体在沿运动的方向被测量短了。人们所看见(或拍摄)的景象取决于该瞬时实际到达眼睛(或相机)的光,而物体不同部分发出的光将按照这物体各部分到观察者的距离在不同时刻离开物体,人们所看见的景象还与多普勒效应有关。这些效应在 4.4 节讨论。

令一具有原体积  $V_0$  的物体相对于惯性系  $\Sigma$  以匀速  $v$  运动,若把它分割成许多平行于  $v$  的细棒,由于每一棒沿运动方向长度缩短的量由方程 (3.68) 给出,则测量到的物体容积将等于

$$V = V_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (3.70)$$

本节已经证明,如果狭义相对论是正确的,那么必须抛弃绝对长度和绝对时间的观念。

### 3.6 不同地点事件的同时性

接受一个理论的标准是看这理论的预言与实验结果是否符合。在本节中,定性地讨论狭义相对论关于长度缩短和时间膨胀的预言是否合理是否与经验相符。在测量长度和校准不同地点的钟之前,必须确定不同地点事件的同时性的含义。

如果两事件发生在同一地点,说哪个发生在前将是容易的。如果事件在不同地点,则必须在事件发生时发出信号。信号将过一段时间到达观察者。如果观察者知道信号的传播

速度和事件的地点，那么他可以估算事件发生的时间。理想地，如果信号能以无限速度传播，因而它们到达观察者没有时间延迟，那么观察者仅需注意信号到达的时间，并将它作为事件的时间。但是，还不知道有任何瞬时传递信号的办法。所有实际信号从事件到观察者都需要一定时间。能用的最快信号是光信号。在现在的讨论中，我们假设在事件发生时发出光信号，然后光信号传到观察者，他用光接受器，例如光电倍增器，接受这些信号。如果观察者在  $t$  时刻记下信号，并测量出事件离他的距离为  $r$ ，那么他将估算出事件发生在  $t - r/c$  时刻，其中  $c$  为光速。

为免得必须测量时间间隔，爱因斯坦考虑了一个在两事件中点处观察它们发出的光信号的例子。如果两事件分别在  $A$  和  $B$  点发生，并在它们发生时发出光信号，而且假如从  $A$  和  $B$  发出的光信号同时到达  $AB$  的中点  $C$ ，那么有理由假设两事件在光信号达到  $C$  点之前的  $AB/2c$  时刻同时发生。在这特殊情况，这是令人满意的同时性定义，只要光速在两方向是相同的，并且光沿直线传播。

令两个火箭 1 和 2 互相飞过。设火箭都相对于固定恒星作匀速运动，于是这两个坐标系，在其中各有某一个火箭是静止的，都是惯性系。令火箭的相对速度为  $v$ 。火箭 1 静止的参考系用  $\Sigma$  表示，而火箭 2 静止的惯性系用  $\Sigma'$  表示。假设两个火箭中都有观察者，他们有接收来自不同方向的光信号的工具，例如光电倍增器，还有测量距离的量杆。

假设恰在火箭互相飞过时，两个雷电击中此二火箭。设雷电在两火箭上都留下痕迹。这是不依赖于坐标系的两个事件，因为两个火箭上的观察者都会同意雷电确实击中两次。设火箭 1 和 2 上的雷电痕迹位置分别以  $A$  和  $A'$  以及  $B$  和  $B'$  表示，并设火箭 1 和 2 上的光接受器分别处在  $C$  和  $C'$  点，如图

3.7 所示。假设每个观察者后来都发现他的光接收器精确位于留在他的火箭上的两个痕迹的中点，即在火箭 1 上  $AC = BC$ ，而在火箭 2 上  $A'C' = B'C'$ 。为证明此二等式，量杆甚至不需要校准成相同单位。长度测量可由火箭上观察者得闲时沿火箭走步来完成。

假设从  $A$  和  $B$  来的光信号在同一时刻到达  $C$  点接收器，如图 3.7(c) 所示。如果火箭 1 上的观察者假设真空中的光速不依赖于光源的速度，在空间所有方向都是相同的，正如麦克斯韦方程组和光速不变原理所预言的那样，那么他将断定两个雷电在光信号到达  $C$  点前  $AC/C$  时刻同时击中  $A$  和  $B$  点。当雷电击中  $A$  时， $A$  与  $A'$  重合。因为对于火箭 1，雷电在同一时刻击中  $A$  和  $B$ ，又因为  $AC = CB$  以及  $A'C' = C'B'$ ，

$$\Sigma \left( \begin{array}{l} \text{火箭 1 在其中静止而火箭 2} \\ \text{在其中以速度 } v \text{ 运动的坐标系} \end{array} \right)$$

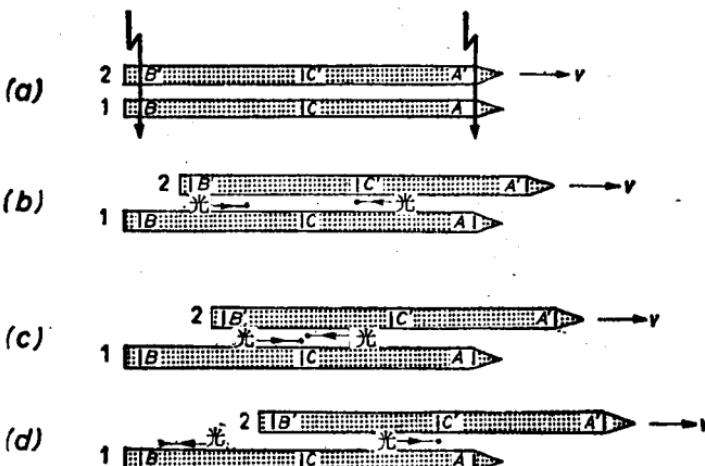


图 3.7 (a) 当两次闪击在火箭上留下痕迹时，火箭 1 和 2 互相飞过。在火箭 1 静止的坐标系  $\Sigma$  中闪击是同时的，于是  $A, A'$  和  $B, B'$  的光信号同时到达位于  $AB$  中点  $C$  的光接收器，如图 (c) 所示。 $A, A'$  的光信号通过  $C'$  点比  $B, B'$  的早，分别如图 b 和 d 所示。

所以有理由假设，相对于  $\Sigma$ ，当雷电如图 3.7(a) 所示击中  $A$  和  $B$  时， $C$  与  $C'$  重合，只要所有时间都相对于火箭 1( $\Sigma$ ) 测量。雷电所发出的光到达  $C$  和  $C'$  的接收器需一定时间，而在此时间内火箭 2 相对于火箭 1 运动，使得  $C'$  接近  $A$ ，如图 3.7(b) 所示。因此从  $A$  到  $C$  的光在到达  $C$  点前必然先通过  $C'$ ，如图 3.7(b) 所示。片刻后，相对于  $\Sigma$ ，在  $A$  和  $B$  的闪光同时到达  $C$  点，如图 3.7(c) 所示，于是火箭 1 上的观察者断定雷电在同一时刻击中  $A$  和  $B$ 。注意从  $B$  和  $B'$  点的光在经过  $C$  点前不能到达  $C'$ ，如图 3.7(d) 所示。结果，火箭 2 上的观察者将在记录从  $B$  和  $B'$  来的信号之前先记录下从  $A$  和  $A'$  来的信号，比如说分别在  $t'$  和  $t' + \Delta t'$  时刻。火箭 2 上的观察者测量  $A'C'$  等于  $C'B'$ 。如果他假设光速在两方向是相同的，他这样做是与火箭 1 上的观察者同样有理由的，那么他估算出在  $A'$  和  $B'$  的事件分别发生在  $t' - A'C'/c'$  和  $t' + \Delta t' - B'C'/c'$  时刻，其中  $c'$  是相对于火箭 2 的光速。火箭 2 上的观察者将断定在他的参考系中事件不是同时发生的，事件  $A'$  比事件  $B'$  先发生。两个观察者使用完全相同的不同地点事件同时性的判据。雷电闪击完全有可能使光信号同时到达  $C'$ ，此时火箭 2 上的观察者将把事件记录为同时的；但是此时从  $B$  来的光在到达  $C'$  之前将先通过  $C$ ，而从  $A$  来的光后到达  $C$ ，于是火箭 1 上的观察者将记录，闪击  $B$  发生在  $A$  之前。当不同地点事件的同时性问题与实际能做的测量相联系时，假若真空中的光速不依赖于光源相对于观察者的速度并且在所有方向都相同，那么可以看到：在一个惯性系中被测定为同时的事件在相对于它作匀速运动的另一惯性系中就不一定被测定为是同时的。

注意，在 3.7 节中两个火箭的相对速度是与光速可比拟的。通常火箭走得比光慢得多，因此在我们日常生活中对于

绝对同时性的偏离一般是非常小的，以致不能发现。

到此为止，仅对非常简单的情况定义了同时性，它没有涉及任何对时间的实际测量。为了便于讨论，以前曾假想过在整个空间分布一系列钟，使得当事件发生时，其时间可以当场测量。假设这些钟都很好，走得很准；但是出现的问题是：怎样可以使这些钟同步呢？你可能建议把标准钟依次摆在每个钟附近并依次校准它们，但是你不能保证标准钟不受传送的影响。在1.3节中曾指出，一定的量需要借助于一个特殊的理论来定义，例如在1.3节中，力和质量借助于牛顿运动定律来定义。狭义相对论中除力和质量之外还需要定义怎样校准不同地点的钟，才能与狭义相对论一致。爱因斯坦<sup>[1]</sup>选择的不同地点的同时性定义如下：

如果在空间A点有一个钟，在A点的观察者可通过找出与事件同时的指针位置来确定紧靠A的事件的时间值，如果在空间B点另有一个各方面都与A处钟相似的钟，在B点的观察者可以确定紧靠B的事件的时间值。但是不做进一步的假设是不能比较A点事件和B点事件的时间的。我们现在仅定义了一个“A时间”和一个“B时间”。我们没有对A和B定义一个公共时间。这公共时间现在可用下述规定来定义，即光从A到B需要的“时间”等于从B到A需要的时间。设光束在“A时间” $t_A$ 开始从A向B，设它在“B时间” $t_B$ 在B点被反射向A，并在“A”时间“ $t'_A$ ”又回到A。

按定义如果

$$t_B - t_A = t'_A - t_B, \quad (3.71)$$

则两钟同步。

于是，爱因斯坦要求钟记录光在真空中从A到B的时间应该等于光从B到A的时间。这种同步的定义是与光速不变原理一致的，按照此原理真空中的光速在空间所有方向应该具有相同的数值。因此，爱因斯坦的同步定义是与狭义相对

论的假设相一致的。如果在空间所有方向和所有区域光速具有相同的数值并且光沿直线传播，那么可以使在一个惯性系中静止的所有钟同步。由方程(3.71)得出

$$t_B = \frac{1}{2} (t_A + t'_A). \quad (3.72)$$

按照方程(3.72)可以用“雷达”技术测量事件的时间。如果在  $A$  处的雷达基地在  $t_A$  时发出的脉冲被在  $B$  点的事件反射并在  $t'_A$  时返回基地，那么根据方程 (3.72)， $B$  点事件的时间等于  $\frac{1}{2} (t_A + t'_A)$ 。此法不需要在  $B$  点有第二个钟。在雷达基地  $A$

处有一个钟就足够了。从雷达基地到事件的距离等于  $\frac{c}{2} (t'_A - t_A)$ 。如果使用方向天线，也可以确定事件的空间位置。必须强调，关联  $B$  点事件位置和时间的洛伦兹变换所用的时间是计算出的  $B$  点事件时间，即  $\frac{1}{2} (t_A + t'_A)$ ，而不是基地收到讯号的时间。这种雷达技术特别适宜于测量远距离。它可用于校准不同处的尺子而不用将长度标准从一地运到另一地。

### 3.7 洛伦兹-斐兹杰惹缩短

作为测量运动物体在其平行于运动方向的长度的一个例子，我们考虑 3.6 节给出的例子中雷电在火箭 1 上  $A$ 、 $B$  两点击出的痕迹之间距离的测量。设雷电在火箭 1 静止的坐标系  $\Sigma$  中同时闪击，使得光信号在同一时刻到达  $C$ ，如图 3.7(c) 所示。3.6 节已证明火箭 2 上的观察者将断定： $A'$  与  $A$  重合比  $B'$  与  $B$  重合早，因为  $A'$  的光到达  $C'$  (在  $t'$  时刻) 比  $B$  的光 (在  $t' + \Delta t'$ ) 到达  $C'$  早。考虑火箭 2 静止的坐标系  $\Sigma'$ 。在此坐

标系中，火箭 1 以速度  $-v$  运动，如图 3.8 所示。火箭 2 上静止的观察者将记录  $A'$  与  $A$  在  $t' = A'C'/c$  时刻重合，如图

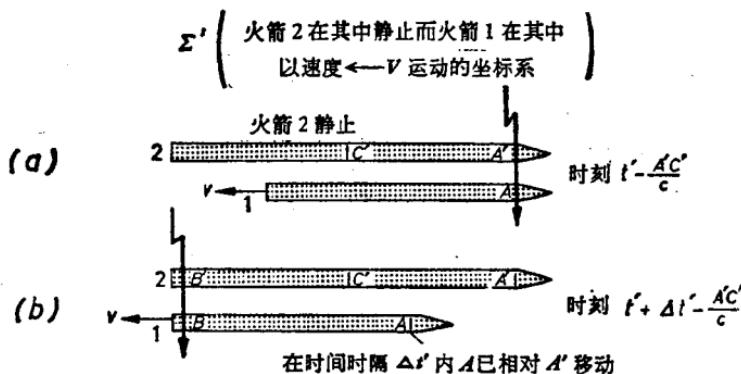


图 3.8 火箭 2 静止，而火箭 1 以匀速  $v$  向左运动的坐标系。(a) 因为  $A, A'$  的光信号到达  $C'$  比  $B, B'$  的光信号早，所以相对于  $\Sigma'$  标出  $A, A'$  处的闪电比  $B, B'$  处早。(b) 因为火箭 1 在此二事件的时间间隔内相对  $\Sigma'$  运动，所以在  $\Sigma'$  中算出  $AB$  比  $A'B'$  短。

3.8(a) 所示，而  $B'$  与火箭 1 上的痕迹  $B$  在以后时刻  $t' + \Delta t' - A'C'/c$  重合。在  $\Sigma'$  中  $A'$  和  $B'$  处事件的时间间隔内，按照火箭 2 上的观察者， $A$  相对  $A'$  已运动了，使得在  $t' + \Delta t' - A'C'/c$  时刻火箭 1 上痕迹  $A$  和痕迹  $B$  间的距离比  $A'B'$  短，如图 3.8(b) 所示。另一方面，在火箭 1 上的观察者将记录当  $B$  和  $B'$  相重合时  $A$  和  $A'$  相重合，如图 3.7(a) 所示。于是相对于火箭 1，在  $A$  和  $B$  处痕迹间的距离等于  $A'B'$ ，而相对于火箭 2， $A$  和  $B$  间的距离比  $A'B'$  小，如图 3.8(b) 所示。可见，长度测量的不同与不存在绝对同时性密切联系着。在这里由于使两个火箭的相对速度可与光速相比拟而把此效应夸大了。对于我们日常生活一般能遇到的所有现象，长度缩短所引起的效应小得可以忽略。

现在利用火箭的例子考虑垂直于相对运动方向的长度测量。现在令当两火箭正好并列时雷电击中火箭边上的  $A$  和  $A'$

点及  $B$  和  $B'$  点，如图 3.9(a) 所示，并在两火箭上留下痕迹。令火箭 1 上的观察者发现他的在  $C$  点的光接收器处于火箭 1 上  $A$  和  $B$  处痕迹的中点，而令火箭 2 上的观察者发现他的在  $C'$  点的光接收器处于火箭 2 上  $A'$  和  $B'$  处痕迹的中点。令  $AB$  垂直于火箭 2 的运动方向，如图 3.9 所示。设相对于火箭 1，两雷电同时闪击，使得光信号在同一时刻到达  $C$  点，如图 3.9 (b) 所示。火箭 1 上的观察者将断定： $A$  与  $A'$  重合和  $B$  与  $B'$  重合在同一时刻发生。现在在火箭 1 静止的坐标系  $\Sigma$  中， $C'$

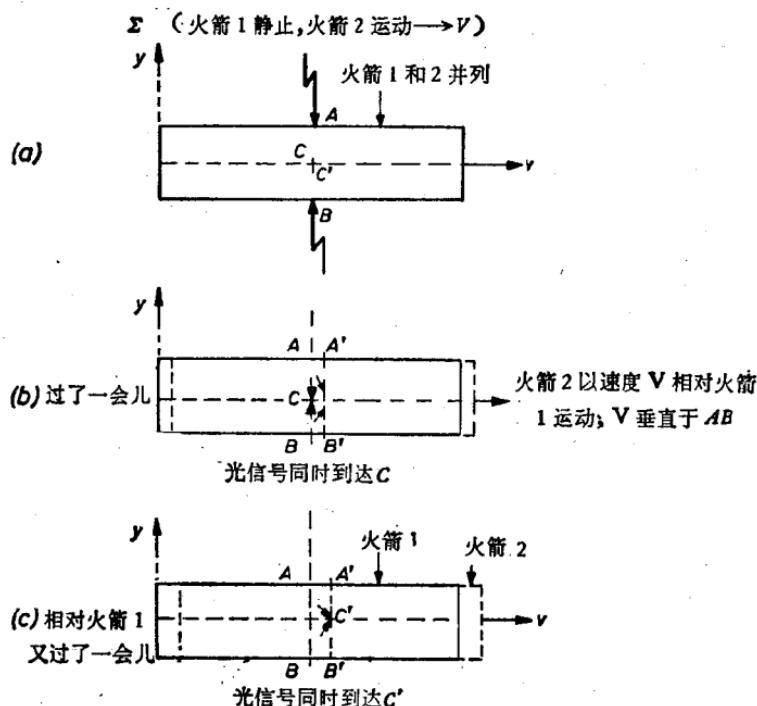


图 3.9 在这种情况，当火箭 1 和 2 正好并列时雷电击中它们的两侧，使得相对于火箭 1 静止的坐标系  $\Sigma$  来说雷电为同时闪击，于是  $A, A'$  和  $B, B'$  的光信号同时到达  $A$  和  $B$  的中点  $C$ ，如图 (b) 所示。在此情形下  $A, A'$  和  $B, B'$  的光信号也同时到达火箭 2 的  $A'$  和  $B'$  中点  $C'$ ，如图 (c) 所示，于是断定相对火箭 2 雷电也是同时闪击的。

在垂直于  $AB$  的方向运动，于是无论  $C'$  相对于火箭 1 的位置如何，都有  $AC' = BC'$ ，如图 3.9(c) 所示。如果正如狭义相对论所假设那样，空间是各向同性的，并且光速在所有方向都相同，那么  $A$  和  $B$  的光相对于火箭 1 应该在同一时刻到达  $C'$  点。从  $A$  和  $B$  处来的光到达  $C'$  处接收器的同时性是不依赖于个别参考系的事件，因此相对火箭 2，从  $A$  和  $A'$  处以及从  $B$  和  $B'$  处来的光必然被测定为同时到达  $C'$ 。因为火箭 2 上的观察者测量  $A'C'$  等于  $B'C'$ ，他将推断  $A'$  与  $A$  重合和  $B'$  与  $B$  重合为同一时刻。于是在这种情况下，火箭 1 和 2 上的观察者将都同意，当  $B$  与  $B'$  重合时  $A$  与  $A'$  也重合。如果他们选择相同的长度单位，他们将同意  $\Sigma$  中（火箭 1 静止）测量到的  $AB$  长等于  $\Sigma'$  中（火箭 2 静止）测量到的  $A'B'$  长，或者一般讲

$$y = y', \\ z = z'.$$

与洛伦兹变换相符。

已经证明，根据狭义相对论，当物体相对于测量其长度的观察者运动时，他测量到的物体长度在相对运动方向缩短。如果同时性不是绝对的，此“缩短”当然出现。按照旧的以太理论，洛伦兹-斐兹杰惹缩短归因于物体相对于以太的运动。根据这些理论，地球上静止的物体由于相对于以太（它曾被认为是电磁现象的绝对参考系）运动而长度应该缩短。另一方面，根据这些理论，相对于以太为静止而相对于地球作运动的物体，由地球上看来，长度应该不缩短。按照狭义相对论，测量到的长度变化与物体和观察者间的相对运动相伴随。效应完全是互逆的，仅是由于物体和观察者间的相对运动引起的，不是由于相对于任何特殊绝对参考系的运动引起的。经常有人问长度缩短是否“真实”。相对性原理是说在所有惯性系中物

理定律相同，而个别量的实际量度在不同的坐标系中是可以不同的。例如 1.4 节讨论过的船出海时在甲板上玩网球的例子中，在牛顿力学范畴内发现网球的速度相对于船和相对于岸不同是有道理的。此速度变化是否“真实”呢？按照狭义相对论，相对于船和岸不仅球速的量度将是不同的，而且平行于相对运动方向球场长度的量度和事件时间的量度也将是不同的。相对于船和岸为静止的两个参考系都可用于描述球赛，并且在两个参考系中物理定律是相同的，但是某些量的量度将不同。此问题及其相关的问题将在 11.1 节更详细讨论。

在牛顿力学中可以作这样的叙述：“棒长 30 厘米”。由于在狭义相对论中物体的长度不是绝对的，所以这样的叙述是没有意义的，除非指定长度是相对于某种静止的标准。

在 3.6 节和 3.7 节中已经定性说明，当与实际能做的测量相联系时，狭义相对论关于长度缩短和不同地点事件同时性的绝对性的预言看来似乎是合理的。现在将把狭义相对论的预言和已做的实验结果作定量的比较。

### 3.8 时间膨胀

通过考虑两个雷电击中两个火箭的实际可能情况，在 3.6 节说明了不同地点的两个事件在一个惯性系中测定为同时发生的，但在另一惯性系中将测定为不是同时发生的，只要在解释测量时，假设真空中的光速不依赖于光源相对于观察者的速度。如果在不同惯性系中静止的观察者对不同地点事件的同时性不能取得一致意见，那么发现他们对时间间隔的量度不同就不是不可理解的了。在给定的惯性系中人们可以利用静止在此惯性系的多种类型的钟测量时间间隔。例如，在实验室中人们可以使用摆钟，石英晶体钟或者“原子”钟，或者人

们甚至可以利用观察光在一定时间间隔内走多远的办法来测量时间间隔。如果光速已知，那么时间间隔将等于在此时间间隔内光走的距离与光速之比。测量时间间隔的这最后一种方法对于讲述狭义相对论尤其方便，因为该理论假设在所有惯性系中光速具有相同的数值。考虑一个简单的例子，我们来说明，若光速不变原理是正确的，怎么能够测量  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中的同一时间间隔：设在  $\Sigma'$  中静止的灯发出脉冲光，它在被镜子反射之前沿  $y'$  轴走了距离  $y'_0$ ，如图 3.10(b) 所示。在  $\Sigma'$  中光离开  $x'$  轴并返回的时间间隔  $\Delta t'$  为

$$\Delta t' = \frac{2y'_0}{c}.$$

光脉冲相对于  $\Sigma$  的运动如图 3.10(a) 所示。注意，光在  $x$  轴上一点离开，而在另一点返回。光在离开和返回  $x$  轴的时间间隔现在为

$$\Delta t = \frac{2\sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v\Delta t'}{2}\right)^2}}{c}. \quad (3.73)$$

在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中光速采用相同的数值，使之与光速不变原理相符合。重新整理方程(3.73)，有：

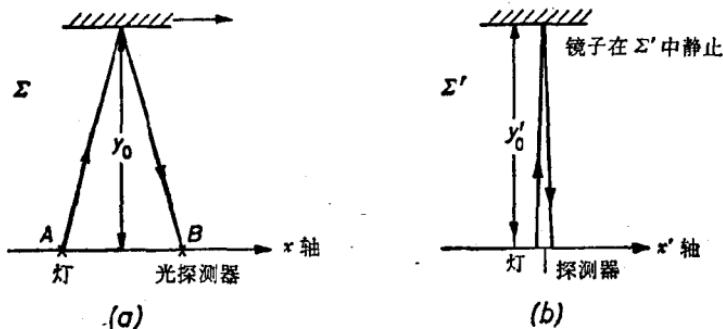


图 3.10 借助于光在一定时间间隔内走的距离来测量时间间隔。

$$\Delta t = \frac{2y_0}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (3.74)$$

在 3.7 节中直接从狭义相对论的假设证明了  $y_0$  应该等于  $y'_0$ 。因此，利用光走的距离作为时间间隔的度量并假设  $c$  在所有惯性系中都是相同的，就有：

$$\Delta t = \Delta t' \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.75)$$

这就是时间膨胀的表达式。

注意如果发光时和它返回  $x$  轴时的时间间隔用静止在两个惯性系的钟测量，那么将需要一个静止在  $\Sigma'$  中测量原时间隔  $\Delta t'$  的钟。另一方面，在  $\Sigma$  中将需要两个钟，一个静止在  $A$ ，记录脉冲离开  $x$  轴的时刻，另一个静止在  $B$ ，记录光脉冲返回  $x$  轴的时刻。如果静止在  $\Sigma$  中的钟像 3.6 节所述那样同步，那么，若狭义相对论正确，则  $\Sigma'$  中由一个钟读出的时差应通过方程 (3.75) 与  $\Sigma$  中静止在  $A$  和  $B$  处的两个钟读出的时差相联系，只要  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中使用相同的时间单位。

关系式 (3.75) 完全是互逆的，因为若光返回  $\Sigma$  中同一点，就将有  $\Delta t = 2y_0/c$ ，而光脉冲将返回  $\Sigma'$  中  $x'$  轴上不同点，那么将有

$$\Delta t' = \frac{2y'_0}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (3.76)$$

上述类型的实验（在同一体系上同时测量两不同惯性系中的同一时间间隔）还没有做过，因此关系式 (3.75) 和 (3.76) 还没有直接由实验证实。但是，在解释许多现象时都要出现时间变量，并且其中一些现象的解释几乎完全依赖于洛伦兹时间变换。下面就要讨论这样形式的两个实验，即多普勒效应和大气中宇宙射线中  $\mu$  介子的衰变。还有一些例子是基于应用穆斯堡尔效应的，将在 11.6 节给出。

### 3.8.1 多普勒效应

多普勒 1842 年指出了光源运动可以影响谱线位置的可能性。现在给出多普勒效应的简单论述，一般情况，将在 4.4 节处理。本节叙述旨在显出洛伦兹时间变换的作用。令一静止在  $\Sigma'$  原点  $O'$  的光源发射在  $\Sigma'$  中测量频率为  $\nu'$  的光。当它发射每一波前的极大值时，就被当作为一个事件。令观察者静止在  $\Sigma$  的原点  $O$ 。如果  $\Sigma'$  以匀速  $v$  相对于  $\Sigma$  运动，那么在两个原点重合之后，光源以匀速  $v$  离开静止在  $\Sigma$  中的观察者。如果一个波峰在  $\Sigma'$  中测量的时间  $t'$  由  $O'$  发出，那么按照洛伦兹变换，相对于  $\Sigma$  此事件发生的位置将记录为

$$x = \gamma(x' + vt') = \gamma v t', \quad (3.77)$$

发生的时刻为

$$t = \gamma(t' + vx'/c^2) = \gamma t'.$$

于是此光在真空中以速度  $c$  从  $O'$  传向  $O$ ，而在时刻  $x/c$  后到达  $O$ 。因此波峰到达  $O$  的时刻为

$$T = t + \frac{x}{c} = \gamma t' + \gamma \frac{vt'}{c} = \gamma t' \left(1 + \frac{v}{c}\right). \quad (3.78)$$

令下一波峰在  $t' + \frac{1}{\nu'}$  时刻（在  $\Sigma'$  中测量）从  $O'$  发出。此峰到达  $O$  的时刻为

$$T + \Delta T = \gamma \left(t' + \frac{1}{\nu'}\right) \left(1 + \frac{v}{c}\right). \quad (3.79)$$

因此

$$\Delta T = \frac{1}{\nu} = \frac{\gamma}{\nu'} \left(1 + \frac{v}{c}\right), \quad (3.80)$$

其中  $\nu$  是在  $\Sigma$  中测量的到达  $O$  的光频率。

$$\nu = \frac{\nu' \sqrt{(1 - v^2/c^2)}}{(1 + v/c)} \quad (3.81)$$

$$= \nu' \sqrt{\left(\frac{1 - v/c}{1 + v/c}\right)} = \nu' \sqrt{\left(\frac{c - v}{c + v}\right)}. \quad (3.82)$$

展开到  $v/c$  的一级量, 有

$$\nu = \nu' \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v}{c}\right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v}{c}\right) = \nu'(1 - v/c). \quad (3.83)$$

因此, 当光源背离观察者运动时, 光频率将降低, 谱线将向红端移动。如果在  $\Sigma$  中  $c = \lambda\nu$ , 在  $\Sigma'$  中  $c = \lambda'\nu'$ , 那么方程 (3.81) 可重写为

$$\lambda = \frac{\lambda'(1 + v/c)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (3.84)$$

精确到一级量,

$$\lambda = \lambda'(1 + v/c) \quad (3.85)$$

当光源正朝向观察者运动时, 有

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\nu' \sqrt{1 - v^2/c^2}}{(1 - v/c)} \\ &= \nu' \sqrt{\frac{c + v}{c - v}} \approx \nu'(1 + v/c) \quad (\text{精确到一级量}) \end{aligned} \quad (3.86)$$

以及

$$\lambda = \frac{\lambda'(1 - v/c)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx \lambda'(1 - v/c), \quad (\text{精确到一级量}). \quad (3.87)$$

大多数声学教科书证明, 当一频率为  $\nu'$  的声源以速度  $v$  背离观察者运动时, 观察者收到的声音频率为

$$\nu = \nu' \frac{V + w}{V + w + v}$$

其中  $V$  是声速,  $w$  是风速, 假设风在从声源到观察者的方向。如果  $c$  是以太静止时光相对于以太的速度, 而  $w$  是以太风的速度, 那么在相应的光学情况, 按照以太理论应该有

$$\nu = \nu' \frac{c + w}{c + w + v} = \nu'(1 + w/c) \left(1 + \frac{w + v}{c}\right)^{-1}.$$

展开到  $v/c$  和  $w/c$  的一级量, 有

$$\nu = \nu'(1 + w/c)(1 - w/c - v/c) \approx \nu'(1 - v/c).$$

因此到  $v/c$  和  $w/c$  的一级量, 多普勒效应的经典公式不依赖于以太风速。只用  $v/c$  和  $w/c$  的一级量则经典公式和相对论公式相符合, 但是如用到  $v/c$  和  $w/c$  的二级量, 它们就不同了。按照以太理论, 二阶项依赖于以太风速  $w$ 。如果假设在观察者静止的参考系中  $w$  是零, 那么按照非相对论性理论, 当光源背离观察者运动时, 利用上边相同的论证, 并利用伽利略变换, 方程(3.77), (3.78)和(3.79)将变为

$$x = vt = vt', \quad t = t', \quad (3.88)$$

$$T = t + x/c = t' + \frac{vt'}{c} = t'(1 + v/c), \quad (3.89)$$

和

$$T + \Delta T = \left(t' + \frac{1}{v'}\right)(1 + v/c), \quad (3.90)$$

它给出

$$\nu = \frac{1}{\Delta T} = \frac{\nu'}{(1 + v/c)} \approx \nu'(1 - v/c). \quad (3.91)$$

方程(3.91)和(3.81)符合到  $v/c$  的一级量, 仅有的不同是由因数  $\gamma$  引起的, 它直接来源于洛伦兹变换。因此, 如果方程(3.81)或(3.84)由实验证实, 它将是洛伦兹变换的强有力证据。因为经典公式和相对论公式的差别在二阶项出现, 实验必须精确得足以查明  $v/c$  的二阶差别。依弗斯和斯蒂耳威尔<sup>[11]</sup>曾经做过这样的实验, 他们测量了极隧道射线中高速运动的氢原子发出的波长为 4861 埃的兰绿  $H_{\beta}$  线的表观频率。正粒子在氢弧中产生, 并被电场加速。极隧道射线在运动方向发出的谱线直接由光谱仪观察。利用一面镜子将在与极隧道射线

运动方向成 180 度方向发出的光反射回光谱仪的隙缝。依弗斯和斯蒂耳威尔得到的典型光谱照片如图 3.11(a) 所示。照片由中心谱线和两侧对称分布的谱线组成。总存在一些静止的原子，它们产生中心谱线。在中心谱线两侧是移动了的谱线。由走向光谱仪的极隧道线所引起的谱线向兰端移动，由反射光即离开缝隙的相似的阴极射线流发出的光所引起的谱线向红端移动。在图 3.11(a) 中，在中心谱线每侧各有两条谱线。这些分别对应于双氢和三氢质量的分子群。精确到  $v/c$  的一阶，经典理论和相对论性理论都预示有  $\Delta\lambda = \pm \frac{v}{c} \lambda'$  的

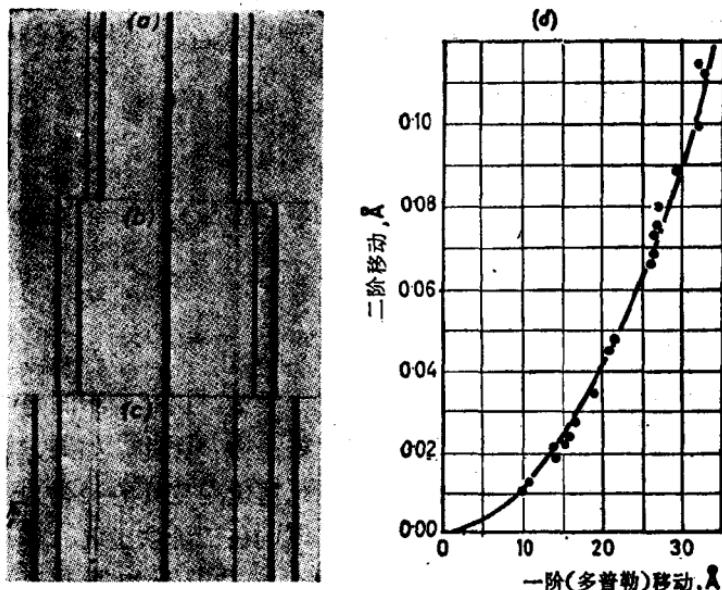


图 3.11 (a), (b) 和 (c) 依弗斯和斯蒂耳威尔得到的典型光谱。光谱由不动的中心谱线和两边对称分布的谱线组成。加速电位差分别为 (a) 7859, (b) 13702 和 (c) 20755 伏。 (d) 对各种加速电位的二阶移动  $\lambda_m - \lambda' = \left(\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \lambda'\right)$  和一阶多普勒移动  $\Delta\lambda = (v/c)\lambda'$  图。可以看出实验点与连续线所画的狭义相对论预言非常符合。

移动，其中  $\lambda'$  是在光源静止的惯性系中光的波长。位移  $\Delta\lambda$  使依弗斯和斯蒂耳威尔可以计算每种情况的  $v/c$ 。依弗斯和斯蒂耳威尔计算了移动谱线的平均波长  $\lambda_m$ 。按照狭义相对论，由方程(3.84)和(3.87)得到：

$$\begin{aligned}\lambda_m &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{\gamma}{2} \left[ \lambda' \left( 1 - \frac{v}{c} \right) + \lambda' (1 + v/c) \right] \\ &= \frac{\lambda'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.\end{aligned}$$

因此

$$\lambda_m - \lambda' = \lambda' \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right] \approx \frac{v^2}{2c^2} \lambda' \quad (3.92)$$

表 3.1

加速电位差(伏)	$\Delta\lambda = \frac{v}{c} \lambda'$ (埃)	计算值 $\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \lambda'$ (埃)	观测值 $\lambda_m - \lambda'$ (埃)
26,735	25.82	0.0670	0.067
34,395	29.40	0.0869	0.090
40,190	31.93	0.1049	0.0995
42,260	32.50	0.1098	0.113

依弗斯和斯蒂耳威尔得到的一组典型结果如表 3.1 和图 3.11 (d) 所示。显见对所有加速电位，其结果与狭义相对论的预言符合得非常好。对于二阶项，经典理论的预言多少与以太风速有关，但是不论以太风速选取何值，经典理论的预言都在二阶项上与方程 (3.92) 不同。因此多普勒效应的相对论性理论（它直接基于洛伦兹时间变换）由依弗斯和斯蒂耳威尔借助于  $v/c$  的二阶项而证实了。

### 3.8.2 宇宙线的 $\mu$ 介子在大气中的衰变

按照放射性衰变定律，如果数目  $N_0$  的放射性原子  $t = 0$

时静止在惯性系  $\Sigma'$  的原点,那么在  $t'$  时间后剩下的数目为

$$N = N_0 e^{-t'/T_0}, \quad (3.93)$$

其中  $T_0$  是放射性原子静止时在衰变前的平均寿命。放射性原子相对于惯性系  $\Sigma$  沿  $x$  轴运动,于是根据对应于  $\Sigma'$  中  $t'$  时刻  $x' = 0$  处的洛伦兹变换,在  $\Sigma$  中有  $x = \gamma v t'$  和  $t = \gamma t'$ 。代入方程(3.93)得到

$$N = N_0 e^{-t/\gamma T_0}. \quad (3.94)$$

因此,相对于  $\Sigma$ , 测量到的放射性原子的平均寿命应该是  $\gamma T_0$  而不是  $T_0$ 。因而当放射性原子相对于实验室运动时,测量到的放射性原子的平均寿命应该长些。迄今还没有用放射性原子做过这样的实验。已经发现多种基本粒子,其质量介于电子质量和质子质量之间。它们经受自发的衰变,寿命短。最先发现的是  $\mu$  介子,它开始是在宇宙辐射中被发现的。静止的  $\mu$  介子寿命可以用图 3.12 所示类型的实验测量。仪器由用来探测进入吸收器  $E$  的宇宙射线  $\mu$  介子的计数器望远镜  $C_1 C_2 C_3$  组成,  $E$  位于计数器  $C_3$  和计数器  $A$  之间。计数器  $A$  与  $C_1 C_2$  和  $C_3$  为反符合,从而当计数器  $C_1 C_2$  和  $C_3$  彼此符合,但计算器  $A$  不给出读数时,停止在吸收器  $E$  中的  $\mu$  介子就被发现。 $\mu$  介子被停止的时间比它平均寿命小得多,于是对于绝大部分时间,它们在吸收器  $E$  中以它们的零点能徘徊,直至衰变。在具有高原子数的吸收器中负  $\mu$  介子可能被核子捕获,但是正  $\mu$  介子通常都衰变。一个衰变的  $\mu$  介子放出一个电子和两个中微子。电子有足够的能量从而离开吸收器  $E$  并当它们通过记数器  $D$  时将其触发。由  $C_1 C_2$  和  $C_3$  来的电脉冲及由  $D$  来的电脉冲之间的时间延迟可以用电子学方法测量。此时间延迟按放射性衰变定律统计分布,对于正  $\mu$  介子相当于一个  $T_0 = 2.2 \times 10^{-6}$  秒的数值。这即为  $\mu$  介子静止时的平均寿命。

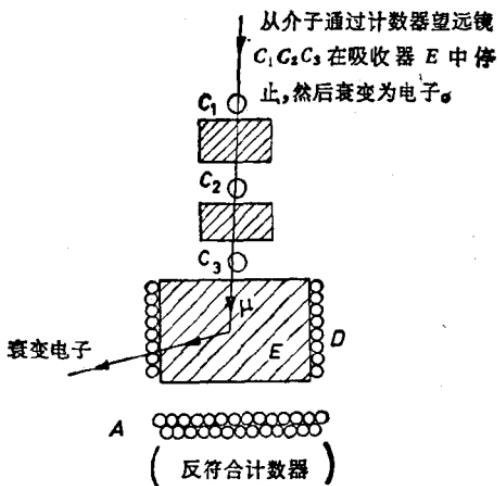


图 3.12 测量静止  $\mu$  介子寿命的装置的示意图。

现在宇宙辐射的  $\mu$  介子一般是在大气顶层附近产生的，这是宇宙射线引起的核相互作用的结果。在这些核相互作用中，产生  $\pi$  介子，它们后来衰变成  $\mu$  介子。现在，如果  $\mu$  介子相对于地球仅存在  $T_0 = 2.2 \times 10^{-6}$  秒的时间，即使它们以光速行进，它们在衰变前走的平均距离将也只为  $cT_0 = 3 \times 10^8 \times 2.2 \times 10^{-6}$  米  $\approx 660$  米。如果这是正确的话，将不能期望有在大气顶层产生的  $\mu$  介子到达海平面，而实际上却有相当大的一部分  $\mu$  介子到达了。因此到达海平面的  $\mu$  介子相对于地球必然要么是具有超光速的速度，要么是生存时间大于  $2.2 \times 10^{-6}$  秒。从来没有得到过超光速的速度，所以此现象被解释为  $\mu$  介子的表观寿命应增加  $\gamma = 1/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$  倍，其中  $v$  是  $\mu$  介子相对于地球的速度。这与狭义相对论的预言相符合。海平面处的  $\mu$  介子具有  $\sim 3 \times 10^9$  电子伏/ $c$  的动量，相应于  $\gamma \sim 30$ 。按照方程(3.94)，动量为  $3 \times 10^9$  电子伏/ $c$  的  $\mu$  介子寿命相对于地球是  $\sim 30 \times 2.2 \times 10^{-6}$  秒，而这样一

一个 $\mu$ 介子在衰变前相对于地球应该走平均距离 $\sim 20$ 公里，因而有相当大的几率到达海平面。因此，用狭义相对论就可以满意地解释宇宙辐射中的 $\mu$ 介子的行为。用洛伦兹变换来解释 $\mu$ 介子产生和衰变事件的坐标和时间是有意义的。通常 $\mu$ 介子的寿命按统计分布，但为便于讨论起见，将假设一个 $\mu$ 介子在其自身静止的惯性系中寿命为 $T_0$ 。忽略电离损失，因而 $\mu$ 介子的速度相对于地球保持常值。设 $\Sigma$ 和 $\Sigma'$ 的原点在 $t = t' = 0$ 时于 $\mu$ 介子产生处重合，如图3.13(a)所示。令 $\Sigma'$ 以与 $\mu$ 介子相同速度 $v$ 运动，因而 $\mu$ 介子在 $\Sigma'$ 的原点 $O'$ 保持静止。在 $\Sigma'$ 中 $\mu$ 介子将在 $x' = 0, t' = 0$ 产生，而在 $x' = 0, t' = T_0$ 衰变。在 $\Sigma$ 中它将在 $x = 0, t = 0$ 产生，而衰变在

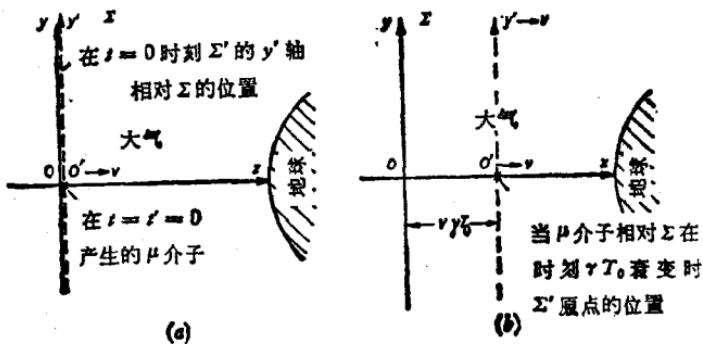


图3.13 (a)  $\mu$ 介子在 $\Sigma$ 和 $\Sigma'$ 的原点重合时刻 $t' = 0$ 在 $\Sigma'$ 的原点产生。如果 $\mu$ 介子以匀速 $v$ 相对于 $\Sigma$ 运动，则它保持静止在 $\Sigma'$ 的原点。(b)  $\mu$ 介子衰变时的位置。

$$x = \gamma(x' + vt') = \gamma v T_0$$

$$t = \gamma(t' + vx'/c^2) = \gamma T_0.$$

因此，一个在 $\Sigma$ 中的观察者(即在地球上)将说 $\mu$ 介子以速度 $v$ 在 $\gamma T_0$ 时间内走了距离 $\gamma v T_0$ ，因此相对于地球，我们得到时间膨胀。一个在 $\Sigma'$ 中静止的观察者将说，相对于 $\mu$ 介子，当在 $\Sigma'$ 中看到 $\mu$ 介子衰变时 $\Sigma$ 的原点以及地球以速度 $v$ 在

$T_0$  时间内走了距离为  $vT_0$ , 此距离与  $\mu$  介子相对于地球所走的距离缩小  $\gamma$  倍. 相对于  $\mu$  介子, 没有时间膨胀, 但是地球和地球大气经受了洛伦兹缩短.

已经证明, 在多普勒效应和  $\mu$  介子衰变的情况, 狹义相对论的预言和实验结果相符. 这使人对于用时间变换具有信心. 必须指出在解释许多其它现象时, 时间作为一个变量出现, 例如速度等于单位时间内所走的距离. 相对论速度变换在解释实验上所获得的成功, 是时间变换的间接证据. 动量定义为质量与速度之积. 在第五章中所论述的相对论动力学是基于洛伦兹变换的, 而相对论这一分支的成功是时间变换的又一个间接证据.

必须强调本节中假设  $\Sigma'$  始终以同一匀速  $v$  相对于  $\Sigma$  运动. 在此条件下, 两个惯性系完全是互易的. 关于当钟被加速使得它经历一个封闭路径的旅行时能否发生什么事情的讨论, 留到第十一章. 这样一个旅行必然涉及钟在旅途某一阶段从一个惯性系加速到另一惯性系.

### 3.9 真空中球面波的传播

考虑一个静止在真空中距离惯性系  $\Sigma$  原点为  $r$  的光电倍增器的球面阵列. 如果光在  $t = 0$  时刻由  $\Sigma$  原点发出, 那么根据光速不变原理, 光应该在相对于  $\Sigma$  为同一个时刻  $t = r/c$  到达静止在  $\Sigma$  中的所有光电倍增器. 类似地, 假如有一个静止在  $\Sigma'$  中距离  $\Sigma'$  原点为  $r'$  的光电倍增器球面阵列, 那么根据光速不变原理, 当在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  的原点重合时刻  $t' = 0$  由  $\Sigma'$  原点发出的光应该在  $\Sigma'$  中测量的  $t' = r'/c$  时刻到达静止在  $\Sigma'$  中的所有光电倍增器. 按照光速不变原理, 分别在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中静止的观察者都应该记录出: 在他们各自的坐标系中光以

球面波形式向外传播并以各自的坐标原点作为波前中心。现在将证明，利用洛伦兹变换可将这两个表面上矛盾的观点统一起来。

考虑静止在  $\Sigma'$  的  $x'$  轴上距离原点  $O'$  分别为  $+r'$  和  $-r'$  的  $A$  和  $B$  点的两个光电倍增器，如图 3.14(b) 所示。按照光速不变原理，在  $t' = 0$  时刻由  $O'$  发出的光应该在  $\Sigma'$  中的  $t' = r'/c$  时刻同时到达  $A$  和  $B$  处的光电倍增器。但是一个在  $\Sigma$  中静止的观察者将说，起先，在  $B$  的光电倍增器向着光运动，而在  $A$  的光电倍增器背着光运动，如图 3.14(a) 所示。相对于  $\Sigma$ ，在  $B$  点的光电倍增器应该在光到  $A$  点前收到光。按照洛伦兹变换，在  $\Sigma$  中的观察者将把在  $B$  点收到光的坐标和时间记录为：

$$x_B = \gamma(-r' + vt'), \quad t_B = \gamma(t' - vr'/c^2),$$

而相应于在  $A$  点的光电倍增器收到光，他应记录为：

$$x_A = \gamma(r' + vt'), \quad t_A = \gamma(t' + vr'/c^2).$$

于是，根据洛伦兹变换，在  $\Sigma$  中静止的观察者将记录光到达  $B$  早于  $A$ ，但是他还将记录光到达  $B$  走过的距离比到  $A$  短。有：

$$\frac{x_A}{t_A} = \frac{\gamma[r' + vt']}{\gamma[t' + vr'/c^2]} = \frac{r'/t' + v}{[1 + (v/c^2)(r'/t')]}.$$

现在，若  $r'/t' = c$ ，则

$$\frac{x_A}{t_A} = \frac{c + v}{1 + v/c} = c.$$

类似地，

$$x_B/t_B = c.$$

相似的论证可用于惯性系  $\Sigma'$  中对静止在惯性系  $\Sigma$  中光电倍增器的光接收。由于光发射和接收两事件的空间和时间间隔的不同量度，在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中静止的观察者都能得到相同数值

的光速。他们都能把光的传播记录为以各自的坐标原点作为波前中心的球面波，虽然一个观察者用他的“静止”光电倍增器阵列收到波前时另一个观察者在他的参考系中将不能把这些事件记录为同时的，也不能记录在他的参考系内的球面上。

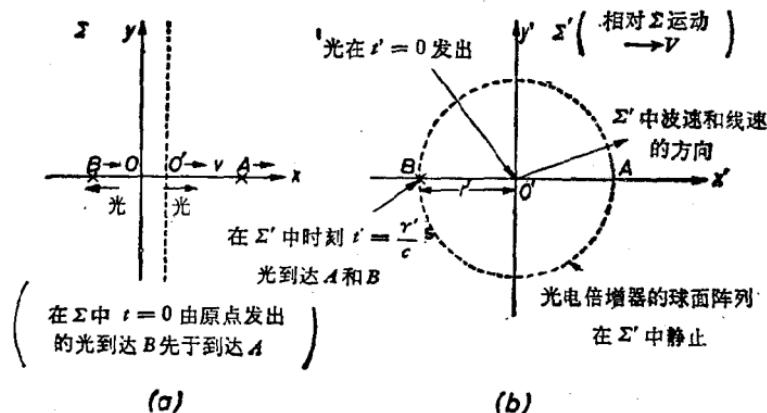


图 3.14 光电倍增器  $A$  和  $B$  如图  $b$  所示静止在  $\Sigma'$  中。相对于  $\Sigma'$ ，在  $t = t' = 0$  时由  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  原点发出的光同时到达  $A$  和  $B$ 。光电倍增器相对于  $\Sigma$  运动。 $B$  向原点运动，于是相对于  $\Sigma$ ，在  $t = 0$  时由  $O$  发出的光到达  $B$  比到达  $A$  早。

对于一个球面波，如果波前中心不从发射点移动，那么波速和射线速都在同一方向，如图 2.1(b) 和 3.14(b) 所示。因此，在目前的例子中， $\Sigma$  中静止的观察者和  $\Sigma'$  中静止的观察者都把光记录为以各自的坐标原点为波前中心按球面波传播，在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中射线速方向和波速方向都重合。如果波前半径趋于无限大，那么球面波接近平面波，于是按照狭义相对论，真空中平面波射线速和波速方向在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中都应重合，虽然在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中的方向相互不同，从而产生光行差。平面波的情况将在 4.4 节中详细讨论。

### 3.10 事件之间的间隔

设某事件发生在惯性系  $\Sigma$  中的  $t$  时刻和  $x, y, z$  点。令另一事件发生在  $t + \delta t$  时刻和  $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$  点。在惯性系  $\Sigma'$  中设此二事件分别发生在  $x', y', z'$  和  $x' + \delta x', y' + \delta y', z' + \delta z'$  处以及时刻  $t'$  和  $t' + \delta t'$ 。按照伽利略变换将有：

$$\delta x = \delta x' + v \delta t',$$

$$\delta y = \delta y',$$

$$\delta z = \delta z',$$

$$\delta t = \delta t'.$$

按照伽利略变换，两事件的时间间隔应是一不变量。如果  $\delta t'$  和  $\delta t$  为零，则

$$\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 = \delta x'^2 + \delta y'^2 + \delta z'^2.$$

这意味着在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中同一时刻测量到的两点间距离将是不变量；即按照伽利略变换长度是绝对的。

按照洛伦兹变换有

$$\delta x = \gamma [\delta x' + v \delta t'],$$

$$\delta y = \delta y',$$

$$\delta z = \delta z',$$

$$\delta t = \gamma [\delta t' + v \delta x' / c^2].$$

按照洛伦兹变换两事件的时间间隔不是不变量。现在

$\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 = \gamma^2 (\delta x'^2 + 2v \delta x' \cdot \delta t' + v^2 \delta t'^2) + \delta y'^2 + \delta z'^2$ . 于是，即使  $\delta t'$  为零， $\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2$  将不等于  $\delta x'^2 + \delta y'^2 + \delta z'^2$ . 但是，

$$\begin{aligned} \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 - c^2 \delta t^2 \\ = \gamma^2 [\delta x' + v \delta t']^2 + \delta y'^2 + \delta z'^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c^2 \gamma^2 \left[ \delta t' + \frac{v \delta x'}{c^2} \right]^2 \\
&= \gamma^2 [\delta x'^2 + 2v \delta x' \delta t' + v^2 \delta t'^2 - c^2 \delta t'^2 - 2v \delta x' \delta t' \\
&\quad - v^2 \delta x'^2/c^2] + \delta y'^2 + \delta z'^2 \\
&= \gamma^2 [\delta x'^2(1 - v^2/c^2) - c^2 \delta t'^2(1 - v^2/c^2)] \\
&\quad + \delta y'^2 + \delta z'^2 \\
&= \delta x'^2 + \delta y'^2 + \delta z'^2 - c^2 \delta t'^2.
\end{aligned}$$

于是

$$\delta s^2 = \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 - c^2 \delta t^2 \quad (3.95)$$

在所有相互匀速运动的惯性系中是不变量。量  $\delta s$  叫做两事件的间隔。[有些作者定义  $\delta s^2$  为

$$\delta s^2 = c^2 \delta t^2 - (\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2).$$

我们将始终按方程 (3.95) 来定义  $\delta s^2$ 。] 按照狭义相对论，如果出现两个事件，则两个观察者，一个静止在  $\Sigma$  中，另一个静止在  $\Sigma'$  中，将记录出这两事件的不同距离和时间间隔，但是他们将记录出相同的间隔  $\delta s$ 。如果  $\delta s^2$  是不变量，那么当  $\delta s^2$  从一个惯性系变到另一惯性系时它不能改变符号。如果  $\delta s^2$  按方程 (3.95) 所定义那样是正的，那么两事件的间隔  $\delta s$  叫做类空间隔；如果  $\delta s^2$  是负的， $\delta s$  叫做类时间隔。关于  $\delta s$  的类空和类时性质将举几个数值例子加以说明。

相对惯性系  $\Sigma$ ，令一事件发生在  $x = 0$  及  $t = 0$ ，而另一个事件发生在  $x = 6c$  和  $t = 10$  秒。本节在以后部分将假设对所有事件  $y$  和  $z$  始终为零。（表达式  $6c$  代表  $6 \times 3 \times 10^8$  米并假设具有长度量纲。）在  $\Sigma$  中我们有：

$$\delta s^2 = \delta x^2 - c^2 \delta t^2 = (6c)^2 - c^2 10^2 = -64c^2,$$

因此  $\delta s$  是类时间隔。

现在考虑一以匀速  $\frac{c}{2}$  相对于  $\Sigma$  运动的惯性系  $\Sigma'$ 。在  $\Sigma'$  中有：

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\delta x' = \gamma [\delta x - v \delta t] = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[ 6c - \frac{c}{2} 10 \right] = \frac{2c}{\sqrt{3}},$$

$$\delta t' = \gamma \left[ \delta t - \frac{v \delta x}{c^2} \right] = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[ 10 - \frac{c \cdot 6c}{2c^2} \right] = \frac{14}{\sqrt{3}}.$$

因此，在  $\Sigma'$  中：

$$\delta s^2 = \left( \frac{2c}{\sqrt{3}} \right)^2 - c^2 \left( \frac{14}{\sqrt{3}} \right)^2 = -64c^2,$$

这说明  $\delta s^2$  是不变量。

现在令  $v = 3c/5$ ，于是  $\gamma = \frac{5}{4}$ 。在这种情况下  $\delta x' = 0$ ，

$\delta t' = 8$  秒； $\delta s^2 = -64c^2$ 。注意在此情况下  $\delta x'$  为零，于是在此惯性系中此二事件被记录在同一位置。每当  $\delta s^2$  为负时，即当  $\delta s$  为类时间隔时，总可以选择这样一个惯性系，在其中此二事件被记录在空间同一点。在此  $\delta x'$  为零的特殊情况，两事件的时间间隔是原时间间隔，因为二事件发生在同一位置。

令  $\delta\tau$  表示原时间间隔。方程(3.95)变为

$$\delta s^2 = \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 - c^2 \delta t^2 = -c^2 \delta\tau^2,$$

或者

$$\delta\tau = \delta t \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left[ \left( \frac{\delta x}{\delta t} \right)^2 + \left( \frac{\delta y}{\delta t} \right)^2 + \left( \frac{\delta z}{\delta t} \right)^2 \right]},$$

其中  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  和  $\delta t$  属于惯性系  $\Sigma$ 。如果此二事件指一粒子在  $\Sigma$  中  $t$  和  $t + \Delta t$  时刻的两相继位置，那么上面方程变为

$$\delta\tau = \delta t \sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad (3.96)$$

其中  $\mathbf{u}$  是矢量，分量为  $u_x = dx/dt$ ,  $u_y = dy/dt$ ,  $u_z = dz/dt$  的。第四章将证明  $\mathbf{u}$  是  $\Sigma$  中测量的粒子速度。

考虑一个在惯性系  $\Sigma$  中第一事件又在  $x = 0, t = 0$  而第

二事件却在  $x = 10c$ ,  $t = 6$  秒的例子。间隔  $\delta s^2$  现在是类空的并等于  $+64c^2$ 。在相对于  $\Sigma$  具有速度  $c/2$  的惯性坐标系  $\Sigma'$  中, 现在有  $\delta x' = 14c/\sqrt{3}$  及  $\delta t' = 2/\sqrt{3}$ , 使得间隔又为  $64c^2$ 。在相对于  $\Sigma$  以速度  $v = \frac{3}{5}c$  运动的惯性系中, 有

$$\delta x' = 8c; \quad \delta t' = 0; \quad \delta s^2 = +64c^2.$$

在此参考系中, 将测出二事件在同一时刻发生。当  $\delta s^2$  为正,  $\delta s$  为类空间隔时总可以选择这样一个惯性系。

在以速度  $v = \frac{4}{5}c$  相对于  $\Sigma$  运动的惯性系中, 我们有:

$$\delta x' = \frac{26c}{3}, \quad \delta t' = -\frac{10}{3} \text{ 秒}; \quad \delta s^2 = +64c^2.$$

于是在以速度  $v = \frac{4}{5}c$  相对于  $\Sigma$  运动的惯性系中, “第二”事件被记录为发生在“第一”事件之前, 因而事件的次序被颠倒了。当  $\delta s$  是类空间隔时总可能出现这种时间次序的颠倒。狭义相对论的这一预言当时曾引起许多议论。在相对论和量子力学出现以前, 物理学被认为是严格确定的。在盛行的绝对时间概念影响下, 认为对所有事件总可能存在完全确定的时间次序, 所有较早的事件原则上可以影响所有较晚的事件。某些事件的次序在不同惯性系中可以不同, 好像是荒唐的。现在对于  $\delta s^2$  为正的事件, 由于  $|\delta x|$  大于  $c|\delta t|$ , 人们不能从一个事件发送一光信号到另一事件。第五章中将证明, 按照狭义相对论, 能量和动量不能以超过光速的速度传播。因此, 当  $\delta s^2$  为正时, 一事件中发生的事情不能影响另一事件中发生的事情, 因为光不能从一事件到达另一事件。两事件间不可能有直接的因果联系, 因而测量出哪个事件先发生是勿关紧要的, 因为哪个事件也不能影响另一个。人们不能影响一千光年以外的星球上现在正进行的事情; 因为假若现在向星球发

一束光，这光在今后 1000 年之内不会到达这个星球。人们甚至不能影响月球上现在正进行的事情，因为光信号到达月球将需 1.28 秒，而火箭将需长得多的时间。当  $\delta s^2$  是负的，即  $\delta s$  是类时间隔时，那么由于  $|\delta x| < c|\delta t|$ ，从一个事件到另一个可能发送光信号，正如数值例子所述。在这些情况下，两事件可能有因果联系。例如，人们可以通过及时发送火箭到达月球以影响月球上一年以后发生的事情。对于  $\delta s^2$  为负的事件，存在着一个确定的事件间的时间次序，不能够通过变换到相对于第一个惯性系以速度  $v < c$  运动的另一惯性系而使其次序颠倒。图 3.15 表示出这些结论。将仍假设  $x$  和  $t$  的零点如此选择，使得一个事件在  $t = 0$  时刻发生在惯性系  $\Sigma$  的原点。横坐标代表另一事件的  $x$  坐标，纵坐标代表光速和另一事件的时间的乘积。 $t = 0$  时在原点  $x = 0$  的沿  $x$  轴行进的光束，其路径是由  $x = \pm ct$  给出的直线，它与  $x$  轴成  $45^\circ$

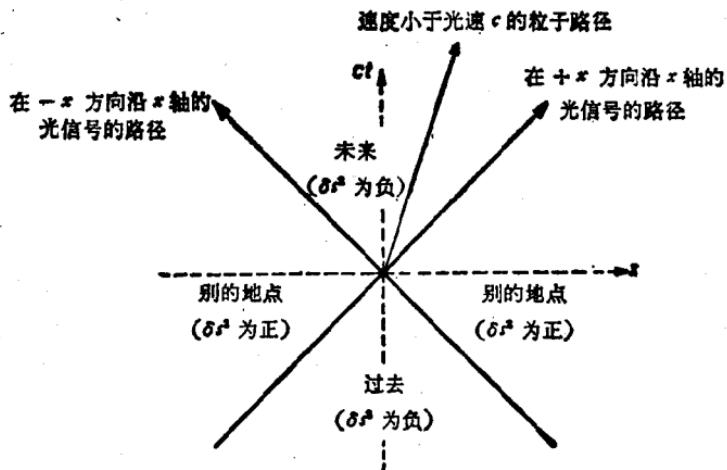


图 3.15 一事件发生在  $t = 0$  时刻及原点  $x = 0$ 。如果另一事件发生在标着“过去”和“将来”的区域，那么两事件的间隔  $\delta s^2$  为负，两事件可能有因果联系。如果另外事件发生在标着“别的地点”的区域，则  $\delta s^2$  为正，此事件和原点事件不能有因果联系。

角,如图 3.15 所示。在标着“将来”的区域内的事件可从原点以小于光速的速度到达,并可受  $t = 0$  时在原点发生的事情的影响。在标着“过去”的区域内的事件可能已经发出信号,在  $t = 0$  或以前到达原点,因而可以影响在  $x = 0, t = 0$  时发生的事情。在标着“别的地点”的区域内的事件发出的光信号不能在  $t = 0$  时到达原点,也不能从原点发出及时到达这些事件的光信号以对它们有影响,因此这些事件与在  $t = 0$  位于原点  $x = 0$  的事件中所发生的事情不可能有因果联系。

原点处事件和“过去”或“将来”区域中的事件间的间隔是类时的 ( $\delta s^2 < 0$ ), 而原点处事件和“别的地点”区域中的事件间的间隔是类空的 ( $\delta s^2 > 0$ )。按照因果关系在当前或过去是否可能,“将来”和“过去”在狭义相对论中取得了新的意义。读者稍用想像便可将图 3.15 推广到其  $y$  和  $z$  坐标不为零的事件。

### 3.11 狹義相对论中观察者的作用

在本章中我们常讨论在惯性系  $\Sigma$  中静止的观察者或在惯性系  $\Sigma'$  中静止的观察者将测量得出什么。例如在 3.6 节中我们考虑了火箭 1 上的观察者或火箭 2 上的观察者将测量得出什么。在这种含义下观察者一词的运用使某些人断定,狭义相对论在测量中需要观察者的介入,其方式不同于经典牛顿力学,因而有许多人曾假设狭义相对论与牛顿力学相比,“唯心”多些,“唯物”少些。在牛顿力学和狭义相对论中,都可以用仪器进行测量,测量数据被送往基地,在那里可把它输入计算机,而在建立和安装完仪器之后,“观察者”仅需在必要时读出和解释结果。观察者的作用在两个理论中是完全类似的,因此在这点上不能说一个理论比另一个理论更唯心或更唯

物。进一步讨论这两理论的这一方面，是超出本书范围的。在讨论牛顿力学的 1.4 节和本章中引进观察者，都只是为了想使说明更易于理解。今后我们通常将仅说变量在  $\Sigma$  中测量为某值，而不说  $\Sigma$  中的观察者将它测量为那个特殊值，除非引入假想的观察者有助于说明问题。

狭义相对论所证明的是，以前先验地假设在所有惯性系中具有不变数值的某些量，如长度和时间间隔之类，在相互运动的惯性系中不必具有相同的数值，而且它们的数值依赖于所选择的任意静止标准。在 3.6 和 3.7 节中阐明用实验室中实际可行的测量来解释时，这些预言看来是合理的。狭义相对论强调，理论中使用的量必须通过该理论来定义和测量，而理论中使用的量必须直接或间接与实验室中能做的测量相联系。

为了讨论方便，我们把  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  的坐标系考虑为由一系列平行于轴的“刚性”尺和一系列分布在全空间的同步钟所组成的，于是一个事件不管何时何地发生，其坐标和时间都可测量。必须强调这种模型是说明事件的坐标和时间可以怎样测量的纯粹象征性的方法。实际上人们可用 3.6 节中讲述的雷达技术进行测量。

### 3.12 光速与源速的关系的一个可能的实验校核

在本章中曾由相对性原理和光速不变原理推出洛伦兹变换。光速不变原理有相当多的间接证据。罗瑟<sup>[12]</sup>提出了一个可以直接校核光速与源速的关系的方法。

如果  $\pi^0$  介子在相对于实验室静止时衰变，通常  $\pi^0$  介子衰变成各具有能量  $\sim 60$  兆电子伏的两束  $\gamma$  射线。如果  $\pi^0$  介子衰变时相对于实验室运动， $\gamma$  射线源也相对于实验室运动。

已知此运动改变  $\gamma$  射线的能量和频率，相应于多普勒效应。如果光速不变原理不对，那么  $\pi^0$  衰变出的  $\gamma$  射线速度应该随  $\pi^0$  介子衰变时相对于实验室的速度而变化。因此若测出  $\pi^0$  衰变产生的  $\gamma$  射线速度，便提供了实验室中对光速不变原理的直接检验。设  $\pi^0$  介子是在闪烁计数器内由带电的初级粒子（例如从加速器出来的约  $10^9$  电子伏的质子）对晶体原子核的相互作用而产生的。在晶体中发生的电离产生萤光，它被光电倍增器转变成电信号。所产生的任何  $\pi^0$  介子将在小于  $10^{-14}$  秒时间内衰变，因此可把初级粒子进入的时刻当做为  $\gamma$  射线产生的时刻。令一个  $\gamma$  射线在与第一个闪烁计数器相隔开的第二个闪烁计数器内产生电子对。电子引起的电离使晶体发出萤光，它被第二个光电倍增器转换成电脉冲。两电脉冲间的时间延迟可用几种电子学方法测量；例如，可用第一个脉冲触发示波器，而将第二个脉冲的位置记录下来。若  $c$  等于  $3 \times 10^8$  米/秒，间距一米时，时间延迟将为  $3.3 \times 10^{-9}$  秒。如  $\gamma$  射线的速度依赖于产生它的  $\pi^0$  介子的速度，那么此时间延迟应该随衰变时  $\pi^0$  介子的速度而变化。实验的主要困难是怎样去断定观察到的符合是由上述事件引起的。作为校验，可将闪烁计数器放在大云雾室中，使得可以校核是否仅一个初级粒子进入第一个闪烁计数器，而且在第二个计数器中的确产生了一个电子对。由在云雾室中观察到的电子对的能量和方向，可以算出产生它的  $\pi^0$  介子速度近似值。

某些其它原子核和介子过程对实际应用可能会更方便。一个可能或许是用  $K$  介子束。有时一个  $K$  介子放出  $\pi^0$  介子，它然后衰变成  $\gamma$  射线。如果这些  $K$  介子通过一系列闪烁计数器，可以充分准确定出  $K$  介子衰变的位置和时间。可将  $\gamma$  射线接收器放在离  $K$  介子束轴线已知距离处，并测出时间延迟。

此实验原则上可行，这是有意义的。经常有人提出直接用实验检验光速不变原理是不可能的，因为人们为了使不同地点的钟同步将不得不假设它是正确的。而在上述实验中不是用两个钟而是用两个晶体及两个光电倍增器，它们将电信号输入测量时间延迟的仪器，而它们在实验前和实验中不需要移动。当事件发生时，电信号将沿电缆被送入计时机器；而将两个闪烁计数器紧靠放置，并令带电粒子通过两个晶体，调整电缆长度直到从两个计数器来的脉冲同时到达计时器，这样就使信息传输的延迟可以一劳永逸地被考虑进去。于是晶体和光电倍增器可被移开而不影响任何连接导线的长度。事件发生后接到信息的延迟将总是与探测器间的距离无关，假如在连接电缆中的电磁扰动传播速度不依赖于连接电缆的方位和指向并且当电缆被移动时不发生变化的话。使不同地点的钟同步的常用方法，如在某些教科书中所讨论那样，是采用光信号，假定它们沿直线行进，如在 3.6 节中所描述那样。在目前的情况，从事件来的信号可以沿弯曲的路线行进，而其延迟一直与晶体间和光电倍增器间的距离无关；实际上的计时机构并没有移动。事实上，为了校验第二个原理，人们无须像以上所描述那样调整零点，而只须注意从两计数器来的脉冲时间间隔是否相同，不管衰变时的母体  $\pi^0$  介子相对于实验室的速度有多大。（见 137 页的附注，萨特所做实验原则上是类似的，但实际上比用  $\pi^0$  介子来得简单）。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Einstein, A. *Ann. Phys. Lpz.* 17(1905) 891
- [ 2 ] Robertson, H. P. *Rev. mod. Phys.* 21(1949) 378
- [ 3 ] de Sitter, W. *Proc. Amst. Acad.* 15(1913) 1287; 16(1913) 395
- [ 4 ] Fox, J. G. *Amer. J. Phys.* 30(1962) 297
- [ 5 ] Born, M. and Wolf, E. *Principles of Optics* p. 70 Pergamon, Oxford, 1959

- [6] Sommerfeld, A. *Electrodynamics*. p. 235. Academic Press, New York, 1952.
- [7] Holton, G. *Amer. J. Phys.* **28**(1960) 627
- [8] Stephenson, G. and Kilmister, C. W. *Special Relativity for Physicists*. Ch. 1. Longmans, London, 1958
- [9] Lieber, L. R. and Lieber, H. G. *The Einstein Theory of Relativity*. p. 26. Dobson, London, 1949.
- [10] Einstein, A. *Relativity, The Special and the General Theory*. p. 25, Methuen, London, 1921.
- [11] Ives, H. E. and Stillwell, G. R. *J. Opt. Soc. Amer.* **28**(1938) 215; **31**(1941) 369.
- [12] Rosser, W. G. V. *Nature* **190**(1961) 249.
- [13] Grünbaum, A. *Philosophy of Science* (Ed. by Danto, A. C. and Morgenbesser, S.) p. 419. Meridian Books, New York, 1960.
- [14] Shankland, R. S. *Amer. J. Phys.* **31**(1963) 47.

### 补充读物

洛伦兹变换的讲述与尤斯 (Joos) 的《理论物理》(*Theoretical Physics*) 中所给出的相似。通俗的说明,读者可参考达勒 (Durrell) 的《通俗相对论》(*Readable Relativity*)。关于 3.6 节和 3.7 节中假想实验的说明,读者可参考爱因斯坦的《狭义与广义相对论浅说》以及柏格曼的《相对论引论》。更高深的说明读者可参考瑞得勒 (Rindler) 的《狭义相对论》(*Special Relativity*), 谬勒的《相对论》(*The Theory of Relativity*) 及福克的《空间,时间和引力的理论》。

### 习题

3.1 狹义相对论的两个主要假设是什么? 狹义相对论中暗含哪些附加假设?

讨论支持和反对光速不变原理的实验证据。

3.2 写一篇关于不同物理理论中“惯性参考系”的含义是什么的评论性论文。讨论这个概念适用的范围和局限。[参考: 11.1 节, 第十二章以及 Dingle, H., *Sci. Progr.* L. (1962)

3.3 证明如果假设麦克斯韦方程组正确并服从相对性原理,便可得出光速不变原理和电荷守恒原理.

3.4 按照课文中给出的理由,假设洛伦兹变换是如下形式的线性变换:

$$x' = Ax + Bt$$

$$t' = Cx + Dt$$

由于相应于  $x' = 0$  的  $\Sigma'$  的原点以速度  $v$  运动, 所以有  $-B/A = v$ , 因而  $x' = A(x - vt)$ . 替换在恒等式  $x^2 - c^2t^2 \equiv x'^2 - c^2t'^2$  中的  $x'$  和  $t'$ , 并且为了求出常数  $A, C$  和  $D$ , 令  $x^2, t^2$  和  $xt$  的系数相等. 证明所得出的对  $x'$  和  $t'$  的变换为洛伦兹变换.

3.5 原长为  $L_0$  的棒静止在惯性系  $\Sigma'$  中. 此棒在  $\Sigma'$  中与  $x'$  轴的倾角为  $\theta'$ . 问棒在  $\Sigma$  中多长? 它与  $x$  轴的倾角为多少? 如果  $\Sigma'$  相对于  $\Sigma$  以匀速  $v$  沿公共  $x$  轴运动.

3.6 由于地球绕太阳沿轨道运动, 地球在其直径方向缩短多少(相对太阳静止的观察者来测量)?(取地球的速度为 30 公里/秒, 地球的半径为 6376 公里.)

3.7 一个火箭在实验室坐标系中以这样的速度运动, 使其测出长度为原长的一半. 问火箭相对实验室坐标系运动多快?

3.8 证明在  $\Sigma'$  中的圆  $x'^2 + y'^2 = a^2$  在  $\Sigma$  中测量变为椭圆, 如果  $\Sigma'$  相对  $\Sigma$  匀速运动.

3.9 对照比较经典以太理论和狭义相对论对洛伦兹-斐兹杰惹缩短的解释.

3.10 讨论狭义相对论中观察者的作用(如果说有的话). 将其与牛顿力学中观察者的作用相比较.

3.11 有静止在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中的许多钟. 静止在  $\Sigma$  中的钟彼

此同步，静止在  $\Sigma'$  中的钟也彼此同步。 $\Sigma$  和  $\Sigma'$  的原点在  $t = t' = 0$  时相重合，而  $\Sigma'$  以匀速  $v$  沿  $+x$  轴相对于  $\Sigma$  运动。在以后的时刻  $t$ ，在  $\Sigma'$  中静止的哪一个钟给出和在  $\Sigma$  中静止的所有钟相同的读数？[提示：在时间转换式中令  $t' = t$  以得到]

$$x = \frac{c^2}{v} \left\{ 1 - (1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}} \right\} t.$$

这个钟可以具有任意的  $y$  和  $z$  坐标。]

3.12 原长 600 米的火箭直接从地球以匀速起飞。一光（或雷达）脉冲由地球发出，并在火箭的尾部和头部的镜上反射。如果第一束光（或雷达）脉冲在发射后 200 秒在基地回收到，而第二束脉冲在此后 17.4 微秒收到，计算 (a) 火箭离地球的距离，(b) 火箭相对地球的速度。

3.13 你如何测量正在运动中的火箭的长度？[提示：可以采用上题的方法。]

3.14 如果静止时  $\mu$  介子的平均寿命是  $2.2 \times 10^{-6}$  秒，计算它在真空中衰变前走过的平均距离，假若速度是 (a) $0.9c$ ；(b) $0.99c$ ；(c) $0.999c$ 。

3.15 一千个  $\mu$  介子在 40 公里高度处产生。平均说来多少  $\mu$  介子在衰变前可到达海平面，假若  $\mu$  介子的速度是  $0.999c$  而静止时它们的平均寿命是  $2.2 \times 10^{-6}$  秒。（假设  $\mu$  介子垂直向下运动，无电离能量损失。）

3.16 描述杜宾 (Durbin)，劳尔 (Loar) 和海文斯 (Havens) [Phys. Rev. 88 (1952) 179] 对运动的带电  $\pi$  介子的寿命所做的实验。如何将测得的运动  $\pi$  介子的寿命与  $\pi$  介子静止时的平均寿命公认值比较？

3.17 银河系最远的星球离我们大约  $10^5$  光年。利用时间膨胀（或长度缩短）解释，原则上一个人在其正常寿命中

怎样能达到这个星球。估算他将需要多大均匀速度，在10年内(在他静止的惯性系内测量)到达那里。

3.18 一个宇宙航行员要到距离5光年的一个星球上去。火箭加速很快，然后匀速运行。如果宇航员想在一年内(用相对火箭静止的钟测量)到达那里，计算火箭相对地球必须用多大速度运动。

3.19 说明依弗斯和斯蒂耳威尔对二阶多普勒效应的实验。他们的结果怎样可用洛伦兹变换来解释。

3.20 当光源以速度(a) $0.1c$  和(b) $0.5c$  朝向观察者运动时，(利用相对论公式)计算波长为6000埃的光的波长多普勒位移。

3.21 一事件在 $t=0$ 时发生在惯性系 $\Sigma$ 的原点。第二个事件相对于 $\Sigma$ 在 $t=4$ 秒时发生在点 $x=5c, y=z=0$ 。求另一惯性系相对 $\Sigma$ 的速度，如果在其中(a)两事件同时发生；(b)事件2早于事件1一秒；(c)事件1早于事件2一秒。

3.22 一事件在 $t=0$ 时发生在惯性系 $\Sigma$ 的原点。另一事件相对于 $\Sigma$ 在 $t=5$ 秒时发生在 $x=4c, y=z=0$ 处。  
(a) 确定惯性系 $\Sigma'$ 相对于 $\Sigma$ 的速度，在 $\Sigma'$ 中两事件发生在空间的同一点。  
(b) 在 $\Sigma'$ 中两事件的时间间隔是多少？

3.23 证明洛伦兹变换

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

$$t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

对于区域 $-c < V < c$ 的所有 $V$ 值构成一数学群。

证明对于这样的变换，由 $(\delta s)^2 = \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 - c^2 \delta t^2$  定义的一对点事件 $(x, y, z, t)$ 和 $(x + \delta x, y + \delta y,$

$(x + \delta x, t + \delta t)$  的空-时间间隔  $\delta s$  是一不变量，并且当  $(\delta s)^2$  为正时，证明两事件的时间次序不是对所有坐标系都是相同的。

找出这样的坐标系  $\Sigma'$  (当它存在时) 使得在  $\Sigma$  中坐标为  $(0, 0, 0, 0)$  和  $(X, 0, 0, T)$  的两事件在  $\Sigma'$  坐标系中是同时的。

3.24 如果两个事件在惯性系  $\Sigma$  中在同一时刻  $t = 0$  发生在点  $x = y = z = 0$  和  $x = X, y = z = 0$ ，证明此二事件的间隔是类空的。证明通过适当地选择惯性系，两事件的空间间隔可从  $+X$  到  $\infty$  间变化。证明两事件的时间间隔是无界的，其时间次序在不同惯性坐标系中可以是不同的。讨论后一结果怎样导致要修正因果关系的经典观念，按此观念，所有较早的事件可以影响所有较晚的事件，不论它们在何处发生。

3.25 在惯性系  $\Sigma$  中点  $O'$  在  $t$  时刻具有笛卡尔坐标  $x = vt, y = z = 0$ ，其中  $v$  为常数。第二个坐标系  $\Sigma'$  的原点为  $O'$ ，其笛卡尔坐标轴与  $\Sigma$  的轴相平行。推导一事件在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中坐标间的洛伦兹变换。

在  $\Sigma$  中，两事件的原点和在  $(X, 0, 0)$  点于  $t = 0$  时同时发生。两事件在  $\Sigma'$  中的时间间隔是  $T$ 。证明两事件在  $\Sigma'$  中的空间距离是  $(X^2 + c^2 T^2)^{\frac{1}{2}}$ ，并利用  $X$  和  $T$  确定两坐标系的相对速度  $v$ 。[提示：利用两事件的间隔为不变量的事实。]

### 校后附注

最近坎特 (Kantor) [J. opt. Soc. Amer. 52 (1962) 978] 做了一个验证光速不变原理 (爱因斯坦第二假设) 的实验。坎特把一个薄的运动玻璃窗放入干涉仪的一个臂。如果光速依赖于光源的速度，则按消光定理，被运动的玻璃窗吸收并重新发

射的光，与被静止光源发射的空气中的光相比，在离开玻璃进入空气后，应该具有不同的速度。当玻璃窗开始运动时，应有条纹移动。按照爱因斯坦第二假设，应该没有条纹移动，除非玻璃中存在菲涅耳拖曳引起的微小效应。坎特观察到了条纹移动并断定：“得到了与基于爱因斯坦假设所做的预料不相符合的定量结果。”这一结果激发了许多人去验证第二假设。

杰姆 (James) 和斯坦堡 (Sternberg) (*Nature* **197** (1963) 1192) 做了一个光学实验。令白光通过一旋转的玻璃盘。如果离开玻璃后的光在空气中的速度依赖于玻璃的速度，则在他们的实验中光应该偏转。没有观察到明显的偏转，他们断定，如果光离开玻璃后在空气中的速度是  $c + kv$ ，其中  $v$  是玻璃的速度，则  $k$  小于 0.025。

运动光源发出的光的速度的运动学测量由塞特 (Sadeh) 完成 (*Phys. Rev. Letters* **10** (1963) 271)。这个实验与 3.12 节讲的实验相比，在原理上相似，但实际上简单得多。塞特测量了正电子湮没时发出的  $\gamma$  射线的速度。如果湮没时正电子是静止的，则能量为 0.51 兆电子伏的两个光子向相反方向发出(见 5.8.4 节)。如果湮没时正电子是运动的，则质心系统相对实验室运动。虽然在质心系统中，两个光子仍然按相反方向发出，但是相对实验室而言，不再按相反方向发出。如果光(光子)速依赖于光源的速度，则正电子飞行中湮没发出的两个光子的速度将是不同的：在质心系统中向前发射的光子与向后发射的光子相比，具有较高的速度(在实验室系统中测量)。利用测量飞行时间的方法，塞特观察到，正电子飞行中湮没发出的两个光子的速度在实验室系统中是相同的；但是，如果利用伽里略速度变换公式将光速再加上质心系统的速度，则光速将提高两倍。塞特断定：“由图清楚看出， $\gamma$  射线的速度是不变的(±10%)，与相对论第二假设相一致，不与

光源速度相叠加。”(质心系统的讨论见 5.6 节。)

阿威哥 (Alvåger), 尼尔森 (Nilsson) 和开尔曼 (Kjellman) [Nature, Lond. 197 (1963) 1191] 利用测量飞行时间的方法测量了处于 4.43 兆电子伏激发状态的运动  $^{12}\text{C}$  原子发出的  $\gamma$  射线的速度。他们断定：“该研究结果与第二假设相符合，但与坎特最近的工作结果不符合。”

贝寇克 (Babcock) 和柏格曼 (Bergman) 把精确度提高了近四倍，重复了坎特的实验 (Opt. Soc. Amer., 1963 Annual Meeting Program, p. 31)。贝寇克和柏格曼写道：“坎特利用发射理论所预言的移动是 2.9 个条纹，而曾发现的移动小于 0.02 个条纹。”更后一些阿威哥等人测出 (Physics Letter 12 (1964) 260)，从速度为  $0.99975c$  (利用狭义相对论方程算出) 的  $\pi^0$  介子衰变产生的光子的速度是  $(2.9977 \pm 0.0004) \times 10^8$  米/秒。这个值与静止源发射的光速公认值  $2.9979 \times 10^8$  米/秒相一致。这样，光速不变原理现在有了直接的实验证据。

## 第四章 相对论运动学

### 4.1 速度变换

在第三章中,由相对性原理和光速不变原理,推导出了一个事件的坐标和时间从一个惯性系变换到另一个惯性系的洛伦兹变换。在本章中将根据洛伦兹变换来计算粒子的速度和加速度的变换式。当粒子相对于一惯性系运动时,其速度定义为在此坐标系中粒子在单位时间所通过的距离。令在惯性系  $\Sigma$  中,在  $t$  时刻测得粒子位于  $x, y, z$  点,而在  $t + \delta t$  时刻位于  $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$  点。此粒子相对于  $\Sigma$  的速度定义为矢量  $\mathbf{u}$  有下述分量:

$$u_x = \frac{\delta x}{\delta t}; \quad u_y = \frac{\delta y}{\delta t}; \quad u_z = \frac{\delta z}{\delta t}. \quad (4.1)$$

此粒子速度的量值为

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}. \quad (4.2)$$

两次相继测量粒子的位置是两个事件,因为它们涉及对例如粒子通过尺上两个标记或高能带电粒子通过两个闪烁计数器之类的观察。这些事件的发生不依赖于任何特殊坐标系。这些事件在不同惯性系中的坐标和时间,由洛伦兹变换相联系。在相对于  $\Sigma$  以匀速  $v$  沿公共  $x$  轴运动的惯性系  $\Sigma'$  中,对应于  $x, y, z, t$  有

$$x' = \gamma(x - vt), y' = y, z' = z, t' = \gamma(t - vx/c^2) \quad (4.3)$$

而对应于  $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t + \delta t$ , 有

$$x' + \delta x' = \gamma[x + \delta x - v(t + \delta t)];$$

$$\begin{aligned}y' + \delta y' &= y + \delta y; \\z' + \delta z' &= z + \delta z; \\t' + \delta t' &= \gamma \left[ t + \delta t - \frac{v(x + \delta x)}{c^2} \right].\end{aligned}\quad (4.4)$$

由(4.4)减去(4.3), 得到

$$\delta x' = \gamma [\delta x - v \delta t]; \quad \delta y' = \delta y;$$

$$\delta z' = \delta z; \quad \delta t' = \gamma \left[ \delta t - \frac{v \delta x}{c^2} \right].$$

在  $\Sigma'$  中测得的粒子速度的各分量为

$$\begin{aligned}u'_x &= \frac{\delta x'}{\delta t'} = \frac{(\delta x - v \delta t)}{\left( \delta t - \frac{v}{c^2} \delta x \right)} \\&= \frac{(\delta x / \delta t - v)}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{\delta x}{\delta t}} = \frac{(u_x - v)}{(1 - vu_x/c^2)},\end{aligned}\quad (4.5)$$

$$\begin{aligned}u'_y &= \frac{\delta y'}{\delta t'} = \frac{\delta y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{\left( \delta t - \frac{v}{c^2} \delta x \right)} \\&= \frac{(\delta y / \delta t) \sqrt{1 - v^2/c^2}}{\left( 1 - \frac{v}{c^2} \frac{\delta x}{\delta t} \right)} = \frac{u_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{(1 - vu_x/c^2)},\end{aligned}\quad (4.6)$$

$$u'_z = \frac{\delta z'}{\delta t'} = \frac{u_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{(1 - vu_x/c^2)}.\quad (4.7)$$

这些变换式将粒子路径上一特定点上在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中的速度瞬时值联系起来。此点在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中的坐标和时间是由洛伦兹变换相联系的。注意虽然增量  $\delta y$  和  $\delta y'$  相等,  $u_y$  和  $u'_y$  也不相等, 其差别由在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中时间间隔量度的不同而引起。注意, 如果  $v$  和  $u$  远小于  $c$ , 则

$$u'_x \rightarrow u_x - v; \quad u'_y \rightarrow u_y \quad \text{及} \quad u'_z \rightarrow u_z.$$

这与牛顿力学的速度变换式相一致。

现在

$$\begin{aligned} u'^2 &= u'_x^2 + u'_y^2 + u'_z^2 \\ &= \frac{(u_x - v)^2 + (u_y^2 + u_z^2)(1 - v^2/c^2)}{(1 - vu_x/c^2)^2} \\ &= \frac{(u_x - v)^2 + (u^2 - u_x^2)(1 - v^2/c^2)}{(1 - vu_x/c^2)^2}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

将带“撇”量和不带“撇”量互换，并用 $-v$ 代替 $v$ ，可得到逆关系式。方程(4.5),(4.6),(4.7)和(4.8)变为

$$u_x = \frac{u'_x + v}{(1 + vu'_x/c^2)}. \quad (4.9)$$

$$u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{(1 + vu'_x/c^2)}, \quad (4.10)$$

$$u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{(1 + vu'_x/c^2)}, \quad (4.11)$$

$$u^2 = \frac{(u'_x + v)^2 + (u'^2 - u'_x^2)(1 - v^2/c^2)}{(1 + vu'_x/c^2)^2}. \quad (4.12)$$

符号u和u'将分别用作在惯性系 $\Sigma$ 和 $\Sigma'$ 中测量的速度。符号 $v$ 将仅用于表示两惯性系 $\Sigma$ 和 $\Sigma'$ 的相对速度，而符号 $\gamma$ 将始终代表 $1/(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$ 。

作为应用速度变换式的一个例子，我们来考虑一个沿火车过道以相对于火车( $\Sigma'$ )的速度为 $u'_x$ 而滚动的球，如果火车相对于路基 $\Sigma$ 以速度 $v$ 沿 $x$ 轴运动，那么按照狭义相对论变换式，球相对路基的速度应该为

$$u_x = \frac{(u'_x + v)}{(1 + vu'_x/c^2)}.$$

作为一个典型例子，令 $u'_x$ 为5米/秒， $v$ 为30米/秒，于是有

$$u_x = \frac{(5 + 30)}{\left[1 + \frac{5 \times 30}{(3 \times 10^8)^2}\right]} = 34.999999999999417 \text{ 米/秒}.$$

按照牛顿力学

$$u_x = u'_x + v = 5 + 30 = 35 \text{ 米/秒.}$$

此例子说明了在一般情况下，与对于牛顿力学的偏离可以忽略不计。

设一个放射性原子核以速度  $v = 0.2c$  沿实验室坐标系的  $x$  轴运动。它发射一个  $\beta$  粒子， $\beta$  粒子相对于放射性原子核在其中静止的惯性系  $\Sigma'$  的速度为  $u'_x = 0.95c$ 。如果  $\beta$  粒子沿  $\Sigma'$  的  $x'$  轴发射，其相对实验室的速度则为

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2} = \frac{0.95c + 0.2c}{1 + 0.2 \times 0.95} = 0.966c.$$

按照伽利略速度变换式，速度应该是  $0.95c + 0.2c = 1.15c$ 。所以在核物理学中，对牛顿力学的偏离是非常重要的。

如果将  $u'_x = w$  及  $u'_y = u'_z = 0$  代入方程(4.9), (4.10) 和(4.11)，则在惯性系  $\Sigma$  中有

$$u_x = \frac{w + v}{1 + vw/c^2}; \quad u_y = 0; \quad u_z = 0. \quad (4.13)$$

在 3.4 节中考虑了一惯性系  $\Sigma''$ ，它相对于  $\Sigma'$  以匀速  $w$  沿  $x$  轴运动，而  $\Sigma'$  相对于  $\Sigma$  以匀速  $v$  沿  $x$  轴运动。两次应用洛伦兹变换式后证明： $\Sigma''$  的原点以速度  $(w + v)/(1 + vw/c^2)$  相对于  $\Sigma$  运动。这与方程(4.13)相符合。

如果  $u'_x = c$ ，那么在  $\Sigma$  中有

$$u_x = \frac{c + v}{(1 + vc/c^2)} = c.$$

因此，真空中的光速在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中具有相同数值，这个例子表明，速度变换式是与光速不变原理相一致的，当然，它们正应该如此。

如果  $u'_x = \alpha c, v = \beta c$ ，则有

$$u_x = \frac{\alpha c + \beta c}{\left(1 + \frac{\beta c \alpha c}{c^2}\right)} = c \cdot \left(\frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha \beta}\right).$$

只要  $\alpha$  和  $\beta$  都小于 1，正如由直接代入  $\alpha$  和  $\beta$  的数值所证明的， $(\alpha + \beta)/(1 + \alpha \beta)$  小于 1，因此  $u_x$  将永远小于  $c$ 。超过光速的速度不能由一些本身都小于  $c$  的速度合成得到。

## 4.2 $(1 - u'^2/c^2)^{1/2}$ 和 $(1 - u^2/c^2)^{1/2}$ 的变换

在相对论公式中，经常出现量  $(1 - u'^2/c^2)^{1/2}$  和  $(1 - u^2/c^2)^{1/2}$ 。现在来推导这些量的变换式。由方程(4.8)，

$$u'^2 = \frac{(u_x - v)^2 + (u^2 - u_x^2) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{(1 - vu_x/c^2)^2}. \quad (4.8)$$

于是

$$\begin{aligned} 1 - u'^2/c^2 &= 1 - \frac{\left[\left(\frac{u_x}{c} - \frac{v}{c}\right)^2 + \left(\frac{u^2}{c^2} - \frac{u_x^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right]}{(1 - vu_x/c^2)^2} \\ &= \left(1 - \frac{2vu_x}{c^2} + \frac{v^2u_x^2}{c^4} - \frac{u_x^2}{c^2} + \frac{2vu_x}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} - \frac{u^2}{c^2}\right. \\ &\quad \left.+ \frac{u_x^2}{c^2} + \frac{v^2u^2}{c^4} - \frac{v^2u_x^2}{c^4}\right) / \left(\frac{1 - vu_x}{c^2}\right)^2 \\ &= \frac{1 - v^2/c^2 - u^2/c^2 + v^2u^2/c^4}{(1 - vu_x/c^2)^2} \\ &= \frac{(1 - v^2/c^2)(1 - u^2/c^2)}{(1 - vu_x/c^2)^2}. \end{aligned}$$

开平方根得

$$\sqrt{1 - u'^2/c^2} = \frac{\sqrt{(1 - v^2/c^2)(1 - u^2/c^2)}}{(1 - vu_x/c^2)}. \quad (4.14)$$

在方程(4.14)中,  $u'$  是一粒子在  $\Sigma'$  中测量的总速度, 而  $u$  是粒子在  $\Sigma$  中测量的总速度. 方程(4.14)左端仅包含在  $\Sigma'$  中测量的量, 而右端除  $v$  外, 只包含在  $\Sigma$  中测量的量. 方程(4.14)是  $(1 - u'^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$  的变换式.

类似地, 逆关系式是

$$\sqrt{1 - u'^2/c^2} = \frac{\sqrt{(1 - v^2/c^2)(1 - u'^2/c^2)}}{(1 + vu'_x/c^2)}. \quad (4.15)$$

在本书中将广泛使用方程(4.14)和(4.15), 读者应当非常熟悉它们.

### 4.3 粒子加速度的变换

在惯性系  $\Sigma$  中, 粒子的加速度  $\mathbf{a}$  定义为粒子的速度变化率. 它是一个矢量, 其分量为

$$a_x = \frac{du_x}{dt}; \quad a_y = \frac{du_y}{dt}; \quad a_z = \frac{du_z}{dt}. \quad (4.16)$$

类似地, 在  $\Sigma'$  中测量的加速度  $\mathbf{a}'$  是具有下述分量的矢量:

$$a'_x = \frac{du'_x}{dt'}; \quad a'_y = \frac{du'_y}{dt'}; \quad a'_z = \frac{du'_z}{dt'}. \quad (4.17)$$

现在

$$\begin{aligned} a'_x &= \frac{du'_x}{dt'} = \frac{du'_x}{dt} \times \frac{dt}{dt'} = \frac{du'_x/dt}{dt'/dt} \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{(u_x - v)}{(1 - vu_x/c^2)} \right\} / \frac{d}{dt} [\gamma(t - v_x/c^2)], \end{aligned}$$

已假设  $\Sigma'$  相对于  $\Sigma$  匀速运动, 因而  $v$  和  $\gamma$  都是常量. 进行微

分, 并注意  $a_x = \frac{du_x}{dt}$  等等, 得到

$$a'_x = \frac{1}{\gamma \left( 1 - \frac{vu_x}{c^2} \right)} \left[ \frac{(1 - vu_x/c^2)a_x - (u_x - v)(-1)v a_x/c^2}{(1 - vu_x/c^2)^2} \right]$$

$$= \frac{a_x \left( 1 - \frac{vu_x}{c^2} + \frac{vu_x}{c^2} - v^2/c^2 \right)}{\gamma \left( 1 - \frac{vu_x}{c^2} \right)^3},$$

即

$$\begin{aligned} a'_x &= \frac{(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}{\left( 1 - \frac{vu_x}{c^2} \right)^3} a_x, \\ a'_y &= \frac{du'_y}{dt'} = \frac{du'_y}{dt} / \frac{dt'}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{u_y}{\gamma \left( 1 - \frac{vu_x}{c^2} \right)} \right] / \frac{d}{dt} \left[ \gamma \left( t - \frac{vx}{c^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\gamma \left[ 1 - \frac{vu_x}{c^2} \right]} \frac{\left[ \left( 1 - \frac{vu_x}{c^2} \right) a_y + u_y \frac{va_x}{c^2} \right]}{\gamma \left( 1 - \frac{vu_x}{c^2} \right)}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

因此,

$$a'_y = \frac{\left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}{\left( 1 - \frac{vu_x}{c^2} \right)^2} \left\{ a_y + \frac{vu_y/c^2}{(1 - vu_x/c^2)} a_x \right\}. \quad (4.19)$$

类似地,

$$a'_z = \frac{du'_z}{dt'} = \frac{1 - v^2/c^2}{\left( 1 - \frac{vu_x}{c^2} \right)^2} \left\{ a_z + \frac{vu_z/c^2}{(1 - vu_x/c^2)} a_x \right\}. \quad (4.20)$$

变换式(4.18), (4.19)和(4.20)将粒子路径某特定点上分别在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中测得的加速度瞬时值联系起来。该点在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中的坐标和时间由洛伦兹变换式相联系。

如果  $u$  和  $v$  远小于  $c$ , 则  $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$ 。这与牛顿力学相一致, 按照牛顿力学, 在所有相互匀速运动的惯性系中, 粒子的加速

度应该是相同的[比较方程(1.13)].

如果在惯性系  $\Sigma$  中,一粒子沿  $x$  方向作匀加速运动,那么粒子在  $x$  方向的速度  $u_x$  随时间而变化. 方程(4.18)右边的表达式包含一个随时间变化的项  $u_x$ , 因此即使  $a_x$  保持常量,  $a'_x$  也不为常量.

在牛顿力学中,假设粒子质量不随粒子速度而变化,因而可以把作用在粒子上的力定义为粒子质量和加速度的乘积. 在第五章中将证明,相对论力学中粒子质量必然与速度有关,因此把作用在粒子上的力定义为粒子的质量和力所引起的加速度的乘积是不方便的. 相对论中的力的定义留到第五章讨论.

## 4.4 相对论光学

现在将狭义相对论的变换应用于光学现象, 特别是要应用于 2.1 节中用经典以太理论解释过的某些光学实验.

### 4.4.1 线速的变换

在第二章中当讨论地球相对于假想的以太运动会发生什么时, 发现即使在真空中也必须区别单色光的线速和波速. 令静止在惯性系  $\Sigma$  中的一系列狭缝选择出一窄束光, 如图 4.1 所示. 在 2.1.2 节中曾指出, 一系列狭缝选出的狭窄光束以线速行进. 设将光束的某一特殊部分标志出来, 例如可考察波的某特殊最大值. 令标出部分在相对惯性系  $\Sigma$  的  $t$  时刻通过  $x, y, z$  处的狭缝, 而在  $t + \delta t$  时刻通过  $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$  处的狭缝. 标出部分光通过狭缝是不依赖特殊参考系而发生的事件. 设对应标出部分通过  $x, y, z$  处和  $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$  处狭缝的两事件, 相对于以匀速  $v$  相对  $\Sigma$  沿

公共  $x$  轴运动的惯性系  $\Sigma'$  分别被记录为  $t'$  时刻在  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  点及  $t' + \delta t'$  时刻在  $x + \delta x'$ ,  $y' + \delta y'$ ,  $z' + \delta z'$  点。由洛伦兹变换有：

$$\begin{aligned}\delta'_x &= \gamma[\delta x - v\delta t], \\ \delta y' &= \delta y, \\ \delta z' &= \delta z, \\ \delta t' &= \gamma[\delta t - (v\delta x/c^2)].\end{aligned}$$

用  $\delta t'$  除  $\delta x'$ ,

$$\frac{\delta x'}{\delta t'} = \frac{[\delta x - v\delta t]}{\left[\delta t - \frac{v\delta x}{c^2}\right]}. \quad (4.21)$$

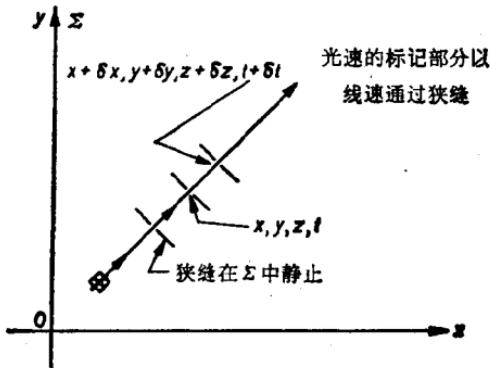


图 4.1 狹縫選出一狹窄光束。光束標出部分的通過相繼狹縫是一系列事件。

令光的线速在  $\Sigma$  中用  $\mathbf{u}$  表示，其分量为  $u_x, u_y, u_z$ 。令  $\Sigma'$  中的线速用  $\mathbf{u}'$  表示，其分量为  $u'_x, u'_y, u'_z$ 。于是有

$$u'_x = \frac{\delta x'}{\delta t'} \quad \text{及} \quad u_x = \frac{\delta x}{\delta t}$$

因此方程(4.21)变为

$$u'_x = \frac{(u_x - v)}{(1 - vu_x/c^2)}. \quad (4.22)$$

类似地，

$$u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{(1 - vu_x/c^2)} \quad (4.23)$$

和

$$u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{(1 - vu_x/c^2)}. \quad (4.24)$$

于是，按照狭义相对论，从  $\Sigma$  变换到  $\Sigma'$ ，光束线速的变换方式和粒子速度相同。这一点按照经典以太理论也是如此（参阅 2.1.2 节），虽然实际的变换方程式在两个理论中是不同的。

#### 4.4.2 静止物体中的光速

在马司卡脱和贾明的实验中（参阅 2.1.5 节）水相对于实验室是静止的。按照相对性原理不需要把光的传播与假想的以太静止的绝对参考系相联系起来。可以用实验室参考系。如果水相对于实验室为静止的，那么水中所有方向应该是等价的，因此水中光速在所有方向应该是相同的。于是在马司卡脱和贾明实验中光通过水槽需要的时间应该是相同的，不管水槽方位如何，只要槽中水是静止的。

根据相同理由，相对实验室静止的玻璃的折射率应该具有相同数值，不论入射光方向如何。静止棱镜中光的偏折不应依赖入射光的方向。这与阿拉果的实验相符合（参阅 2.1.4 节）。

如果一折射媒质相对实验室静止，它相对实验室不缩短。它不应由于相对某绝对参考系运动而处于形变状态，因而不应有双折射现象。这与瑞利和布雷斯做的实验（参阅 2.3 节）相符合。

#### 4.4.3 菲索实验

在 2.1.7 节中讲了菲索怎样证明水中光速受水相对实验

室运动的影响。当水相对实验室运动时，水中各方向是不等价的。于是光速在各方向不一定是相同的。

设  $\Sigma$  是实验室参考系，其中水以匀速  $v$  沿正  $x$  方向运动。令一串狭缝选出一狭窄光束，使得光束沿正  $x$  轴方向行进，如图 4.2(a) 所示。在相对于  $\Sigma$  以匀速  $v$  运动的惯性系  $\Sigma'$  中，水是静止的，如图 4.2(b) 所示。令光在  $\Sigma'$  中的折射系数等于  $n'$ ， $\Sigma'$  中的光速为

$$u'_x = c/n'; \quad u'_y = 0; \quad u'_z = 0.$$

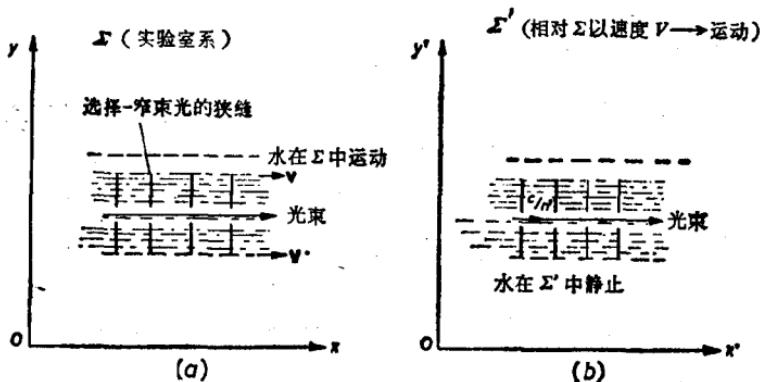


图 4.2  $\Sigma'$  中水静止，因而光速在所有方向是相同的，并等于  $c/n'$ 。(a)  $\Sigma$  中水以速度  $v$  运动。按照狭义相对论的速度变换，在水运动方向的光速在  $\Sigma$  中等于  $(c/n') + v(1 - \frac{1}{n'^2})$ 。

应用方程(4.22), (4.23)和(4.24)的逆变换得到

$$u_y = u_z = 0,$$

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{(u'_x + v)}{(1 + vu'_x/c^2)} = \frac{\left(\frac{c}{n'} + v\right)}{\left(1 + \frac{vc}{n'c^2}\right)} \\ &= \frac{c}{n'} \left\{1 + \frac{n'v}{c}\right\} \left\{1 + \frac{v}{n'c}\right\}^{-1}. \end{aligned}$$

按二项式定理展开并忽略  $v^2/c^2$  项, 有

$$u_x = \frac{c}{n'} \left\{ 1 + \frac{n'v}{c} \right\} \left\{ 1 - \frac{v}{n'c} \right\}$$
$$u_x = \frac{c}{n'} + v \left\{ 1 - \frac{1}{n'^2} \right\} + \text{高阶项.} \quad (4.25)$$

在流水中这个光速值与菲索以及迈克耳逊和莫雷得到的结果(参阅 2.1.7 节)相符合。因此狭义相对论的速度变换给出正确的相对实验室的速度。如果用伽利略速度变换, 就会有

$$u_x = u'_x + v = \frac{c}{n'} + v. \quad (4.26)$$

此值与实验结果不符。为了利用经典以太理论解释方程(4.25), 就需要假设水流拖曳水中某些假想的以太一齐走。

现在有一个有意义的结果: 即不需要去讨论导致流动的水中的光速取值为  $\frac{c}{n'} + v \left( 1 - \frac{1}{n'^2} \right)$  的那些实际过程, 怎样在水中发生的。可以看出单由相对论考虑就要求有上述结果。为了用电磁理论解释此结果, 洛伦兹将麦克斯韦方程组推广到运动媒质的情况, 并引入物质结构假设。但是如果新理论的方程式服从相对性原理, 并且当坐标和时间按照洛伦兹变换公式变换时, 保持数学形式不变(洛伦兹方程与其符合到  $v/c$  的一阶), 那么速度值的变换必然按照狭义相对论变换公式而不是按照牛顿力学。在狭义相对论中常出现这种情况, 理论方程与狭义相对论假设相符合的要求, 就足以得出某些结果, 而不必详细讨论实际发生的过程。

在方程(4.25)中,  $n'$  为相应于在  $\Sigma'$  中测量的水对频率为  $\nu'$  的光的折射系数。当光行进方向与  $\Sigma$  中水流相同时实验室中测量的光频率  $\nu$  与  $\Sigma'$  中的频率以多普勒效应的表达式相联系, 精确到一阶, 它为

$$\nu' = \nu(1 - nv/c).$$

对于光经过折射系数为  $n$  的媒质情况,以速度  $c/n$  代替  $c$  重复 3.8.1 节的方法(到  $v/c$  的一阶)可导出此公式. 因此  $n'$  是  $(v - nvv/c)$  的函数,它将由  $n'(v - nvv/c)$  表示. 将  $n'$  以泰勒展开式展开到  $v/c$  一阶项,有

$$n' \left( v - \frac{nv}{c} v \right) = n'(v) - \frac{nv}{c} v \frac{dn'(v)}{dv}.$$

但是  $n'(v)$  是相应于实验室坐标系中水对频率为  $v$  的光折射系数. 它将用  $n$  表示. 因此

$$n' = n - \frac{nv}{c} v \frac{dn}{dv} = n \left[ 1 - \frac{vv}{c} \frac{dn}{dv} \right].$$

括号内第二项是小的修正项,它对方程(4.25)中  $v(1 - 1/n'^2)$  项(它本身远小于  $c/n'$ ) 的贡献可以忽略. 方程(4.25)变为

$$\begin{aligned} u_x &\approx \frac{c}{n \left[ 1 - \frac{vv}{c} \frac{dn}{dv} \right]} + \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) v \\ u_x &\approx \frac{c}{n} + \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) v + \frac{vv}{n} \frac{dn}{dv} \\ &= \frac{c}{n} + v \left\{ 1 - \frac{1}{n^2} + \frac{v}{n} \frac{dn}{dv} \right\}, \end{aligned} \quad (4.27a)$$

或者,因  $\lambda v = c/n$ , 有

$$u_x \approx \frac{c}{n} + v \left\{ 1 - \frac{1}{n^2} - \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right\}. \quad (4.27b)$$

方程(4.27)最后一项是色散项. 如果光进行方向与水流方向相反,那么在方程(4.27)中  $v$  改变符号. 1915 年塞曼(Zeeman)做了运动的石英棒中光速的精确实验,表明需要包含色散项. 塞曼证明方程(4.27)与实验结果相符合.

#### 4.4.4 恒星光行差

对于恒星的光行差,我们曾按以太理论作过解释,其中假

设以太不参与地球相对太阳运动的变化。在 2.1 节中证明了在地心系中，线速在以太风影响下方向变化如图 2.2 和 2.4 所示。由于地球绕太阳运动，“以太风”方向随季节变化，因而导致行差。现在利用狭义相对论的速度变换来解释光行差现象。

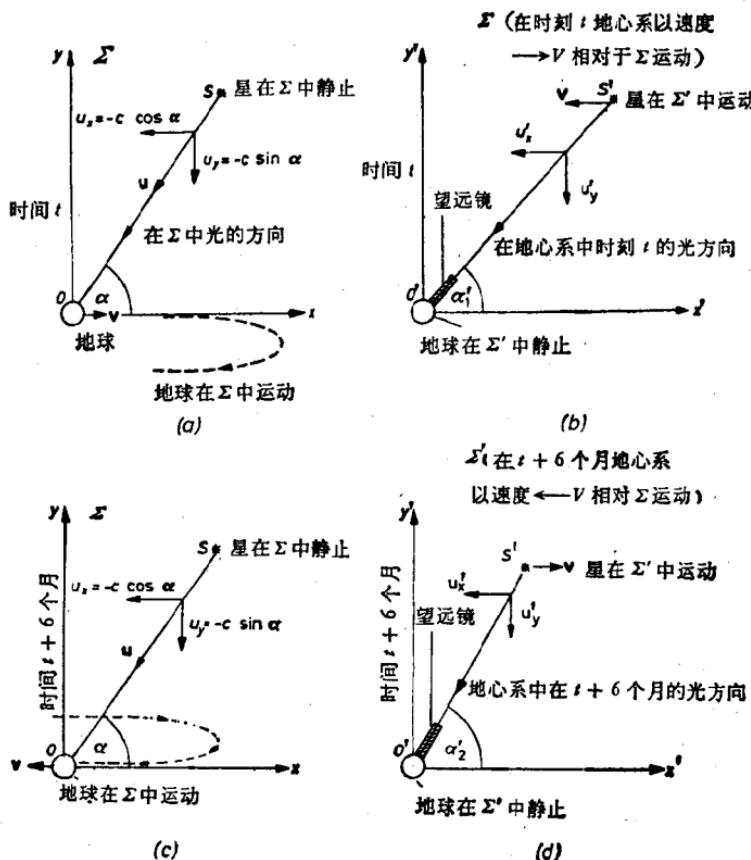


图 4.3 (a) 地球正以速度  $+v$  相对太阳运动。(b) 相应 (a) 的地心系；地心系中如果恒星光可垂直进入望远镜，必须将望远镜装成与  $x$  轴成  $\alpha'_1$  倾角。(c) 六个月后，地球相对于太阳在相反方向运动。(d) 在新的地心系中如果光可垂直进入望远镜，那么必须将望远镜装成与  $x$  轴成另一倾角  $\alpha'_2$ 。

考虑一个惯性系  $\Sigma$ , 其中太阳和这个恒星均为静止的。选择  $y$  和  $z$  轴使得这恒星处在  $xy$  平面内。设地球以速度  $v$  沿正  $x$  轴相对于  $\Sigma$  运动, 如图 4.3(a) 所示。在惯性系  $\Sigma'$  中, 地球静止, 如图 4.3(b) 所示。因此,  $\Sigma'$  代表地心系。望远镜选择一个以线速行进的光束。令此光束相对  $x$  轴的倾角在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中分别等于  $\alpha$  和  $\alpha'$ , 如图 4.3(a) 和 (b) 所示。为使光可沿望远镜法线进入望远镜, 在  $\Sigma'$  中必须将望远镜指向  $\alpha'_1$  倾角。在  $\Sigma$  中线速分量为:

$$u_x = -c \cos \alpha; \quad u_y = -c \sin \alpha; \quad u_z = 0.$$

按照光的线速变换:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{(1 - vu_x/c^2)} = \frac{-c \cos \alpha - v}{1 + \frac{vc}{c^2} \cos \alpha}, \quad (4.28)$$

$$u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{\left[1 - \frac{vu_x}{c^2}\right]} = \frac{-c \sin \alpha \sqrt{1 - v^2/c^2}}{\left[1 + \frac{vc \cos \alpha}{c^2}\right]}. \quad (4.29)$$

用方程(4.28)除(4.29), 得到:

$$\begin{aligned} \tan \alpha'_1 &= \frac{u'_y}{u'_x} = \frac{c \sin \alpha \sqrt{1 - v^2/c^2}}{\left(1 + \frac{v}{c} \cos \alpha\right)} \frac{1 + (v/c) \cos \alpha}{(c \cos \alpha + v)} \\ \tan \alpha'_1 &= \frac{\sin \alpha \sqrt{1 - v^2/c^2}}{\cos \alpha + v/c} = \tan \alpha \left[ \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v}{c} \sec \alpha} \right] \end{aligned} \quad (4.30)$$

当地球正在如 4.3(a) 所示的方向运动时, 为使光线沿望远镜轴线进入望远镜, 在地心系中必须使望远镜的倾角为  $\alpha'_1$ 。注意  $\alpha'_1$  小于  $\alpha$ 。六个月后地球相对太阳反向运行, 如图 4.3(c) 所示。此方向变化等同于将望远镜从一个相对  $\Sigma$  以速度  $+v$  运动的惯性系移至另一个相对  $\Sigma$  以速度  $-v$  运动的惯性系。六个月后恒星光在地心系中以不同角度  $\alpha'_2$  射来, 其中  $\alpha'_2$  由下

式给出：

$$\tan \alpha'_2 = \frac{\sin \alpha \sqrt{1 - v^2/c^2}}{\cos \alpha - v/c} = \tan \alpha \left[ \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{v}{c} \sec \alpha} \right]. \quad (4.31)$$

方程(4.31)是由方程(4.30)中用  $-v$  代替  $v$  得到的。因为  $\alpha'_2$  不等于  $\alpha'_1$ ，所以，如果要求此恒星保持在视野中，地球上静止的望远镜的倾角在六个月中必需改变。现在  $v \sim 30$  公里/秒  $\sim 3 \times 10^4$  米/秒，而  $c = 3 \times 10^8$  米/秒，因此  $v^2/c^2$  阶的项可以忽略。所以方程(4.30)变为

$$\tan \alpha'_1 = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha + v/c} = \tan \alpha \left( 1 + \frac{v}{c \cos \alpha} \right)^{-1}.$$

用二项式定理展开并忽略  $v^2/c^2$  阶项

$$\tan \alpha'_1 = \tan \alpha - \frac{v \tan \alpha}{c \cos \alpha},$$

即

$$\tan \alpha'_1 - \tan \alpha = -\frac{v \tan \alpha}{c \cos \alpha}. \quad (4.32)$$

令  $\tan \alpha'_1 = \tan(\alpha + \Delta\alpha)$ ，其中  $\Delta\alpha \ll \alpha$ 。

利用泰勒级数展开，有

$$\tan(\alpha + \Delta\alpha) = \tan \alpha + \Delta\alpha \frac{d}{d\alpha}(\tan \alpha) = \tan \alpha + \Delta\alpha \sec^2 \alpha.$$

因此

$$\tan(\alpha + \Delta\alpha) - \tan \alpha = \Delta\alpha \sec^2 \alpha.$$

与方程(4.32)比较，

$$\Delta\alpha \sec^2 \alpha = -\frac{v \tan \alpha}{c \cos \alpha}$$

或

$$\Delta\alpha = -(v/c) \sin \alpha. \quad (4.33)$$

这就是说， $\alpha'_1$  小于  $\alpha$ ，于是当地球沿图 4.3(a) 所示方向运动时，地心系中望远镜与水平面的角度必须小于  $\alpha$ 。

类似地，六个月后

$$\Delta\alpha = +(\nu/c) \sin \alpha. \quad (4.34)$$

此时望远镜与水平面的倾角大于  $\alpha$ , 因而也大于六个月前的倾角。由于地球绕太阳的运动, 如果要使恒星留在视野中心, 望远镜倾角就必须在方程 (4.31) 和 (4.30) 给出的范围内变化。如果这恒星正在头顶上, 则它好像在一个圆上运动, 其  $\Delta\alpha = \nu/c = 10^{-4}$  弧度 = 20.5 弧秒。此结果与实验值符合, 也与根据经典以太理论计算的值符合。

#### 4.4.5 艾利实验

艾利通过实验发现望远镜中盛水和盛空气时行差角是相同的(参阅 2.1.6 节)。按照相对性原理, 光学定律不必参照任何绝对参考系, 可以采用地心系。在地心系中水是静止的, 光速在静止水中所有方向是相同的, 因而不受地球相对某假想绝对坐标系运动的影响。如果望远镜内盛水和盛空气时望远镜所指方向相同, 那么光在地心系中沿望远镜轴线射入, 并且在进入望远镜时不应有折射。因为望远镜内的水是静止的, 所以光不应该因镜内有水而偏离望远镜的轴线, 因而恒星仍在视域内; 于是望远镜内盛水与否行差角应该是相同的。

在以太理论中假设在地心系中以太扫过望远镜, 使来自远处的恒星光偏转。与盛空气的望远镜内偏转比较, 曾经预期, 以太使盛水的望远镜内光偏转角大些, 因为水中光速比空气小。对于光行差的不变的事实, 以太理论的解释为, 由于水相对绝对坐标系(假设以太在其中静止)运动使水内以太被部分拖曳。在假设光传播必须参照绝对参考系后, 为解释行差不变必须引入一个补偿效应(参阅 2.1.6 节)。

#### 4.4.6 真空中平面波的变换

在 2.1.2 节中曾证明, 如果在以太静止的坐标系中有一个

平面光波,那么根据经典以太理论,在相对以太匀速运动的任何其它坐标系中此波也是平面波,如图 2.2 所示。即使在真空中区别波速和线速也是必要的。曾证明虽然波的法线方向不变,线速方向是受“以太风”影响的。

现在利用狭义相对论变换考虑在真空中平面波的变换。不失去普遍意义,可以选择  $y$  和  $z$  轴使得波前法线处在  $xy$  平面内。如果在  $\Sigma$  中法线与  $x$  轴成  $\theta$  角,如图 4.4(a)所示,那么单色平面波可表示为:

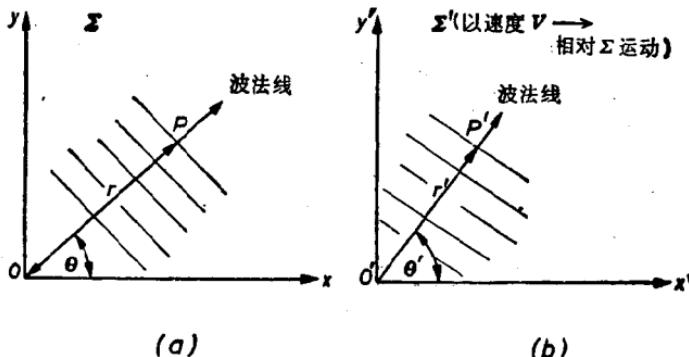


图 4.4 真空中平面波变换。波法线方向在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中是不同的。

$$\phi = A \cos 2\pi\nu(t - r/c) = A \cos 2\pi\nu \left( t - \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{c} \right),$$

其中  $\nu$  是光频率,  $c$  是真空中光的相速度,  $\phi$  既可代表电强度矢量  $\mathbf{E}$  也可代表磁力  $\mathbf{H}$ 。位相  $(t - r/c)$  可解释如下。令某波峰在  $t = 0$  时经过  $\Sigma$  原点, 并将此波峰标志出来。令在  $\Sigma$  中  $P$  点静止的观察者在时间  $r/c$  后当标志波峰到达时开始记数, 并继续记到  $t$  时刻。因为他记数的时间为  $t - r/c$ , 所以他数的波峰数目等于  $\nu(t - r/c)$ 。

现在设惯性系  $\Sigma'$  以匀速  $v$  相对  $\Sigma$  沿公共  $x$  轴运动, 如图

4.4(b) 所示，并设  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  的原点在  $t = t' = 0$  时重合。设一观察者静止在  $\Sigma'$  中的  $P'$  点，而  $P'$  与  $P$  在  $\Sigma$  中测量的  $t$  时刻重合。设在  $\Sigma'$  中测量的相应时间是  $t'$ 。设在  $P'$  点的观察者着手记录在有标记的波峰经过他的  $r'/c$  时刻与  $t'$  时刻之间到达他的波峰的数目。 $\Sigma'$  中记的波峰数目将等于  $\nu'(t' - r'/c)$ ，其中  $\nu'$  是  $\Sigma'$  中测量的光频率， $r'$  等于  $O'P'$ 。假设真空中光速在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  内是相同的。现在在有标记的波峰和  $P$  与  $P'$  点重合时经过它们的波峰之间的波峰数目是纯数字，是不依赖于特殊坐标系的不变量。因此位相必然是不变量，对于一个真空中的平面波必定有

$$\nu \left( t - \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{c} \right) = \nu' \left( t' - \frac{x' \cos \theta' + y' \sin \theta'}{c} \right). \quad (4.35)$$

方程 (4.35) 中的坐标和时间指  $P$  和  $P'$  的重合事件，它们以洛伦兹变换相联系。替换方程 (4.35) 左端的  $x$ ,  $y$  和  $t$ ，得到

$$\begin{aligned} \text{左端} &= \nu \left[ \gamma \left( t + \frac{vx'}{c^2} \right) - \frac{\gamma(x' + vt') \cos \theta}{c} - \frac{y'}{c} \sin \theta \right] \\ &= \nu \left[ \gamma t' \left( 1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right) - \frac{\gamma x'}{c} \left( \cos \theta - \frac{v}{c} \right) - \frac{y'}{c} \sin \theta \right] \end{aligned}$$

此式与方程 (4.35) 的右边具有相同的数学形式，证明  $\Sigma$  中的平面波变成  $\Sigma'$  中的平面波。因为两式必须相等， $x'$ ,  $y'$  和  $t'$  的系数在两式中必相同。因此，

$$\gamma v(\cos \theta - v/c) = \nu' \cos \theta', \quad (4.36)$$

$$v \sin \theta = \nu' \sin \theta', \quad (4.37)$$

$$\gamma v[1 - (v/c) \cos \theta] = \nu'. \quad (4.38)$$

方程 (4.38) 是相对论多普勒效应表达式。用方程 (4.36) 除方程 (4.37)，得

$$\tan \theta' = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sin \theta}{\cos \theta - v/c} = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2} \tan \theta}{1 - (v/c) \sec \theta}. \quad (4.39)$$

用方程(4.38)除(4.37),得

$$\sin \theta' = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sin \theta}{\cos \theta - v/c} = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2} \tan \theta}{1 - (v/c) \sec \theta}. \quad (4.40)$$

互换带撇和不带撇量并用 $-v$ 代替 $v$ 可得到逆关系式。方程(4.39)给出 $\Sigma'$ 中 $t'$ 时刻 $P'$ 点波法线相对 $x'$ 轴的倾角 $\theta'$ 。可以看出 $\theta'$ 和 $\theta$ 是不相等的,因此波法线倾角在 $\Sigma$ 和 $\Sigma'$ 中是不同的。这可与2.1.2节考虑的经典情况对照,那里曾证明波法线方向应不受“以太风”影响(参阅图2.2)。在经典情况即使在真空中,也需要区别平面波的线速和波速方向。在3.9节中曾说明,按照狭义相对论,如果球面光波在 $\Sigma$ 和 $\Sigma'$ 原点重合时刻发出,那么在 $\Sigma$ 和 $\Sigma'$ 中测量的波前都始终应该是以各自原点为中心的球面波。对于这样的一个球面波,线速和波速在同一方向,即分别以波前中心 $\Sigma$ 和 $\Sigma'$ 的原点径向向外。如果球面波半径变得很大,那么波前接近平面波,于是真空中平面波的线速和波速方向应该彼此重合;而且在所有惯性系中都应如此。因此方程(4.39)和(4.40)也联系着 $\Sigma$ 和 $\Sigma'$ 中真空中平面波的线速方向。

谬勒<sup>[1]</sup>讨论了折射系数大于一的媒质内平面波的变换,他证明 $\Sigma$ 内的平面波又变换成 $\Sigma'$ 内的平面波,但是除了光束平行于媒质运动方向外,一般要区别波速和线速。谬勒证明线速始终像粒子速度一样变换,因此可以利用方程(4.22),(4.23)和(4.24)。谬勒还证实在折射系数为一的极限情况,平面波的线速和波速大小相等,方向相同。

方程(4.39)可用于计算远处恒星来的光束的行差。为了将方程(4.39)用于图4.3(a)和4.3(b)所示的情况,图4.4中光束的方向必须反过来,使得光向着原点来,即方程(4.39)中的 $\theta$ 必须用 $+(\pi + \alpha)$ 代替,而 $\theta'$ 用 $+(\pi + \alpha'_1)$ 代替。方程

$$\tan \theta' = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sin \theta}{\cos \theta - v/c} \quad (4.39)$$

变为

$$\tan(\pi + \alpha'_1) = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sin(\pi + \alpha)}{\cos(\pi + \alpha) - v/c},$$

或

$$\tan \alpha'_1 = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sin \alpha}{\cos \alpha + v/c}. \quad (4.41)$$

这与方程(4.30)符合。类似地如果  $v$  变号，方程(4.39)变为与方程(4.31)相同。

#### 4.4.7 多普勒效应

在 3.8.1 节中计算了当光源和观察者间的相对速度为沿其联线的简单情况的多普勒效应。现在讨论一般情况。考虑静止在  $\Sigma'$  的原点的点光源。在  $\Sigma$  中光源以匀速  $v$  沿  $x$  轴运动。考虑当  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  原点在  $t = t' = 0$  时刻重合时发出的光。

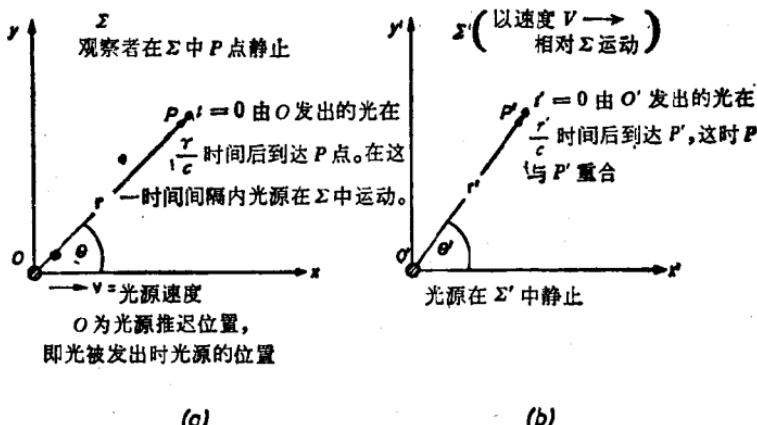


图 4.5 多普勒效应。运动光源在  $\Sigma$  原点  $t = 0$  时刻发出的光，在  $t = r/c$  时刻到达静止在  $\Sigma$  中  $P$  点的观察者。在  $\Sigma'$  中光源静止。

设此光在  $t$  时刻到达静止在  $\Sigma$  中  $P$  点的观察者，并令此事件在  $t'$  时刻处于  $\Sigma'$  中  $P'$  点，如图 4.5(a) 和 4.5(b) 所示。 $\Sigma$  中的球面波可用下式表示：

$$\phi = \frac{A}{r} \cos 2\pi\nu \left( t - \frac{r}{c} \right). \quad (4.42)$$

令  $\Sigma'$  中的球面波用下式表示：

$$\phi' = \frac{A'}{r'} \cos 2\pi\nu' \left( t' - \frac{r'}{c} \right). \quad (4.43)$$

在光源静止的惯性系  $\Sigma'$  中测量的光频率用  $\nu'$  表示，而在发光时光源正运动的惯性系  $\Sigma$  中测量的光频率用  $\nu$  表示。位相又是不变量。完全像 4.4.6 节中一样处理就得到：

$$\tan \theta' = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sin \theta}{(\cos \theta - v/c)}, \quad (4.44)$$

$$\sin \theta' = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sin \theta}{1 - v \cos \theta/c}, \quad (4.45)$$

$$\nu' = \gamma \nu (1 - v \cos \theta/c), \quad (4.46)$$

或

$$\nu = \frac{\nu' \sqrt{1 - v^2/c^2}}{(1 - v \cos \theta/c)}, \quad (4.47)$$

或

$$\nu = \frac{\nu' \gamma \sqrt{1 - v^2/c^2}}{\left[ r - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c} \right]}. \quad (4.48)$$

方程 (4.47) 和 (4.48) 给出当光源速度不必沿光源和观察者联线的一般情况下的多普勒效应。现在  $v \cos \theta$  是当光源发光时，即处于原点时，其速度在观察者方向的分量。当光到达观察者时，光源已经移动了，而在此时间间隔内光源的运动也可能发生了变化。通常假设光量子一旦离开光源，其频率便不

受此后光源运动的任何变化的影响。发光时刻光源的位置叫做光源的推迟位置。方程(4.48)右边所有的量都指 $\Sigma$ 中( $t - r/c$ )时刻光源的推迟位置。矢量 $\mathbf{r}$ 是从光源推迟位置到观察点的矢量。方程(4.48)右边的分母也出现于李纳-维切尔斯的公式中，我们将在第九章介绍它。利用 $\lambda'v' = \lambda v = c$ 可从方程(4.48)得到波长变换。

当 $\mathbf{v}$ 与 $\mathbf{r}$ 平行时，光源正向着观察者运动， $\theta = 0$ ， $\cos\theta = +1$ ，因而方程(4.48)化为

$$v = \frac{v'\sqrt{1 - v^2/c^2}}{(1 - v/c)} = v' \sqrt{\frac{c + v}{c - v}}, \quad (4.49)$$

当光源向着观察者运动时光频率增加。方程(4.49)与3.8节中直接由洛伦兹变换导出的方程(3.86)相符合。

类似地，如果发光时光源运动的方向是远离观察者，那么 $\theta = \pi$ ， $\cos\pi = -1$ ，因而方程(4.47)变为

$$v = \frac{v'\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v/c} = v' \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}. \quad (4.50)$$

此时频率降低。方程(4.50)与方程(3.82)相符合。在3.8节中已叙述了依弗斯和斯蒂耳威尔<sup>[2]</sup>如何证实当 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 时多普勒效应的相对论公式。

如果在惯性系 $\Sigma$ 中光到达观察者的方向，按图4.5(a)中P点观察者看，与光源推迟位置的相对运动方向成90度，那么将 $\cos\theta = 0$ 代入方程(4.47)，得到

$$v' = \gamma v,$$

或

$$v = v' \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (4.51)$$

按照狭义相对论，如果观察发光原子束的方向，据观察者看与相对运动方向成直角，那么光频率应该与光源相对观察者静止时所具有的光频率不同。此即横向多普勒效应。按照经典

以太理论，此情况下应该没有频率变化。按照相对论，此差别产生于  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中时间尺度不同。如果从实验上证实有横向多普勒效应，那就是对狭义相对论的进一步支持。

#### 4.4.8 光在运动镜面的反射

利用在 4.4.6 节中导出的变换可得出光在运动镜面的反射定律。考虑一个平面镜，它沿其法线以匀速  $v$  在惯性系  $\Sigma$  的正  $x$  方向运动，如图 4.6(a) 所示。令一频率为  $\nu_1$ ，波长为  $\lambda_1$  的光束以入射角  $\alpha_1$  射在运动的镜上，并令反射光束与法线夹角为  $\alpha_2$ ，频率为  $\nu_2$ ，波长为  $\lambda_2$ ，如图 4.6(a) 所示。

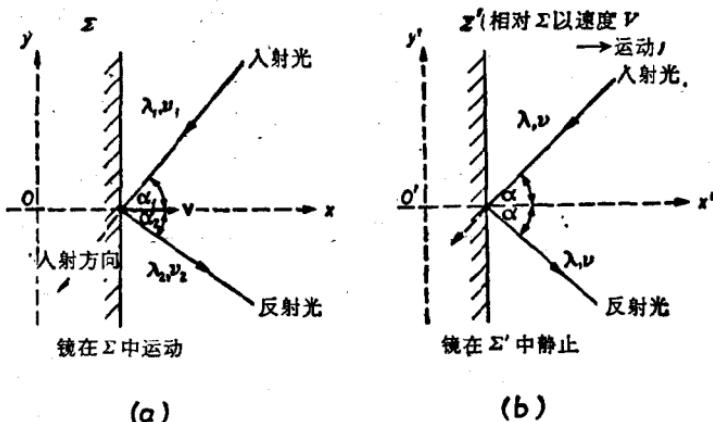


图 4.6 (a) 光在运动镜面的反射。(b) 在  $\Sigma'$  中平面镜是静止的，此时通常的反射定律应该成立，因而反射角应该等于入射角。在  $\Sigma$  中当镜如图 (a) 所示运动时，反射角  $\alpha_2$  小于入射角  $\alpha_1$ 。在动镜上反射后光的频率和波长也发生变化。

在相对  $\Sigma$  以匀速  $v$  运动的惯性系  $\Sigma'$  中，平面镜是静止的，如图 4.6(b) 所示。通常的反射定律在  $\Sigma'$  中应该成立，所以入射角应该等于反射角，反射后光的波长和频率应该不变。设  $\Sigma'$  中的入射角是  $\alpha$ ，光的频率和波长分别是  $\nu$  和  $\lambda$ 。由方

程(4.39)，

$$\tan \theta' = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sin \theta}{\cos \theta - v/c}, \quad (4.39)$$

其中角  $\theta$  和  $\theta'$  如前边图 4.4 所示。对于  $\Sigma'$  中的入射光， $\theta' = \pi + \alpha$ ，而对于  $\Sigma$  中， $\theta = \pi + \alpha_1$ ，所以方程(4.39)变为

$$\tan(\pi + \alpha) = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sin(\pi + \alpha_1)}{\cos(\pi + \alpha_1) - v/c}.$$

但是  $\sin(\pi + \alpha_1) = -\sin \alpha_1$ ； $\cos(\pi + \alpha_1) = -\cos \alpha_1$  以及  
 $\tan(\pi + \alpha) = +\tan \alpha$ ，

因此

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sin \alpha_1}{\cos \alpha_1 + v/c}. \quad (4.52)$$

类似地，将  $\theta'$  和  $\theta$  代入方程(4.38)，

$$v = \gamma v_1 [1 - (v/c) \cos \theta] = \gamma v_1 [1 + (v/c) \cos \alpha_1]. \quad (4.53)$$

对于反射光  $\theta' = -\alpha$  和  $\theta = -\alpha_2$ ，代入方程(4.39)

$$\tan(-\alpha) = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sin(-\alpha_2)}{\cos(-\alpha_2) - v/c},$$

或

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sin \alpha_2}{\cos \alpha_2 - v/c} \quad (4.54)$$

代入方程(4.38)，

$$v = \gamma v_2 [1 - (v/c) \cos \theta] = \gamma v_2 [1 - (v/c) \cos \alpha_2]. \quad (4.55)$$

使方程(4.52)和(4.54)右边相等，有

$$\frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1 + v/c} = \frac{\sin \alpha_2}{\cos \alpha_2 - v/c}. \quad (4.56)$$

此即为当镜以匀速  $v$  相对观察者运动时，测量到的入射和反射角间的关系式。由方程(4.56)可见  $\alpha_2$  小于  $\alpha_1$ 。

使方程(4.53)和(4.55)右边相等

$$\gamma v_1 [1 + (\nu/c) \cos \alpha_1] = \gamma v_2 [1 - (\nu/c) \cos \alpha_2]$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{[1 - (\nu/c) \cos \alpha_2]}{[1 + (\nu/c) \cos \alpha_1]} = \frac{(c - \nu \cos \alpha_2)}{(c + \nu \cos \alpha_1)}. \quad (4.57)$$

因为  $v_1 \lambda_1 = c$ ,  $v_2 \lambda_2 = c$  我们有

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{c + \nu \cos \alpha_1}{c - \nu \cos \alpha_2}. \quad (4.58)$$

角  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  的关系是方程 (4.56)。这些结果在热力学中是很重要的。通常在热力学中应用从动镜反射辐射时,  $\nu$  远小于  $c$ 。将方程(4.58)展开到  $\nu/c$  的一阶, 有

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} &= [1 + (\nu/c) \cos \alpha_1][1 - (\nu/c) \cos \alpha_2]^{-1} \\ &= 1 + \frac{\nu}{c} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2). \end{aligned}$$

令

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \delta \lambda_1 = \lambda_1 \left(1 + \frac{\delta \lambda_1}{\lambda_1}\right),$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 (1 + \delta \lambda_1 / \lambda_1)} \approx 1 - \frac{\delta \lambda_1}{\lambda_1} \approx 1 + (\nu/c)(\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2),$$

或

$$\delta \lambda_1 \approx -\lambda_1 \frac{\nu}{c} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2).$$

如果  $\nu \ll c$ , 则由方程(4.56)得  $\alpha_1 \approx \alpha_2$  及  $\cos \alpha_1 \approx \cos \alpha_2$ 。因此当平面镜以匀速  $\nu$  接近入射光时, 它的反射会使光的波长变化, 即把波长缩短

$$\delta \lambda_1 = -2\lambda_1 \frac{\nu}{c} \cos \alpha_1. \quad (4.59)$$

当此镜以匀速  $\nu$  离开光时, 光波长增加, 其值为  $2\lambda_1(\nu/c) \cos \alpha_1$ 。此结果与经典的波长改变值相符合 (Richtmeyer and Kennard)<sup>[3]</sup>。

#### 4.4.9 高速运动物体的表现形象

在麦克利<sup>[4]</sup> (McCrea), 特勒尔<sup>[5]</sup> (Terrell), 潘勒斯<sup>[6]</sup> (Penrose), 和威斯可夫<sup>[7]</sup> (Weisskopf) 提醒注意之前; 一直有一个普遍的错误概念是, 如果观察一个运动物体, 当其速度可与光速相比拟时, 那么将看到物体在沿运动方向缩短。必须记住, 人在特定时刻看到 (或拍摄) 什么东西取决于此时刻实际到达眼睛(或像机)的光。这些光量子是在不同时刻从物体的不同部位发出的。来自物体的距观察者最远部分的光子比来自距观察者最近部分的光子早发出。考虑边长为  $l$  的立方体, 它相对惯性系  $\Sigma$  以匀速  $v$  运动, 如图 4.7(a) 所示,  $v$  与光速可以相比, 但小于光速。设在垂直运动方向从很远处观察此立方体, 从而, 这个立方体对在  $\Sigma$  原点  $O$  的观察者位置的张

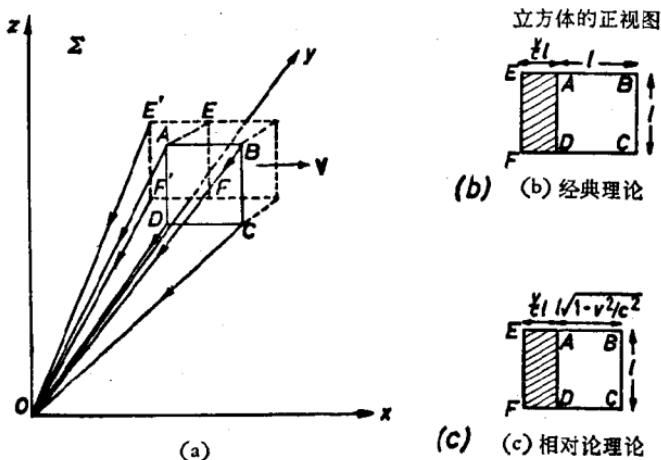


图 4.7 (a) 立方体以匀速  $v$  相对  $\Sigma$  运动。当立方体的  $x$  坐标为零时由四角  $A, B, C$  和  $D$  发出的光量子同时到达  $O$ 。 $E$  和  $F$  在  $E'$  和  $F'$  位置发出的光量子也与  $A, B, C$  和  $D$  的量子同一时刻到  $O$ 。当立方体远离观察者时, 按照经典理论和狭义相对论, 其视图分别如图 (b) 和 (c) 所示。

角是很小的，如图 4.7(a) 所示。我们首先利用非相对论观点考虑。如果立方体静止，只能看到  $ABCD$  面。当立方体运动时，同时到达眼睛形成像的来自四角  $A, B, C$  和  $D$  的光量子必然在同一时刻离开四角。如果发光时四角距观察点等距离，如图 4.7(a) 所示，那么  $A, B, C$  和  $D$  点呈现为正方形的四个角。当立方体相对观察者运动时，从角  $E$  和  $F$  发出的光量子也能到达眼睛，如图 4.7(a) 所示。从这两个角发出的量子离开立方体时间早些，那时角  $E$  和  $F$  处在  $E'$  和  $F'$  的位置，如图 4.7(a) 所示。因此运动立方体的  $ADFE$  面是可见的，它呈现矩形。如果眼睛远离立方体，按一级近似， $E$  点的光在  $E'$  到  $E$  的时间内走过附加距离  $l$ 。因此  $EE'$  等于  $(v/c)l$ 。立方体的非相对论性图象如图 4.7(b) 所示。此立方体视图与转动一角度后的静止立方体的图象相似，使得  $ADFE$  面可以见到如图 4.8(a) 所示。设立方体转动一角度  $\alpha$ ，使得  $AE$  边的

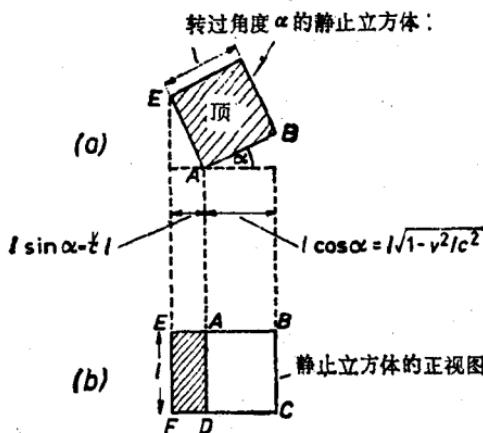


图 4.8 转动角度  $\alpha = \sin^{-1}v/c$  后的静止立方体的表观形象；(a) 为顶视图，(b) 为正视图。后者与狭义相对论所预言的，并如图 4.7(c) 所示的远处运动立方体的表观形象相同。

投影等于  $(v/c)l$ , 如图 4.8(a) 和 (b) 所示. 角  $\alpha$  由下式给出

$$\sin \alpha = v/c.$$

$AB$  边的投影则等于

$$l \cos \alpha = l \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

于是, 按照非相对论性理论, 运动立方体的表观形象与旋转了的静止立方体的表观形象不完全相同, 因为静止立方体  $AE$  边的投影等于  $(v/c)l$ ,  $AB$  边的投影等于  $l(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$ , 而运动立方体  $AB$  边显出具有长度  $l$ . 于是根据非相对论性理论, 运动立方体的表观形象应该是相当于  $AB$  长度增加了  $1/(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$  倍的旋转了的静止立方体.

按照狭义相对论,  $AE$ ,  $AD$ ,  $DF$ , 和  $EF$  全部垂直于运动方向, 因而长度不变, 所以  $ADFE$  的形象将与非相对论性情况相同. 另一方面,  $AB$  是平行于运动方向的, 因而应缩短成  $l(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$ . 此长度缩短正好补偿经典情况  $AB$  长度的表观增加, 如图 4.7(c) 所示. 于是按照狭义相对论, 运动立方体的表观形象与旋转角度  $\alpha = \sin^{-1}(v/c)$  后的静止立方体相同[比较图 4.7(c) 和 4.8(b)].

运动立方体还可从立方体静止的惯性系  $\Sigma'$  来考虑. 设在  $\Sigma'$  中静止的观察者  $O'$  在光到达  $O$  点观察者的时刻与  $O$  重合, 对应于图 4.7(a) 中立方体的位置, 如图 4.9 所示.  $O$  和  $O'$  与来自立方体各部分的光重合是不依赖于任何特殊坐标系的事件, 于是  $O$  和  $O'$  看到的图象间应有某些相似之处, 虽然  $O$  和  $O'$  的量度和解释可能是不同的. 按  $\Sigma'$  中静止的观察者来说, 来自静止立方体的光与  $\Sigma'$  的  $x'$  轴的夹角好像小于 90 度, 因为相对于惯性系  $\Sigma'$ , 必定先让该立方体与  $\Sigma$  的  $y$  轴重合,  $O'$  才能重合于  $O$ .  $\Sigma'$  中静止在  $O'$  点的观察者还能看到立方体的  $ADFE$  面, 因此  $\Sigma'$  中“静止”的立方体好像转动了一个角

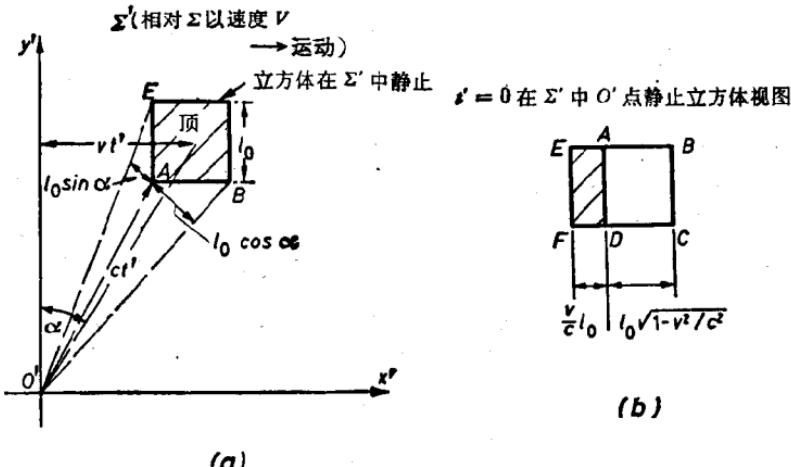


图 4.9 立方体在  $\Sigma'$  中静止。从  $\Sigma'$  原点  $O'$  观察, 此时  $O'$  与  $\Sigma$  原点  $O$  重合。当光通过从立方体到  $O'$  的距离  $ct'$  时,  $\Sigma$  的  $y$  轴向左移动距离  $-vt'$ 。如果立方体远离  $O'$ , 则  $\sin \alpha' \approx v/c$ 。相对  $\Sigma'$  的  $y'$  轴以角度  $\alpha'$  观察立方体,  $O'$  的观察者可以看到静止立方体的  $ADEF$  面, 如图 (b) 所示。对于在  $\Sigma$  中所见到的运动立方体的形状这与狭义相对论所预言的相同, 如图 4.7(c) 所示。

度  $\alpha'$ 。因为当光通过从立方体到  $O'$  的距离  $ct'$  时,  $\Sigma$  的  $y$  轴相对  $\Sigma'$  通过距离  $vt'$ , 所以有

$$\sin \alpha' \approx \frac{vt'}{ct'} \approx v/c.$$

于是“静止”立方体相对静止在  $O'$  点的观察者好像转动了角度  $\sin^{-1}(v/c)$ 。因此相对于静止在  $\Sigma'$  中  $O'$  点的观察者和静止在  $\Sigma$  中  $O$  点的观察者, 立方体好像具有相同的形状, 虽则对于在他们估算发光时刻立方体离他们的距离时, 他们将估算得不同的值。

特勒尔<sup>[5]</sup>证明了, 在一般情况下, 以任意角度观察运动物体时, 则按照狭义相对论, 只要运动物体对观察点的张角很小, 运动物体的表观在形状上不变; 但转动一行差角, 它可由

方程(4.40)算出。如果物体在观察点的张角是有限的，那么物体不同部分呈现不同的转动量，这导致形状改变。潘勒斯曾证明，如果运动圆球张角是有限的，则圆球表面会出现变形，但运动圆球的轮廓仍是圆形。

必须小心，不要把测量与观看混同起来。人们将通过在同一时刻观察立方体两端在尺上的位置来测量运动立方体的长度。按照狭义相对论，测量到的长度是缩短了的。如果，按照狭义相对论所预言，人们看到运动立方体图象不变形但转动了，那么若考虑到来自立方体各部分的光量子飞行的有限时间而计算立方体的尺度，则将推出发生了长度缩短。

来自运动物体的光要有光行差和多普勒频率移动。假设运动物体在其静止的参考系  $\Sigma'$  中发出单色光。有理由假设光在此参考系中各向同性地发出。对于  $\Sigma$ ，此物体以速度  $v$  运动。光在  $\Sigma$  中的角分布可由方程(4.45)计算出。由于除了当  $\theta' = \pi$  的情况以外  $\theta$  始终小于  $\theta'$ ，因此光行差的效应是使越来越多的光集中到物体的运动方向。于是光的发射强度向前比向后大，因而在极高速度时，光将主要向前方发射。当光源运动朝向观察者时，光频率增加，对于非常高速度它将移到紫外区。在光源经过观察者之后，频率下降，谱线向红端移动，因为光源这时背离观察者运动。于是，当单色光源正相对实验室运动时，光发射强度和频率在不同方向是不同的。因此，当物体相对观察者运动时，不只是在空间上有表观转动，而且运动物体的颜色和表观亮度也是不同的。

### 参 考 文 献

- [1] Møller, C. *The Theory of Relativity*. Ch. 2. Oxford University Press, London, 1952
- [2] Ives, H. E. and Stillwell, G. R. *J. opt. Soc. Amer.* 28(1938) 215; 31(1941) 369

- [ 3 ] Richtmeyer, F. K. and Kennard, F. H. *Introduction to Modern Physics*. (Fourth Edition) p. 145. McGraw-Hill, New York, 1947
- [ 4 ] McCrea, W. H. *Sci. Proc. Roy. Dublin Soc.* 26(1952) 27
- [ 5 ] Terrell, J. *Phys. Rev.* 116(1959) 1041
- [ 6 ] Penrose, R. *Proc. Camb. phil. Soc.* 35(1959) 137
- [ 7 ] Weisskopf, V. F. *Phys. To-day* 13 No. 9(1960) 24
- [ 8 ] Rindler, W. *Amer. J. Phys.* 29(1961) 365
- [ 9 ] Shaw, R. *Amer. J. Phys.* 30(1962) 72

### 补充读物

对于相对论光学的更详尽的讨论,读者可参阅谬勒的《相对论》(《*The Theory of Relativity*》),在狄斯本(Ditchburn)的《光》(《*Light*》),林德勒的《狭义相对论》(《*Special Relativity*》)和麦克利的《相对论物理学》(《*Relativity Physics*》)中亦有极好的说明。我们对运动物体的表观形象的论述与威斯可夫<sup>[7]</sup>所给出的相类似。

### 习题

4.1 火车以 30 米/秒的速度通过车站。一子弹相对火车以 15 米/秒的速度在一节车厢的地板上滚动。计算子弹相对站在站台上的观察者的速度,(a) 如果子弹沿火车运动的方向滚动,(b) 如果按火车上的乘客的测量,子弹在垂直于火车运动的方向滚动。

4.2 放射核以  $c/10$  的速度相对实验室运动,此时它放射  $\beta$  粒子,其速度相对于衰变核在其中静止的坐标系为  $0.8c$ 。问  $\beta$  粒子相对实验室的速度和方向如何,如果相对于放射核, $\beta$  粒子(a) 沿核相对实验室的运动方向放射,(b) 垂直于该运动方向放射。

如果在实验室坐标系中, $\beta$  粒子垂直于放射核的运动方向而运动,问(c) 在实验室坐标系中它的速度是多少,(d) 在

衰变核静止的坐标系中，相对衰变核对实验室的运动方向而言， $\beta$  粒子在哪一方向被放射出来。

4.3 在  $\Sigma'$  中静止，但在  $\Sigma$  中沿  $x$  轴以  $c/4$  速度运动的放射核放射出一个  $\beta$  粒子，其速度相对  $\Sigma'$  为  $0.8c$  并与  $\Sigma'$  的  $x'$  轴成  $45$  度角。 $\beta$  粒子相对于在  $\Sigma$  中沿负  $x$  轴以  $c/4$  速度行进的观察者的速度是多少？

4.4 以速度  $v$  沿  $\Sigma$  的  $x$  轴运动的观察者看到原体积为  $V_0$  的物体以速度  $u$  沿  $\Sigma$  的  $x$  轴运动。证明观察者测出的体积等于

$$V_0 \sqrt{\frac{(c^2 - v^2)(c^2 - u^2)}{(c^2 - uv)^2}}.$$

[提示：此体积应为  $V_0 \sqrt{1 - u'^2/c^2}$ 。再利用方程 (4.14) 变换  $\sqrt{1 - u'^2/c^2}$ .]

4.5 一放射核以速度  $v$  相对实验室 ( $\Sigma$ ) 运动，它以速度  $u'$  相对放射核在其中静止的坐标系  $\Sigma'$  放出  $\beta$  粒子。在  $\Sigma'$  中测量到的  $u'$  与  $\Sigma'$  的  $x'$  轴间的角度为  $\alpha'$ 。计算  $\beta$  粒子相对实验室的速度  $u$  及在实验室坐标系中  $u$  与  $v$  间的夹角  $\alpha$ 。

证明：如果放射核以速度  $u'$  相对于实验室运动，并以速度  $v$  发射  $\beta$  粒子，则  $\beta$  粒子相对于实验室的速度同前，但  $\alpha$  不同。

4.6 一位物理学家告诉一位体重为 20 英石 (即 280 磅) 的女朋友，使其苗条的最好办法是她相对实验室很快运动，以致产生洛伦兹缩短。(a) 为了在运动方向使她的测量尺寸比她在实验室的尺寸减少一半，她的运动速度需多大？(b) 相对实验室她的质量是多少？(参阅 5.2 节)(c) 相对实验室，她看起来真的如何？

4.7 静止在惯性系  $\Sigma$  的原点的观察者看到两个粒子以相等的速度  $0.8c$  行进，一个沿正  $x$  轴，另一个沿负  $x$  轴。(a)

在  $\Sigma$  中两粒子的相对速度是多少？这一答案为什么可以超过光速？(b) 两粒子在  $\Sigma$  中正以多大速率输运能量和动量？(c) 一个粒子相对另一个的速度是多少？

4.8 在一阴极射线管中电子束横扫荧光屏的速度可以超过光在真空中的速度。你怎样将此与真空中光速不可超越的特性相统一起来？[提示：阅读 5.3 节并与图 5.2 相比较。单个电子的速度是多少？]

4.9  $\Sigma'$  坐标系的空间笛卡尔坐标轴与  $\Sigma$  坐标系的轴平行，并且  $\Sigma'$  原点在  $\Sigma$  系中于  $t$  时刻在  $(vt, 0, 0)$  处。一质点在  $\Sigma$  系中划出抛物线轨迹  $x = ut$ ,  $y = \frac{1}{2} at^2$ 。求它在  $\Sigma'$  系中的轨迹并证明其加速度在  $\Sigma'$  中沿  $O'y'$ ，大小为

$$a(1 - v^2/c^2)/(1 - uv/c^2)^2.$$

[提示：对  $x, y$  和  $t$  用洛伦兹变换并证明

$$x' = \frac{(u - v)}{(1 - uv/c^2)} t'; \quad y' = \frac{1}{2} \frac{a(1 - v^2/c^2)}{(1 - uv/c^2)^2} t'^2.$$

利用加速度的变换式，验证  $\Sigma'$  中的加速度。]

4.10 一粒子在  $t = 0$  时静止在惯性系  $\Sigma$  的原点。它这样运动，使得相对于它在其中瞬时静止的惯性系具有不变的加速度  $g$ 。求经过在  $\Sigma$  中测量的时间  $t$  后粒子相对  $\Sigma$  的速度和位置。

[讨论、由方程(4.18)，

$$g = a_x' = \frac{(1 - u^2/c^2)^{\frac{1}{2}} a_x}{(1 - u^2/c^2)^3} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right].$$

然后像 5.4.1 节一样处理，只是现在  $g = qE/m_0$ 。证明相应于方程(5.52)，现在有

$$u = gt / \left\{ 1 + \frac{g^2 t^2}{c^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \text{或} \quad t = \frac{u}{g(1 - u^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

相应于方程(5.53)，有

$$x = \frac{c^2}{g} \left[ \left\{ 1 + \frac{g^2 t^2}{c^2} \right\}^{\frac{1}{2}} - 1 \right].$$

证明方程 (5.54) 可以写成  $(x + c^2/g)^2 - c^2 t^2 = c^4/g^2$ , 或  $gx^2 + 2c^2x - gc^2t^2 = 0$ . 这是双曲线的数学方程. 因此这一类型的运动称为双曲线运动.

电荷  $q$  在电场中从静止开始运动, 即为上述运动类型的一个例子. 如果电场是  $E_x$ , 将它变换到电荷在其中瞬时静止的参考系, 我们有  $E'_x = E_x$  (参阅 8.2 节), 而作用在它上边的力是  $qE'_x$ . 因为粒子在  $\Sigma'$  中瞬时静止, 可以写

$$a'_x = \frac{qE'_x}{m_0} = \frac{qE_x}{m_0},$$

于是在粒子瞬时静止的惯性系中, 其加速度是常量.]

4.11 证明在  $\Sigma$  中在时间  $t = c/g$  以后由  $\Sigma$  原点发出的光信号永远也赶不上前一个习题中所讨论的粒子. [提示: 证明直线  $x = c(t - c/g)$  是双曲线  $(x + c^2/g)^2 - c^2 t^2 = c^4/g^2$  的渐近线.]

4.12 考虑三个惯性系  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$  和  $\Sigma''$ . 设  $\Sigma'$  以匀速  $v$  沿  $\Sigma$  的  $x$  轴运动, 而  $\Sigma''$  以匀速  $v'$  沿  $\Sigma'$  的  $y'$  轴运动. 设  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$  和  $\Sigma''$  的原点在  $t = t' = t'' = 0$  时重合. 证明通过  $\Sigma$  和  $\Sigma''$  原点的直线与  $\Sigma$  和  $\Sigma''$  的  $x$  和  $x''$  轴分别成  $\theta$  和  $\theta''$  角, 其中

$$\tan \theta = \frac{v'(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}{v}$$

及

$$\tan \theta'' = \frac{v'}{v\sqrt{1 - v'^2/c^2}}.$$

如果  $v$  和  $v'$  都  $\ll c$ , 以及  $v' \ll v$ , 证明  $\theta'' - \theta \approx vv'/2c^2$ . [提示: 应用速度变换公式.]

注: 这是汤姆斯 (Thomas) 进动的一个例子. 考虑一电子在围绕原子核的波尔轨道上运动. 按照汤姆斯进动理论,

电子在其中瞬时静止的诸轴相对原子核表现为进动，其角频率 $\omega$ 等于 $-\mathbf{v} \times \mathbf{a}/2c^2$ ，其中 $\mathbf{v}$ 是电子相对核的速度， $\mathbf{a}$ 是加速度。推导上述方程并讨论它在解释光谱时所起的作用。  
(参考: Eisberg R. M., *Fundamentals of Modern Physics*, p. 340.)

习题 4.13. 说明怎样根据以太理论解释下列实验: (a) 阿拉果实验; (b) 光行差; (c) 艾利实验; (d) 马司卡脱-贾明实验; (e) 菲索的关于运动水中光速的实验; (f) 迈克耳逊-莫雷实验; (g) 罗基实验; (h) 特鲁敦-诺贝尔实验。怎样利用狭义相对论解释这些实验?

4.14 液体的运动怎样影响在其中通过的光的速度? 描述测量这一效应的实验。

怎样利用 (a) 以太理论, (b) 狹义相对论、(c) 洛伦兹电子理论, 和 (d) 麦克斯韦方程组解释这些实验结果? [提示: 对于 (c) 和 (d) 部分参考 8.6.4 节。]

4.15 证明在色散媒质中, 菲涅耳拖曳系数等于

$$\left\{ 1 - \frac{1}{n^2} - \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right\},$$

其中 $n$ 是相应于实验室坐标系中该媒质对波长为 $\lambda$ 的光的折射率。

二硫化碳对黄色的钠 $D$ 线的折射率是 1.6295,  $\frac{dn}{d\lambda} = -1.82 \times 10^5$ /米。计算菲涅耳拖曳系数的精确值。可取 $\lambda_D = 5.89 \times 10^{-7}$  米。

4.16 以 300 公里/秒的速度离开地球的星球发出的  $H_\alpha$  线 (6563 埃) 的波长的多普勒移动是多少?

4.17 说明从研究双星的谱线可得到哪种知识, 指出其结果的解释怎样取决于光速不变原理。

4.18 波长为 6000 埃的光源相对实验室以  $c/4$  的速度作圆周运动, 其半径为 10 米. 用图画出距圆心 100 米处的静止观察者所看到的光的颜色随时间的变化.

4.19 假设在钠灯静止的坐标系中, 光各向同性地发出. 如果灯以  $\frac{c}{4}$  的速度相对实验室运动, 计算包含一半发射光子的圆锥的半角. [提示: 考虑在灯于其中静止的参考系中与灯的运动方向成 90 度所发射的光. 计算它在实验室坐标系中的方向.]

4.20 一束光线被射入与  $\Sigma'$  的  $x'$  轴成  $\theta'$  角的一立体角  $d\Omega'$  中. 证明在  $\Sigma$  中—— $\Sigma$  相对  $\Sigma'$  以匀速  $v$  沿负  $x'$  方向运动——光束发射到的立体角  $d\Omega$  由下式给出:

$$d\Omega = \frac{(1 - \beta^2)}{(1 + \beta \cos \theta')^2} d\Omega', \quad \text{其中 } \beta = v/c.$$

证明立体角  $d\Omega$  与  $\Sigma$  的  $x$  轴成  $\theta$  角, 其中  $\theta$  由下式给出:

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta' + \beta}{1 + \beta \cos \theta'}.$$

[注:  $\cos \theta$  可通过将方程 (4.45) 除以 (4.44) 并反演而得到. 我们有

$$\frac{d\Omega}{d\Omega'} = \frac{d(\cos \theta)}{d(\cos \theta')}.$$

如果在  $\Sigma'$  中静止的光源在  $\Sigma'$  中各向同性地发射光子, 即在  $\Sigma'$  中每单位立体角光子的数目不依赖于  $\Sigma'$  中的  $\theta'$ , 则在  $\Sigma$  中每单位立体角的数目正比于  $\left(\frac{d\Omega'}{d\Omega}\right)$ . 在  $\Sigma$  中在光源运动的向前方向有较多的光子, 而在相反方向有较少的光子. 在频率上也存在多普勒移动.]

4.21 当激发态的  $^{37}\text{Fe}$  核衰变时, 它们有时发射能量为 14.4 千电子伏(相应频率为  $3.46 \times 10^{18}$  周/秒) 的光子. 如果

$^{57}\text{Fe}$  核当它经由 14.4 千电子伏能级衰变时, 以  $c/5$  的速度运动, (a) 计算在实验室坐标系中与核运动方向成  $0^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$  角的发射频率; (b) 通过光子来考虑辐射, 计算在实验室坐标系中每个角度的单位立体弧度中光子的相对数目。[提示: 对于 (a) 部分利用方程 (4.47)。对于 (b) 部分假设在衰变核静止的坐标系中辐射是各向同性的, 并利用在习题 4.20 中导出的公式的逆式。]

4.22 波长 6000 埃的光垂直入射到镜子上, 镜子以  $3 \times 10^7$  米/秒的速度在入射光的方向后退。(a) 计算反射光波长的变化。

如果光与镜面法线成 45 度角入射, 计算 (b) 波长的变化; (c) 反射角。

4.23 一个钠光源以  $0.95c$  的速度相对实验室运动。讨论当光源经过观察者时, 光源颜色和强度如何变化(由在实验室中静止的观察者观察)。(参考: 4.4.9 节和威斯可夫<sup>[7]</sup>的文章。)

4.24 一个 100 厘米长的“刚性”棒在桌面上纵向运动。在其路径上有一个 100 厘米宽的洞。假设棒相对桌子的洛伦兹因子为 10。对于与棒一起运动的观察者, 洞好像仅有 10 厘米宽, “刚性”的棒应可越过洞去。但是对于在桌上静止的观察者, 棒好像仅有 10 厘米长, 在通过 100 厘米的洞时, 它在重力作用下一定要落下去, 因而运动被阻止。哪—个观点是正确的? (这个例子取自林德勒的《狭义相对论》。这类问题的讨论, 参考林德勒<sup>[8]</sup>和肖<sup>[9]</sup>。)

## 第五章 相对论力学

### 5.1 引言

当坐标和时间按洛伦兹变换变化时，牛顿力学定律不遵守相对性原理，因而要使力学纳入狭义相对论，就必须修正这些定律。按照刘易斯和托尔曼<sup>[1]</sup>的途径，我们来考虑两球碰撞的假想实验。它说明为了使力学理论与狭义相对论变换式相一致，在此特殊情况下，应该如何修正牛顿力学。然后将结果推广到更一般情况。我们不直接从牛顿定律开始，而将从动量守恒定律开始。在牛顿力学中，动量守恒定律是从牛顿第二和第三运动定律直接导出的，正如1.3节所述。如果在一个惯性系（比如说  $\Sigma$ ）中动量守恒定律成立，则有

$$\sum mu_x = C_1; \quad \sum mu_y = C_2; \quad \sum mu_z = C_3, \quad (5.1)$$

其中  $C_1$ ,  $C_2$  和  $C_3$  是常数。如果假设运动粒子的质量  $m$  是不变量，那么，利用牛顿力学的速度变换 [方程 (1.10)–(1.12)]，在  $\Sigma'$  中，有

$$\sum m(u'_x + v) = C_1,$$

即

$$\sum mu'_x = C_1 - v \sum m = \text{常数, 因为 } v \text{ 和 } m \text{ 是常数,}$$

$$\sum mu'_y = \sum mu_y = C_2,$$

$$\sum mu'_z = \sum mu_z = C_3.$$

因此，在牛顿力学中，如果在一个惯性系内动量守恒定律成立，则在所有惯性系内皆成立。另一方面，如果假设粒子质量是不变量，并将狭义相对论的速度变换式代入方程 (5.1)，则

得到

$$\sum m u_x = \sum m \frac{(u'_x + v)}{(1 + vu'_x/C^2)} = C_1.$$

如果假设  $m$  是不变量, 此方程不能改写成  $\sum m u'_x =$  常数的形式。因此, 在狭义相对论中必须重新定义物体的惯性质量, 动量守恒定律才能在所有惯性系中成立。本书只有在阐述了适当的理论之后, 才能给出诸如质量之类的各种量的精确定义。现在我们只需了解, 当所有粒子的速度远小于光速时, 这些量的定义近似地等于牛顿力学的定义, 但是当粒子具有高速时, 它们与经典定义的差别可能变成非常重要。如果当坐标和时间按洛伦兹变换变化时, 新的力学定律遵守相对性原理, 那么只要长度、时间、速度和加速度在新理论中出现, 它们就必须按照第三章和第四章中建立的方程来定义和变换。

## 5.2 运动粒子的质量

我们将假设在相对论力学中, 动量守恒定律是成立的<sup>1)</sup>。还将假设物体的质量不是绝对的, 而可以因物体的速度不同而变化。

我们将分别从两惯性系  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  来考虑两个弹性球的碰撞,  $\Sigma'$  相对  $\Sigma$  以匀速  $v$  沿公共  $x$  轴运动。假设球充分小, 以致可以认为碰撞在某一时刻发生在空间某一点。设静止在  $\Sigma$  中的观察者  $A$  和静止在  $\Sigma'$  中的观察者  $B$  有两个完全相似的

---

1) 如果准备假设在两弹性球的碰撞过程中, 动量和质量两者都守恒, 那么可以用较简单的方法导出质量随速度的变化式, 如附录 3 所给出。本节(5.2 节)采用的方法使我们能把能量(质量)守恒定律的讨论推迟到 5.6 节。5.2 节中采用的途径是遵循 M. 波恩著《爱因斯坦的相对论》(*Einstein's Theory of Relativity*) (第一版) 中给出的途径。

小球，分别叫做球 1 和球 2。设球 1 相对  $\Sigma$  具有的质量与球 2 在相同条件下相对  $\Sigma'$  具有的质量相同。设每个观察者都沿自己测得的垂直  $x$  轴的方向朝  $x$  轴抛出他的小球，并设两球抛出时刻使得飞行中碰撞是对称的，因而碰撞时两球中心的联线垂直于  $x$  轴，如图 5.1 所示。设观察者 A 相对  $\Sigma$  以速度  $U$  抛出球 1，观察者 B 相对  $\Sigma'$  以速度  $U$  抛出球 2，如图 5.1. 所

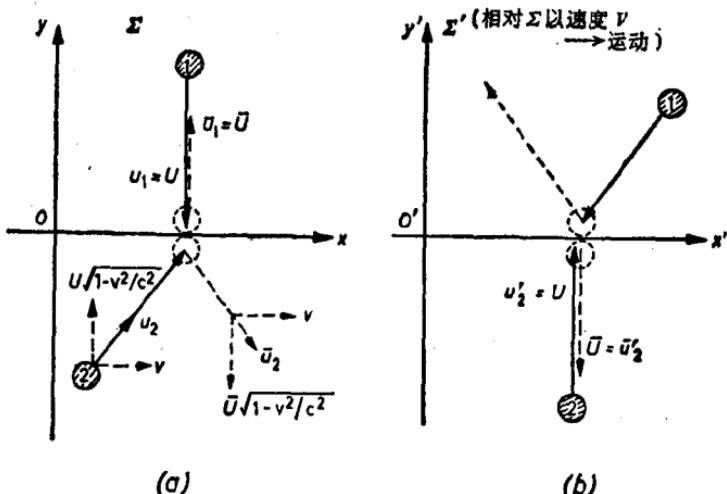


图 5.1 从两惯性系  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  观察到的二小球碰撞分别如 (a) 和 (b) 所示。假设球 1 相对  $\Sigma$  具有的质量和速度与球 2 相对  $\Sigma'$  的相同，但是球 1 在碰撞前相对  $\Sigma$  沿负  $y$  方向运动，而球 2 相对  $\Sigma'$  沿正  $y'$  方向运动。

示。碰撞前球 1 在惯性系  $\Sigma$  中的速度  $\mathbf{u}_1$  的诸分量是

$$(u_1)_x = 0; (u_1)_y = -U; (u_1)_z = 0. \quad (5.2)$$

碰撞前球 1 的速度总值等于

$$u_1 = U. \quad (5.3)$$

类似地，碰撞前球 2 在  $\Sigma'$  中的速度分量为

$$(u'_2)_x = 0; (u'_2)_y = U; (u'_2)_z = 0. \quad (5.4)$$

利用狭义相对论速度变换式 [方程(4.5), (4.6)和(4.7)]，可以

求出碰撞前球 2 在  $\Sigma$  中的速度。我们有

$$(u_2)_x = v. \quad (5.5)$$

$$(u_2)_y = U\sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (5.6)$$

$$(u_2)_z = 0, \quad (5.7)$$

以及

$$u_2^2 = v^2 + U^2(1 - v^2/c^2). \quad (5.8)$$

设碰撞前球 1 和球 2 在  $\Sigma$  中的质量分别为  $m_1$  和  $m_2$ 。碰撞前两球在  $\Sigma$  中的总动量的分量为

$$\sum p_x = m_2 v. \quad (5.9)$$

$$\sum p_y = -m_1 U + m_2 U\sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (5.10)$$

$$\sum p_z = 0. \quad (5.11)$$

如果碰撞过程中，两球的中心联线垂直于  $x$  轴，则球 1 将沿  $x$  轴的垂线被弹回。设球 1 在  $\Sigma$  中被弹回的速度为  $\bar{U}$ ，即令

$$\bar{u}_1 = \bar{U}. \quad (5.12)$$

由于对称关系， $\Sigma'$  中的观察者  $B$  看到球 2 相对  $\Sigma'$  的运动，必然与观察者  $A$  看到球 1 相对  $\Sigma$  的运动是相同的。因此，在  $\Sigma'$  中碰撞后有

$$(\bar{u}'_2)_x = 0; (\bar{u}'_2)_y = -\bar{U}; (\bar{u}'_2)_z = 0. \quad (5.13)$$

由相对论速度变换公式，对于球 2，在  $\Sigma$  中碰撞后有

$$(\bar{u}_2)_x = v; (\bar{u}_2)_y = -\bar{U}\sqrt{1 - v^2/c^2}; (\bar{u}_2)_z = 0, \quad (5.14)$$

以及

$$\bar{u}_2^2 = v^2 + \bar{U}^2(1 - v^2/c^2). \quad (5.15)$$

设碰撞后相对于  $\Sigma$  球 1 和球 2 的质量分别是  $\bar{m}_1$  和  $\bar{m}_2$ 。碰撞后在  $\Sigma$  中的总动量为

$$\sum p_x = \bar{m}_2 v, \quad (5.16)$$

$$\sum p_y = \bar{m}_1 \bar{U} - \bar{m}_2 \bar{U}\sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (5.17)$$

$$\sum p_z = 0. \quad (5.18)$$

如果  $\Sigma$  中动量守恒定律成立，那么令碰撞前后总动量的  $x$  分

量相等，就有

$$\sum p_x = m_2 v = \bar{m}_2 v.$$

因此，

$$m_2 = \bar{m}_2. \quad (5.19)$$

令碰撞前后  $\Sigma$  中总动量的  $y$  分量相等，则有

$$\begin{aligned} \sum p_y &= -m_1 U + m_2 U \sqrt{1 - v^2/c^2} \\ &= \bar{m}_1 \bar{U} - \bar{m}_2 \bar{U} \sqrt{1 - v^2/c^2}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

如果假设两球的质量是不变量，方程(5.20)不能满足，因为如果  $m_1 = m_2 = \bar{m}_1 = \bar{m}_2$ ，按照方程(5.20)我们有

$$(U + \bar{U})(1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}) = 0.$$

此关系式不能满足，因为已假设  $U$  和  $v$  不为零。因此，如果动量守恒定律在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中都成立，必须假设粒子质量不是不变量。我们将假设，粒子的质量只依赖于它的速度。如果这样，关系式  $m_2 = \bar{m}_2$  [方程(5.19)]意味着球 2 在  $\Sigma$  中碰撞前后的总速度值是相同的，即是

$$u_2 = \bar{u}_2.$$

由方程(5.8)和(5.15)，于是得到

$$v^2 + U^2(1 - v^2/c^2) = v^2 + \bar{U}^2(1 - v^2/c^2). \quad (5.21)$$

因此，

$$U = \bar{U} (= u_1 = \bar{u}_2). \quad (5.22)$$

于是， $U$  与  $\bar{U}$  必然数值相等，但方向相反。因为球 1 在  $\Sigma$  中碰撞前的速度等于  $U$ ，而碰撞后等于  $\bar{U}$ 。由方程(5.22)得出，在  $\Sigma$  中球 1 碰撞前后具有相同的速度。如果粒子的质量只依赖于其速度，这意味着

$$m_1 = \bar{m}_1. \quad (5.23)$$

将方程(5.19)，(5.22)和(5.23)代入方程(5.20)，得到

$$-m_1 U + m_2 U \sqrt{1 - v^2/c^2} = m_1 U - m_2 U \sqrt{1 - v^2/c^2},$$

或者

$$m_1 = m_2 \sqrt{1 - v^2/c^2},$$

即是

$$m_2 = \frac{m_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (5.24)$$

现在由方程(4.15), 对于在  $\Sigma$  中速度为  $u$ , 在  $\Sigma'$  中度速为  $u'$  的粒子(它在  $\Sigma'$  中具有  $x'$  分量  $u'_x$ ), 则有

$$\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{(1 + vu'_x/c^2)}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)(1 - u'^2/c^2)}}. \quad (4.15)$$

对于球 2, 在  $\Sigma$  中有  $u = u_2$ , 而对于同一个粒子, 在  $\Sigma'$  中由方程(5.4)和(5.22), 有  $u' = u'_2 = U = u_1$  及  $u'_x = 0$ . 代入方程(4.15), 得到

$$\frac{1}{\sqrt{1 - u_2^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - u_1^2/c^2}},$$

因此,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \sqrt{\frac{(1 - u_1^2/c^2)}{(1 - u_2^2/c^2)}}. \quad (5.25)$$

代入方程(5.24), 得

$$m_2 = \frac{m_1 \sqrt{1 - u_1^2/c^2}}{\sqrt{1 - u_2^2/c^2}},$$

即是

$$m_2 \sqrt{1 - u_2^2/c^2} = m_1 \sqrt{1 - u_1^2/c^2}. \quad (5.26)$$

如果碰撞过程中在  $\Sigma$  内动量守恒, 则上述关系必须满足. 如果当  $u_1 = 0$  时  $m_1 = m_0$  及当  $u_2 = 0$  时  $m_2 = m_0$ , 那么假若

$$m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u_1^2/c^2}} \quad \text{及} \quad m_2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u_2^2/c^2}},$$

方程(5.26)则始终满足, 因为此时方程(5.26)简化为  $m_0 = m_0$ . 因为对于  $\Sigma$  和  $\Sigma'$ , 碰撞具有相同的性质, 但是由于粒子作用

的互换，在 $\Sigma'$ 中动量也是守恒的。因此，动量在 $\Sigma$ 和 $\Sigma'$ 中都可以守恒，假如运动粒子的质量重新定义，使得当粒子以速度u相对 $\Sigma$ 运动时，其质量m等于

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (5.27)$$

其中 $m_0$ 是在粒子静止的惯性系中测出的粒子质量。对于 $\Sigma'$ ，粒子的质量必须重新定义为 $m_0(1 - u'^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$ ，其中u'是粒子相对于 $\Sigma'$ 的速度。量 $m_0$ 叫作粒子的静止质量或者原质量。方程(5.27)中的量m叫作相对论质量。由方程(5.27)可见粒子的质量是一个标量。上述理论只涉及粒子的惯性质量。必须强调，u是粒子相对 $\Sigma$ 的速度，可把 $\Sigma$ 取做实验室系统。速度u与坐标系变化无任何关系。力学定律中出现的量必须按照狭义相对论变换式变换，按照这一要求，就必须重新定义实验室系统中运动粒子的质量。我们将假设，在一般情况下，运动粒子的质量由方程(5.27)定义。就是假设，粒子的质量不依赖于粒子相对实验室的加速度。质量的这一重新定义反过来又导致用一组新的定律取代牛顿运动定律。这些新定律将用在实验室系统中，在5.4节中将看到，新理论的预言与实验室中做的实验符合得非常好。

在相对论力学中，以速度u运动的粒子动量由下式定义：

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u} = \frac{m_0\mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (5.28)$$

其中p是动量， $m_0$ 是粒子的静止质量，m是相对论质量。动量具有分量

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{m_0 u_x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; & p_y &= \frac{m_0 u_y}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; \\ p_z &= \frac{m_0 u_z}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

注意,动量分量分母中出现的  $u$  是总速度.

我们将利用方程(5.27)和(5.28),先讲述单粒子的动力学;然后讨论实验上对于质量随速度变化的验证.

### 5.3 单粒子的相对论动力学

#### 5.3.1 力的定义

在牛顿力学中,作用在粒子上的力可以定义为,在这力的影响下粒子动量的变化率.因为在牛顿力学中,假设粒子的惯性质量是不变量,所以可写成:

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{u}) = m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = m\mathbf{a}. \quad (5.30)$$

因此,在牛顿力学中,作用在粒子上的力还可以定义为粒子的质量与该力所引起的加速度的乘积.如果粒子的惯性质量随速度变化,如方程(5.27)所给出,则

$$\mathbf{f} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{u}) = m \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{u} \frac{dm}{dt}. \quad (5.31)$$

除了等于质量乘加速度的一项而外,方程(5.31)中还存在等于  $\mathbf{u} \frac{dm}{dt}$  的项.在狭义相对论中,力定义为动量的变化率一般不等同于将力定义为质量与加速度的乘积.在狭义相对论中,选用动量变化率为力的定义.这样选用是否合适当然决定于所得出的理论预言和实验是否符合.方程(5.31)中的附加项  $\mathbf{u}(dm/dt)$  产生于质量随速度的变化.如果粒子的加速度引起粒子速度的变化,则粒子的质量具有相应的变化.令  $\delta m$  表示质量的这一变化.与质量的这一变化相联系,粒子在运动方向上必存在着等于  $\delta m\mathbf{u}$  的动量变化.为了在  $\delta t$  时间内产生这一变化,必须存在等于  $\delta m\mathbf{u}/\delta t$  的力.

### 5.3.2 功与动能

像牛顿力学一样,对粒子所做的功,将定义为作用在粒子上的力与粒子在力作用方向上移动的距离的乘积,即在位移  $dl$  内所做的功将定义为  $f$  和  $dl$  的标积,亦即

$$dW = f \cdot dl. \quad (5.32)$$

如果假设此全部功都用于增加粒子的动能,则有

$$dT = f \cdot dl, \quad (5.33)$$

其中用符号  $T$  表示粒子的动能。动能的增加率为

$$\frac{dT}{dt} = f \cdot \frac{dl}{dt} = f \cdot u, \quad (5.34)$$

其中  $u$  是粒子的速度。现在根据定义,

$$f = \frac{d}{dt} (mu), \quad \text{其中 } m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

将  $f$  代入方程(5.34),

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \frac{d}{dt} (mu) \cdot u \\ &= m \frac{du}{dt} \cdot u + \frac{dm}{dt} u \cdot u. \end{aligned} \quad (5.35)$$

现在

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = u^2.$$

对时间微分,有

$$2u_x \frac{du_x}{dt} + 2u_y \frac{du_y}{dt} + 2u_z \frac{du_z}{dt} = 2u \frac{du}{dt},$$

即

$$u \cdot \frac{du}{dt} = u \frac{du}{dt}.$$

还有

$$u \cdot u = u^2,$$

及

$$\begin{aligned}\frac{dm}{dt} &= \frac{du}{dt} \frac{dm}{du} = \frac{du}{dt} \frac{d}{du} \left( \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) \\ &= \frac{du}{dt} \frac{m_0 u / c^2}{(1 - u^2/c^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

代入方程(5.35)，

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} u \frac{du}{dt} + m_0 \frac{du}{dt} \frac{u^3/c^2}{(1 - u^2/c^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{m_0 u \frac{du}{dt} (1 - u^2/c^2 + u^2/c^2)}{(1 - u^2/c^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{m_0 u}{(1 - u^2/c^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right].\end{aligned}$$

积分后有

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} + C_1,$$

其中  $C_1$  是积分常数。如果假设粒子速度为零时，其动能为零，则  $C_1$  必然等于  $-m_0 c^2$ 。因此，

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - 1 \right\}. \quad (5.36)$$

或

$$T = mc^2 - m_0 c^2, \quad (5.37)$$

及

$$mc^2 = T + m_0 c^2. \quad (5.38)$$

用二项式定理展开方程(5.36)右边，有

$$\begin{aligned}T &= m_0 c^2 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{u^4}{c^4} + \dots \right\} - m_0 c^2 \\ &= \frac{1}{2} m_0 u^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{u^4}{c^2} + \dots\end{aligned}$$

如果  $u \ll c$ , 则有

$$T \approx \frac{1}{2} m_0 u^2.$$

这与牛顿力学给出的粒子动能公式一致。从方程(5.36)可以看出, 如果  $u$  趋近于  $c$ , 则动能趋于无限大。因此, 按照方程(5.36), 要把粒子加速到光速所需作的功将是无限大。这说明在狭义相对论中, 为什么光速起着粒子极限速度的作用。必须强调, 狹义相对论并没说, 人们不能得到超过真空中光速的速度, 而只是说能量和动量不能以超过真空中光速的速度传播。作为超光速的一个例子, 考虑相互斜交的两把尺, 一把放在另一把之上, 如图 5.2 所示。设两尺间的夹角为  $\theta$ 。设一把尺静止并平行  $x$  轴, 而另一把尺以速度  $u$  沿  $+y$  方向运动, 如图 5.2 所示。两尺的交叉点以等于  $u \cot \theta$  的速度沿负  $x$  方向运动。如果  $u = 0.8c$  及  $\theta = 15$  度, 则  $u \cot \theta$  近似等于  $3c$ 。于是, 两尺的交叉点可以以超过光速的速度运动, 但运动尺的动量和能量在  $+y$  方向永远以小于  $c$  的速度  $u$  传播。大于光速的速度另一个例子是折射率小于 1 的晶体中 X 射线的相速度。波的能量以群速度传播, 它总是小于或等于  $c$ 。在折射率

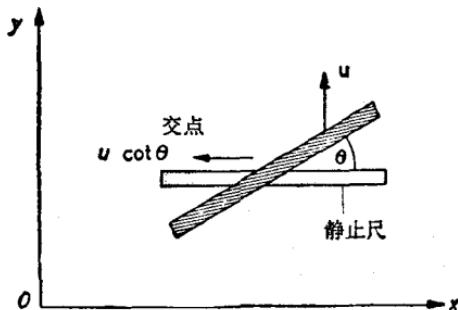


图 5.2 一个尺静止, 而另一个尺以匀速  $u$  沿  $+y$  方向运动。两尺交叉点以速度  $u \cot \theta$  运动, 它可以超过光速, 虽然  $u$  始终小于  $c$ 。

$n > 1$  的媒质中，光速等于  $c/n$ 。超过它的粒子速度是可能的，并已观察到过。传输能量和动量的极限速度是真空中的光速。

方程(5.37)可以写为

$$T = mc^2 - m_0c^2 = (m - m_0)c^2, \quad (5.39)$$

这表明伴随着粒子动能的变化，其惯性质量有变化。

引进由下式定义的量  $E$  是方便的：

$$E = T + m_0c^2 = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (5.40)$$

于是， $E$  等于粒子动能与量  $m_0c^2$  之和，量  $m_0c^2$  一般叫做自由粒子的静质量能。5.8 节中将阐述静质量能与其它形式能量的相互转化的可能性。量  $E$  叫做自由粒子的总能，或者有时简称为粒子能量。总能  $E$  是标量。符号  $\mathbf{E}$  还用于表示电场强度矢量。因为本书中符号  $E$  表示哪个量始终是明显的，所以不会引起混淆。有些作者也采用符号  $W$  表示粒子的总能。

现在由方程(5.28)，

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u} = \frac{m_0\mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

因此，

$$\begin{aligned} p^2c^2 + m_0^2c^4 &= \frac{m_0^2u^2c^2}{(1 - u^2/c^2)} + m_0^2c^4 \\ &= \frac{m_0^2u^2c^2 + m_0^2c^4 - m_0^2u^2c^2}{(1 - u^2/c^2)} \\ &= \frac{m_0^2c^4}{(1 - u^2/c^2)} = E^2, \end{aligned}$$

即是

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4, \quad (5.41)$$

或

$$E = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}. \quad (5.42)$$

方程(5.42)是一个重要的关系式，在高能核物理中，当动量已知时，常用它计算粒子总能，反之亦然。

现在

$$T = E - m_0 c^2,$$

因此

$$T = c \sqrt{m_0^2 c^2 + p^2} - m_0 c^2. \quad (5.43)$$

方程(5.43)将粒子的动能和动量联系起来；此关系式也广泛地用于高能核物理中。

将方程(5.42)对  $p$  微分，

$$\frac{dE}{dp} = \frac{pc}{\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}} = \frac{pc^2}{c \sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}} = \frac{pc^2}{E}.$$

但是

$$E = mc^2 \text{ 及 } \mathbf{p} = m\mathbf{u}.$$

因此

$$\frac{dE}{dp} = u. \quad (5.44)$$

除了粒子的速度可与光速比拟的情况外，牛顿定律一般是充分精确的。唯一可得到的具有这样高速度的粒子是高能的原子粒子，如质子、电子、介子等等。单粒子相对论动力学的主要应用是此类粒子在电磁场中的运动。相对论电磁理论中假设，当没有辐射时，以速度  $\mathbf{u}$  在强度为  $\mathbf{E}$  的电场和强度为  $\mathbf{B}$  的磁场中运动的电荷  $q$  所受的力由洛伦兹力给出：

$$\mathbf{f} = q\mathbf{E} + q\mathbf{u} \times \mathbf{B}. \quad (5.45)$$

假设电量  $q$  值与粒子的速度无关。这就是3.3节中讨论过的电荷守恒原理。 $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$  的值是根据电荷及电流分布，利用麦克斯韦方程组计算出来的。方程(5.45)对于单粒子动力学的应用将在5.4节中讨论。

一般地

$$\mathbf{f} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{u}) = m \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{u} \cdot \frac{dm}{dt}. \quad (5.46)$$

由于

$$m = E/c^2,$$

所以

$$\frac{dm}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{dE}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{d(T + m_0 c^2)}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{dT}{dt}.$$

但是,由方程(5.34),

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u},$$

因此,

$$\frac{dm}{dt} = \frac{1}{c^2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}. \quad (5.47)$$

代入方程(5.46),

$$\mathbf{f} = m \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{\mathbf{u}(\mathbf{f} \cdot \mathbf{u})}{c^2},$$

或

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\mathbf{f}}{m} - \frac{\mathbf{u}}{mc^2} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}). \quad (5.48)$$

通常加速度  $\mathbf{a}$  和力  $\mathbf{f}$  不是平行的,因为方程(5.48)右边第二项沿  $\mathbf{u}$  方向。考虑  $\mathbf{f}$  和  $\mathbf{a}$  平行的两种简单情况。首先,如果  $\mathbf{f}$  平行于  $\mathbf{u}$ ,则  $\mathbf{a}$  平行于  $\mathbf{f}$  和  $\mathbf{u}$ ,因而粒子作直线运动。这类运动的例子是,当不存在磁场以及带电粒子的初速度为零时带电粒子在均匀电场中的运动,或者沿外加电场方向的运动。当  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{a}$  平行时,则有

$$f = m \frac{du}{dt} + u \frac{dm}{dt},$$

即

$$f = \frac{m_0 \frac{du}{dt}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} + u \frac{d}{du} \left( \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) \frac{du}{dt}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{m_0 \frac{du}{dt}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} + \frac{m_0(u^2/c^2)du/dt}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{m_0 \frac{du}{dt}}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}} [1 - u^2/c^2 + u^2/c^2] \\
 &= \frac{m_0 a}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}}. \tag{5.49}
 \end{aligned}$$

在数学形式上, 这与经典表达式  $\mathbf{f} = m\mathbf{a}$  相似。由于这个原因, 量  $m_0/(1 - u^2/c^2)^{1/2}$  有时叫做纵向质量。这种简化仅在此特殊情况下成立。我们将始终把作用在粒子上的力表示为

$$\mathbf{f} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{u}).$$

其次, 如果  $\mathbf{f}$  垂直于  $\mathbf{u}$ , 则  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}$  为零, 方程(5.48)化为

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{f}}{m} = \frac{\mathbf{f}}{m_0} \sqrt{1 - u^2/c^2}. \tag{5.50}$$

这种运动类型的例子是带电粒子在磁场中的运动, 此时

$$\mathbf{f} = q\mathbf{u} \times \mathbf{B}.$$

方程(5.50)的数学形式与经典方程  $\mathbf{f} = m\mathbf{a}$  相同。量  $m_0/(1 - u^2/c^2)^{1/2}$  有时叫做横向质量。

现在将本节讲述的理论用于带电粒子在电场和磁场中的运动。

## 5.4 单粒子相对论动力学的一些应用

### 5.4.1 在电场中的运动(无磁场)

假设在一个大的平行板电容器两板之间存在一个沿正  $x$  方向强度为  $E$  伏/米的均匀电场, 如果电容器充电至  $V_0$  伏电

位差，则电场为

$$E = E_x = V_0/d, \quad (5.51)$$

其中  $d$  是以米为单位的两板间的距离。如果假设一粒子上的总电荷值与电荷的速度无关，那么作用在电场  $\mathbf{E}$  中  $+q$  库仑电荷上的电力为

$$\mathbf{f} = q\mathbf{E} \text{ 牛顿},$$

不论电荷速度如何。一般有

$$\mathbf{f} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) = q\mathbf{E}.$$

在 5.3 节中已证明，如果电荷的初速度沿电场方向，那么粒子的加速度也沿电场方向，因而电荷沿电场方向作直线运动；在现在情况下，假设电场沿正  $x$  方向。我们有

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{u_x}{\sqrt{1 - u_x^2/c^2}} \right) = q \frac{E}{m_0}.$$

积分后，

$$\frac{u_x}{\sqrt{1 - u_x^2/c^2}} = \frac{qE}{m_0} t + C_1,$$

其中  $C_1$  是积分常数。如果假设  $t = 0$  时  $u_x = 0$ ，则  $C_1 = 0$ 。  
重新整理后有

$$u_x^2 = \left( 1 - \frac{u_x^2}{c^2} \right) \frac{q^2 E^2 t^2}{m_0^2},$$

即是

$$u_x^2 = \frac{q^2 E^2 t^2 / m_0^2}{[1 + q^2 E^2 t^2 / m_0^2 c^2]},$$

或

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{qEt}{m_0 [1 + q^2 E^2 t^2 / m_0^2 c^2]^{1/2}}. \quad (5.52)$$

方程(5.52)给出在任何时刻  $t$  的电荷速度。将方程(5.52)积

分,有

$$x = \int \frac{qE t dt}{m_0 [1 + q^2 E^2 t^2 / m_0^2 c^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{m_0 c^2}{qE} \left[ 1 + \frac{q^2 E^2 t^2}{m_0^2 c^2} \right]^{\frac{1}{2}} + C_2,$$

其中  $C_2$  是积分常数。如果  $t = 0$  时  $x = 0$ , 则

$$0 = \frac{m_0 c^2}{qE} + C_2 \quad \text{或者} \quad C_2 = -\frac{m_0 c^2}{qE}.$$

因此,

$$x = \frac{m_0 c^2}{qE} \left\{ \left[ 1 + \frac{q^2 E^2 t^2}{m_0^2 c^2} \right]^{\frac{1}{2}} - 1 \right\}. \quad (5.53)$$

此式给出在时间  $t$  内电荷通过的距离。方程(5.53)可以再写成

$$\left( x + \frac{m_0 c^2}{qE} \right)^2 - c^2 t^2 = \frac{m_0^2 c^4}{q^2 E^2}. \quad (5.54)$$

此为一双曲线方程;由于这个原因,这种类型的运动有时叫做双曲线运动,  $x$  对  $t$  的坐标图是一双曲线。

如果  $qEt/m_0$  远小于  $c$ , 则方程(5.52)变为

$$u_x = \left( \frac{qE}{m_0} \right) t.$$

现在  $qE/m_0$  是非相对论性的加速度值,所以,当加速度和时间都小时,方程(5.52)简化为经典情况。用二项式定理展开方程(5.53),有

$$x = \frac{m_0 c^2}{qE} \left[ 1 + \frac{1}{2} q^2 \frac{E^2 t^2}{m_0^2 c^2} + \cdots - 1 \right].$$

如果  $qEt/m_0 \ll c$ , 此式简化为

$$x = \frac{1}{2} \left( \frac{qE}{m_0} \right) t^2.$$

这又与非相对论性的值符合。

电场对电荷所作的总功为

$$\text{所作功} = \int F_x dx = \int qE_x dx.$$

但是  $E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$ , 其中  $\phi$  是静电势. 因此, 对电荷所作功等  
于

$$-q \int_0^x \frac{\partial \phi}{\partial x} dx = -q \int_{\phi=V_0}^{\phi=0} d\phi = qV_0 \text{ 焦耳},$$

其中  $V_0$  是电荷所通过的电势差. 对电荷所作的功等于电荷  
动能的增加, 于是有

$$T = qV_0. \quad (5.55)$$

#### 5.4.2 在磁场中的运动(无电场)

以速度  $\mathbf{u}$  米/秒在强度为  $\mathbf{B}$  韦伯/米<sup>2</sup> 的磁场中运动的带  
电为  $q$  库仑的粒子所受的力等于

$$\mathbf{f} = qu \times \mathbf{B} \text{ 牛顿.}$$

此力垂直于  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{B}$ ; 因此,  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}$  等于零, 于是方程(5.48)

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\mathbf{f}}{m} - \frac{\mathbf{u}}{mc^2} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) \quad (5.48)$$

化为

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\mathbf{f}}{m},$$

或

$$\mathbf{f} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = qu \times \mathbf{B}. \quad (5.56)$$

在这种情况下, 加速度与力同方向. 除了  $m_0$  换成了  $m_0/(1 - u^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$  外, 运动方程与经典情况完全相同.

我们将首先考虑均匀磁场中的运动. 设粒子的初速度垂  
直于磁场方向, 如图 5.3(a) 和 (b) 所示. 设磁场沿负  $z$  方向.  
加速度始终垂直于  $\mathbf{u}$ , 于是粒子的速度值为常数. 在均匀磁  
场中, 加速度等于  $quB/m$ , 并且为常数, 于是带电粒子作圆  
运动, 如图 5.3(a) 和 (b) 所示. 如果圆运动的半径是  $\rho$ , 则向

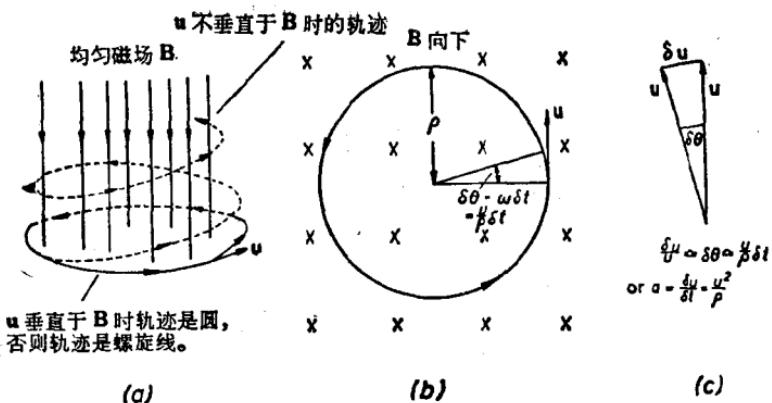


图 5.3 带正电的粒子在均匀磁场中的运动路径是一个圆, 假若粒子的初速度垂直于磁场  $\mathbf{B}$ . 当  $\mathbf{u}$  不垂直于  $\mathbf{B}$  时, 路径是螺旋线.

心加速度等于  $u^2/\rho$ , 如图 5.3(a) 和 (b) 所示.

代入方程(5.56), 有

$$f = m \frac{du}{dt} = \frac{mu^2}{\rho} = quB,$$

或

$$mu = q(B\rho) = p. \quad (5.57)$$

圆运动的半径正比于带电粒子的动量, 动量越大, 半径越大. 考虑一束具有各种动量和能量的电子, 其运动方向一致, 例如从放射源沿正  $y$  方向发射的  $\beta$  射线, 如图 5.4 所示. 设均匀磁场由读者指向书后. 电子沿半径等于  $p/Be$  的各个圆轨道运动, 其中  $e$  是电子的电荷. 不同动量的电子就在空间中分开了, 如果如图 5.4 所示, 用照像底片检验它们, 则可以估计出放射源发射的  $\beta$  射线的能量和动量谱. 这就是早期  $\beta$  射线摄谱仪的基本原理. 采用一系列狭缝, 并通过适当设计磁场, 使在图 5.4 中垂直于书面方向聚焦, 可以改进半圆形  $\beta$  射线摄谱仪的性能. 感兴趣的读者可参阅 Siegbahn<sup>[2]</sup> 的文章. 因为对于均匀磁场,  $p = q(B\rho)$ , 所以, 借助等效的  $B\rho$  值测量  $\beta$

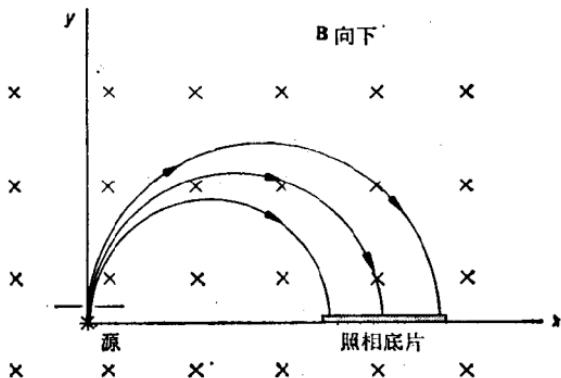


图 5.4 在均匀磁场中, 动量不同的  $\beta$  射线(带负电)的不同轨道, 轨道的直径正比于粒子的动量. 按此方式, 动量不同的  $\beta$  射线就在空间上分开了.

射线的动量是方便的. 这些将在 5.4.4 节中讨论. 如果带电粒子在均匀磁场  $B$  中作半径为  $\rho$  的圆运动, 则运行一整周的时间等于

$$2\pi\rho/u = \frac{2\pi\rho m}{p} = \frac{2\pi\rho m}{qB\rho} = \frac{2\pi m}{qB}. \quad (5.58)$$

如果粒子质量随速度的变化可以忽略, 此时间就与粒子的速度无关. 按照方程 (5.57), 轨道的半径正比于粒子的动量.

如果带电粒子的速度不垂直于均匀磁场, 那么粒子的速度可以分解为两个分量, 一个分量  $\mathbf{u}_{||}$  平行于磁场, 另一个分量  $\mathbf{u}_{\perp}$  垂直于磁场. 如果不存在电场, 则  $\mathbf{u}_{||}$  的大小和方向都不变. 必须将此速度与垂直于磁场的圆运动相加. 结果, 运动是一条螺旋线.  $\beta$  射线在均匀磁场中的螺旋运动曾经用于设计透镜型  $\beta$  摄谱仪(见 Siegbahn<sup>[2]</sup>). 借助狭缝和挡阻系统以及适当设计磁场, 也可以改进这种类型  $\beta$  摄谱仪的性能.

离子在非均匀磁场中的运动也可以由下述方程计算出

来：

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) = q \mathbf{u} \times \mathbf{B}. \quad (5.59)$$

当磁场非均匀时,尤其当电场和磁场都存在时,利用拉格朗日方程,并从相对论性拉格朗日函数着手,一般更方便些。此方法将在第九章中讨论。

#### 5.4.3 质量随速度变化的实验验证

1897 年汤姆孙利用阴极射线,测量了电子的  $e/m$  比值。1901 年考夫曼利用抛物线法定性地证明了  $e/m$  值依赖于  $\beta$  射线的速度。1908 年布切勒<sup>[3]</sup>更精确地测量了  $\beta$  射线的  $e/m$ 。布切勒的实验原理如图 5.5 所示;由镭源发射出的  $\beta$  射线通过大电容器的两极板之间。电容器极板的直径远大于两板间的距离。整个仪器放在真空中。电容器极板所加电势差所产生的电场沿负  $y$  方向,如图 5.5 所示。作用在负电子上的电力等于  $Ee$ ,并沿正  $y$  方向。所加磁场沿负  $z$  方向,即是图 5.5 中由读者垂直指向书后。作用在沿正  $x$  轴方向运动的电子上的磁

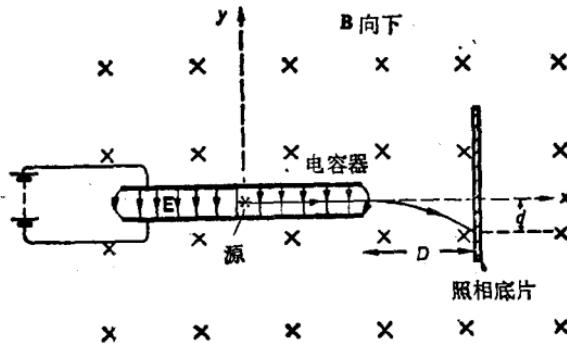


图 5.5 布切勒实验简图。电容器起速度选择器的作用。 $\beta$  射线从电容器两极板间穿出后,在磁场中偏转并由照像底片检测出来。

力等于  $e u B$ , 并沿负  $y$  方向。如果作用在此电子上的电力和磁力不等, 则开始沿正  $x$  轴运动的电子, 不是向正  $y$  就是向负  $y$  方向偏转, 因而不能从电容器两极板间穿过。如果电力和磁力正好相等, 则电子不偏转。仅在这种情况下, 如果电子开始沿  $x$  轴运动, 电子才能从电容器两极板间穿过。对这种情况,

$$e u B = e E,$$

或

$$u = E/B. \quad (5.60)$$

在布切勒的实验中, 电容器起速度选择器的作用。电容器外没有电场, 于是从速度选择器逃出的电子, 在打到照像底板上之前, 在磁场中沿圆轨道运动, 如图 5.5 所示。如果  $\rho$  是电容器极板外的圆形轨道的半径, 则

$$d(2\rho - d) = D^2,$$

或

$$\rho = \frac{D^2 + d^2}{2d}, \quad (5.61)$$

其中量  $d$  和  $D$  如图 5.5 所示。由方程(5.57), 对于磁场中的运动, 有

$$mu = qB\rho, \quad \text{或} \quad \rho = \frac{mu}{Be}.$$

于是

$$\frac{D^2 + d^2}{2d} = \frac{mu}{Be}.$$

但由方程(5.60), 有  $u = E/B$ , 于是

$$\frac{e}{m} = \frac{2d}{(D^2 + d^2)} \frac{E}{B^2}. \quad (5.62)$$

如果所有长度全用米,  $E$  用伏/米,  $B$  用韦伯/米<sup>2</sup> 为单位<sup>[2]</sup>, 则  $e/m$  的单位为库仑/千克。布切勒将电磁场倒向, 在照像底

片上得到了第二个光点。布切勒取  $d$  等于两光点间距离的一半。对不同速度的电子重复实验。表 5.1 列出布切勒得到的

表 5.1  $\beta$  射线  $e/m$  的布切勒结果

$u/c$	$e/m = \frac{e\sqrt{1-u^2/c^2}}{m_0}$	$e/m_0$
0.3171	$1.661 \times 10^{11}$ 库仑/千克	$1.752 \times 10^{11}$ 库仑/千克
0.3787	1.630	1.761
0.4281	1.590	1.760
0.5154	1.511	1.763
0.6870	1.283	1.767

一些结果。可以看出， $e/m = e(1-u^2/c^2)^{\frac{1}{2}}/m_0$  之值随  $\beta$  射线的速度变化； $\beta$  射线的速度利用方程 (5.60) 算出。 $e/m_0$  的计算值是常数。此后做了多次相似的实验，得到的结果始终与下述方程一致：

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \quad (5.63)$$

普遍承认这些实验证实了质量随速度变化的方程 (5.63)。但是，这实验的理论中使用了其它假设；例如，假设了作用在运动电荷上的力为洛伦兹力，也假定了粒子的电荷不依赖于它的速度（电荷不变原理）。因而，应当把这些实验结果看作为说明离子在电磁场中运动的相对论性理论整体的正确性，而不要把它看作为证实该理论的某一个别部分。

电荷不变原理和质量随速度变化的一个相当确切的证据可以由测量高能电子的德布洛意波长的实验得到。按照量子力学，动量为  $p$  速度为  $u$  的电子联系于一个德布洛意波长  $\lambda$ ，它等于

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mu},$$

其中  $h$  是普朗克常数。如果电子由已知的电势差  $V$  加速，则

电子的动能为  $T = Ve$ 。它们的动量为  $cp = (E^2 - m_0^2 c^4)^{\frac{1}{2}} = (T^2 + 2Tm_0c^2)^{\frac{1}{2}}$ ，于是德布洛意波长为

$$\lambda = h/p = h/\{(Ve/c)^2 + 2Vm_0c\}^{\frac{1}{2}}.$$

测量电子的德布洛意波长随加速电压差的变化可以检验电荷是否随速度变化。到目前为止，得到的结果与电荷不变而质量变化的假设相一致。

#### 5.4.4 单位

质量、长度和时间的国际标准分别是千克、米和秒。本书一般采用这些单位及它们的导出单位。物理学家喜欢使用一些单位，使其大小对于我们实际正从事的工作类型最为方便。电子的质量等于  $9.11 \times 10^{-31}$  千克，而质子的质量等于  $1.672 \times 10^{-27}$  千克。这些质量比 1 千克小得多。把电子的质量作为质量单位来表示基本粒子的质量更方便些。按照这个尺度， $\mu$  介子、 $\pi$  介子和质子的质量分别为  $206.8m_e$ 、 $273.2m_e$  和  $1836m_e$ ，其中  $m_e$  表示电子的静质量。在原子物理和核物理中，将电子的电荷 ( $= 1.602 \times 10^{-19}$  库伦) 取作电荷单位常常是方便的。

通常用在加速器中加速粒子的办法获得高能粒子。5.4.1 节中已证明，如果带电  $q$  的粒子通过  $V_0$  伏电势差而被加速，则粒子动能的增加等于  $q \cdot V_0$  伏。测量运动带电粒子动能的方便方法，是利用带电子电荷的粒子为要具有与这样运动粒子相同的动能所必须通过的电势差。如果 1 库仑电荷通过 1 伏电势差，则对它做的功等于 1 焦耳。对通过 1 伏电势差的  $1.602 \times 10^{-19}$  库仑电荷做的功等于  $1.602 \times 10^{-19}$  焦耳。因此

1 电子伏  $= 1.602 \times 10^{-19}$  焦耳  $= 1.602 \times 10^{-12}$  尔格。(5.64)

对于  $\beta$  射线和  $\gamma$  射线，用千电子伏 (keV) 表示能量常常是方

便的。

$$1 \text{ 千电子伏} = 10^3 \text{ 电子伏} = 1.602 \times 10^{-16} \text{ 焦耳} \\ = 1.602 \times 10^{-9} \text{ 尔格.}$$

对于较高能量的粒子，用兆电子伏 (MeV) 表示能量是方便的。

$$1 \text{ 兆电子伏} = 10^6 \text{ 电子伏} = 1.602 \times 10^{-13} \text{ 焦耳} \\ = 1.602 \times 10^{-6} \text{ 尔格.} \quad (5.65)$$

对于更高能的粒子，用千兆电子伏 (BeV 或 GeV) 表示能量，其中

$$1 \text{ 千兆电子伏} = 10^9 \text{ 电子伏} = 1.602 \times 10^{-10} \text{ 焦耳} \\ = 1.602 \times 10^{-3} \text{ 尔格.}$$

一般说来，上面提到的能量是指粒子的动能，但在其它时候，特别是在  $\beta$  衰变工作中，提到的能量常常包括粒子的静质量能。

核物理中质量的基本单位前此不久还是原子质量单位 (a.m.u.)。它定义为氧的普通同位素的静止质量的  $1/16$ 。一个原子质量单位等于  $1.6598 \times 10^{-27}$  千克。按照关系式  $E = m_0 c^2$ ，此静止质量等同于

$$E = m_0 c^2 = 1.66 \times 10^{-27} \times (3 \times 10^8)^2 \\ = 1.491 \times 10^{-10} \text{ 焦耳.}$$

因为 1 兆电子伏等于  $1.602 \times 10^{-13}$  焦耳，所以有

$$1 \text{ 原子质量单位} \equiv \frac{1.491 \times 10^{-10}}{1.602 \times 10^{-13}} \equiv 931 \text{ 兆电子伏}/c^2.$$

因此，

$$1 \text{ 原子质量单位} \equiv (1/16)^{16}\text{O} \equiv 1.6598 \times 10^{-27} \text{ 千克} \\ \equiv 1.491 \times 10^{-10} \text{ 焦耳}/c^2. \\ \equiv 931 \text{ 兆电子伏}/c^2. \quad (5.66)$$

相当于电子和质子静质量的能量分别是 0.511 兆电子伏和 937

兆电子伏。第十一次国际计量大会建议采用新的原子质量单位，即等于<sup>12</sup>C同位素静质量1/12的单位。1新原子质量单位 =  $\frac{1}{12}$ <sup>12</sup>C质量 =  $1.6603 \times 10^{-27}$ 千克。新尺度将逐渐被普遍采用。

借助于等效的  $B\rho$  值表示粒子的动量有时是方便的。由单个带电粒子的方程(5.57)，有

$$B\rho = p/e$$

这个方法是方便的，因为它给出，对于已知磁场值使电子聚焦所必须的半圆摄谱仪的大小。许多核物理教科书仍用老的厘米·克·秒制，此制中  $B$  用高斯表示， $\rho$  用厘米表示，其中 1 高斯  $\equiv 10^{-4}$  韦伯/米<sup>2</sup>及 1 厘米 = 1/100 米。Wapstra, Nijgh 和 Van Lieshout<sup>[4]</sup> 给出了  $B\rho$  值的表。

现在

$$\begin{aligned} E &= c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2} = c\sqrt{(B\rho e)^2 + m_0^2c^2}, \\ E &= m_0c^2 \sqrt{\left(\frac{B\rho e}{m_0c}\right)^2 + 1}, \\ T &= E - m_0c^2 = m_0c^2 \left\{ \sqrt{\left[\left(\frac{B\rho e}{m_0c}\right)^2 + 1\right]} - 1 \right\}. \end{aligned} \quad (5.67)$$

如果  $B$  和  $\rho$  分别用韦伯/米<sup>2</sup>和米，则对于电子

$$\begin{aligned} T(\text{eV}) &= 0.51098 \\ &\times 10^6 \left\{ \sqrt{(1 + 0.3442 \times 10^6 B^2 \rho^2)} - 1 \right\}. \end{aligned} \quad (5.68)$$

如果  $B$  用高斯， $\rho$  用厘米，则对于电子

$$\begin{aligned} T(\text{eV}) &= 0.51098 \\ &\times 10^6 \left\{ \sqrt{(1 + 0.3442 \times 10^{-6} B^2 \rho^2)} - 1 \right\}. \end{aligned} \quad (5.69)$$

利用下面的三角替换常常可以使数学计算简化：

$$\sin \theta = u/c, \quad (5.70)$$

其中  $u$  是粒子的速度。于是我们有

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} = m_0 \sec \theta. \quad (5.71)$$

质量随速度的增加可从  $m/m_0$  对  $u/c$  的曲线图看到，也就是从图 5.6(a) 的  $\sec \theta$  对  $\sin \theta$  的曲线图看到。如果因子  $1/(1 - u^2/c^2)^{\frac{1}{2}} = \sec \theta$  已知，则  $u/c = \sin^{-1} \theta$  可由三角函数表查出，反之亦然。

关系式  $E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$  也可以用图描述。量  $E$ ,  $p c$  和  $m_0 c^2$  构成直角三角形的三边，如图 5.6(b) 所示。我们有

$$\sin \theta = \frac{pc}{E} = \frac{muc}{mc^2} = u/c.$$

对于 3.2 千电子伏的电子，0.66 兆电子伏的  $\mu$  介子和 6.1 兆电子伏的质子，由方程  $T = \frac{1}{2} m_0 u^2$  算出的动能与相对论值差百分之一。可以看出，当电子经几千伏电势差加速时，相对论效应就变得重要了。如果两种情况使用相同的速度值，那么当电子、 $\mu$  介子和质子分别具有 0.31 兆电子伏，64 兆电子伏和 590 兆电子伏的相对论动能时，利用非相对论公式算出的动能仅是相对论动能公式的预言值的百分之五十。

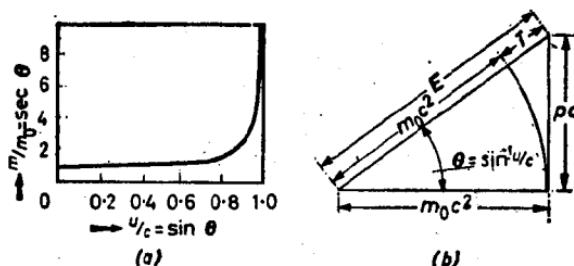


图 5.6 (a)  $\sec \theta$  对  $\sin \theta$  的曲线图。这等同于粒子的相对论质量  $m$  同它的静质量  $m_0$  之比对粒子的速度同光速之比的曲线图。(b)  $E$ ,  $T$ ,  $p$  和  $m_0$  间的关系用图表示

### 5.4.5 带电粒子加速到高能

这里不想对粒子加速器作详尽说明，而只对粒子在高能量范围内加速过程概要地讲述一些基本物理原理，在高能范围内，粒子的质量随速度而变化成为很重要的事实。加速器的详细论述，读者可参阅麦克米伦<sup>[5]</sup>的著作，在那里还给出了其它参考文献。

图 5.7 是迴旋加速器的示意图。它由两个扁平中空导电的半圆盒（一般叫做D 盒）组成。两个D 盒放在电磁铁的磁极中间并放在高真空中。离子由两D 盒中心处的源 S 产生。D 盒间加电势差，使其间隙内存在电场。离子从离子源向一个D 盒方向加速。因为D 盒是中空的导体，所以在盒内电场可忽略不计，于是离子一旦进入一盒内部，它们的速度便保持不

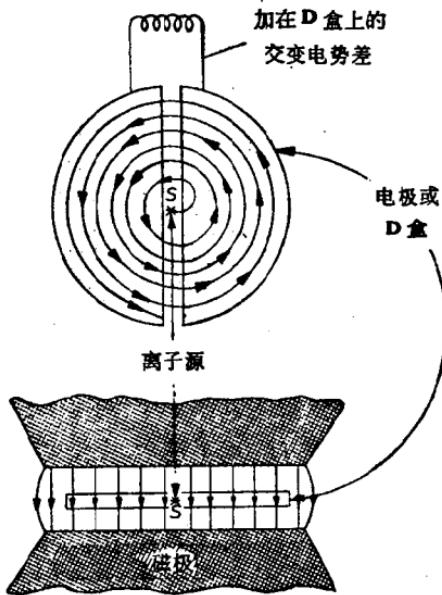


图 5.7 回旋加速器简图。划出了典型离子的路径。

变，离子在盒内沿圆轨道运动。离子走过半圆后，到达两D盒的间隙。如果到此时将D盒间电势差和电场反向，离子又被加速，在另一个D盒内沿半径较大的半圆运动，直到再次到达间隙。按照方程(5.58)，在均匀磁场中迴转一整周的时间等于  $2\pi\rho/u = 2\pi m/qB$ ，于是半周的时间等于  $\pi m/Bq$ 。只要粒子质量随速度的变化可以忽略，这个时间就与离子的能量无关。如果在D盒间的电场以一定的时间间隔  $\pi m/Bq$  反向，那么离子每次穿过D盒的间隙时都被加速，获得能量。离子轨道半径为

$$\rho = \frac{mu}{qB}. \quad (5.57)$$

随着离子速率增加，离子运动的圆轨道的直径也增加。交变电势差可从高频振荡器得到。共振条件是

$$n = \frac{qB}{2\pi m} = \frac{qB\sqrt{1 - u^2/c^2}}{2\pi m_0}, \quad (5.72)$$

其中  $n$  是振荡器频率。

只要质量随速度的变化可以忽略，离子在均匀磁场中旋转一周的时间就保持不变，因而离子可以用固定频率的振荡加速，其频率由方程(5.72)给出。对于质子，如果  $n = 10^7$  周/秒，则磁场必须为 0.65 韦伯/米<sup>2</sup>(6,500 高斯)。

高能时离子的质量随速度而增加，因而迴转一周的时间也增加。如果频率  $n$  固定，则离子将不同相。对于 40 兆电子伏以下的质子，质量随速度的变化足够小，以致将其加速不产生不同相。不能将电子加速过 ~50 千电子伏而不产生不同相。原则上可以用两种方法克服这种脱离共振的现象。随着离子能量增加，相对论质量增加，共振频率下降。如果适当调整外加电势差的频率，则将可能将离子加速到高能。首批频率调整迴旋加速器（同步迴旋加速器）之一便是在加利福尼亚大学建造的 184 英寸的机器。它产生能量到 350 兆电子伏

的质子，能量到 195 兆电子伏的氘和能量到 390 兆电子伏的 $\alpha$ 粒子。对于质子，频率要从质子注入时刻的 22.9 兆周/秒变到离开 D 盒时的 15.8 兆周/秒。氘和 $\alpha$ 粒子的相应频率是 11.5 和 9.8 兆周/秒。同步迴旋加速器不适用于加速电子，因为所需的调整率太高。

克服脱离共振的另一个方法是，在离子注入后，以一定比率增加磁场，使比值  $B/m = B(1 - u^2/c^2)^{1/2}/m_0$  保持不变。这样，频率就不需要变化。此方法已成功地用于电子同步加速器中加速电子。电子以几十千电子伏的能量注入，开始由感应加速器的作用加速到几兆电子伏，再采用同步迴旋加速作用，最后使电子加速到 300—400 兆电子伏。电子同步加速器的优点之一是，在 2 兆电子伏时，电子运动的速率几乎等于光速 ( $\sim 0.98c$ )。如果  $B/m$  是常数，随着电子能量的增加，由方程 (5.57) 给出的轨道半径增加不很大，因为超过 2 兆电子伏，电子的速度几乎保持为常数。由于这个原因，仅需要使用车胎形状的真空室，磁场仅需要扩展到这个真空室的范围。质子非具有几千兆电子伏的能量，就不能接近光速；例如，质子如要达到与 2 兆电子伏的电子相同的速度，其能量就为  $\sim 4$  千兆电子伏。如果在质子同步加速器中， $m/B$  保持常值，使得能够用定常频率，那么质子轨道的半径随着质子从几千电子伏被加速到几千兆电子伏而一直增加。这需要建造巨大的磁体。为了使质子保持在固定半径的轨道上，电势差的频率和磁场的强度都要改变。欧洲原子核研究中心 (C.E.R.N.) 的质子迴旋加速器可以将质子加速到 25 千兆电子伏的能量。

当电子沿圆轨道运动时，由于有向心加速度，它们发射光子（同步加速器辐射），在能量超过 300 兆电子伏时这一点变得非常重要。在斯丹福 (Stanford) 直线电子加速器中，电子已被加速到能量超过 600 兆电子伏。在这个加速器中，用运动

的电磁波的电矢量加速电子。直线电子加速器设计得使电磁波的速率从电子注入的速率增加至光速。当电子的能量大于600兆电子伏时，它的相对论质量比电子的静质量大1,200倍。

高能粒子加速器的设计依赖于5.3节阐述的带电粒子相对论动力学方程。这些加速器设计的成功表明，上述理论（其中假设惯性质量随速度变化，电荷不变以及粒子的速度小于光速）直到很高能量都是令人满意的。

## 5.5 粒子的质量和动量以及作用 在粒子上的力的变换

5.3和5.4节中讨论了带电粒子在电场与磁场中的运动，它表明当像5.3节中所述那样重新定义质量、动量和力时，新理论就能预言带电粒子的运动直到极高的能量。这些方程是用于实验室系统中的。有时在相对实验室运动的惯性系中，例如像在质心系中，计算更为方便。

### 5.5.1 质量变换

设 $m$ 是当粒子以速度 $u$ 相对惯性系 $\Sigma$ 运动时粒子的相对论质量，设 $m'$ 和 $u'$ 是同一个粒子相对惯性系 $\Sigma'$ 的质量和速度， $\Sigma'$ 以匀速 $v$ 相对 $\Sigma$ 运动。如果 $m_0$ 是粒子的静质量，则

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (5.73)$$

及

$$m' = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}}, \quad (5.74)$$

于是

$$m' = m \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}}.$$

由方程(4.14),

$$\frac{1}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} = \frac{(1-vu_x/c^2)}{\sqrt{1-v^2/c^2}\sqrt{1-u^2/c^2}}. \quad (5.75)$$

因此,

$$m' = \frac{m(1-vu_x/c^2)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma m \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right), \quad (5.76)$$

或

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} = \gamma \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right),$$

其中

$$\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}.$$

类似地有逆关系式

$$m = m' \gamma \left(1 + \frac{vu'_x}{c^2}\right). \quad (5.77)$$

这些就是运动粒子惯性质量的变换式。

### 5.5.2 动量和能量变换

在惯性系  $\Sigma$  中, 粒子的动量定义为

$$p_x = mu_x = \frac{m_0 u_x}{\sqrt{1-u^2/c^2}};$$

$$p_y = \frac{m_0 u_y}{\sqrt{1-u^2/c^2}};$$

$$p_z = \frac{m_0 u_z}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.$$

总能定义为

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.$$

相应的量在  $\Sigma'$  中定义为

$$p'_x = m'u'_x = \frac{m_0 u'_x}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}};$$

$$p'_y = \frac{m_0 u'_y}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}};$$

$$p'_z = \frac{m_0 u'_z}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}},$$

以及

$$E' = m'c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}}.$$

将方程(5.75)的  $1/(1 - u'^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$  以及  $u'_x = (u_x - v)/(1 - vu_x/c^2)$  [方程(4.5)]代入  $p'_x$  的表达式, 得到

$$\begin{aligned} p'_x &= \frac{m_0(u_x - v)}{(1 - vu_x/c^2)} \frac{(1 - vu_x/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \frac{(u_x - v)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \gamma(mu_x - mv). \end{aligned}$$

但是

$$mu_x = p_x \quad \text{及} \quad m = E/c^2,$$

因此

$$p'_x = \gamma(p_x - vE/c^2). \quad (5.78)$$

将方程(5.75)的  $1/(1 - u'^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$  以及  $u'_y = u_y \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{(1 - vu_x/c^2)}$

代入  $p'_y$  的表达式, 得到

$$\begin{aligned} p'_y &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} u'_y \\ &= \frac{m_0(1 - vu_x/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}\sqrt{1 - u^2/c^2}} \frac{u_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{(1 - vu_x/c^2)} \\ &= \frac{m_0 u_y}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = p_y, \end{aligned}$$

即是

$$p'_y = p_y. \quad (5.79)$$

类似地,

$$p'_z = p_z. \quad (5.80)$$

现在

$$\begin{aligned} E' &= m'c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-u'^2/c^2}} = \frac{m_0(1-vu_x/c^2)c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ &= \gamma m c^2 \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right) \end{aligned}$$

$$E' = \gamma(E - vp_x), \quad (5.81)$$

因此

$$\frac{E'}{c^2} = \gamma \left( \frac{E}{c^2} - \frac{vp_x}{c^2} \right). \quad (5.82)$$

类似地,有逆关系式

$$p_x = \gamma \left( p'_x + \frac{vE'}{c^2} \right); \quad (5.83)$$

$$p_y = p'_y; \quad (5.84)$$

$$p_z = p'_z; \quad (5.85)$$

$$E = \gamma(E' + vp'_x). \quad (5.86)$$

将会看到,  $p'_x$ ,  $p'_y$ ,  $p'_z$  和  $E'/c^2$  与空间和时间坐标  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  和  $t'$  以相同方式变换. 例如, 对应于方程 (5.78), 有  $x' = \gamma(x - vt)$ ; 对应于方程 (5.82), 有  $t' = \gamma(t - vx/c^2)$ .

现在

$$\begin{aligned} p'^2 - E'^2/c^2 &= p'^2_x + p'^2_y + p'^2_z - E'^2/c^2 \\ &= \gamma^2(p_x - vE/c^2)^2 + p_y^2 + p_z^2 \\ &\quad - \gamma^2(E - vp_x)^2/c^2 \\ &= p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - E^2/c^2 \\ &= p^2 - E^2/c^2, \end{aligned} \quad (5.87)$$

因此,量  $p^2 - E^2/c^2$  是不变量. 由方程 (5.41) 得出, 它的数

值等于  $-m_0^2 c^2$ .

在  $\Sigma'$  中,

$$E'^2 = c^2 p'^2 + m_0^2 c^4, \quad (5.88)$$

或

$$E' = c \sqrt{p'^2 + m_0^2 c^2}. \quad (5.89)$$

### 5.5.3 力的变换

在惯性坐标系  $\Sigma$  中, 作用在粒子上的力定义为矢量

$$\mathbf{f} = \frac{d}{dt} (\mathbf{mu}), \quad (5.90)$$

具有分量

$$f_x = \frac{d}{dt} (mu_x), \text{ 等等.} \quad (5.91)$$

类似地, 在惯性系  $\Sigma'$  中, 作用在粒子上的力定义为具有分量

$$f'_x = \frac{dp'_x}{dt'} \text{ 等等} \quad (5.92)$$

的矢量. 把方程(5.78)的  $p'_x$  代入方程(5.92),

$$f'_x = \gamma \frac{d}{dt'} \left( p_x - \frac{\nu E}{c^2} \right) = \gamma \frac{dt}{dt'} \frac{d}{dt} \left( p_x - \frac{\nu E}{c^2} \right), \quad (5.93)$$

现在,

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1}{dt'/dt} = \frac{1}{\frac{d}{dt} \gamma(t - \nu x/c^2)} = \frac{1}{\gamma(1 - \nu u_x/c^2)} \quad (5.94)$$

而

$$dp_x/dt = f_x,$$

利用方程(5.34),

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} (T + m_0 c^2)$$

$$= \frac{dT}{dt} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} = f_x u_x + f_y u_y + f_z u_z.$$

代入方程(5.93)并整理, 我们得到

$$f'_x = f_x - \frac{v u_y}{(c^2 - v u_x)} f_y - \frac{v u_z}{(c^2 - v u_x)} f_z. \quad (5.95)$$

由于

$$p'_y = p_y, \quad (5.79)$$

$$f'_y = \frac{dp'_y}{dt'} = \frac{dp_y}{dt'} = \frac{dt}{dt'} \frac{dp_y}{dz} = \frac{dt}{dt'} f_y.$$

利用方程(5.94), 我们得到

$$f'_y = \frac{c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}}{(c^2 - v u_x)} f_y, \quad (5.96)$$

类似地,

$$f'_x = \frac{c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}}{(c^2 - v u_x)} f_x. \quad (5.97)$$

逆关系式为

$$f_x = f'_x + \frac{v u'_y}{(c^2 + v u'_x)} f'_y + \frac{v u'_z}{(c^2 + v u'_x)} f'_z, \quad (5.98)$$

$$f_y = \frac{c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}}{(c^2 + v u'_x)} f'_y, \quad (5.99)$$

$$f_z = \frac{c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}}{(c^2 + v u'_x)} f'_z. \quad (5.100)$$

本节导出的所有变换, 粒子质量、能量和动量以及作用于粒子的力所指的都是在粒子路径上某一可鉴别点的瞬时值; 此点在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中的坐标和时间以洛伦兹变换相联系.

## 5.6 弹性碰撞理论

正是从考虑两弹性球的碰撞出发, 才导致将运动粒子的

惯性质量重新定义等于  $m_0/(1 - u^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$ , 其中  $m_0$  是粒子的静质量,  $u$  是粒子的速度. 这又导致重新定义动量和力. 利用这些新定义, 可以系统地讲述单个粒子相对论动力学的令人满意的理论. 现在更详细地考虑两粒子弹性碰撞的情况. 弹性碰撞的意义是, 在这种碰撞中, 除了粒子的静质量能外, 碰撞前后的全部能量都处于动能形式. 将假设在弹性碰撞中, 动量和动能都是守恒的. 如果假设碰撞过程中粒子不改变它们的性质, 那么碰撞前后碰撞粒子的静质量是相同的. 如果碰撞中总动能守恒, 因为对每个粒子有  $E = T + m_0c^2$ , 所以碰撞中两个粒子总能之和也守恒. 首先我们要证明, 如果采用 5.3 节中导出的质量、能量和动量的新定义, 那么假设在“点”粒子的弹性碰撞中动量和能量守恒与狭义相对论一致.

设一具有动量  $\mathbf{p}_1$  和总能  $E_1$  的静质量为  $m_{01}$  的自由粒子, 在一点与另一具有动量  $\mathbf{p}_2$  和总能  $E_2$  的静质量为  $m_{02}$  的自由粒子相碰撞, 使得碰撞后两粒子都是自由的, 并分别具有动量  $\mathbf{p}_3$  和  $\mathbf{p}_4$  以及总能  $E_3$  和  $E_4$ . 假设在惯性系  $\Sigma$  中, 动量和能量都守恒. 按照动量守恒定律, 在  $\Sigma$  中有

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 = \mathbf{p} = \text{常数}, \quad (5.101)$$

其中  $\mathbf{p}$  是  $\Sigma$  中粒子动量之和. 将方程(5.101)写成分量形式,

$$(p_1)_x + (p_2)_x = (p_3)_x + (p_4)_x = p_x = C_1, \quad (5.102)$$

$$(p_1)_y + (p_2)_y = (p_3)_y + (p_4)_y = p_y = C_2, \quad (5.103)$$

$$(p_1)_z + (p_2)_z = (p_3)_z + (p_4)_z = p_z = C_3. \quad (5.104)$$

按照能量守恒定律,

$$E_1 + E_2 = E_3 + E_4 = E = C_4, \quad (5.105)$$

其中  $E_1$  和  $E_2$  是粒子碰撞前的总能,  $E_3$  和  $E_4$  是粒子碰撞后的总能. 设  $E = E_1 + E_2$  是粒子总能之和. 假设量  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  和  $C_4$  在  $\Sigma$  中是常数. 对于自由粒子有  $E = mc^2$ , 于是对于自由粒子方程(5.105)等同于方程

$$m_1 + m_2 = m_3 + m_4, \quad (5.106)$$

其中  $m_1$  和  $m_2$  分别是粒子 1 和 2 碰撞前的相对论质量,  $m_3$  和  $m_4$  是它们碰撞后的相对论质量. 这是相对论质量守恒定律. 利用单个粒子动量的  $x$  分量从  $\Sigma$  到  $\Sigma'$  的变换方程(5.78), 得到

$$\begin{aligned} p'_x &= (p'_1)_x + (p'_2)_x \\ &= \gamma \left[ (p_1)_x - \frac{\nu E_1}{c^2} \right] + \gamma \left[ (p_2)_x - \frac{\nu E_2}{c^2} \right] \\ &= \gamma \left[ (p_1)_x + (p_2)_x - \frac{\nu}{c^2} (E_1 + E_2) \right] \\ &= \gamma \left[ C_1 - \frac{\nu}{c^2} C_4 \right], \end{aligned} \quad (5.107)$$

或者

$$p'_x = \gamma \left[ p_x - \frac{\nu}{c^2} E \right], \quad (5.108)$$

其中  $\mathbf{p}'$  是碰撞前两粒子在  $\Sigma'$  中动量的矢量和. 假设碰撞粒子足够小, 以至可以认为碰撞是在某一瞬时发生在空间某一点. 类似地, 利用动量变换替换  $(p'_3)_x$  和  $(p'_4)_x$ , 得到

$$\begin{aligned} (p'_3)_x + (p'_4)_x &= \gamma \left[ (p_3)_x + (p_4)_x - \frac{\nu}{c^2} (E_3 + E_4) \right] \\ &= \gamma \left[ C_1 - \frac{\nu}{c^2} C_4 \right]. \end{aligned}$$

因此,

$$(p'_1)_x + (p'_2)_x = (p'_3)_x + (p'_4)_x = \gamma \left[ C_1 - \frac{\nu}{c^2} C_4 \right]. \quad (5.109)$$

于是, 假若在  $\Sigma$  中动量和能量守恒. 则在  $\Sigma'$  中动量的  $x$  分量守恒.

按照方程(5.79), 粒子动量的  $y$  分量在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中是相同的, 于是有:  $(p'_1)_y = (p_1)_y$ , 等等, 方程(5.103)变为

$(p'_1)_y + (p'_2)_y = (p'_3)_y + (p'_4)_y = p'_y = C_2 = p_y$ . (5.110)  
类似地因为  $(p'_1)_z = (p'_2)_z$ , 等等, (5.104) 变为

$(p'_1)_z + (p'_2)_z = (p'_3)_z + (p'_4)_z = p'_z = C_3 = p_z$ . (5.111)  
于是在  $\Sigma'$  中总动量守恒.

利用单个粒子总能量从  $\Sigma$  到  $\Sigma'$  的变换方程(5.81), 得到

$$\begin{aligned} E'_1 + E'_2 &= \gamma [E_1 + v(p_1)_x] + \gamma [E_2 - v(p_2)_x] \\ &= \gamma \{(E_1 + E_2) - v[(p_1)_x + (p_2)_x]\} \\ &= \gamma [E - vp_x] = \gamma [C_4 - vC_1]. \end{aligned} \quad (5.112)$$

因此,

$$E' = \gamma [E - vp_x], \quad (5.113)$$

其中用符号  $E'$  表示碰撞前在  $\Sigma'$  中测量的粒子总能之和. 类似地,

$$E'_3 + E'_4 = \gamma [C_4 - vC_1] = E'. \quad (5.114)$$

于是,

$$E' = E'_1 + E'_2 = E'_3 + E'_4 = \gamma [C_4 - vC_1] = \text{常数}. \quad (5.115)$$

于是假若在  $\Sigma$  中总能和动量守恒, 则在  $\Sigma'$  中总能守恒. 因为  $E'_1 = m'_1 c^2$  等等, 方程(5.115)可写为

$$m'_1 + m'_2 = m'_3 + m'_4, \quad (5.116)$$

其中  $m'_1$  和  $m'_2$  以及  $m'_3$  和  $m'_4$  分别是碰撞前后粒子在  $\Sigma'$  中的相对论质量. 方程(5.116)是质量守恒定律. 至此, 我们已经证明, 如果对于在  $\Sigma$  中的弹性碰撞, 动量和总能量(或相对论质量)守恒定律成立, 那么假若动量和能量如 5.2 节中所定义, 则对于在  $\Sigma'$  中的弹性碰撞, 这些守恒定律也成立. [由方程(5.108), (5.110), (5.111) 和 (5.113) 可以看出, 碰撞粒子的动量之和及总能量之和从  $\Sigma$  变换到  $\Sigma'$  的方式与单个粒子动量及总能的变换相同.]

我们已用与狭义相对论相一致的方式讲述了动量和能量(质量)守恒定律, 假设守恒定律对“点事件”成立是与相对论

不矛盾的。守恒定律实际是否成立是一个必须用实验解决的问题。现在详细考虑一个简单的例子，并假设在此情况能量和动量是守恒的。在理论已讲明后，再将理论的预言与实验比较。

设静质量为  $m_0$  的粒子以速度  $u_1$  沿  $x$  轴运动，其动量为  $\mathbf{p}_1$ ，总能为  $E_1$ ，并设它与在实验室系中静止而静质量为  $m_0$  的粒子碰撞。实验室系将用  $\Sigma$  表示，如图 5.8(a) 所示。我们还

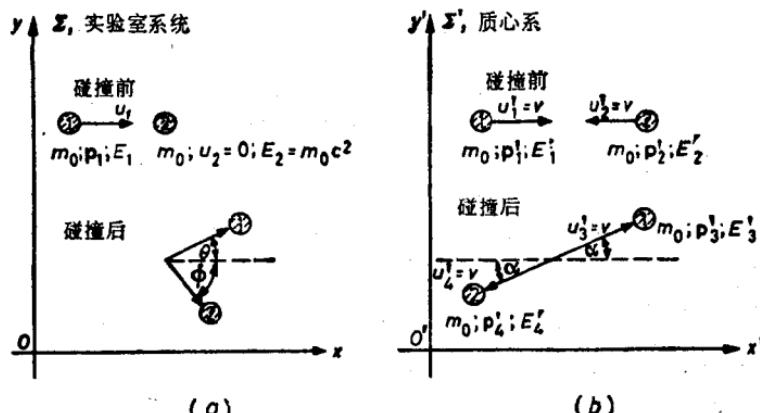


图 5.8 具有相等静质量的两粒子间的弹性碰撞。粒子 2 碰撞前在  $\Sigma$  中静止，而粒子 1 碰撞前以速度  $u_1$  相对  $\Sigma$  运动。在质心系  $\Sigma'$  中，粒子碰撞前以相同速度  $v$  相互接近，碰撞后以大小相等方向相反的速度  $v$  弹回，如图(b)所示。

将从惯性系  $\Sigma'$  来考虑这一碰撞， $\Sigma'$  以速度  $v$  相对  $\Sigma$  沿公共  $x$  轴运动，使得碰撞前两粒子的总动量在  $\Sigma'$  中为零。这个系统通常叫做质量中心系统，并简称质心系，虽然有时也使用动量中心系统一词。在实验室系统中，碰撞前总动量由下式给出：

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + 0 = \mathbf{p}_1,$$

而碰撞前总能量为

$$E = E_1 + E_2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u_1^2/c^2}} + m_0 c^2$$

$$= m_0 c^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - u_1^2/c^2}} + 1 \right\}.$$

利用从  $\Sigma$  到  $\Sigma'$  碰撞粒子动量之和的变换方程(5.108), 有

$$p'_x = \gamma [p_x - v E/c^2].$$

类似地,  $p'_y = p'_z = 0$ .

为了在  $\Sigma'$  中总动量为零, 必需有

$$p_x = v E/c^2, \text{ 其中 } E = E_1 + E_2,$$

或

$$v = \frac{p_x c^2}{E} = \frac{m_0 u_1 c^2}{\sqrt{1 - u_1^2/c^2}} \frac{1}{m_0 c^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - u_1^2/c^2}} + 1 \right\}}, \quad (5.117a)$$

即

$$v = \frac{p_x c^2}{E} = \frac{u_1}{\{1 + \sqrt{1 - u_1^2/c^2}\}}. \quad (5.117b)$$

这是质心系相对实验室的速度。如果碰撞中总动量的  $x$  分量和总能量在实验室系统中守恒, 那么碰撞后质心系必然以相同速度  $v$  相对实验室系运动。因为在质心系中, 碰撞前总动量为零, 所以有

$$\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = 0 \quad \text{或} \quad \mathbf{p}'_1 = -\mathbf{p}'_2.$$

假设两碰撞粒子的静质量相等, 因此如果碰撞前它们的动量在  $\Sigma'$  中数值相等, 则必然有  $\mathbf{u}'_1 = -\mathbf{u}'_2$ , 如图 5.8(b) 所示。因为碰撞前粒子 2 在实验室系 ( $\Sigma$ ) 中静止, 所以碰撞前它必然相对  $\Sigma'$  以速度  $v$  沿负  $O'x'$  方向运动, 如图 5.8(b) 所示。于是碰撞前在质心系中, 两粒子 (它们具有相等的静质量) 以相等的速度  $v$  相互接近。在质心系中, 粒子碰撞前总能量之和等于  $2m_0 c^2/(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$ 。如果在质心系, 动量在碰撞中守恒, 那么碰撞后总动量必然是零, 于是粒子必然以大小相等方向相反的速度弹回。如果能量在质心系中也守恒, 则碰撞

后每个粒子必然具有等于  $m_0 c^2 / (1 - v^2/c^2)^{1/2}$  的总能量, 所以它们必然都以速度  $v$  弹回。但是与它们碰撞前的方向比较, 碰撞后在质心系中它们可以在不同方向弹回。设粒子 1 被这样散射, 使得碰撞后在质心系中, 它与  $O'x'$  轴成  $\alpha$  角, 如图 5.8(b) 所示。这样选择  $y'$  轴方位, 使得碰撞后粒子 1 处在  $x'y'$  平面, 亦即  $(p'_3)_z = 0$ 。从动量守恒定律得出, 在质心系中  $(p'_3)_z + (p'_4)_z = p'_z = 0$ , 所以  $(p'_4)_z$  必然也为零, 粒子 2 在  $\Sigma'$  中必然也在  $x'y'$  平面内弹回。碰撞后粒子 1 在  $\Sigma'$  中的速度分量是

$$(u'_3)_x = v \cos \alpha; \quad (u'_3)_y = v \sin \alpha; \quad (u'_3)_z = 0.$$

利用速度变换式变换到  $\Sigma$  (实验室系), 有

$$(u_3)_x = \frac{(u'_3)_x + v}{\left(1 + \frac{v(u'_3)_x}{c^2}\right)} = \frac{v \cos \alpha + v}{[1 + (v^2/c^2) \cos \alpha]},$$

$$(u_3)_y = \frac{(u'_3)_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v(u'_3)_x}{c^2}} = \frac{v \sin \alpha \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + (v^2/c^2) \cos \alpha}.$$

由图 5.8(a), 可以看出,

$$\tan \theta = \frac{(u_3)_y}{(u_3)_x} = \frac{\sin \alpha \sqrt{1 - v^2/c^2}}{(1 + \cos \alpha)}. \quad (5.118)$$

对于  $\Sigma'$  中的粒子 2, 碰撞后有

$$(u'_4)_x = -v \cos \alpha; \quad (u'_4)_y = -v \sin \alpha; \quad (u'_4)_z = 0.$$

利用速度变换,

$$(u_4)_x = \frac{-v \cos \alpha + v}{1 - (v^2/c^2) \cos \alpha};$$

$$(u_4)_y = \frac{-v \sin \alpha \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - (v^2/c^2) \cos \alpha};$$

$$(u_4)_z = 0.$$

所以

$$\tan \phi = \frac{-(u_4)_y}{(u_4)_x} = \frac{\sin \alpha \sqrt{1 - v^2/c^2}}{(1 - \cos \alpha)}. \quad (5.119)$$

用方程(5.119)乘方程(5.118),

$$\tan \theta \tan \phi = \frac{\sin^2 \alpha (1 - v^2/c^2)}{(1 - \cos^2 \alpha)} = (1 - v^2/c^2).$$

现在由方程(5.117b)

$$v = \frac{u_1}{\{1 + \sqrt{1 - u_1^2/c^2}\}}, \quad (5.117)$$

$$\begin{aligned} 1 - v^2/c^2 &= 1 - \frac{u_1^2}{c^2 \{1 + \sqrt{1 - u_1^2/c^2}\}^2} \\ &= \frac{2}{1 + \frac{1}{\sqrt{1 - u_1^2/c^2}}}, \end{aligned}$$

因此

$$\tan \theta \tan \phi = \frac{2}{1 + \frac{1}{\sqrt{1 - u_1^2/c^2}}} \leq 1.$$

如果  $u_1 \ll c$ , 则  $\frac{1}{\sqrt{1 - u_1^2/c^2}} \cong 1$  及  $\tan \theta \tan \phi \cong 1$ .

因为

$$\tan(\theta + \phi) = \frac{\tan \theta + \tan \phi}{1 - \tan \theta \tan \phi} \quad (5.120)$$

所以如果  $u_1 \ll c$ , 则  $\tan(\theta + \phi)$  变为无限, 因而

$$\theta + \phi = \frac{\pi}{2}.$$

这是牛顿力学给出的具有相等静质量的两个粒子碰撞后的夹角表达式。布拉克和卡宾<sup>[7]</sup>证明了, 当从钋源发出的  $\alpha$  粒子 ( $u_1/c \ll 1$ ) 在充满氦的云室中散射时,  $\alpha$  粒子碰撞后的夹角等于  $\pi/2$ .

如果  $u_1$  是有限的，则  $\tan \theta \tan \phi$  小于一，所以方程(5.120)中  $\tan(\theta + \phi)$  是有限的， $(\theta + \phi)$  小于  $\pi/2$ 。卡宾<sup>[8]</sup>利用充氮或氧的云室中的电子研究了速度在  $0.82c$  到  $0.95c$  范围内的电子的散射。电子碰撞前后的动量由它们在磁场中的曲率确定。卡宾发现， $(\theta + \phi)$  小于  $\pi/2$ ，一般约小 10 度或更多。根据牛顿力学，这一结果不能解释为电子间的弹性碰撞，但是观察到的  $(\theta + \phi)$  值与狭义相对论对电子间弹性碰撞所做的预言符合得非常好。卡宾证明， $(\theta + \phi)$  偏离  $\pi/2$  的变化与狭义相对论符合得比与阿布拉哈姆 (Abraham) (1903 年) 提出的质量随速度变化的公式符合得更好。

狭义相对论没有讲到两个电子碰撞的概率或者得到各种散射角的概率，它只给出碰撞后粒子动量间的关系式。关于散射过程的更完整的理论，必需用到相对论量子力学。必须指出，在我们的计算中假设了，碰撞前后粒子 1 和 2 是可以识

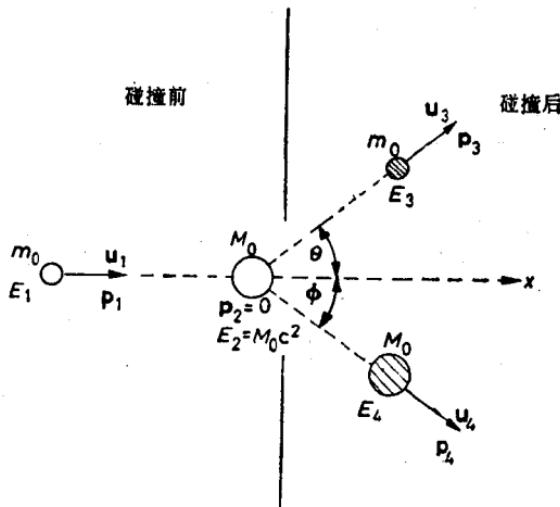


图 5.9 静质量为  $m_0$  以速度  $u_1$  运动的粒子与静质量为  $M_0$  的静止粒子间的弹性碰撞。

别的。按照量子力学，假若粒子都是电子，这是不可能的。

两粒子间弹性碰撞一般情况的解由居特诺(Jüttner<sup>[9]</sup>)在1914年给出。设碰撞前在实验室系中，碰撞粒子的动量是  $\mathbf{p}_1$  和  $\mathbf{p}_2 = 0$ 。设它们的静质量分别是  $m_0$  和  $M_0$ ，碰撞前的总能量分别是  $E_1$  和  $E_2$ 。设碰撞后粒子 1 具有动量  $\mathbf{p}_3$ ，在实验室系中以角  $\theta$  被散射，如图 5.9 所示。设在实验室系中被击粒子以动量  $\mathbf{p}_4$  和角  $\phi$  弹出。按照动量守恒定律，

$$\mathbf{p}_1 + 0 = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4.$$

将此式写成分量形式，

$$p_1 = p_3 \cos \theta + p_4 \cos \phi; \quad (5.121)$$

$$0 = p_3 \sin \theta - p_4 \sin \phi. \quad (5.122)$$

能量守恒定律给出

$$E_1 + E_2 = E_3 + E_4,$$

即是

$$c\sqrt{p_1^2 + m_0^2 c^2} + M_0 c^2 = c\sqrt{p_3^2 + m_0^2 c^2} + c\sqrt{p_4^2 + M_0^2 c^2}. \quad (5.123)$$

如果假设  $m_0$ ,  $\mathbf{p}_1$ ,  $M_0$ ,  $\mathbf{p}_2 = 0$  为已知，那么三方程 (5.121), (5.122) 和 (5.123) 中有四个未知量  $p_3$ ,  $p_4$ ,  $\theta$  和  $\phi$ 。如果要去求解，四个未知量中还必须给定一个。例如，如果散射角  $\theta$  已知，那么经过相当长的代数运算后，得到

$$p_3 = p_1 \left\{ \frac{(m_0^2 c^2 + M_0 E_1) \cos \theta + (E_1 + M_0 c^2) \sqrt{M_0^2 - m_0^2 \sin^2 \theta}}{\left( \frac{E_1}{c} + M_0 c \right)^2 - p_1^2 \cos^2 \theta} \right\}, \quad (5.124)$$

$$E_3 = \frac{(E_1 + M_0 c^2)(m_0^2 c^2 + M_0 E_1) + c^2 p_1^2 \cos \theta \sqrt{M_0^2 - m_0^2 \sin^2 \theta}}{\left( \frac{E_1}{c} + M_0 c \right)^2 - p_1^2 \cos^2 \theta}, \quad (5.124a)$$

$$p_4^2 = p_1^2 + p_3^2 - 2p_1 p_3 \cos \theta. \quad (5.125)$$

换一方式，碰撞后的能量和动量可用反冲角 $\phi$ 表达。那么有

$$p_4 = \frac{p_1 2M_0(E_1 + M_0 c^2) \cos \phi}{\left(\frac{E_1}{c} + M_0 c\right)^2 - p_1^2 \cos^2 \phi}, \quad (5.126)$$

$$E_4 = M_0 c^2 + \frac{2p_1^2 \cos^2 \phi M_0 c^2}{\left(\frac{E_1}{c} + M_0 c\right)^2 - p_1^2 \cos^2 \phi}, \quad (5.127)$$

$$p_3^2 = p_1^2 + p_4^2 - 2p_1 p_4 \cos \phi. \quad (5.128)$$

亚诺塞<sup>[10]</sup> (Jánossy) 全面讨论了方程(5.124)–(5.128)。

两个具有不相等静质量的粒子的弹性散射也可以在质心系中讨论。方法与讨论两等质量粒子弹性碰撞的例子所采用的相似。在质心系中碰撞粒子的动量还相等，但是因为粒子的静质量不同，所以在质心系中它们不以等速度相互接近。如果碰撞是弹性的，粒子弹回时动量与碰撞前相同。在质心系中粒子与质心系相对实验室系的运动方向所成的角 $\alpha$ 又是一个可变参量。经常利用质心系中角 $\alpha$  和  $\alpha + d\alpha$  间的散射概率表示核粒子弹性散射的实验数据。利用动量和能量变换 [方程(5.83)–(5.86)] 可将质心系中的动量和能量与实验室值联系起来。对于低能碰撞(对于核子，即质子和中子，能量应小于 20 兆电子伏)牛顿力学和伽利略变换是足够精确的。为讨论质心坐标在这样碰撞中的用处，读者可参阅毕脱 (Bitter) 著的《核物理学》(Nuclear Physics)。

## 5.7 非弹性碰撞和质能相当性

5.6 节中考虑了弹性碰撞，其中除了静质量能之外，碰撞前后的全部能量都处于动能形式。在牛顿力学中，动能在碰撞中不总是守恒的，有时有部分动能变为热和声，而在另外的情

况，一些动能可以变为势能。在牛顿力学范围内动量守恒定律总是成立，而只要全部能量形式都包括在内，能量守恒定律也成立。现在来看看，当动能未必守恒时，能量和动量守恒定律是否还适用于高能粒子碰撞的一般情况。首先，考虑一完全非弹性碰撞的例子，此例中在惯性系  $\Sigma'$  内，碰撞后没有动能了。

设具有相同静质量  $m_0$  的两球，分别以速度  $+u'$  和  $-u'$  平行于惯性系  $\Sigma'$  的  $x'$  轴运动，并设它们对头相撞，如图 5.10(b) 所示。设两球粘在一起，形成一个复合球。因为碰撞前总动量是零，所以若碰撞中动量守恒，则碰撞后复合球必然在  $\Sigma'$  中静止。碰撞前两球在  $\Sigma'$  中能量之和等于

$$E' = 2m'_c^2 = \frac{2m_0c^2}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} = 2m_0c^2 + T', \quad (5.129)$$

其中  $T'$  是碰撞前碰撞粒子动能之和。如果假设  $\Sigma'$  中全部动能都变为热，则在  $\Sigma'$  中测量的碰撞产生的热等于

$$Q' = T' = E' - 2m_0c^2. \quad (5.130)$$

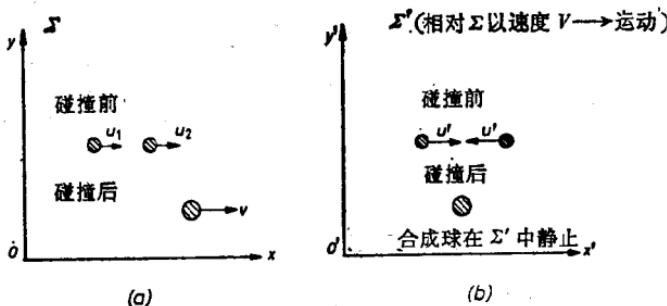


图 5.10 两球在  $\Sigma'$  中以等速  $u'$  互相接近，由于碰撞使得相对  $\Sigma'$  静止，如图 (b) 所示。复合球以匀速  $v$  相对  $\Sigma$  运动，如图 (a) 所示。

现在从惯性系  $\Sigma$  考虑同一碰撞， $\Sigma$  以匀速  $-v$  相对  $\Sigma'$  沿  $x'$  轴运动，如图 5.10(a) 所示。利用方程 (5.108) 的逆方程，

可以由碰撞前两球在  $\Sigma'$  中的总动量和能量算出它们在  $\Sigma$  中的总动量。我们有

$$p_x = \gamma(p'_x + vE'/c^2) = \frac{\gamma v E'}{c^2},$$

因为  $\Sigma'$  中总动量为零。如果  $Q' = T'$ , 由方程(5.130)替换  $E'$ , 有

$$p_x = \gamma v \left( 2m_0 + \frac{T'}{c^2} \right) = \gamma v (2m_0 + Q'/c^2). \quad (5.131)$$

类似地, 由方程(5.110)和(5.111)

$$p_y = p_z = 0. \quad (5.132)$$

类似地, 利用方程(5.113)的逆方程可以计算碰撞前  $\Sigma$  中的总能量。我们有

$$E = \gamma(E' + vp'_x) = \gamma(E' + 0) = \gamma E'.$$

由方程(5.130)替换  $E'$ , 对于碰撞前  $\Sigma$  中总能得到

$$E = \gamma(2m_0 c^2 + T'). \quad (5.133)$$

碰撞后复合球(它在  $\Sigma'$  中是静止的)在  $\Sigma$  中以速度  $v$  运动。如果碰撞中没有物质消失, 那么可以期望, 复合球在  $\Sigma$  中的静质量等于  $2m_0$ , 在这种情况下碰撞后  $\Sigma$  中总动量等于

$$\bar{p}_x = \frac{2m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 2\gamma m_0 v. \quad (5.134)$$

将此与方程(5.131)比较, 可以看出, 如果静质量是  $2m_0$ , 则动量在碰撞中会不守恒。为了使动量在  $\Sigma$  中守恒, 方程(5.134)中量  $2m_0$  不得不用  $M_0 = (2m_0 + Q'/c^2)$  代替。于是如果要求在  $\Sigma$  中动量守恒, 就有一个等于  $Q'v/[c^2(1 - v^2/c^2)^{1/2}]$  的动量是与碰撞中产生的热相联系的。此热量与复合球一起以速度  $v$  在  $\Sigma$  中运动, 它的动量在  $\Sigma$  中相当于惯性质量等于  $Q'/[c^2(1 - v^2/c^2)^{1/2}]$  的动量, 在  $\Sigma'$  中惯性质量为  $Q'/c^2$ 。碰撞后复合球在  $\Sigma$  中的总能量则将等于  $M_0 c^2 / (1 - v^2/c^2)^{1/2} =$

$\gamma(2m_0c^2 + Q')$ . 与方程(5.133)比较, 将看出总能量也守恒, 因为这里已经假设在  $\Sigma'$  中  $T' = Q'$ .

如果球是完全弹性的, 则它们将在  $\Sigma'$  中暂时静止, 并且动能  $T'$  将转化为弹性能. 如果碰撞过程中动量在  $\Sigma$  中守恒, 那么就应当认为有一个惯性质量和动量与这里的弹性能相联系. 在完全弹性碰撞中, 在弹性力影响下, 两球会弹开, 使得以速度  $-u'$  和  $+u'$  相对  $\Sigma'$  沿其原来路径返回.

我们已证明过, 如果在“点”碰撞中动量守恒, 那么按照狭义相对论, 所考虑的各种形式的能量都必然联系有惯性质量和动量, 其关系为: 如果能量是  $\Delta E$ , 则伴随它的惯性质量是  $\Delta m = \Delta E/c^2$ . 如果这对所有形式的能量都是正确的, 那么当一个体系的能量改变时, 这体系的惯性质量也应改变. 相反, 伴随着惯性质量的改变, 应存在能量的改变. 将此原理推广应用到粒子的静质量, 并假设在所有情况下质能都相当, 这是与狭义相对论相符合的. 此相当性实际上是否成立, 当然必需用实验校验. 现在考虑质能相当的一些例子.

## 5.8 质能相当的一些例子

### 5.8.1 原子核的结合能<sup>1)</sup>

构成原子核的质子和中子被某些引力拉在一起. 为了将质子和中子从稳定核中拉出, 一般必须做功, 于是核内粒子的势能必然是负的. 这个负势能应该有与之伴随的“负惯性质量”, 也就是可以期望, 核的惯性质量将小于构成核的单个质子和中子静质量之和. 利用质谱仪从实验中测出的同位素原子质量之值证实了这点. 质量亏损定义为

1) 所引用的质量全用 " $O$  为单位."

$$\Delta m = Zm_H + (A - Z)m_n - M_{Z,A},$$

其中  $m_H = 1.008142$  原子质量单位是氢原子的质量,  $m_n = 1.008982$  原子质量单位是自由中子的质量,  $M_{Z,A}$  是含有  $Z$  个质子及  $A - Z$  个中子的原子的原子量. 质量亏损是由于核结合能引起的. 如果公式  $\Delta E = \Delta mc^2$  是正确的, 那么核的总结合能由下式给出:

$$\Delta E \text{ (兆电子伏)}$$

$$= 931[1.008142Z + 1.008982(A - Z) - M_{Z,A}],$$

这里已经用了 1 原子质量相当于 931 兆电子伏. 把它除以质量数  $A$  可以得到每个质子或中子的平均结合能. 各种核的结果如图 5.11 所示. 结合能是负的.

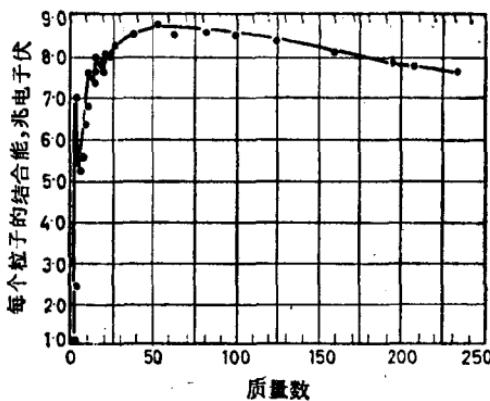
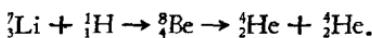


图 5.11 在每一质量数的大多数稳定核中每个粒子的平均结合能.

关系式  $\Delta E = \Delta mc^2$  的首次实验证实是由高克洛夫特 (Cockcroft) 和瓦尔顿<sup>[11]</sup> (Walton) 做出的, 他们把质子加速到能量为 0.25 MeV. 高克洛夫特和瓦尔顿观察到, 当这些质子注射到锂靶上时, 有时发出两个  $\alpha$  粒子, 这两个  $\alpha$  粒子沿相反方向运动. 根据  $\alpha$  粒子的射程, 高克洛夫特和瓦尔顿估算出, 每

一个 $\alpha$ 粒子的动能是 8.6 兆电子伏，在反应中动能的增加等于  
 $(2 \times 8.6 - 0.25)$  兆电子伏 = 16.95 兆电子伏，  
 其中 0.25 兆电子伏代表入射质子的动能。高克洛夫特和瓦尔顿认为，发生的反应是



利用当时能得到的原子质量数值，高克洛夫特和瓦尔顿算出，

$$^3\text{Li} + ^1\text{H} - 2^1\text{He} = (0.0154 \pm 0.003) \text{ 原子质量单位}$$

假若关系式  $\Delta E = \Delta mc^2$  正确，则此质量差相当于  $(14.3 \pm 2.7)$  兆电子伏的能量差。这与观察到的动能增加 16.95 兆电子伏相当符合。如果使用更新近的原子质量值，这一符合还要更好。做了许多相似的实验，所有情况都可以利用关系式  $\Delta E = \Delta mc^2$ ，由反应前后粒子的原子质量差，算出核反应中释放或吸收的能量。

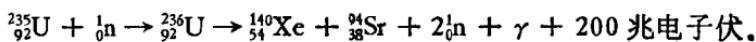
当质子和中子结合而形成原子核时，因为结合能是负的，必然放出能量；例如，如果有可能将两个质子与两个中子“混合”而形成一个氦核，则质量损失就会是  $2^1\text{H} + 2^1\text{n} - ^4\text{He} = 0.030$  原子质量单位，从而就会释放出与之相当的能量 28 兆电子伏。这类核反应叫做聚变或热核反应。一般认为热核反应是恒星产生能量的主要原因。存在两个主要核反应循环，一个是质子-质子连锁，它在比太阳小的恒星中起主导作用，另一个是 C, N, O 循环，它在较大的恒星中起主导作用 [伽模(Gamow) 和克利奇费特<sup>[12]</sup> (Critchfield)]。这两种情况的结果都是由四个质子形成一个氦核，每形成一个氦核放出 26.7 兆电子伏的能量。

根据从太阳到达地球的能量，可以估算太阳辐射的总能量。太阳辐射的能量等于  $4 \times 10^{26}$  焦耳/秒。因此

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{4 \times 10^{26}}{9 \times 10^{16}} \approx 4.4 \times 10^9 \text{ 千克} \approx 4.5 \times 10^6 \text{ 吨}.$$

这样太阳质量每秒要损失四百多万吨。这与太阳整个质量相比是很小的，太阳质量为  $1.98 \times 10^{30}$  千克，即  $2.1 \times 10^{27}$  吨。

核反应的另一重要类型是裂变。从图 5.11 可看出，在原子量数值很高时，原子核中每个核子（质子或中子）的平均结合能降低。在像铀之类很大的原子核中，质子和中子结合得不像在质量数 100 左右中等大小的原子核那样紧。如果一个原子核（例如铀）分成两个，那么因为在生成的核中，质子和中子结合得更紧，所以应释放出能量。 $^{235}\text{U}$  核裂变的典型例子是



### 5.8.2 动能

5.3 节中证明了，当粒子的动能增加时，它的惯性质量要改变。这导致惯性质量随速度的变化，此结果已证明与实验一致（参阅 5.4.3 节）。

### 5.8.3 电磁辐射（光量子）

根据经典电磁理论，光被认为是一种波动形式，并假设这种波的能量通量由波印廷矢量  $\mathbf{S}$  给出，它以下述关系式与电场强度  $\mathbf{E}$  和磁场强度  $\mathbf{H}$  相关联：

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (5.135)$$

还假定了波印廷矢量代表每秒通过垂直于矢量  $\mathbf{S}$  的单位面积的能量。按照 5.7 节建立的概念，此能量流应该伴随有一动量流。如果这是正确的，那么当光在物体表面被反射时，因为能量流和动量流的方向改变了，所以应该存在从光到反射物的动量转移。在狭义相对论建立之前，列别捷夫在 1900 年首次证明有辐射压力存在。

1900 年普朗克引进辐射以能量的不连续包裹，即量子形

式，发射的概念。按照普朗克的意见，如果辐射的频率是  $\nu$ ，那么每个量子的能量等于  $h\nu$ ，其中  $h$  叫做普朗克常数，并等于  $6.625 \times 10^{-34}$  焦耳秒。这样一个量子通常叫做光子，如果它的能量非常高，它有时也称为  $\gamma$  射线。爱因斯坦用量子概念解释光电效应，并提出如果频率为  $\nu$  的光入射到物体表面上，则当一些单个光子被吸收时，从表面发射出一些分立的光电子。按照爱因斯坦的想法，每个这种电子的动能等于  $h\nu - \phi$ ，其中  $\phi$  是功函数。

以光速行进的一些个体光子的存在，现在已是一个公认的实验事实。对于静质量为  $m_0$  的粒子，有

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; \quad \mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}};$$

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (5.136)$$

当  $u$  趋近  $c$  时，每一式的分母趋于零，但是如果静质量也趋于零，上述每个量仍可以是有限值。如果当  $u \rightarrow c$  时  $m_0 \rightarrow 0$ ，而使  $m_0/(1 - u^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$  等于  $k$ ，那么

$$m = k; \quad \mathbf{p} = k\mathbf{c}; \quad E = kc^2. \quad (5.137)$$

既然对于光子， $E$  等于  $h\nu$ ，于是  $k$  必然等于  $h\nu/c^2$ ，因此，按照狭义相对论，能量为  $h\nu$  的光子具有动量  $h\nu/c$  及与其伴随的惯性质量  $h\nu/c^2$ 。有时说，光子静质量为零。由于光子以光速行进，不可能找到光子静止的惯性系，所以静质量一词严格说来是不适用于光子的。

康普顿将上述理论成功地用于解释现在通称为康普顿效应的现象。康普顿用实验证明，当一个单色 X 射线束被轻元素（例如碳）散射时，散射辐射由两部分组成，一部分与入射辐射具有相同波长，另一部分具有稍长的波长。为了解释较长波长的出现，康普顿提出，散射过程可以看做为单个光子和一

自由电子间的弹性碰撞。设沿正  $x$  方向运动的，能量为  $h\nu$  动量为  $h\nu/c$  的光子射到在惯性系  $\Sigma$  中静质量为  $m_0$  的静止电子上，如图 5.12 所示。选择  $y$  轴方向使得碰撞后的散射光子

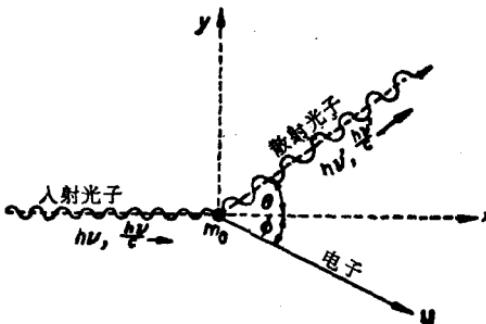


图 5.12 康普顿效应。能量为  $h\nu$ ，动量为  $h\nu/c$  的光子打到静质量为  $m_0$  的静止电子上。碰撞后光子具有能量  $h\nu'$ （它小于  $h\nu$ ）和动量  $h\nu'/c$ 。电子的反冲速度为  $u$ 。

和反冲电子处于  $xy$  平面上。设碰撞后光子具有能量  $h\nu'$ ，并沿着与  $x$  轴成角  $\theta$  的方向离开，并设电子离开的方向为角  $\phi$ ，速度为  $u$ ，如图 5.12 所示。按照能量守恒定律，

$$h\nu + m_0 c^2 = h\nu' + mc^2, \quad (5.138)$$

其中  $m = m_0/(1 - u^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$  是碰撞后电子的相对论质量。因为  $c = \lambda\nu = \lambda'\nu'$ ，方程(5.138)可以写为

$$mc = \frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'} + m_0 c.$$

两边平方，得

$$m^2 c^2 = \frac{h^2}{\lambda^2} + \frac{h^2}{\lambda'^2} - \frac{2h^2}{\lambda\lambda'} + 2m_0 c \left( \frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'} \right) + m_0^2 c^2$$

即是

$$(m^2 - m_0^2)c^2 = \frac{h^2}{\lambda^2} + \frac{h^2}{\lambda'^2} - \frac{2h^2}{\lambda\lambda'} + 2m_0 c \left( \frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'} \right). \quad (5.139)$$

由动量守恒定律,

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos\theta + mu \cos\phi,$$

$$0 = \frac{h\nu'}{c} \sin\theta - mu \sin\phi.$$

整理后,

$$mu \cos\phi = \frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'} \cos\theta,$$

$$mu \sin\phi = \frac{h}{\lambda'} \sin\theta.$$

平方并相加,

$$m^2 u^2 = \frac{h^2}{\lambda^2} - \frac{2h^2}{\lambda\lambda'} \cos\theta + \frac{h^2}{\lambda'^2}. \quad (5.140)$$

而

$$m^2 c^2 = m_0^2 c^2 / (1 - u^2/c^2),$$

即

$$m^2 c^2 - m^2 u^2 = m_0^2 c^2,$$

所以  $m^2 u^2 = (m^2 - m_0^2) c^2$ , 于是方程(5.139)和(5.140)的右边可以相等, 给出

$$-\frac{2h^2}{\lambda\lambda'} + 2m_0 c \left( \frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'} \right) = -\frac{2h^2}{\lambda\lambda'} \cos\theta.$$

因此,

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos\theta). \quad (5.141)$$

代入  $h$ ,  $m_0$  和  $c$  的数值, 得到

$$\Delta\lambda = 0.0242(1 - \cos\theta) \text{ 埃}. \quad (5.142)$$

方程(5.142)表明, 当一光子被自由电子按角  $\theta$  散射时, 散射光子的波长  $\lambda'$  应该大于入射波长, 增大  $0.0242(1 - \cos\theta)$  埃。他所预计的  $\Delta\lambda$  与  $\theta$  的关系已被实验证实。反冲电子的动能也曾测出, 并发现与计算值相符合。于是, 通过对能量为  $h\nu$

的光子赋予动量  $h\nu/c$ , 康普顿能够解释康普顿效应。对于散射过程截面的计算是后来相对论量子力学的进一步发展的结果。

4.4 节中曾说明, 利用光的波动理论, 可以解释大量光学现象, 包括恒星光行差和多普勒效应。现在利用光的光子模型来讨论这些现象。设在惯性系  $\Sigma$  中静止的恒星发出能量为  $h\nu$  的光子。设光子的方向朝着原点, 如图 5.13(a) 所示。在  $\Sigma$  中测得的光子动量具有分量

$$p_x = -(h\nu/c) \cos \alpha; \quad p_y = -(h\nu/c) \sin \alpha; \quad p_z = 0.$$

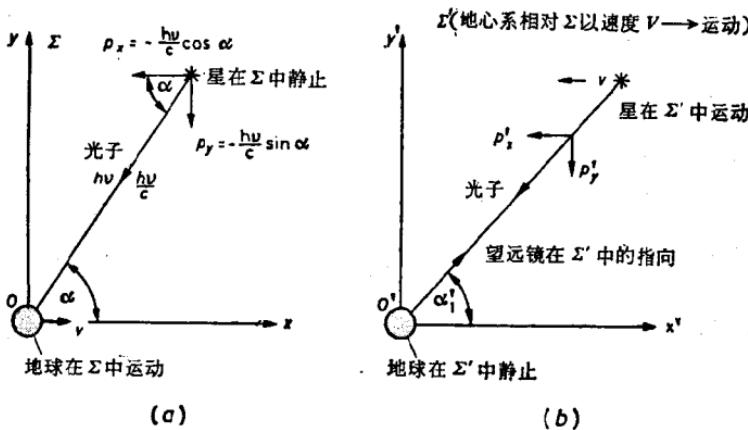


图 5.13 从恒星发出一光子。(a) 在恒星静止的惯性系  $\Sigma$  中, 这光子具有能量  $h\nu$  和动量  $h\nu/c$ 。(b) 利用狭义相对论的动量和能量变换式, 可以计算在地心系中的能量和动量, 这给出恒星光行差的正确公式。

假设光子的动量和能量像单个粒子一样变换。在图 5.13(b) 所示的, 以速度  $v$  相对  $\Sigma$  运动的惯性系  $\Sigma'$  中, 利用方程

$$p'_x = \gamma \left( p_x - \frac{vE}{c^2} \right), \quad (5.78)$$

得到

$$p'_x = \gamma \left( -\frac{h\nu}{c} \cos \alpha - v \frac{h\nu}{c^2} \right) = -\frac{h\nu}{c} (\cos \alpha + v/c).$$

由方程(5.79),

$$\begin{aligned} p'_y &= p_y = -\frac{h\nu}{c} \sin \alpha, \\ \tan \alpha'_1 &= \frac{p'_y}{p'_x} = \frac{\sin \alpha \sqrt{1 - v^2/c^2}}{\cos \alpha + v/c}. \end{aligned} \quad (5.143)$$

此公式与 4.4 节中利用光的波动模型导出的方程(4.30)和(4.41)相一致; 方程(5.143)代表与 4.4.4 节中在相同条件下的行差公式.

为了研究多普勒效应, 考虑与 4.4.7 节中所采用并由图 4.5 所示的相同情况. 设静止在  $\Sigma'$  原点的光源在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  原点重合的时刻  $t' = t = 0$  发射一光子. 设在  $\Sigma'$  中测量的光子频率是  $\nu'$ , 同一光子在  $\Sigma$  中测量的频率是  $\nu$ . 设光子与  $\Sigma$  中  $x$  轴成角  $\theta$ , 于是其动量在  $\Sigma$  中具有分量  $p_x = (h\nu/c) \cos \theta$ ;  $p_y = (h\nu/c) \sin \theta$ ;  $p_z = 0$ . 由方程(5.81),

$$E' = \gamma(E - v p_x),$$

即是

$$h\nu' = \gamma \left( h\nu - v \frac{h\nu}{c} \cos \theta \right),$$

它简化为

$$\nu = \frac{\nu' \sqrt{1 - v^2/c^2}}{(1 - v \cos \theta/c)}. \quad (5.144)$$

这与方程(4.47)一致. 于是根据光的光子模型, 利用光子能量和动量在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中的不同测量值, 可以满意地解释多普勒效应和恒星光行差.

除光子外, 现在一般认为中微子和反中微子也具有“零静质量”, 但与光子不同, 它们具有自旋  $\frac{1}{2}$  ( $h/2\pi$ ). 如果中微子

具有“零静质量”，那么它们必然以光速行进。

#### 5.8.4 电子对的产生和正电子的湮没

将质能相当性扩展到粒子的静质量并写成

$$E = m_0 c^2,$$

就与狭义相对论一致。按照这个关系式，产生一个静质量为  $m_0$  的粒子，将需要消耗等于  $m_0 c^2$  的能量，如果有限静质量的粒子湮没，则将释放出等于  $m_0 c^2$  的能量。发现正电子后不久，便发现了电子对的产生。电子对产生的典型例子如图 5.14 所示。如果一光子的能量  $h\nu > 2m_0 c^2$  ( $m_0$  是电子的静质量)，则此光子可以产生一电子对。此过程不会在真空中自动发生，

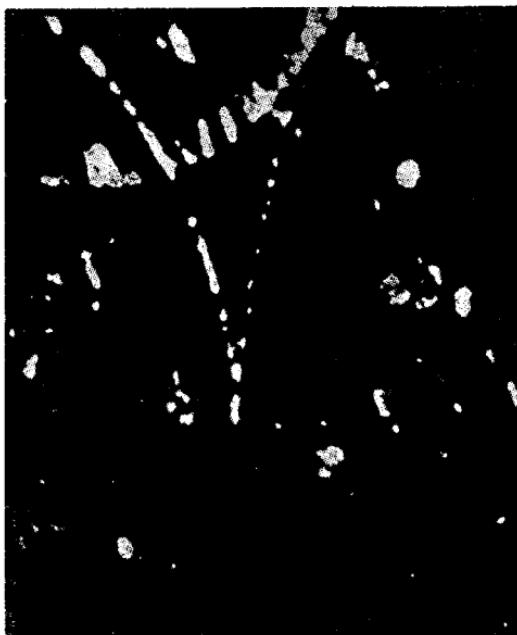


图 5.14 正负电子对的路径的云室照片；当存在磁场时路径弯曲。此电子对由能量大于 1.02 兆电子伏的光子在云室气体中所产生

看来在电子对产生前，需要存在电荷，例如原子核或电子上的电荷。没有带电粒子存在，如电子对产生，则能量和动量就会不能守恒。实验表明，电子对产生时，动量和能量的守恒定律皆成立。一部分辐射能转化成正电子和负电子的静质量。如果光子的能量超过  $2m_0c^2$ ，那么能量中超过此数的部分就将在正负电子和反冲电荷之间进行分配。

当正电子慢下来时，它被负电子吸引并形成电子偶素（positronium）这时，负电子和正电子围绕其质心轨道的运动方式与氢原子相似，不过此时两粒子的质量相等。在最低的波尔轨道上，量子数  $n$  和  $l$  分别为 1 和 0。如果负电子和正电子的自旋方向相反，则形成单态  ${}^1S$ ；如果自旋平行，则形成三重态  ${}^3S$ 。正电子和负电子留在  ${}^1S$  态。约  $10^{-10}$  秒（平均寿命）后，按上述反应彼此湮没：

$$e_+ + e_- = 2h\nu.$$

由于发射两个光子，能量和动量都可以守恒。每个光子的能量应等于  $m_0c^2 = 0.511$  兆电子伏；实验证实了这点。在三重态  ${}^3S$ ，发射三个光子，寿命是  $\sim 1.5 \times 10^{-7}$  秒。既然发射三个光子，因为光子自旋是一个单位，自旋和角动量可以守恒。如果动量守恒，这三个光子必定是共面的；实验证实了这点。在这种情况下，能量统计地分配在三个光子间。正电子湮没是静质量能转化为辐射能的一个例子。

### 5.8.5 粒子衰变

当不稳定基本粒子在静止或飞行中衰变时，利用动量守恒和质-能守恒定律可以解释衰变方式的动力学。作为一个例子，考虑带电  $\pi$  介子静止时的衰变。

当一个带电  $\pi$  介子衰变时，它通常衰变成一个  $\mu$  介子和一个现在认为是中微子的中性粒子。在此  $\pi$  介子衰变时处于

静止的惯性系  $\Sigma'$  (质心系) 中, 如果动量守恒, 则  $\mu$  介子和中微子必然沿相反方向发射, 如图 5.15(b) 所示。在  $\Sigma'$  中

$$p'_\mu = p'_\nu = p'. \quad (5.145)$$

此  $\pi$  介子的一部分静质量能转化成  $\mu$  介子的静质量和中微子的静质量(如果它有静质量), 其余的可利用能表现为  $\mu$  介子和中微子的动能。在  $\Sigma'$  中, 按照能量守恒定律,

$$m_\pi c^2 = E'_\mu + E'_\nu, \quad (5.146)$$

或

$$m_\pi c^2 = \sqrt{\{(m_\mu c^2)^2 + p'_\mu c^2\}} + \sqrt{\{(m_\nu c^2)^2 + p'_\nu c^2\}}, \quad (5.147)$$

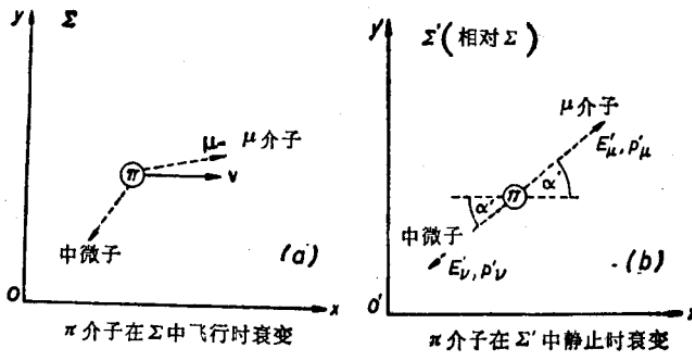


图 5.15  $\pi$  介子的衰变。在  $\Sigma'$  中  $\pi$  介子当其衰变时是静止的。 $\mu$  介子和中微子在  $\Sigma'$  中沿相反方向发射, 如图 (b) 所示。角  $\alpha'$  是衰变中不断变化的参数。在  $\Sigma$  中, 衰变时  $\pi$  介子以速度  $v$  运动, 如图 (a) 所示,  $\mu$  介子和中微子不沿相反方向发射。

其中  $m_\pi$ ,  $m_\mu$  和  $m_\nu$  分别是  $\pi$  介子,  $\mu$  介子和中微子的静质量。

由方程(5.145),

$$c^2 p'_\mu c^2 = c^2 p'_\nu c^2,$$

于是

$$E'^2_\mu - m_\mu^2 c^4 = E'^2_\nu - m_\nu^2 c^4,$$

或

$$(E'_\mu^2 - E'_v^2) = (E'_\mu + E'_v)(E'_\mu - E'_v) = (m_\mu^2 - m_v^2)c^4. \quad (5.148)$$

由方程(5.146),

$$(E'_\mu + E'_v) = m_\pi c^2. \quad (5.149)$$

用方程(5.149)除方程(5.148), 得到

$$E'_\mu - E'_v = \frac{(m_\mu^2 - m_v^2)c^2}{m_\pi}. \quad (5.150)$$

将方程(5.150)与(5.149)相加, 得到

$$E'_\mu = \frac{(m_\pi^2 + m_\mu^2 - m_v^2)c^2}{2m_\pi}. \quad (5.151)$$

从方程(5.149)减去方程(5.150),

$$E'_v = \frac{(m_\pi^2 + m_\nu^2 - m_\mu^2)}{2m_\pi} c^2. \quad (5.152)$$

方程(5.151)和(5.152)分别给出  $\mu$  介子和中微子在惯性系  $\Sigma'$  ( $\pi$  介子衰变时在其中静止) 中的总能量。  $\mu$  介子和中微子在  $\Sigma'$  中的动量由下述关系式给出:

$$cp' = \sqrt{(E'_\mu^2 - m_\mu^2c^4)} = \sqrt{(E'_v^2 - m_\nu^2c^4)}. \quad (5.153)$$

现在  $m_\pi$ ,  $m_\mu$  和  $m_\nu$  分别为电子质量的 273.2 倍, 206.8 倍和 0; 代入方程(5.151)并注意一个电子的静质量相当于 0.511 兆电子伏的能量, 得到  $T'_\mu$  ( $\mu$  介子在  $\Sigma'$  中的动能) 等于 4.1 兆电子伏。类似地, 代入方程(5.152), 得到  $E'_v = T'_v = 29.8$  兆电子伏。按照方程(5.153), 如果  $m_\nu = 0$ , 则  $p' = 29.8$  兆电子伏/ $c$ 。

如果  $\pi$  介子在飞行中衰变, 如图 5.15(a) 所示, 利用 5.5 节中导出的单个粒子能量和动量的变换式 [方程(5.83), (5.84), (5.85) 和 (5.86)], 可以算出  $\mu$  介子和中微子在实验室系  $\Sigma$  中的能量和动量。 $\mu$  介子与  $\Sigma'$  中  $x'$  轴所成的角度  $\alpha'$  是一个参数, 在不同衰变中可以不同。另一方面, 能量和动量守

恒定律可以直接用于实验室系  $\Sigma$ , 在其中  $\pi$  介子在飞行中衰变。随着母体  $\pi$  介子能量相对实验室不断增加, 发射的  $\mu$  介子越来越靠近母体  $\pi$  介子在实验室系中的运动方向。

当不稳定粒子衰变成二个粒子时, 上述分析总成立。如果  $M$  是衰变粒子的静质量,  $m_1$  和  $m_2$  是次级粒子的静质量, 那么方程(5.151),(5.152)和(5.153)变为

$$E'_1 = (M^2 + m_1^2 - m_2^2)c^2/2M; \quad (5.154)$$

$$E'_2 = (M^2 + m_2^2 - m_1^2)c^2/2M; \quad (5.155)$$

$$cp' = \sqrt{(E'_1)^2 - m_1^2c^4} = \sqrt{(E'_2)^2 - m_2^2c^4}. \quad (5.156)$$

有些基本粒子衰变成三个粒子, 例如  $\mu$  介子衰变成一个电子和二个中微子。有时  $K$  介子衰变成三个粒子, 例如起初叫做  $\tau$  介子的, 其衰变方式为

$$K^+ (\text{或 } \tau^+) \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-.$$

当  $\tau^+$  介子在核乳剂中衰变时, 三个  $\pi$  介子的路径是可见的, 而且如果它们在核乳剂中终止, 则由它们在乳剂内的射程, 可以算出它们的能量。发现三个  $\pi$  介子是共面的, 如果动量守恒它们就应该是这样。还发现, 虽然可得的动量和能量统计地分配在三个  $\pi$  介子中间, 衰变中能量和动量也都是守恒的。利用能量和动量守恒定律可以解释所有粒子衰变的动力学。其它定律, 如电荷守恒、自旋和角动量守恒、重子数守恒和轻子数守恒定律也成立。在三粒子衰变中, 能量和动量统计地分配到衰变粒子中间。虽然这些能量和动量符合动量和能量守恒定律, 这些定律本身没有谈到各种能量值的概率。例如, 为了计算  $\mu$  介子衰变出的电子的能量分布, 必须利用精确的介子理论。

### 5.8.6 介子的产生

当快速质子或中子与原子核相碰时, 可以产生  $\pi$  介子,

只要入射粒子的能量足够高，生成的带电 $\pi$ 介子的质量是273.2电子质量，中性 $\pi$ 介子是264.4电子质量。在这些碰撞中入射粒子的部分动能转化为 $\pi$ 介子的静质量能。能量更高时可以产生 $K$ 介子、核子、负质子、反中子和超子。用高能光子也可以产生介子。实验表明，在这些碰撞中，动量和能量守恒定律成立。对于讨论动力学和解释这类碰撞感兴趣的读者，可参阅布拉顿<sup>[13]</sup> (Blaton)，迪居克<sup>[14]</sup> (Dedrick) 以及包威尔 (Powell)，否勒 (Fowler) 和泊金斯<sup>[15]</sup> (Perkins) 的著作。我们仅限于简单地讨论一些更重要的内容。

不可能将碰撞粒子的全部动能都转化为某一种另外形式的能量(除非实验室系就是质心系，例如当相等静质量的两个粒子以相等的速度互相接近时)。设静质量为 $m_1$ ，动量为 $p_1$ ，总能为 $E_1$ 的入射粒子与静质量为 $m_2$ 的静止粒子相碰。5.6节证明了，碰撞前两粒子动量之和的变换方式与单个粒子的动量变换相同。利用方程(5.108)，碰撞前有

$$p'_x = \gamma(p - vE/c^2),$$

其中在碰撞前  $p = p_1$  和  $E = (m_1^2c^4 + c^2p_1^2)^{1/2} + m_2c^2$ 。在质心系中  $p' = 0$ ，因此

$$\begin{aligned} v &= u_{\text{质心}} = pc^2/E = \frac{p_1c^2}{(E_1 + m_2c^2)} \\ &= \frac{p_1c^2}{\sqrt{(p_1^2c^2 + m_1^2c^4) + m_2c^2}}. \end{aligned} \quad (5.157)$$

由于在质心系中，碰撞前  $p' = 0$ ，如动量守恒，有可能碰撞后在质心系中粒子静止而动能为零。但由方程(5.157)如  $p$  和  $E$  相对于  $\Sigma$  守恒，则碰撞后，质心系和相对于它为静止的粒子必定相对于实验室系以速度  $u_{\text{质心}}$  继续运动。因此，实验室系中具有的全部动能不能都在碰撞中损失掉，这几点可用取自牛顿力学的一个例子来说明。

设运动速度为  $u_1$ , 静质量为  $m_1$  的球与静质量为  $m_2$  的静止球对头碰撞。设碰撞后两球运动方向相同, 速度分别为  $u'_1$  和  $u'_2$ 。由动量守恒定律和牛顿碰撞实验定律,

$$m_1 u_1 = m_1 u'_1 + m_2 u'_2$$

及

$$(u'_1 - u'_2) = -e u_1,$$

其中  $e$  是恢复系数。碰撞前总动能是  $\frac{1}{2} m_1 u_1^2$ 。利用牛顿力学

的简单计算表明, 碰撞后总动能是

$$\frac{1}{2} m_1 u'_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u'_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 - \frac{1}{2} (1 - e^2) \frac{m_1 m_2 u_1^2}{(m_1 + m_2)}.$$

因为碰撞前总动能是  $\frac{1}{2} m_1 u_1^2$ , 碰撞中动能损失是  $\frac{1}{2} (1 - e^2) m_1 m_2 u_1^2 / (m_1 + m_2)$ 。当  $e = 0$  时, 也就是当碰撞是完全非弹性时, 动能损失最大, 此时动能损失是  $\frac{1}{2} m_1 m_2 u_1^2 / (m_1 + m_2)$ 。

在质心系中总动量是零。按照伽利略速度变换, 碰撞前在质心系中  $m_1$  的速度是  $(u_1 - u_{\text{质心}})$ ,  $m_2$  的速度是  $-u_{\text{质心}}$ 。因此,

$$m_1 (u_1 - u_{\text{质心}}) - m_2 u_{\text{质心}} = 0 \quad \text{或} \quad u_{\text{质心}} = \frac{m_1 u_1}{(m_1 + m_2)}.$$

碰撞前在质心系中的总动量是  $\frac{1}{2} m_1 (u_1 - u_{\text{质心}})^2 + \frac{1}{2} m_2 u_{\text{质心}}^2$ 。

替换  $u_{\text{质心}}$  得到, 碰撞前质心系中总动能是  $\frac{1}{2} m_1 m_2 u_1^2 / (m_1 + m_2)$ 。

于是如果  $e = 0$ , 质心系中具有的全部动能都在碰撞中损失。

当  $e = 0$  时, 碰撞后两球的相对速度是零, 亦即它们粘在一起, 它们都以速度  $u_{\text{质心}}$  相对实验室系运动。如果  $e = 0$ , 碰撞

后相对实验室系的动能是  $\frac{1}{2} (m_1 + m_2) u_{\text{质心}}^2$ , 这说明, 相对实验室系动能没有完全损失。由于质心系中静止的粒子有相对于实验室的运动, 在实验室系中始终有一些动能。

利用质心系中具有的可用能来讨论原子粒子的非弹性碰撞是方便的。利用碰撞前碰撞粒子在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中的动量之和与总能量之和的方程(5.83)一(5.86),直接替换得

$$p^2 - E^2/c^2 = p'^2 - \frac{E'^2}{c^2}. \quad (5.158)$$

现在如果碰撞前被碰撞粒子在实验室系中是静止的,而运动粒子具有总能  $E_1$ ,则有  $E = E_1 + m_2 c^2$ . 如果  $\Sigma'$  是质心系,则  $p' = 0$ . 因此方程(5.158)变为

$$E'^2 = (E_1 + m_2 c^2)^2 - p^2 c^2. \quad (5.159)$$

对于粒子 1 在碰撞前

$$p_1^2 c^2 = E_1^2 - m_1^2 c^4.$$

碰撞前粒子 2 的动量是零. 代入方程(5.159)并取平方根,得

$$E' = (2m_2 c^2 E_1 + m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.160)$$

此为在质心系中可用的总能量. 它包括碰撞粒子的静质量能. 在相对论的极端情况  $u_1 \approx c$ ,  $m_1 c^2 \ll E_1$  及  $m_2 c^2 \ll E_1$ , 则质心系中可用的总能量  $E' \approx (2m_2 c^2 E_1)^{\frac{1}{2}}$ . 因此在极高能量时, 质心系中可用的能量近似地随入射粒子的能量  $E_1$  的平方根增加. 对于入射到静止核子(即质子或中子)上的、能量为 30 千兆电子伏的质子, 在质心系中大约有 7 千兆电子伏的总可用能量. 对于 300 千兆电子伏的质子, 质心系中具有的可用能量约等于 22 千兆电子伏.

质心系中可用总能量的一部分转化为碰撞后出现的粒子的静质量. 这些粒子与碰撞粒子可能相同, 也可能不同. 有时产生新粒子. 例如, 设反应如图 5.16 所示. 设  $\Delta m$  是新粒子的静质量之和. 为了求出产生新粒子所需的最小能量, 将假设, 碰撞后在质心系中, 全部粒子都是静止的. 由方程(5.160), 对于质心系中具有的总可用能  $E'$  有

$$E'^2 = 2m_2 c^2 E_1 + m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4. \quad (5.161)$$

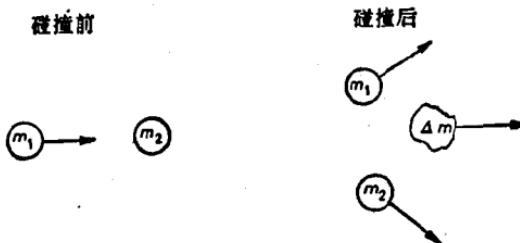


图 5.16 静质量为  $m_1$  和  $m_2$  的两粒子相碰撞。碰撞后静质量的增加等于  $\Delta m$ .

碰撞后,如果在质心系中动能全部是零,那么

$$E'^2 = \{m_1 c^2 + m_2 c^2 + (\Delta m) c^2\}^2. \quad (5.162)$$

令方程(5.161)和(5.162)的右边相等,对于  $T_1 = E_1 - m_1 c^2$  便得到

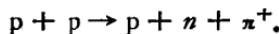
$$T_1 = (\Delta m) c^2 \left\{ 1 + \frac{m_1}{m_2} + \frac{\Delta m}{2m_2} \right\}. \quad (5.163)$$

这是为了产生总静质量为  $\Delta m$  的附加粒子所必须的动能,只要碰撞粒子的静质量不变. 做为一个例子,考虑反应



在这个反应中,一个人射光子与一个静止的质子相碰,产生一个  $\pi^0$  介子. 利用  $p = 1836m_e$ ,  $\pi^0 = 264.4m_e$ , 求出  $T_1$  等于 145 兆电子伏. 因此如果与质子的碰撞中要能产生一个  $\pi^0$  介子,人射光子的能量必须超过 145 兆电子伏.

作为另一个例子,考虑反应



忽略中子和质子静质量的差别,并把  $\pi$  介子的静质量取为  $273.2m_e$ , 我们求出  $T_1 = 290$  兆电子伏. 于是为了在质子-质子碰撞中产生  $\pi^+$  介子,入射质子必须具有超过 290 兆电子伏的动能. 值得注意,为了产生  $\pi$  介子,光子的临阈能显著地小于质子临阈能. 在产生质子-反质子对的碰撞中,按照反

应

$$p + p = p + p + \bar{p},$$

要求在实验室系中质子的动能至少为 5.6 千兆电子伏。如果入射动能超过临界动能，多出的能量分配到碰撞后存在的粒子中间。更充分的讨论，读者可参阅杰克逊<sup>[18]</sup> (Jackson) 的著作。

## 5.9 关于相对论力学的评述

本章所阐述的理论不是由相对性原理和光速不变原理推导得出。采用的途径是试图修正牛顿力学定律，使得当坐标、时间和速度按照狭义相对论变换式变换时，它们服从相对性原理。这样就必须重新定义质量，使得物体质量随其速度而变，而这又必须依次重新定义动量、力、能量，等等。得到的理论证明与实验结果非常符合。单粒子的动力学以下述方程为基础：

$$\mathbf{f} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) = q \mathbf{E} + q \mathbf{u} \times \mathbf{B}. \quad (5.164)$$

对于仅对电子光学感兴趣的人，直接假设方程(5.164)比从相对性原理和光速不变原理出发会更方便些。这一途径避免了讨论长度缩短、时间膨胀，等等，因为方程(5.164)可以直接用于实验室坐标系，不需要讨论坐标和时间从一个参考系到另一个的变换。在介绍原子物理的教程中，这一途径很值得推荐。[方程(5.164)]的证实将是：根据它所作的预言与实验结果非常符合。

碰撞的考虑导致惯性质量和能量相当的概念。5.8 节中概述了能量从一种形式转化到另一种的各类过程。证明了惯性质量的变化是和各种形式能量的变化相伴随的。这些结果

可以概括为惯性质量和能量的相当定律。能量和惯性质量通常被解释为物质的不同属性，例如，粒子的能量通常被解释为作功能力的度量，而粒子的惯性质量是粒子抵抗其运动改变的度量。质能相当定律不是意味着，质量有时能够转化成能量，也不是说能量转化为质量，而是说，一种变化伴随着另一种相应的变化，惯性质量和能量彼此成正比。因此质量守恒定律等价于能量守恒定律，因而有时把它们放在一起，叫做质能守恒定律。

5.6 节中证明了，假设在“点”事件中动量和总能量守恒，是与狭义相对论一致的。说明了这些守恒定律怎样导出与实验结果相符合的预言。可以计算在碰撞或衰变过程中粒子的动量和能量间的关系。应该记住，动量和能量守恒定律给出这些过程的完整理论。作为一个例子，考虑 5.8.3 节中讨论过的康普顿效应。已说过的理论给出散射光子的频率（和能量）随角度的变化，但不给出一碰撞发生的几率，也不给出各种散射角的相对几率。为了得到更完整的理论，不得不引进附加假设。后来有了相对论量子力学的发展及其对康普顿效应的应用[克雷 (Klein) 和尼西纳<sup>[16]</sup> (Nishina)]才得到了康普顿效应的完整理论。但是，因为新理论与狭义相对论相符合，所以利用新理论计算出的碰撞中粒子间的动力学关系必须与利用 5.7 和 5.8 节所述方法计算出的相同，当然要受到测不准原理的限制。

在 5.7. 和 5.8 节所描述的所有现象中，总能量和动量都是守恒的。看来，如果不存在带电粒子，使得能量和动量可以守恒，电子对产生之类的现象不会发生。应该强调，考虑的全部现象都是近似为在一瞬时发生在空间一点的事件。当在惯性系  $\Sigma$  中，分别处在空间  $x_1$  和  $x_2$  点的两个粒子（例如二电荷），彼此产生导致其动量改变的电磁力时，如果在一个惯性

系  $\Sigma$  中动量守恒，那么假若这两个分立的电荷的动量变换到  $\Sigma'$  中，则变换后的动量值分别属于时间  $t'_1 = \gamma(t - vx_1/c^2)$  和  $t'_2 = \gamma(t - vx_2/c^2)$ ，而不属于  $\Sigma'$  中的同一个时间。因为动量连续地变化，所以对于空间不同处的相互作用的带电粒子，不可能得到在所有惯性系都成立的动量守恒定律，除非对电磁场赋予动量。7.5 节中将详细讨论分开的运动电荷间的电磁力。类似的讨论可以用于有限大小的碰撞粒子。但是，存在大量的现象表明，在很好的近似程度上，可以认为它们是瞬时发生在空间一点的事件。实验证明，在这些事件中，动量守恒定律和质-能守恒定律是成立的。必须记住，最后这一点一定要受到测不准原理的限制。

在讨论“点”粒子力学之后，在牛顿力学中，通常把理论扩展到有限大小的刚体、连续介质力学、流体动力学、等等。因为流体和大物体几乎全是以远小于光速的速度运动，所以对牛顿力学的偏离实际上不重要。而且，利用张量方法讲述这些课题更方便。由于这些原因，这些课题将不在此考虑。但是，感兴趣的读者可参阅谬勒、托尔曼、泡利、福克等所著的书。目前的讨论将仅限于有关“刚”体的一点评述。

在牛顿力学中，刚体定义为这样的物体：其中构成物体的任意两质点间的距离是不变量。如果力（它沿两质点的联线有分量）作用在一个质点上，使其移动，那么按照牛顿力学，这一力必然立即引起第二个质点位置的相应变化，使得两质点间的距离保持相同；否则，两质点间的距离将改变，而物体将不是按经典定义的刚体。因此，在经典意义上，刚体能够以无限的速度传递它的两个组成部分间的力。按照狭义相对论，能量和动量（因此还有力）不能够以超过光速的速度传递，所以按照狭义相对论，不存在严格经典意义上的刚体，因而刚体的概念很少引进狭义相对论中。有时为了讨论的目的，引

进刚体的概念，例如引用麦克利<sup>[17]</sup>的话：

“因此现在我们把刚性 棒 定义为这样的棒：冲击沿着它以光速  $c$  传播。

因为我们把棒当做一维物体处理并且仅考虑纵向运动，所以不再要求其它条件。而且，因为这理论不允许存在有比它“刚性更大”的物体，所以不妨在这个意义上采用刚性一词”。

乍看起来这个新定义好像把像钢棒之类的日常固体的普通概念取消了。考虑纵波在这样棒中的传播。设棒是均匀的，其构成的材料在每单位长度上的原质量为  $m_0$ ，它的弹性模量为  $\lambda$ 。再用麦克利的话说：

“按照经典力学和相对论力学，小振幅的纵波速度都是  $v$ ，其中

$$v^2 = \lambda/m_0.$$

因为没有耗散，所以这也是小振幅脉冲横穿棒的速度。我们已经看到，相对论要求  $v \leq c$ ，因此我们必然有

$$\lambda \leq m_0 c^2.$$

于是相对论强加给模量  $\lambda$  一个上限  $m_0 c^2$ 。实际上对于钢  $\lambda/m_0$ （它等于杨氏模量与密度之比）大约为  $3 \times 10^{11}$  c.g.s. 单位，而  $c^2$  为  $9 \times 10^{20}$  c.g.s. 单位，所以相对论的上限是没有任何实际意义的，即使是对已知的刚性最大的物体。

在经典物理学中为了测量坐标通常把经典的刚体作为理想的参考系。在相对论中不能用这样的参考系，因为长度不是不变的。另一方面，按照狭义相对论，光在所有惯性系中都以相同速度沿直线传播，于是直线可用光路来定义，而距离可利用 3.6 节中描述的雷达方法来测量。

## 参 考 文 献

- [1] Lewis, G. N. and Tolman, R. C. *Phil. Mag.* 18(1909) 510
- [2] Siegbahn, K. *Beta and Gamma-ray Spectroscopy*. Ch. 3. North

- Holland Publishing Co., Amsterdam, 1955
- [ 3 ] Bucherer, A. H. *Verh. dtsch. Phys. Ges.* **6**(1908) 688
  - [ 4 ] Wapstra, A. H., Nijgh, G. J. and van Lieshout, R. *Nuclear Spectroscopy Tables*. North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1959
  - [ 5 ] McMillan, E. M. *Experimental Nuclear Physics*. Part XII, 'Particle accelerators'. (Ed. by Segrè, E.) John Wiley, New York, 1959
  - [ 6 ] Rosser, W. G. V. *Contemporary Physics* **1**(1960) 453
  - [ 7 ] Blackett, P. M. S. and Champion, F. C. *Proc. Roy. Soc. A***130** (1931) 380
  - [ 8 ] Champion, F. C. *Proc. Roy. Soc. A***136**(1932) 630
  - [ 9 ] Jüttner, F. *Z. Math. Phys.* **62**(1914) 410
  - [10] Jánossy, L. *Cosmic Rays*. p. 82. Oxford University Press, London, 1948
  - [11] Cockcroft, J. D. and Walton, G. T. S. *Proc. Roy. Soc. A***137** (1932) 229
  - [12] Gamow, G. and Critchfield, C. L. *Atomic Nucleus and Nuclear Energy Sources*. Ch. 10. Oxford University Press, London, 1949
  - [13] Blaton, J. K. *danske vidensk. Selsk. Mat.-Fys. Medd.* **24**(1950) No. 20
  - [14] Dedrick, K. G. *Rev. mod. Phys.* **34**(1962) 429
  - [15] Powell, C. F., Fowler, P. H. and Perkins, D. H. *The Study of Elementary Particles by the Photographic Method*. Pergamon Press, Oxford, 1959
  - [16] Klein, O. and Nishina, Y. *Z. Phys.* **52**(1929) 853
  - [17] McCrea, W. H. *Sci. Proc. R. Dublin Soc.* **26**(1952) 27
  - [18] Jackson, J. D. *Classical Electrodynamics*. Wiley, New York, 1962

### 补充读物

本章给出的相对论力学的处理方法与谬勒在《相对论》中所给出的相类似。在 5.2a 节中质量随速度变化的推导与 M. 玻恩在《爱因斯坦的相对论》(第一版)中所给出的相同。关于加速器的说明,读者可参阅麦克密伦的著作,关于电子光学的说明,参阅柯斯雷特 (Cosslett) 的《电子光学导论》(*Introduction to Electron Optics*) 和柯伦培 (Klemperer) 的《电子光

学》(Electron Optics)。相对论力学，包括连续介质力学和固体弹性力学的更详尽的讨论，读者可参阅托尔曼的《相对论、热力学和宇宙论》(Relativity, Thermodynamics and Cosmology)，福克的《空间、时间和引力理论》(The Theory of Space, Time and Gravitation)，泡利的《相对论》(The Theory of Relativity)和柏格曼的《相对论引论》(Introduction to the Theory of Relativity)。

## 习 题

5.1 从考虑两球的弹性碰撞说明，如果要使它与狭义相对论相一致，牛顿力学理论必须怎样修改。

5.2 评论质量随速度变化的实验证据。

5.3 计算经电位差 (a) 10000 伏，(b) 100,000 伏和 (c) 1,000,000 伏加速的电子的速度。每种情况的相对论质量和静止质量之比是多少？(提示：利用三角替换由  $u/c$  计算  $m/m_0$ )。

5.4 计算动能为 (a) 10 兆电子伏，(b) 100 兆电子伏和 (c) 1000 兆电子伏的质子的速度。

5.5 证明如果粒子是高度相对论性的，即  $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-\frac{1}{2}} \gg 1$ ，则  $c$  和  $v$  之间的分比差近似为  $\frac{1}{2} \{(m_0 c^2)/E\}^2$ ，其中  $E$  为总能。

5.6 计算速度为 (a)  $0.3c$ ，(b)  $0.8c$ ，(c)  $0.99c$  和 (d)  $0.999c$  的电子在强度为 1 韦伯/米<sup>2</sup>(即 10,000 高斯)的磁场中径迹的曲率半径。

5.7 计算速度为  $0.1c$  的质子在强度为 1 韦伯/米<sup>2</sup>(即 10,000 高斯)的磁场中径迹的曲率半径。

5.8 描述一个能够聚焦能量到 3 兆电子伏的电子的  $\beta$

射线摄谱仪(参阅 Siegbahn<sup>[2]</sup>).

5.9 讨论下列加速器的物理原理: (a) 迴旋加速器; (b) 同步迴旋加速器; (c) 电子同步加速器; (d) 电子线性加速器(参阅 McMillan<sup>[3]</sup>).

5.10 静止质量为  $M$  的粒子以速度  $u$  与静止质量为  $m$  的静止粒子相撞. 如果两粒子粘在一起, 证明合成球的速度等于  $u[\gamma M/(\gamma M + m)]$ , 其中  $\gamma = 1/(1 - u^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$ . [提示: 与 5.7 节的处理相同, 但允许碰撞粒子的质量不同.]

5.11 火箭依靠向其运动相反方向发射纯辐射 来推动本身直线地通过真空. 如果  $V$  是它的相对初始静止坐标的最终速度, 证明火箭的初始与最终静止质量之比由下式给出:

$$\frac{M_i}{M_f} = \left[ \frac{c + V}{c - V} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

[提示: 将发射出去的光子的总能量和总动量分别写为  $\Sigma h\nu$  和  $\Sigma h\nu/c$ , 再令加速开始和终了时的能量相等与动量相等.]

5.12 在 30 公里高度上产生一百个  $\mu$  介子, 其静止质量为 206 倍电子质量, 能量为 4.75 千兆电子伏. 如果  $\mu$  介子静止时的平均寿命为  $2.2 \times 10^{-6}$  秒, 计算 (a) 当考虑时间延缓时; (b) 忽略时间延缓时应有多少  $\mu$  介子到达海平面, 假若它们垂直向下行进, 没有电离损失.

5.13 银河系的直径大约是  $10^5$  光年. 如果质子的能量为 (a)  $10^{15}$  电子伏; (b)  $10^{17}$  电子伏; (c)  $10^{19}$  电子伏, 它穿过银河系需要多长时间(在质子静止的坐标系中)?

5.14 计算将电子加速到 (a)  $\frac{1}{2}$  光速; (b)  $\frac{3}{4}$  光速所需要的作功量(用兆电子伏表示). 每种情况的相对论质量与静止质量之比是多少?

5.15 如果按照牛顿力学, 电子速度达到光速时, 它需要

经过多少电势差？按照狭义相对论，这样的电子实际将达到多大的速度？

5.16 如果水从 20°C 加热到 50°C，那么由于其热能的增加，质量增加了多大百分比？

5.17 一能量为  $h\nu$  的入射光子在一次与静止电子的康普顿型的碰撞中被散射过  $180^\circ$  角。计算碰撞后 (a) 电子总能 (b) 光子总能。[提示：应用实验室系统中的总能守恒和动量守恒定律。使用方程(5.124a)和(5.127)核对你的答案。]

5.18 证明在一康普顿型的碰撞中，如果电子与入射光子运动方向成角度  $\phi$  而反冲，则其动能为

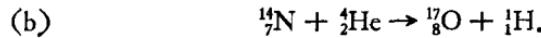
$$T = h\nu \frac{2\alpha \cos^2 \phi}{(1 + \alpha)^2 - \alpha^2 \cos^2 \phi},$$

其中  $\alpha = \frac{h\nu}{m_0 c^2}$ 。[参考：Semet, *Foundations of Atomic and Nuclear Physics*, 3rd Edition, Appendix 7. 用方程(5.127)核对答案。]

5.19 一个具有静止质量  $m_1$  和动能  $T_1$  的粒子与另一静止质量为  $m_2$  的静止粒子相碰撞。如果  $m_1$  被散射过  $90^\circ$  角并在碰撞后具有动量  $p'_1$ ，证明在碰撞后  $m_2$  具有动量  $(p'^2_1 + 2T_1 m_1 + T_1^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$  并且其运动方向与入射粒子方向成一角度  $\theta_4$ ，等于  $\tan^{-1}\{p'_1/(2T_1 m_1 + T_1^2/c^2)^{\frac{1}{2}}\}$ 。

5.20 如果氢原子质量为 1.00814 原子质量单位，中子质量为 1.00898 原子质量单位而氦原子质量为 4.00388 原子质量单位（都用  $^{16}\text{O}$  单位制度量），计算一个氦核的总结合能。

5.21 计算下列反应所释放的能量：



[提示：查精确的原子质量表，算出质量差额。]

5.22 地球接受太阳能的速率是  $1.35 \times 10^3$  瓦/米<sup>2</sup>. 如果地球距太阳 150,000,000 公里, 求 (a) 太阳每秒钟亏损的总质量; (b) 太阳对地球的辐射压力, 假设地球是黑体.

5.23 说明怎样利用光子的动量和能量 转换公式解释恒星的光行差和多普勒效应.

5.24 证明粒子的静止质量为

$$m_0 = \frac{p^2 c^2 - T^2}{2 T c^2},$$

其中  $p$  是粒子的动量,  $T$  是动能. 如果它的动量是 130 兆电子伏/ $c$ , 动能是 50 兆电子伏, 计算它的静止质量.

5.25 静止质量为  $M_0$ 、动量为  $\mathbf{p}_0$  的不稳定粒子在飞行中衰变成两个粒子, 它们的静止质量、动量和总能量分别为  $M_1$  和  $M_2$ ,  $\mathbf{p}_1$  和  $\mathbf{p}_2$ ,  $E_1$  和  $E_2$ . 证明

$$M_0^2 c^4 = (M_1 + M_2)^2 c^4 + 2 E_1 E_2 - 2 M_1 M_2 c^4 - 2 p_1 p_2 c^2 \cos \theta,$$

其中  $\theta$  是两个衰变粒子运动方向的夹角. [提示: 在实验室坐标系中应用动量和质-能守恒定律.]

5.26 不稳定的中性粒子衰变成动能和动量分别为 190 兆电子伏, 30 兆电子伏和 300 兆电子伏/ $c$ , 240 兆电子伏/ $c$  的两个带电粒子. 确定衰变产物的质量. 如果两个衰变粒子运动方向的夹角是 45 度, 确定 (a) 中性粒子的静止质量, (b) 它的动量, (c) 它的动能. [利用  $m_0 = (p^2 c^2 - T^2)/2 T c^2$  确定衰变产物的质量. 在实验室坐标系中应用总能量和动量守恒定律确定母体粒子的能量和动量, 因此也确定了它的质量.]

5.27 如果

$$\mu \rightarrow e + \nu + \bar{\nu},$$

确定  $\mu$  介子衰变产生的电子的最大动能(兆电子伏).  $\mu$  介子的静子质量是电子的 206.8 倍, 中微子和反中微子的质量可以取为零.

5.28 静止质量为  $m_0$ , 速度为  $u$ ,  $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$  的  $\pi^0$  介子在飞行中衰变成两个光子. 如果在实验室坐标系中一个光子发射方向与  $\pi^0$  介子运动方向的夹角是  $\theta$ , 证明它的能量  $h\nu$  为

$$h\nu = m_0 c^2 / \{2\gamma(1 - u \cos \theta/c)\}.$$

5.29 质量为电子质量 264.4 倍, 动量为 200 兆电子伏/ $c$  的许多  $\pi^0$  介子在飞行中各衰变成两个光子. 如果在衰变的  $\pi^0$  介子静止的坐标系中光子各向同性发射, 绘出实验室坐标系中光子的 (a) 角分布, (b) 能量分布曲线. [建议: 在质心坐标系中选择 5 度间隔. 利用光行差公式(或动量转换公式)计算实验室坐标系中相应的角度. 如果质心系中每单位立体角的强度是  $K$ , 则实验室系中立体角  $d\Omega$  中的强度是  $K \left( \frac{d\Omega'}{d\Omega} \right) d\Omega$ .]

利用习题 4.20 的结果以得到实验室系中单位立体角内的发射数如何随  $\pi^0$  介子速度方向与实验室中的测量方向之间的夹角  $\theta$  而变化. 假如读者愿意用  $\theta$  和  $\theta + d\theta$  之间的发射总数来表示和回答, 则可令  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$  并对经度角  $\phi$  积分. 用能量变换计算实验室系中各种角度光子的能量. 将所得结果乘以不同  $\theta$  的数目便得到实验室系中所有光子的能量分布.]

5.30 动量为  $\mathbf{p}_1$ , 静止质量为  $m_1$  的一个粒子打在静止质量为  $m_2$  的另一个不动粒子上. 证明质心系的速度等于

$$\frac{\mathbf{p}_1 c^2}{(E_1 + E_2)} = \frac{\mathbf{p}_1 c^2}{\sqrt{(p_1^2 c^2 + m_1^2 c^4)} + m_2 c^2}.$$

5.31 假设当  $\pi^+$  介子在飞行中衰变成  $\mu$  介子时,  $\mu$  介子在  $\pi^+$  介子静止的坐标系中各向同性发射. 用图绘出在实验室系中由动能为 100 兆电子伏的  $\pi$  介子衰变产生的  $\mu$  介子的角分布曲线. [取  $m_\pi = 273m_e$ ,  $m_\mu = 207m_e$ ,  $m_\nu = 0$ . 计算

$\mu$  介子在质心系中的速度以及质心系相对实验室系的速度。利用速度转换公式计算  $\mu$  介子在实验室系中的方向。利用  $\frac{d\Omega'}{d\Omega} = \frac{d(\cos\theta')}{d(\cos\theta)}$  确定实验室系中每立体弧度的强度分布。对  $\phi$  积分以得到实验室系中  $\theta$  与  $\theta + d\theta$  之间的强度。对高能现象运动学详尽讨论感兴趣的读者请参阅迪居克<sup>[14]</sup>的著作。】

5.32 证明如果速度为  $u$ ,  $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$  的质子与另一质子相碰，则质量中心的速度为

$$u_{\text{质心}} = \frac{\gamma u}{\gamma + 1}.$$

再证明

$$\gamma_{\text{质心}} = \left[ \frac{\gamma + 1}{2} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

[提示：利用方程(5.117).]

5.33 静止质量为  $m_1$ , 速度为  $\mathbf{u}$ , 总能量为  $E_1$  的粒子与质量为  $m_2$  的静止粒子相碰。证明在相对论极限情况，即  $u \approx c$  时，质心系中能得到的能量近似为  $(2E_1 m_2 c^2)^{\frac{1}{2}}$ 。证明质心系的速度为

$$\approx c \left[ 1 - \frac{m_2 c^2}{E_1} \right].$$

[提示：利用方程(5.160)求出质心系中的能量，再利用方程(5.117)确定质心系的速度。】

5.34 光子与一静止质子相碰，按下述反应：

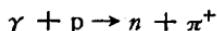


产生一  $\pi^+$  介子。求产生此过程的阈频率  $\nu_0$ 。可以忽略质子和中子的质量差异。 $\pi^+$  介子的静止质量是电子质量的 273.2 倍。

如果在  $\pi^+$  介子静止的坐标系中，它的平均寿命是  $\tau$ ，求

在实验室系中由频率为  $\nu_0$  的光子所引起的  $\pi^+$  介子的平均寿命。[提示：推导并利用方程(5.160)，以证明阈动能是 150 兆电子伏，相当于频率  $3.6 \times 10^{22}$  周/秒。计算质心系的速度和相对实验室的寿命延缓。]

### 5.35 打在氢靶上的光子按下列反应：



产生一  $\pi^+$  介子（其静止质量是电子质量的 273.2 倍）。如果  $\pi^+$  介子的动能为 50 兆电子伏，它与入射光子运动方向的夹角为 90 度，计算在实验室坐标系中  $\pi^+$  介子的动量以及入射的  $\gamma$  射线的能量。

5.36 证明如果由一个光子产生粒子对时要求总能量和动量是守恒的，则这个过程不可能在真空中自发地产生。

如果光子打在一个不动的电子上，产生一正负电子对和一后退电子，证明反应的最低能量是  $4m_0c^2$ ，其中  $m_0$  是电子的静止质量。[提示：为了讨论方便假设产生粒子对的过程在真空中发生。最小的电子动量将为  $\frac{h\nu}{2c}$ ，此时两个电子与入射光子同向发射。此时电子的总能量之和将为  $2\left(m_0c^2 + \left(\frac{h\nu}{2c}\right)^2 c^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ，大于  $h\nu$ ，所以能量不守恒。问题的第二部分要用方程(5.163)。]

5.37 证明在正电子湮没中必须至少产生两个光子，如果动量守恒的话。计算两个光子的能量，假若正电子和电子彼此湮没时是静止的。

### 5.38 计算下列反应的阈动能(兆电子伏)：

- (a)  $\gamma + p \rightarrow p + \pi^0$ ,
- (b)  $\pi^- + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + n$ ,
- (c)  $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$ .

$p$ ,  $\pi^+$  和  $\pi^0$  的静止质量分别是电子质量的 1836, 273 和 264 倍。[提示：推导和利用方程(5.163).]

5.39 如果静止质量为电子质量 273.2 倍的荷电  $\pi$  介子在静止时衰变为一个  $\mu$  介子和一个中微子,  $\mu$  介子的静止质量是电子质量的 206.8 倍, 中微子的静止质量为零, 证明  $\mu$  介子和中微子的动能分别为 4.1 兆电子伏和 29.8 兆电子伏。

5.40 质量为  $M$  静止核子处于激发能为  $E_0$  的激发态。它在跃迁时发射一个光子而回到基态。利用相对论方程证明, 考虑反冲后, 光子的频率是

$$\nu = \frac{E_0}{\hbar} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{E_0}{Mc^2} \right],$$

其中  $\hbar$  是普朗克常数。[提示：推导并利用方程(5.154).]

5.41 在速度为  $u_0$ ,  $\gamma = (1 - u_0^2/c^2)^{-\frac{1}{2}} \gg 1$  的高能光子与静止质子相碰撞中,  $\pi$  介子在质心系中以速度  $u'$  对称发射, 也就是在质心系中向前和向后发射的  $\pi$  介子数目相等。证明在实验室系中包含发射的  $\pi$  介子一半的角度  $\theta_{\frac{1}{2}}$  由下式给出:

$$\tan \theta_{\frac{1}{2}} = \frac{u'}{\gamma_{\text{质心}} u_{\text{质心}}} \approx \frac{u'^{\frac{1}{2}}}{\gamma^{\frac{1}{2}} c}.$$

[提示：考虑在质心系中成 90 度发射的  $\pi$  介子并求出它在实验室系中的方向。]

5.42 荷电量为  $q$ , 静止质量为  $m_0$  的一粒子来自原点, 在原点时的速度值为  $u_0$ , 方向沿  $y$  轴。如果存在平行于  $x$  轴的均匀电场  $\mathbf{E}$ , 证明粒子的径迹是由  $x = \frac{W_0}{qE} \cosh \frac{qEy}{p_0 c}$  给出的悬链线, 其中  $p_0$  为粒子的初始动量,  $W_0 = (m_0^2 c^4 + c^2 p_0^2)^{\frac{1}{2}}$  为初始总能量,  $\mathbf{E}$  为电场强度矢量。[提示：运动方程是  $\dot{p}_x = qE$  和  $\dot{p}_y = 0$ . 积分给出  $p_x = qEt$  和  $p_y = p_0$ . 于是如果  $W$  是  $t$  时刻的总能量, 则有

$$\dot{x} = p_x c^2 / W = q E t c^2 / (W_0^2 + c^2 q^2 E^2 t^2)^{\frac{1}{2}}$$

以及

$$\dot{y} = p_y c^2 / W = p_0 c^2 / (W_0^2 + c^2 q^2 E^2 t^2)^{\frac{1}{2}}$$

对  $t$  积分, 消去  $t$ .]

5.43 非相对论电子光学必须做什么样的改变才能使理论可以用于具有与光速相当的速度的粒子?

一大平行板电容器事先充电成具有一百万伏的电势差。板距为 5 厘米。计算在负极板静止的电子需多长时间才能到达阳极板。电子的电荷和静止质量分别为  $1.60 \times 10^{-19}$  库伦和  $9.11 \times 10^{-31}$  千克。光速为  $3 \times 10^8$  米/秒。[提示: 推导并利用方程(5.53).]

5.44 静止质量为  $m_0$  的粒子  $P$  被一大小为  $m_0 \mu / r^2$  的牛顿力向着惯性坐标原点  $O$  吸引; 其中  $r = OP$ ,  $\mu$  是常数。证明粒子的运动保持在一个平面, 而在该平面中用极坐标  $r, \theta$  表示的轨道的微分方程是

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \left(1 - \frac{\mu^2}{h^2 c^2}\right) = \text{常数},$$

其中  $u = 1/r$ , 而  $h = r^2 d\theta/ds$  是每单位质量的(常值)相对论角动量。

证明通过适当选择初始线, 方程的解可以写成形式

$$lu = 1 + e \cos k\theta,$$

其中  $k = (1 - \mu^2/h^2 c^2)^{\frac{1}{2}}$ ,  $l$ ,  $e$  是常数。简单描述  $\mu \ll hc$ ,  $e < 1$  情况的运动[参考: W. H. McCrea, *Relativity Physics*, p.29.]

5.45 说明氢原子谱线精细结构的索麦菲理论。[参考: 柏格曼著《相对论引论》第 140 页。]

## 第六章 洛伦兹变换的几何表示及四维矢量的运用

### 6.1 伽利略变换的几何表示

质点在三维空间中的位置可用该质点的  $x$ ,  $y$  和  $z$  坐标来标定。如果质点运动，则这些坐标随时间而改变。用图示法来表示这一运动通常是方便的。为简单起见，我们一开始将考虑只沿  $x$  轴的运动。选择直角坐标系来表示质点相对于惯性系  $\Sigma$  的位移。我们将画出一质点  $P$  沿  $x$  轴的位移随时间  $t$  的变化，如图 6.1 所示。设质点  $P$  相对于  $\Sigma$  的运动用曲线  $NR$  表示，如质点在时间  $t$  位移为  $x$ ，则表示为在  $R$  点。

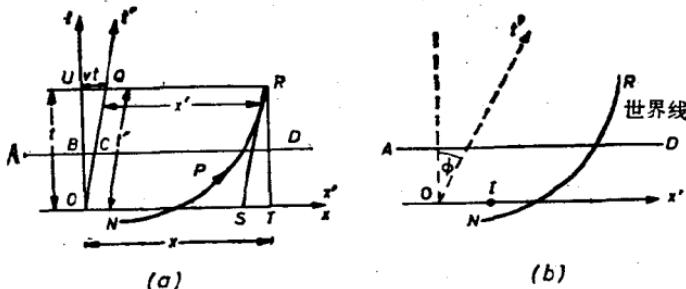


图 6.1 (a) 在直角坐标系  $Ox$ ,  $Ot$  中质点  $P$  沿惯性系  $\Sigma$  的  $x$  轴运动用曲线  $NR$  表示。相对于  $\Sigma'$ ,  $P$  的位移可用同一条曲线  $NR$  表示，只要将  $Ox'$  和  $Ot'$  选为斜轴，以表示  $P$  相对于  $\Sigma'$  的位移即可。在斜坐标系中必须选择新的长度来表示时间单位。要给定的只是：“世界线”(如  $NR$ ), 原点  $O$ ,  $x$  轴,  $x$  的单位长以及时间校准线  $AD$ , 它们均在 (b) 中用实线画出。由这些数据便可选择一个适当的坐标系。

现在我们从另一惯性系  $\Sigma'$  来考虑这同一质点的运动，相

对于  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$  以匀速  $v$  沿公共的  $x$  轴运动。如果在  $t = t' = 0$  时  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  的原点重合，则按照伽利略变换，有

$$x' = x - vt; \quad t' = t.$$

在  $\Sigma'$  的原点  $x' = 0$ ，因此  $\Sigma'$  的原点相对于  $\Sigma$  的原点的运动由直线  $x = vt$  给出。这在图 6.1 中由直线  $OQ$  表示。直线  $Ox$  和  $OQ$  现在将分别用作斜轴  $Ox'$  和  $Ot'$ ，以表示质点  $P$  相对于惯性系  $\Sigma'$  的运动。我们将首先确定点  $R$  的坐标  $x'$  和  $t'$ ，而暂时不与质点  $P$  的运动相联系。为了得到点  $R$  的  $x'$  坐标，我们引一条直线平行于  $Ot'$  轴，与  $Ox'$  轴相交于  $S$ ；点  $R$  的  $x'$  坐标可以用  $OS$  来表示。类似地，只要适当选择尺度，便可用线段  $RU$  在  $Ot'$  轴上的交点来表示点  $R$  在此斜坐标系中的  $t'$  坐标。相对于原来的直角坐标轴  $Ox$  和  $Ot$ （它们被用来表示质点  $P$  相对于  $\Sigma$  的位移），有

$$UQ = vt, \quad UR = x,$$

$$OS = QR = UR - UQ = x - vt.$$

但是，按照伽利略变换，与在  $\Sigma$  中时刻  $t$  的  $x$  坐标相对应， $\Sigma'$  中的  $x'$  坐标为

$$x' = x - vt.$$

因此，如果沿  $Ox'$  轴与沿  $Ox$  轴用同样的尺度，则当质点  $P$  处于点  $R$ ，相对  $\Sigma$  在时间  $t$  有位移  $x$ ， $OS$  便可用来表示质点  $P$  相对于  $\Sigma'$  的位移。为表示质点  $P$  相对于  $\Sigma'$  的位移，点  $R$  不需要沿  $x'$  方向移动。

在牛顿力学中，时间是绝对的，因此无论在  $\Sigma$  或在  $\Sigma'$  中测量时间间隔，都必定得到同一数值。在图 6.1 中，长度  $OQ$  大于长度  $OU$ 。因此，如果用点  $R$  相对于  $Ox'$  轴的位置来表示质点  $P$  在时刻  $t' = t$  在  $\Sigma'$  中的位移，那么对于斜坐标系  $Ox'$ ,  $Ot'$ ，必须选择新的时间尺度。我们作一条直线  $ABCD$ ，与原来直角坐标系  $Ox$ ,  $Ot$  中的时间  $t = 1$  相对应。长度  $OB$

代表  $\Sigma$  中的时间单位。如果把  $OC$  选为斜坐标系  $Ox', Ot'$  中新的时间单位，则点  $R$  在  $Ox', Ot'$  坐标系中所代表的时间  $t'$ ，便等于点  $R$  在  $Ox, Ot$  坐标系中所代表的时间  $t$ 。这样一来，用斜坐标系  $Ox', Ot'$  表示质点  $P$  相对  $\Sigma'$  的位移，并用新的时间尺度，则在图 6.1 中，点  $R$  的位置不需改变，于是曲线  $NR$  可同时用来表示质点  $P$  相对于  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  的位移。

可以选择具有与  $\Sigma$  相同的  $x$  轴，但时间轴和时间尺度均不同的斜坐标系，来表示质点  $P$  相对于任一其它惯性系的位移，该惯性系沿  $x$  轴相对  $\Sigma$  作匀速运动，在  $t = 0$  时其原点与  $\Sigma$  的原点重合。我们不一定要从直角坐标系出发，而可以从斜坐标系出发。所有时间轴上的时间单位，均由直线  $AD$  截出。

如果质点  $P$  在  $xy$  平面内作二维运动，则该运动可在三个三维坐标系  $x, y$  和  $t$  中表示出来。对于三维运动，我们就要用四维  $x, y, z$  和  $t$  来表示它的位移。应当强调指出，在狭义相对论中用四维  $x, y, z$  和  $t$  来表示质点的运动，与在牛顿力学中用四维来表达坐标和时间相比，并没有任何新颖之点。只要适当选择时间单位的长度，则表示质点  $P$  的位移的曲线  $NR$ ，对于所有的坐标系均相同。它被称为质点  $P$  的“世界线”。如果质点  $P$  相对于惯性系作匀速直线运动，则“世界线”是一条直线。如果质点被加速，则“世界线”是弯曲的。如果给出了“世界线”  $NR$  及原点  $O$ ，那么对于质点沿  $x$  轴的运动，我们只需要  $x$  方向的长度单位  $OI$  和直线  $AD$  即可，如图 6.1(b) 所示。如果给定直线  $AD$ ，则任何坐标系的时间单位均可算出。对于代表相互作匀速运动并且在  $t = 0$  时原点重合的惯性系的所有可能的坐标系， $x$  轴都是共同的。为了选择适当的时间轴，可以从  $O$  点引任一直线与直线  $AD$  相交，如图 6.1(b) 所示。这个坐标系的时间单位用长度  $OE$  来表示。该惯性系相对于  $\Sigma$  的速度由  $v = \tan \phi$  给出。

## 6.2 洛伦兹变换的几何表示<sup>1)</sup>

我们再次首先考虑质点  $P$  沿惯性系  $\Sigma$  的  $x$  轴的运动，并且从笛卡儿直角坐标系出发，来表示质点  $P$  相对于  $\Sigma$  的位移。我们不画  $x$  相对  $t$  的图形，而画  $x$  相对  $ct$  的图形，其中  $c$  是光速。这就使纵坐标轴也具有长度量纲。我们把  $ct$  记作  $m$ 。

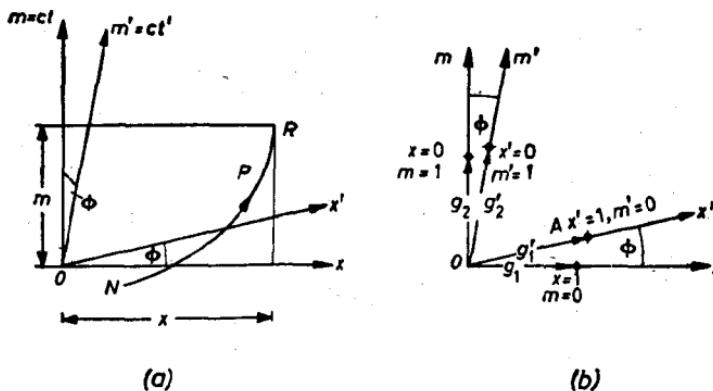


图 6.2 (a) 质点  $P$  相对于惯性系  $\Sigma$  的位移表示为直角坐标系  $Ox$ ,  $Om$  中的曲线  $NR$ 。两条直线  $Ox'$ ,  $Om'$  分别与  $Ox$ ,  $Om$  相交成角  $\phi = \tan^{-1} v/c$ , 能用以作为斜坐标轴以表示  $P$  相对于惯性系  $\Sigma'$  的位移。如果对  $x'$  与  $t'$  的单位选用新的尺度(度规), 则质点  $P$  相对于  $\Sigma'$  的位移也能用同一曲线  $NR$  表示。(b) 两种度规分别适用于  $\Sigma$  与  $\Sigma'$ 。

设质点  $P$  相对于  $\Sigma$  的运动用曲线  $NR$  表示, 如图 6.2(a) 所示。我们现在来看一看, 同一条曲线  $NR$  是否也可用来表示质点  $P$  相对于惯性系  $\Sigma'$  的位移,  $\Sigma'$  以匀速  $v$  沿  $x$  轴相对  $\Sigma$  运动。由洛伦兹变换

1) 某些读者或许愿意在读 6.2 节之前先读 6.3 节。在 6.3 节中所用的方法是建立在坐标  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $ict$  的基础上的。后一种方法是和 6.2 节中所用的完全不同的另一种方法, 并且后一种方法在数学上比较简单。

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (6.1)$$

$$t' = \gamma(t - vx/c^2) \quad (6.2)$$

相对于直角坐标轴  $Ox$ ,  $Om$ , 直线  $t' = m' = 0$  和  $x' = 0$  可分别用方程  $m = ct = vx/c$  和  $x = vt = vm/c$  来表示。这两条直线在图 6.2(a) 中分别用  $Ox'$  和  $Om'$  表出。直线  $Ox'$  与  $Ox$  轴成角  $\phi$ , 直线  $Om'$  与  $Om$  轴成角  $\phi$ , 与  $Ox$  轴成角  $(\frac{\pi}{2} - \phi)$ , 如图 6.2(a) 中所示, 其中  $\tan \phi = v/c$ . 按照和 6.1 节相同的方案, 我们用  $Ox'$  和  $Om'$  作为斜坐标轴, 来表示质点  $P$  相对于  $\Sigma'$  的运动。与牛顿力学不同的是, 不仅时间轴的方向改变了, 而且坐标轴的方向也改变了。因此我们必须准备在  $Ox'$ ,  $Om'$  坐标系中, 不仅改变时间单位, 而且也改变长度单位。 $Ox'$ ,  $Om'$  坐标系中的长度单位, 由从原点到点  $x' = 1$ ,  $m' = ct' = 0$  的距离给出, 如图 6.2(b) 所示。相对于原直角坐标系  $Ox$ ,  $Om$ , 该点具有坐标

$$x = \gamma(x' + vt') = \gamma(1 + v0) = \gamma, \quad (6.3)$$

$$m = ct = \gamma \left( ct' + \frac{vx'}{c} \right) = \gamma \frac{v}{c}, \quad (6.4)$$

相对于坐标系  $\Sigma$ , 该点到原点的距离等于

$$g'_1 = \sqrt{x^2 + m^2} = \sqrt{x^2 + c^2 t^2}$$
$$g'_1 = \gamma \sqrt{1 + v^2/c^2} = \sqrt{\frac{(1 + v^2/c^2)}{(1 - v^2/c^2)}}. \quad (6.5)$$

如果用相应于  $Ox$ ,  $Om$  直角坐标系中的尺度来度量沿  $Ox'$  轴的长度, 那么, 为了使所测得的长度转换成相应于  $Ox'$ ,  $Om'$  坐标系中的长度, 所测得的长度必须除以  $g'_1$ . 量  $g'_1$  有时称为坐标系的度规, 这个坐标系表示出质点  $P$  相对于  $\Sigma'$  的位移。

类似地, 从图 6.2(b) 的原点到点  $m' = ct' = 1$ ,  $x' = 0$  的距离给出了  $m'$  的单位与直角坐标系  $Ox$ ,  $Om$  的长度的关

系。用洛伦兹变换，相当于斜轴  $Ox'$ ,  $Om'$  中的  $m' = 1$ ,  $x' = 0$ , 在直角坐标系  $Ox$ ,  $Om$  中就有  $x = \gamma v/c$  和  $m = \gamma$ , 因此

$$g'_z = \gamma \sqrt{1 + v^2/c^2}. \quad (6.6)$$

用相应于直角轴  $Ox$ ,  $Om$  中的尺度沿  $Om'$  轴所测的长度必须除以  $g'_z$ , 以便得到相应于斜轴  $Ox'$ ,  $Om'$  中的  $m'$  值。

现在计算图 6.2(a) 所示点  $R$  相对于斜轴  $Ox'$ ,  $Om'$  的坐标。目前点  $R$  将暂不以任何方式同质点  $P$  相对于  $\Sigma'$  的位移相联系。通过  $R$  作平行于  $Ox'$  轴和  $Om'$  轴的直线，在  $Om'$  轴和  $Ox'$  轴上分别截下长度  $OT$  和  $OW$ , 如图 6.3 所示。

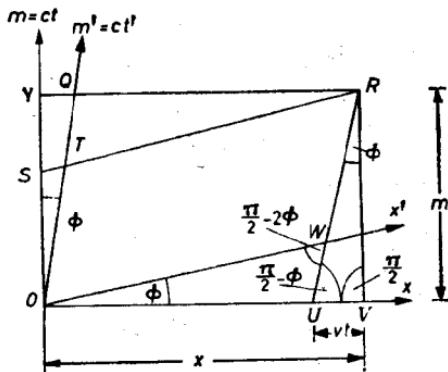


图 6.3 图 6.2(a) 的详图。

设这些长度首先用直角坐标系  $Ox$ ,  $Om$  中的尺度（或度规）来测量。现在，图 6.3 中

$$OV = x; \quad UV = m \tan \phi = v m / c = vt,$$

因此，

$$OU = OV - UV = (x - vt).$$

在三角形  $OUW$  中，角  $\widehat{WOU}$ ,  $\widehat{OUW}$  和  $\widehat{OWU}$  分别等于  $\phi$ ,  $\frac{\pi}{2} + \phi$  和  $\frac{\pi}{2} - 2\phi$ , 如图 6.3 所示。因此

$$\frac{OW}{\sin(\pi/2 + \phi)} = \frac{Ov}{\sin(\pi/2 - 2\phi)} = \frac{WU}{\sin \phi} \quad (6.7)$$

所以

$$OW = \frac{OU \cos \phi}{\cos 2\phi} = \frac{(x - vt) \cos \phi}{\cos 2\phi}. \quad (6.8)$$

由于

$$\tan \phi = \frac{v}{c}, \quad \cos \phi = \frac{c}{\sqrt{c^2 + v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + v^2/c^2}},$$

$$\cos 2\phi = 2\cos^2 \phi - 1 = \frac{2}{(1 + v^2/c^2)} - 1 = \frac{(1 - v^2/c^2)}{(1 + v^2/c^2)},$$

代入方程(6.8), 我们得到

$$\begin{aligned} OW &= \frac{(x - vt)/(1 + v^2/c^2)^{1/2}}{(1 - v^2/c^2)/(1 + v^2/c^2)} \\ &= \frac{(x - vt)(1 + v^2/c^2)^{1/2}}{(1 - v^2/c^2)}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

这就是用相应于直角坐标系  $Ox, Om$  的尺度所测出的  $OW$  的长度. 在斜坐标系  $Ox', Om'$  中, 长度单位必须改变, 并且方程(6.9)所给出的  $OW$  的长度必须除以度规

$$g_1 = \gamma(1 + v^2/c^2)^{1/2}.$$

因此, 相对于  $Ox', Om'$ , 距离  $OW$  所代表的长度等于

$$\frac{(x - vt)(1 + v^2/c^2)^{1/2}}{(1 - v^2/c^2)} \div \frac{(1 + v^2/c^2)^{1/2}}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} = \frac{(x - vt)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

按照洛伦兹变换, 当质点  $P$  相对于  $\Sigma$  在时间  $t$  位于点  $x$  时, 它相对于  $\Sigma'$  的位移等于

$$x' = \gamma(x - vt).$$

因此, 如选择方程(6.5)所给出的新度规, 则  $OW$  等于质点  $P$  在  $\Sigma'$  中的  $x'$  坐标, 对应着在  $\Sigma$  中在时间  $t$  具有坐标  $x$  的  $R$  处的事件.

在图 6.3 中, 用相应于直角轴  $Ox, Om$  中的尺度来测量,

$$OT = WR = RU - WU = \frac{m}{\cos \phi} - WU \\ = \frac{ct}{\cos \phi} - WU,$$

由方程(6.7),

$$WU = \frac{OU \sin \phi}{\sin \left( \frac{\pi}{2} - 2\phi \right)} = \frac{OU \sin \phi}{\cos 2\phi} \\ = \frac{(x - vt) \frac{v}{(c^2 + v^2)^{1/2}}}{\frac{(1 - v^2/c^2)}{(1 + v^2/c^2)}} \\ = \frac{(x - vt) \frac{v}{c} (1 + v^2/c^2)^{1/2}}{(1 - v^2/c^2)},$$

$$OT = RU - WU$$

$$= ct(1 + v^2/c^2)^{1/2} - \frac{(x - vt) \frac{v}{c} (1 + v^2/c^2)^{1/2}}{(1 - v^2/c^2)}, \\ OT = \frac{(1 + v^2/c^2)^{1/2}}{(1 - v^2/c^2)} \left( ct - \frac{vx}{c} \right). \quad (6.10)$$

这就是用相应于直角坐标系  $Ox, Om$  的尺度量出的  $OT$  的长度。为得出在斜坐标系  $Ox', Om'$  中这一距离所代表的长度, 方程(6.10)必须除以适当的度规, 即

$$g'_2 = \gamma \sqrt{1 + v^2/c^2}. \quad (6.6)$$

方程(6.10)的右边除以  $g'_2$ , 得到

$$\frac{(1 + v^2/c^2)^{1/2}}{(1 - v^2/c^2)} \left( ct - \frac{vx}{c} \right) \div \gamma \sqrt{1 + v^2/c^2} \\ = \gamma \left( ct - \frac{vx}{c} \right)$$

相对于斜坐标系  $Ox'$ ,  $Om'$ , 距离  $OT$  代表一长度  $\gamma(ct - vx/c)$ . 按照与时间  $t$  相对应的洛伦兹变换, 当质点  $P$  在  $\Sigma$  中具有位移  $x$  时, 在  $\Sigma'$  中有

$$ct' = \gamma \left( ct - \frac{vx}{c} \right).$$

因此, 对  $m'$  用新选择的度规, 则对于一个时刻  $t$  在  $\Sigma$  中具有位移  $x$  的质点  $P$ , 点  $R$  的  $m'$  坐标精确等于用洛伦兹变换所预言的值. 这样一来, 通过选择  $Ox'$  和  $Om'$  作为斜轴, 表示相应于  $\Sigma$  中时刻  $t$  的位移  $x$ , 质点  $P$  在  $\Sigma'$  中时刻  $t'$  的位移  $x'$ , 并用分别由方程(6.5)和(6.6)给出的新度规, 则图 6.2(a)所示点  $R$  的位置就不需改变. 不论两个惯性系之间的相对速度多大, 只要相对速度是常数, 这一结论都成立. 如果质点  $P$  相对于惯性系  $\Sigma$  的位移, 在  $Ox$ ,  $Om$  直角坐标系中用曲线  $NR$  表示, 如图 6.2(a) 所示, 则只要按方程(6.5)和(6.6)选择  $x'$  和  $ct'$  的尺度(度规), 质点  $P$  相对于惯性系  $\Sigma'$  的位移, 在斜角坐标系  $Ox'$ ,  $Om'$  中就由同一条曲线  $NR$  表示. 对于所有以匀速沿  $x$  轴相对  $\Sigma$  运动, 并在  $t = 0$  时原点互相重合的惯性系, 这一结论均成立. 只要代表一个惯性系的坐标轴选定了, 轨迹  $NR$  就固定了. 轨迹  $NR$  称为质点  $P$  在二维  $x$ ,  $ct$  “世界”中的“世界线”. 为了使讨论简单起见, 我们是从直角轴开始的. 这样做并不是必需的, 我们也可以从斜轴开始.

现在讨论相应于不同惯性系的尺度(度规)之间的某些几何关系. 对于惯性系  $\Sigma'$ , 图 6.4(a) 中由原点到  $A'$  点(具有坐标  $x' = 1$ ,  $m' = 0$ ) 的长度  $OA'$  给出了沿  $Ox'$  轴的  $x'$  的单位长度. 按照洛伦兹变换, 相对于用以表示质点  $P$  相对  $\Sigma$  的位移的直角坐标系  $Ox$ ,  $Om$ , 点  $A'$  必然具有坐标  $x = \gamma$ ,  $m = ct = \gamma(v/c)$ . 对于点  $A'$ ,

$$x^2 - m^2 = x'^2 - c^2 t^2 = \gamma^2 - \gamma^2 v^2/c^2$$

$$= \gamma^2(1 - v^2/c^2) = +1$$

表达式  $x^2 - m^2$  与  $\Sigma'$  和  $\Sigma$  的相对速度  $v$  无关。相对于直角坐标系  $Ox, Om$ , 点  $A'$  (它与原点的距离给出用以表示相对于  $\Sigma'$  位移的坐标系中的长度单位) 总是处于曲线

$$x^2 - m^2 = x^2 - c^2 t^2 = G = +1 \quad (6.11)$$

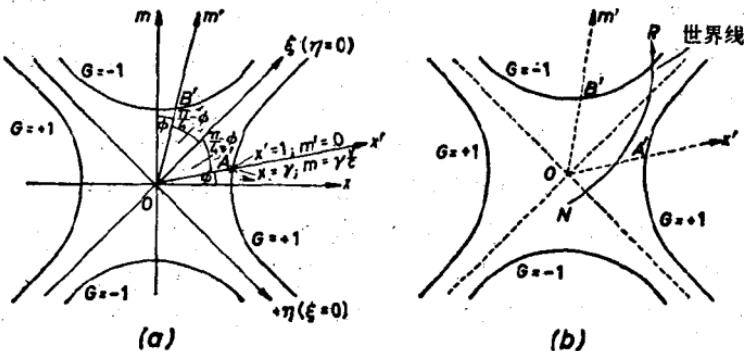


图 6.4 在 (a) 中画出了校准双曲线。用它们可以决定在任何坐标系(例如  $Ox', Om'$ ) 中的长度和时间单位。对于 (a) 中所示的  $Ox'$  轴,  $x'$  的单位等于  $OA'$ ,  $m'$  的单位等于  $OB'$ 。“世界线”相对于校准双曲线的位置与任何特定的坐标系的选择无关。所有必须给定的只是 (b) 中用实线画出的“世界线”和校准双曲线。于是, 渐近线便可画出, 从而坐标系(例如  $Ox', Om'$ ) 便可选定。

上, 不论  $v$  的大小如何。如果  $\Sigma'$  和  $\Sigma$  之间的相对速度不同, 则由于  $v$  和  $\gamma$  改变, 点  $A'$  (它具有坐标  $x = \gamma$ ,  $m = ct = \gamma(v/c)$ ) 的位置将改变, 但相对于  $\Sigma$ ,  $A'$  将总是在曲线  $x^2 - m^2 = +1$  上。方程 (6.11) 是双曲线方程。它在图 6.4(a) 中被画出。任一斜坐标系  $Ox', Om'$  的长度单位, 均可用从原点到  $Ox'$  轴与相应于  $G = +1$  的双曲线的交点的距离给出。

$m'$  的单位由长度  $OB'$  给出, 其中  $B'$  对应着图 6.4(a) 中  $x' = 0$ ,  $m' = ct' = 1$  的那一点。按照洛伦兹变换,  $B'$  的  $x$  坐标和  $m$  坐标分别为  $\gamma(v/c)$  和  $\gamma$ 。对于点  $B'$ , 相对于直角

坐标系  $Ox$ ,  $Om$ , 我们有

$$x^2 - m^2 = x^2 - c^2 t^2 = \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} - \gamma^2 = -1.$$

这样一来, 不管  $v$  的值如何,  $B'$  总是处在双曲线

$$x^2 - m^2 = G = -1 \quad (6.12)$$

上. 在  $\Sigma'$  中  $m'$  的单位等于从原点到  $Om'$  轴与方程(6.12)给出的双曲线的交点的距离. 分别由方程(6.11)和(6.12)给出的两组双曲线, 称为校准双曲线.

如果引进新的坐标  $\eta = x - m$  和  $\xi = x + m$ , 则校准双曲线就具有  $\xi\eta = \pm 1$  的形式. 直线  $\eta = 0$ ,  $\xi = 0$  是双曲线的渐近线, 直线  $\eta = 0$  对应于  $x = +ct$ , 直线  $\xi = 0$  对应于  $x = -ct$ . 这两条直线是在时刻  $t = 0$  分别向正  $x$  方向和负  $x$  方向离开原点的两个光信号的“世界线”. 这两条特殊的“世界线”在 3.10 节中引进过, 那里曾证明, 它们把所有事件划分成两类: 一类是能与  $t = 0$  时在原点发生的事件有因果联系的, 另一类是不能的(参看图 3.15). 直线  $x = +ct = +m$  平分  $Ox$  与  $Om$  轴之间的夹角. 由于  $Ox'$  轴和  $Ox$  轴之间与  $Om'$  轴和  $Om$  轴之间成同样的倾角  $\phi$ , 因此相应于  $\eta = 0$  的直线  $x = +ct$  也平分  $Ox'$  轴和  $Om'$  轴的夹角.

为了计算出校准曲线, 上面都是从直角轴出发的, 这是不必要的, 我们也可以从斜轴出发. 必须给定的只是校准双曲线和世界线, 如图 6.4(b) 中所示. 于是校准双曲线的渐近线就可以画出. 为选出一个适当的坐标系, 只需要过原点画任一直线与双曲线  $x^2 - m^2 = G = +1$  相交, 例如图 6.4(b) 所示交在  $A'$  点, 这条线作为  $Ox'$  轴, 而  $OA'$  则作为这一特殊坐标系中的长度单位. 为得到相应的  $Om'$  轴, 从原点出发在渐近线  $\eta = 0$  的另一侧作一直线, 并使它和  $Ox'$  轴与  $\eta = 0$

的夹角相等，如图 6.4(b) 所示。这条直线就是合适的  $Om'$  轴。 $m'$  的单位等于  $OB'$ ，其中  $B'$  是  $Om'$  轴与校准双曲线  $x^2 - m^2 = G = -1$  的交点。任何一个用这种方式得出的斜坐标系，都可用来描述自然过程。对于所有这些坐标系，世界线都是相同的。按照相对性原理，对于所有的这些惯性系物理定律应当是相同的。

如果质点  $P$  在  $xy$  平面内运动，则需用三维来表示质点在时刻  $t$  的位移。对于三维运动，则需用相应于  $x, y, z, m = ct$  的四维。由于  $y' = y$  和  $z' = z$ ， $y$  和  $z$  方向的度规不需变化，并且  $Oy$  轴和  $Oy'$  轴方向一致， $Oz$  轴和  $Oz'$  轴方向也一致。闵可夫斯基(1908)曾建议用  $x, y, z, ct$  四维空间来表示“世界”。在这个“世界”中，事件或者“世界点”是用四个坐标  $x, y, z, ct$  确定的。质点的运动用“世界线”表示。质点的匀速运动用直的“世界线”表示，加速运动用弯曲的“世界线”表示。在互相作匀速运动，并且在  $t = 0$  时原点重合的各惯性系，用来表示质点位移的所有坐标中，这些“世界点”和“世界线”均相同。在牛顿力学中，事件之间的时间间隔和物体长度是绝对的。按照狭义相对论，长度和时间间隔的数值不是绝对的，而取决于为表示运动所选择的惯性系。然而，在 3.10 节中证明过，“事件”之间的间距是绝对的，就是说，在所有惯性系中它具有同一数值。间距  $\delta s$  是用下式来定义的：

$$\delta s^2 = \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 - c^2 \delta t^2. \quad (3.95)$$

这样一来，虽然二事件的空间间隔和时间间隔都不是绝对的，但按照狭义相对论，两者的一定组合，即事件之间的间距，却是绝对的。“世界点”和“世界线”也是这样。或许正是应该这样来理解 1908 年 9 月 21 日在科隆举行的第八十次德国全国科学家和医务工作者会议上闵可夫斯基致词中的开头语。在

这篇致词中，闵可夫斯基首次引进了空间和时间的几何解释。闵可夫斯基说道：

“我打算向诸位陈述的空间与时间的观点，是在实验物理学的土壤中诞生的，并且其力量也正在这里。这种观点是根本性的。从今以后空间本身，以及时间本身，将注定要消失成为影子，只有二者的一种联合将保持其独立的真实性。”

在四维  $x, y, z, ct$  “世界”中，质点的运动学可以表述为四维几何学。还存在另一途径，就是用四个变量  $x, y, z, i ct$ ，其中  $i = \sqrt{-1}$ 。这一途径在数学上更为简单，我们将在 6.3 节中叙述。在 6.4 节中我们将讨论用四维矢量表述相对论运动学和相对论力学。

在牛顿力学中，一旦选定一套坐标轴，则  $x'$  轴的方向就没有选择余地了。从图 6.4(b)乍一看来，似乎按照特殊相对论， $x'$  轴的方向有一个很宽广的选择范围。这个选择范围是夸大的，因为我们所画的是  $x$  相对  $ct$  的图形，而不是如图 6.1 那样的相对于  $t$  的图形，因此，与图 6.1 中的纵坐标相比，图 6.4 (b) 中的纵坐标放大了一个因子  $c$ 。假如画  $x$  相对  $t$  的图形，图 6.4 将更象图 6.5，后者仍然是极端夸大的。这样， $x'$  轴方向的选择范围就显得非常小了。当  $c$  趋于无穷大时，狭义相对论的方程式将变成牛顿力学的方程式。在当前的情况，这一点也是对的；因为当  $c$  趋于无穷大时，相应于  $G = +1$  的双曲线将趋于与  $x$  轴重合，而相应于  $G = -1$  的双曲线将趋于一条平行于  $x$  轴而与图 6.1(b) 相一致的直线。

作为应用本节中所述方法的例子，我们将讨论长度缩短和时间膨胀现象。画出校准曲线  $G = 1$  如图 6.6(a) 所示。设一单位长量杆在惯性系  $\Sigma$  的  $x$  轴上静止， $\Sigma$  将用直角坐标系  $Ox, Om$  来表示，选择直角轴这一点并不是必要的。量杆两端的位置分别由“世界线”  $Om$  和  $AA'$  给出，如图 6.6(a)

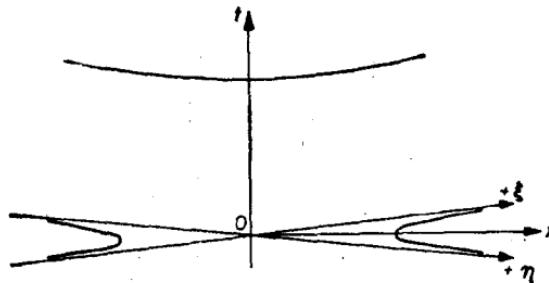


图 6.5 画  $x$  相对  $t$  的图形, 而不象图 6.4 中那样画  $x$  相对  $m = ct$  的图形。于是, 图形看起来更象图 6.1 所示的牛顿力学的相应情形。在图 6.5 中  $x'$  轴方向的选择范围就显得比在图 6.4 中的窄。

所示。这两条“世界线”对所有可能的坐标系是一样的。设相应于惯性系  $\Sigma'$  (它以速度  $v$  相对  $\Sigma$  运动) 的坐标轴为  $Ox'$  和  $Om'$ , 而使  $\tan \phi = v/c$ , 如图 6.6(a) 所示。对于斜轴  $Ox'$ ,  $Om'$ ,  $x'$  的单位等于长度  $OB$ 。为了在  $\Sigma'$  中测量杆的长度, 必须在  $\Sigma'$  中的同一时刻  $t'$  (例如  $t' = 0$ ) 观测杆两端的位置。在  $t' = 0$  时杆两端的距离, 由直线  $m' = 0$  与上述两条不变

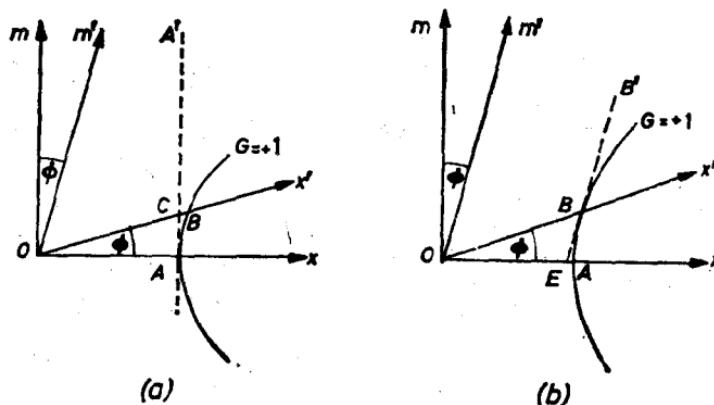


图 6.6 长度缩短现象。在 (a) 中, 一单位长量杆在  $\Sigma$  中静止, 杆两端的“世界线”分别用  $Om$  和  $AA'$  表示。在 (b) 中, 杆在  $\Sigma'$  中静止, 相应于杆两端的“世界线”用  $Om'$  和  $BB'$  表示, “世界线”  $BB'$  为校准双曲线在  $B$  点的切线。

的“世界线”的交点之间的距离，即由长度  $OC$  给出。可是  $OC$  小于  $\Sigma'$  中的长度单位  $OB$ ，因此在  $\Sigma'$  中所测得的杆长小于 1，这就解释了长度缩短。[实际上在  $\Sigma'$  中， $OC$  代表一个长度  $x' = OC/g'_1 = \sec\phi/g'_1 = \sqrt{1 - v^2/c^2}$ ]

如果一单位长量杆在  $\Sigma'$  中沿  $x'$  轴静止，则杆的两端的世界线平行于  $Om'$  轴，如图 6.6(b) 所示，并且在图 6.6 中用世界线  $Om'$  和  $BB'$  表示。在  $\Sigma$  中，在  $t = 0$  时刻这两条世界线之间的距离由  $OE$  给出，它小于  $\Sigma$  中的长度单位  $OA$ 。这就解释了长度缩短是互逆的。

现在来解释时间膨胀。画出校准曲线  $G = -1$ ，如图 6.7(a) 所示。设一个在  $\Sigma$  中  $x = y = z = 0$  处静止的钟，在  $t = 0$  和  $t = \frac{1}{c}$  发出“的嗒”声，它们分别与  $m = 0$  和  $m = 1$  相对应。在图 6.7(a) 中相应于此二事件的“世界点”分别在  $O$

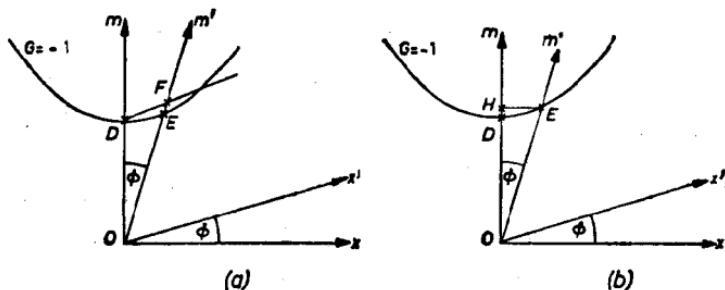


图 6.7 时间膨胀现象。(a) 在  $\Sigma$  中的点  $x = 0$  于时刻  $m = 0$  和  $m = 1$  发生的两个事件分别用“世界点” $O$  和  $D$  表示。在三角形  $ODF$  中， $\angle ODF$  和  $\angle OFD$  分别为  $\pi/2 + \phi$  和  $\pi/2 - \phi$ ，因此， $OF = OD \cos\phi \sec 2\phi$ ，其中  $\tan\phi = v/c$ 。(b) 在  $\Sigma'$  的原点于  $m' = 0$  和  $m' = 1$  发生的两个事件分别用“世界点” $O$  和  $E$  表示。

和  $D$  处。为测量此二事件相对于  $\Sigma'$  的坐标和时间，画出相应于相对速度  $v$  的  $Ox'$  和  $Om'$  轴，使  $\tan\phi = v/c$ 。 $\Sigma'$  中  $m'$  的单位由  $OE$  给出。为得出  $D$  处事件的  $m'$  坐标，过  $D$  作平行于

$Ox'$  轴的直线交  $Om'$  轴于  $F$ , 于是  $OF$  代表  $O$  处事件和  $D$  处事件在  $\Sigma'$  中的  $m' = ct'$  值的差。 $\Sigma'$  中的  $m'$  单位由  $OE$  给出。由于在图 6.7(a) 中  $OF > OE$ , 发生于  $\Sigma$  中  $x = y = z = 0$  处的二事件之间的时间间隔, 在  $\Sigma'$  中要比在  $\Sigma$  中长些, 这就解释了时间膨胀。[实际上,  $OF$  在  $\Sigma'$  中所代表的  $m'$  值等于  $OF/g'_2 = \cos\phi \sec 2\phi/g'_2 = \gamma$ ] 设相应于  $x' = 0$ ,  $m' = 0$  和  $x' = 0$ ,  $m' = 1$  的二事件分别在  $O$  和  $E$  处, 如图 6.7(b) 所示。为得到  $E$  处事件的  $m$  坐标, 作平行于  $Ox$  轴的直线交  $m$  轴于  $H$ 。 $\Sigma$  中的  $m = ct$  的单位由  $OD$  给出。由于  $OH > OD$ , 所以现在  $\Sigma$  中的时间间隔比  $\Sigma'$  中长些, 这表明时间膨胀现象也是互逆的。

### 6.3 利用复变量 $X_4 = i\omega t$

在 § 6.2 中我们只用到实变量。还有另一条途径, 不用时间, 也不用  $m = ct$ , 而引进变量  $X_4 = i\omega t$ , 其中  $i = \sqrt{-1}$ 。新变量引入后, 在  $\Sigma$  中有:

$$X_1 = x; \quad X_2 = y; \quad X_3 = z; \quad X_4 = i\omega t$$

设  $\Sigma'$  中的对应量为

$$X'_1 = x'; \quad X'_2 = y'; \quad X'_3 = z'; \quad X'_4 = i\omega t'$$

由洛伦兹变换

$$x' = \gamma(x - vt)$$

因此

$$X'_1 = \gamma \left( X_1 - \frac{vX_4}{ic} \right) = \gamma \left( X_1 + i \frac{v}{c} X_4 \right), \quad (6.13)$$

$$X'_2 = X_2, \quad (6.14)$$

$$X'_3 = X_3. \quad (6.15)$$

而

$$t' = \gamma(t - vx/c^2),$$

或  $i\omega t' = \gamma \left( i\omega t - i \frac{v}{c} x \right)$ ,

因此,

$$X'_4 = \gamma \left( X_4 - i \frac{v}{c} X_1 \right), \quad (6.16)$$

方程(6.13)和(6.16)可改写为如下形式

$$X'_1 = X_1 \cos \phi + X_4 \sin \phi, \quad (6.17)$$

$$X'_4 = -X_1 \sin \phi + X_4 \cos \phi. \quad (6.18)$$

其中

$$\tan \phi = iv/c; \quad \cos \phi = \gamma; \quad \sin \phi = i\gamma \frac{v}{c} \quad (6.19)$$

我们再次从只考虑  $x$  方向的运动开始，并用笛卡儿直角坐标系将  $X_4$  相对于  $X_1$  画出，如图 6.8(a) 和 (b) 所示。

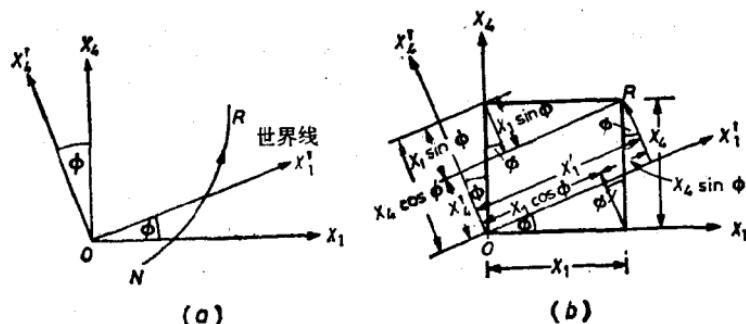


图 6.8 (a)  $NR$  为在  $X_1 = x, X_4 = i\omega t$  空间中的“世界线”。洛伦兹变换相应于将  $X_1, X_4$  轴旋转同一角度  $\phi$ 。(b) “世界点”  $R$  相对于新轴  $X'_1, X'_4$  的坐标与相对于旧轴  $X_1, X_4$  的坐标之间的关系。

设质点  $P$  相对于惯性系  $\Sigma$  的运动用曲线  $NR$  表示。我们现在将表明如何可以表示  $P$  相对于  $\Sigma'$  的运动。 $\Sigma'$  的  $X'$  轴必须用  $X'_4 = 0$  来代表。从方程(6.18)得出，相对于  $OX_1, OX_4$  坐标系，直线  $X'_4 = 0$  由  $X_4/X_1 = \tan \phi$  给出。这代表一条与  $X_1$

轴成  $\phi$  角的直线。类似地,  $\Sigma'$  中的  $X'_4$  轴必然是用直线  $X'_1 = 0$  来代表。从方程(6.17)得出, 相对于  $OX_1, OX_4$  坐标系, 直线  $X'_1 = 0$  由直线  $X_1/X_4 = -\tan \phi$  表示; 这条直线与  $X_4$  轴成角  $\phi$ , 而与  $X_1$  轴成角  $\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)$ , 如图 6.8 所示。在目前情形下, 当从  $\Sigma$  变换到  $\Sigma'$  时,  $X_1$  轴和  $X_4$  轴都朝同一方向旋转, 并始终保持互成直角。

如果度规(尺度)没有变化, 那么点  $R$  相对于  $OX'_1, OX'_4$  轴的坐标为:

$$X'_1 = X_1 \cos \phi + X_4 \sin \phi,$$

$$X'_4 = -X_1 \sin \phi + X_4 \cos \phi.$$

如图 6.8(b) 所示。这些分量恰与用洛伦兹变换, 对一个在  $\Sigma$  中坐标为  $X_1$  和  $X_4$  的事件所预言的  $X'_1$  和  $X'_4$  坐标相同。因此, 点  $R$  既可以表示质点  $P$  相对  $\Sigma$  的位移, 也可表示相对  $\Sigma'$  的位移, 并且不需要改变  $X'_1$  和  $X'_4$  的单位长度。质点  $P$  的“世界线”也是不变的。洛伦兹变换对应着  $X_1X_4$  平面内的坐标轴旋转。

$X_1X_4$  平面内的位移  $OR$  和普通二维坐标几何学中的位移矢量具有同样的变换性质。由于这个缘故, 常常说  $P$  点的  $X_1$  和  $X_4$  坐标是  $X_1X_4$  平面中的一个矢量的坐标。如果质点  $P$  在作三维运动, 那么就需要用四维  $X_1, X_2, X_3, X_4$  来确定它在给定时刻的位移。因为按照洛伦兹变换,  $X'_2 = X_2$ ,  $X'_3 = X_3$ , 因此洛伦兹变换仍然可用  $X_1X_4$  平面内的坐标轴旋转来表示。点  $R$  的四个坐标就被认为是构成了一个四维矢量的分量。引入了坐标  $X_4 = ic t$ ,  $X_1X_2X_3X_4$  四维空间的几何成了“欧几里得几何”。应当强调指出, 这是一种纯粹的形式表示, 因为坐标  $X_4$  是虚的, 而  $X_1X_4$  平面中的旋转, 是通过一个由  $\tan \phi = iv/c$  所给出的虚角。采用复数常常简化代数运算。

在狭义相对论的某些方程中出现  $\sqrt{-1}$ , 并不具有什么深刻的神秘含意。引入它只是为了数学上的方便, 正如在交流电理论中引入  $j = \sqrt{-1}$  常常可以使计算简化一样。

时间膨胀和长度缩短现象也可用本节所阐述的想法来解释。考虑一个处在  $\Sigma$  的原点的钟发出一系列信号, 对应于  $\Delta X_4 = 1$ 。在图 6.9 中, 我们用沿  $X'_4$  轴的一系列叉号来表示这些事件。为得到这些事件的  $X'_4$  坐标, 我们作一系列平行于  $X'_4$  轴的直线。在  $X'_4$  轴上的每个叉号之间的距离等于  $\Delta X_4 \cos \phi$ 。由方程(6.19),  $\cos \phi = 1/(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$ , 因此

$$\Delta X'_4 = \frac{\Delta X_4}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

即

$$ic\Delta t' = \frac{ic\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \text{或者} \quad \Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

这表示时间膨胀现象。

如果一个长为  $l_0$  的杆在惯性系  $\Sigma$  的  $X_1$  轴上静止, 那么它

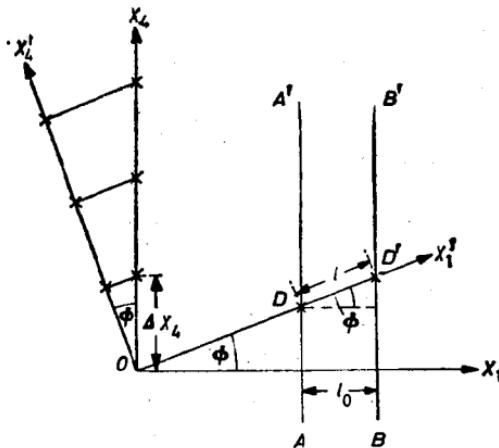


图 6.9 用  $X_1, X_4$  空间的性质解释时间膨胀与长度缩短现象

的两个端点的世界线就由直线  $AA'$  和  $BB'$  给出, 如图 6.9 所示。

为了决定此杆在  $\Sigma'$  中的长度, 一定要在  $\Sigma'$  中的相同时刻来测量杆的两端(此杆相对于  $\Sigma'$  以匀速  $v$  运动): 如果在时刻  $X'_1 = 0$  来测量此杆相对于  $\Sigma'$  的长度, 那么其长度就由世界线  $AA'$  和  $BB'$  在  $X'_1$  轴上的交点之差所给出, 即由  $DD'$  给出, 如图 6.9 所示。我们有

$$DD' = l = l_0 \sec \phi = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

这就给出了运动杆的长度收缩。也可以很直接了当地再次证明时间膨胀和长度缩短都是互逆的。

#### 6.4 狹义相对论的四维矢量表述

在初等教科书中, 矢量是被定义为一个既有大小又有方向的量。表达矢量的最方便的方法是采用一个固定在空间中的坐标系。坐标系轴的方向代表空间的固定方向。于是矢量就可用它在各轴上的分量来表示。如果给出矢量的各分量, 则矢量的大小, 以及它在空间中的方向都能计算出来。如果坐标轴在空间中作一转动, 矢量本身必然不改变其大小和方向。如果情形确实如此, 那么当坐标轴转动时, 矢量分量必定按某种特殊方式来变换。如果当坐标轴转动时, 任一量的分量象一矢量的分量一样变换, 那么该量就一定是矢量。因此, 借助于坐标轴转动时分量的变换性质来定义矢量是很方便的。在  $X_1 X_2 X_3 X_4$  空间中的四维矢量将被定义为这样的量, 它在洛伦兹变换下, 其变换方式与四维空间中一点的  $X_1, X_2, X_3, X_4$  坐标的变换相同。例如, 如果  $\mathbf{A}$  在洛伦兹变换之下, 有

$$A'_1 = \gamma \left( A_1 + i \frac{v}{c} A_4 \right); \quad A'_2 = A_2; \quad A'_3 = A_3;$$

$$A'_4 = \gamma \left( A_4 - i \frac{v}{c} A_1 \right) \quad (6.20)$$

则与方程

$$\begin{aligned} X'_1 &= \gamma \left( X_1 + i \frac{v}{c} X_4 \right); \quad X'_2 = X_2, \quad X'_3 = X_3; \\ X'_4 &= \gamma \left( X_4 - i \frac{v}{c} X_1 \right) \end{aligned} \quad (6.21)$$

类比,  $\mathbf{A}$  就定义为一个四维矢量. 现在

$$\begin{aligned} A'^2_1 + A'^2_2 + A'^2_3 + A'^2_4 \\ = \gamma^2 \left( A_1 + i \frac{v}{c} A_4 \right)^2 + A_2^2 + A_3^2 + \gamma^2 \left( A_4 - i \frac{v}{c} A_1 \right)^2 \\ = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2. \end{aligned} \quad (6.22)$$

因此, 当坐标轴转动(即受到洛伦兹变换)时, 一个四维矢量的长度是不变的. 如果一个四维矢量长度的平方是正的, 它就是类空矢量, 如果矢量长度的平方是负的, 它就是类时矢量.

再回到位置四维矢量, 它的四个分量可用  $(X_1, X_2, X_3, X_4) = (\mathbf{r}, ct)$  表示. 三个分量  $X_1, X_2, X_3$  是普通三维空间中一个矢量的分量; 第四个分量等于一个标量  $ct$  乘以  $\sqrt{-1}$ . 一切四维矢量都具有这一性质. 如果另一个位置四维矢量的分量为  $X_1 + \delta X_1, X_2 + \delta X_2, X_3 + \delta X_3, X_4 + \delta X_4$ , 那么

$$(X'_1 + \delta X'_1) = \gamma \left[ X_1 + \delta X_1 + \frac{i v}{c} (X_4 + \delta X_4) \right],$$

$$X'_2 + \delta X'_2 = X_2 + \delta X_2,$$

$$X'_3 + \delta X'_3 = X_3 + \delta X_3,$$

$$X'_4 + \delta X'_4 = \gamma \left[ X_4 + \delta X_4 - i \frac{v}{c} (X_1 + \delta X_1) \right],$$

减去由(6.21)给出的四维矢量  $(X_1, X_2, X_3, X_4)$  的变换式,

$$\delta X'_1 = \gamma \left[ \delta X_1 + i \frac{v}{c} \delta X_4 \right];$$

$$\begin{aligned}\delta X'_2 &= \delta X_2; \\ \delta X'_3 &= \delta X_3; \\ \delta X'_4 &= \gamma \left[ \delta X_4 - i \frac{v}{c} \delta X_1 \right]\end{aligned}\quad (6.23)$$

因此四维矢量的增量也构成一个四维矢量。既然四维矢量的长度为不变量，因此

$$\delta X'^2_1 + \delta X'^2_2 + \delta X'^2_3 + \delta X'^2_4 = \delta X^2_1 + \delta X^2_2 + \delta X^2_3 + \delta X^2_4.$$

这相当于关系式

$$\delta s^2 = \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 - c^2 \delta t^2 = \text{不变量}.$$

上述关系在 3.10 节中曾导出过，在那里我们证明了两个事件的间距为不变量。在 3.10 节中我们证明了，当  $\delta s^2$  为负时，可选出一个惯性系，在该惯性系中二事件在同一地点发生。这时，二事件的时间间隔便为原时间间隔。令  $\delta s = ic\delta\tau$ ，其中  $\delta\tau$  为原时间间隔。

$$\begin{aligned}\delta s^2 &= (ic\delta\tau)^2 = \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 - c^2 \delta t^2, \\ \frac{\delta x^2}{\delta t^2} + \frac{\delta y^2}{\delta t^2} + \frac{\delta z^2}{\delta t^2} - c^2 &= \left( \frac{ic\delta\tau}{\delta t} \right)^2.\end{aligned}\quad (6.24)$$

如果具有坐标  $X_1, X_2, X_3, X_4$  和  $X_1 + \delta X_1, X_2 + \delta X_2, X_3 + \delta X_3, X_4 + \delta X_4$  的两个事件，代表着一质点在时刻  $t$  和  $t + \delta t$  在惯性系  $\Sigma$  中的位置，那么

$$\frac{\delta x}{\delta t} = u_x,$$

$$\frac{\delta y}{\delta t} = u_y,$$

$$\frac{\delta z}{\delta t} = u_z.$$

方程(6.24)变为

$$u^2 - c^2 = -c^2 \frac{\delta \tau^2}{\delta t^2},$$

$$\delta\tau^2 = \delta t^2(1 - u^2/c^2)$$

或

$$\delta\tau^2 = \delta t\sqrt{1 - u^2/c^2}. \quad (6.25)$$

在方程 (6.25) 中,  $u$  是质点在惯性系  $\Sigma$  中的三维速度。因为  $\delta\tau^2$  是一不变量, 所以  $\delta\tau$  也是一不变量。如果用一标量(或者说不变量)  $\alpha$  去乘一个矢量的所有分量, 我们就得到一个新矢量, 其长度为原矢量的  $\alpha$  倍。设四维矢量  $\mathbf{X}$  和  $\mathbf{X} + \delta\mathbf{X}$  代表一质点在时刻  $t$  和  $t + \delta t$  的位置; 那么

$$\delta\mathbf{X} = (\delta X_1, \delta X_2, \delta X_3, \delta X_4)$$

为四维矢量。如果用不变量  $\frac{1}{\delta\tau}$  乘这一四维矢量, 我们就得  
到一个量, 它也是四维矢量; 把它记作  $\mathbf{U}$ 。我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{U} &= \left( \frac{\delta X_1}{\delta\tau}, \frac{\delta X_2}{\delta\tau}, \frac{\delta X_3}{\delta\tau}, \frac{\delta X_4}{\delta\tau} \right) \\ &= \left( \frac{dx}{\sqrt{(1 - u^2/c^2)dt}}, \frac{dy}{\sqrt{(1 - u^2/c^2)dt}}, \right. \\ &\quad \left. \frac{dz}{\sqrt{(1 - u^2/c^2)dt}}, \frac{icdt}{\sqrt{(1 - u^2/c^2)dt}} \right).\end{aligned}$$

但  $\frac{dx}{dt} = u_x$ , 等等, 其中  $u$  为质点的普通三维速度, 因此

$$\begin{aligned}\mathbf{U} &= \left( \frac{u_x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \frac{u_y}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \right. \\ &\quad \left. \frac{u_z}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \frac{ic}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) \\ &= \left( \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \frac{ic}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right). \quad (6.26)\end{aligned}$$

这个四维矢量称为四维矢量速度或四维速度。在  $\Sigma'$  中, 质点的四维速度由下式给出:

$$\mathbf{U}' = \left( \frac{\mathbf{u}'}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}}, \frac{ic}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} \right), \quad (6.27)$$

其中  $\mathbf{u}'$  是在  $\Sigma'$  中测量的质点的三维速度。如果  $\mathbf{U}$  是四维矢量，它必须按照方程组(6.20)变换，因此

$$\begin{aligned} U'_4 &= \gamma \left( U_4 - i \frac{v}{c} U_1 \right) \\ &= \gamma \left( \frac{ic}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - i \frac{v}{c} \frac{u_x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) \\ &= \frac{ic\gamma \left( 1 - \frac{vu_x}{c^2} \right)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \end{aligned}$$

但由方程(6.27)，

$$U'_4 = \frac{ic}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}}$$

因此

$$\frac{1}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} = \frac{(1 - vu_x/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (6.28)$$

这与方程(4.14)相同。由方程(6.26)

$$\begin{aligned} U'_1 &= \gamma \left[ U_1 + i \frac{v}{c} U_4 \right] \\ &= \gamma \left[ \frac{u_x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} + i \frac{v}{c} \frac{ic}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right] \\ &= \gamma \frac{(u_x - v)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \end{aligned}$$

但由方程(6.27)， $U'_1$  等于  $\frac{u'_x}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}}$

因此，

$$u'_x = \frac{\gamma(u_x - v)\sqrt{1 - u^2/c^2}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

用方程(6.28),

$$u'_x = \frac{(u_x - v)}{(1 - vu_x/c^2)},$$

此式为质点三维速度的  $x$  分量的变换式。

由方程(6.20)  $U'_2 = U_2$ , 因此:

$$\frac{u'_y}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} = \frac{u_y}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \text{ 或 } u'_y = u_y \frac{\sqrt{1 - u'^2/c^2}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

用方程(6.28)

$$u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{(1 - vu_x/c^2)}.$$

类似地,

$$u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{(1 - vu_z/c^2)}.$$

这就完成了速度变换。四维矢量的长度必须是不变量。现在,

$$\begin{aligned} U^2 &= U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 \\ &= \frac{u^2}{(1 - u^2/c^2)} + \frac{v^2 c^2}{(1 - u^2/c^2)} \\ &= \frac{u^2 - c^2}{(1 - u^2/c^2)} = -\frac{c^2(1 - u^2/c^2)}{(1 - u^2/c^2)} = -c^2. \end{aligned}$$

按照光速不变假设, 这必然是不变量。四维速度是类时的四维矢量。

如果  $\mathbf{U}$  是质点在惯性系  $\Sigma$  中点  $x, y, z$  在时刻  $t$  的四维速度, 而  $\mathbf{U} + \delta\mathbf{U}$  是点  $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$  在时刻  $t + \delta t$  的四维速度, 那么  $\mathbf{U}$  的各分量的增量为一个四维矢量的分量, 即  $(\delta U_1, \delta U_2, \delta U_3, \delta U_4)$  为一个四维矢量。乘以不变量  $1/\delta\tau$ , 我们得到另一个四维矢量,  $\mathbf{A}$ , 它称为四维矢量加速度, 或者四维加速度。经过一些代数演算, 我们得到

$$\mathbf{A} = \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \left( \left\{ \frac{c^2}{(c^2 - u^2)} \mathbf{a} - \mathbf{u} \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})}{(c^2 - u^2)^2} \right\}, \right. \\ \left. \frac{ic^3(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})}{(c^2 - u^2)^2} \right), \quad (6.29)$$

其中  $\mathbf{a}$  是质点的三维加速度。

在狭义相对论中，当质点静止于一切惯性系中时质点的惯性静止质量都具有相同的数值，尽管当质点运动时，它的质量与质点速度有关。将四维速度乘以不变的静止质量  $m_0$ ，我们得到

$$\mathbf{P} = m_0 \mathbf{U} = \left( \frac{m_0 \mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \frac{im_0 c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) = (\mathbf{p}, imc), \quad (6.30)$$

$\mathbf{P}$  称为四维矢量动量或者四维动量，而  $\mathbf{P} = m_0 \mathbf{u}/(1 - u^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$  为三维动量， $m = m_0/(1 - u^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$  为相对论质量。在现阶段，我们可以完全和 5.3 节中一样，把三维力  $\mathbf{f}$  定义为  $d\mathbf{p}/dt$ ，而把它在位移  $d\mathbf{l}$  上所作的功定义为  $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{l}$ 。令所作的功与动能的增加量相等，在 5.3 节中曾得出

$$dT = \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{或者} \quad \frac{dT}{dt} = \mathbf{f} \cdot \frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}, \quad (6.31)$$

象 5.3 节一样，对上式积分，我们得到

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - m_0 c^2,$$

或

$$mc^2 = T + m_0 c^2 = E.$$

在方程(6.30)中，替换掉  $mc^2$ ，得到

$$\mathbf{P} = (\mathbf{p}, imc/c). \quad (6.32)$$

在  $\Sigma'$  中相应的四维矢量是

$$\mathbf{P}' = (\mathbf{p}', im'c) = (\mathbf{p}', im'c/c). \quad (6.33)$$

四维矢量的长度是不变量，因此

$$p^2 + (iE/c)^2 = \text{常数},$$

或

$$p^2 - \frac{E^2}{c^2} = \text{常数}.$$

当  $p = 0$ ,  $E = m_0 c^2$ , 因而此常数等于  $-m_0^2 c^2$ , 于是

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4.$$

因为四维矢量的长度是不变量，在  $\Sigma'$  中有

$$p'^2 - E'^2/c^2 = -m_0^2 c^2,$$

这给出

$$E'^2 = p'^2 c^2 + m_0^2 c^4.$$

为得出单个质点动量的变换式，可利用  $(p, iE/c)$  是四维矢量这一事实。对于第一个分量，由方程(6.20)，我们有

$$P'_1 = \gamma \left( P_1 + \frac{i\nu}{c} P_4 \right),$$

或

$$p'_x = \gamma \left( p_x + \frac{i\nu}{c} iE/c \right) = \gamma(p_x - \nu E/c^2),$$

由方程(6.20)，

$$P'_2 = P_2, \quad \text{这给出} \quad p'_y = p_y.$$

类似地

$$P'_3 = P_3, \quad \text{这给出} \quad p'_z = p_z.$$

关系式  $P'_4 = \gamma \left( P_4 - \frac{i\nu}{c} P_1 \right)$  给出

$$iE'/c = \gamma \left( iE/c - \frac{i\nu}{c} p_x \right),$$

或

$$E' = \gamma(E - \nu p_x).$$

这些变换式与在5.5节中所导出的相同。

现在由方程(6.32)得出,  $d\mathbf{P} = \left( d\mathbf{p}, i \frac{dE}{c} \right)$  是四维矢量。乘以  $1/d\tau$ , 我们就得到闵可夫斯基四维力  $\mathbf{F}$ , 它由下面关系式定义:

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \frac{d\mathbf{P}}{d\tau} = \left( \frac{d\mathbf{p}}{d\tau}, \frac{i}{c} \frac{dE}{d\tau} \right) \\ &= \left( \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{(1 - u^2/c^2)}dt}, \frac{i}{c} \frac{dE}{\sqrt{(1 - u^2/c^2)}dt} \right).\end{aligned}$$

如果质点的静止质量为不变量, 利用方程(6.30)得

$$\mathbf{F} = m_0 \frac{d\mathbf{U}}{dt}. \quad (6.34)$$

(静止质量并非总是不变量, 例如一个烧燃料而喷气的火箭, 其静止质量就是不断减小的.)既然,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(T + m_0 c^2) = \frac{dT}{dt},$$

由方程(6.31),  $\frac{dT}{dt} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}$ , 其中  $\mathbf{f}$  是三维力, 其定义为  $\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ 。因此,

$$\mathbf{F} = \left( \frac{\mathbf{f}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \frac{i\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}}{c\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right). \quad (6.35)$$

$\Sigma'$  中的相应的四维矢量为

$$\mathbf{F}' = \left( \frac{\mathbf{f}'}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}}, \frac{i\mathbf{f}' \cdot \mathbf{u}'}{c\sqrt{1 - u'^2/c^2}} \right). \quad (6.36)$$

对于四维矢量的第一个分量, 由方程(6.20), 我们有

$$F'_1 = \gamma \left( F_1 + \frac{iv}{c} F_4 \right),$$

即

$$\frac{f'_x}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} = \gamma \left[ \frac{f_x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} + i \frac{v}{c} \frac{i}{c} \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right],$$

$$f'_x = \frac{\sqrt{1 - u'^2/c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sqrt{1 - u^2/c^2}} \left[ f_x - \frac{v}{c^2} (f_y u_x + f_z u_y + f_z u_z) \right]. \quad (6.37)$$

但由方程(6.28)

$$\frac{\sqrt{1 - u'^2/c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)},$$

方程(6.37)变为

$$f'_x = \frac{1}{\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)} \left[ f_x \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right) - \frac{v}{c^2} (f_y u_y + f_z u_z) \right],$$

即

$$f'_x = f_x - \frac{vu_x f_y}{(c^2 - vu_x)} - \frac{vu_x f_z}{(c^2 - vu_x)}. \quad (6.38)$$

由于,从方程(6.20),  $F'_2 = F_2$ :

$$\frac{f'_y}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} = \frac{f_y}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

用方程(6.28),有

$$\sqrt{\frac{1 - u'^2/c^2}{1 - u^2/c^2}} = \sqrt{\frac{1 - v^2/c^2}{(1 - vu_x/c^2)^2}},$$

因此,

$$f'_y = \frac{c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}}{(c^2 - vu_x)} f_y. \quad (6.39)$$

类似地

$$f'_z = \frac{c^2 \sqrt{(1 - v^2/c^2)}}{(c^2 - vu_x)} f_z. \quad (6.40)$$

这就完成了三维力的变换。对于单个质点的相对论力学，使用四维矢量是另一条简明的途径，运动方程由(6.34)给出。在点碰撞或粒子衰变情形，如果假定

$$\Sigma \mathbf{P}_i = \text{常数} = \Sigma \bar{\mathbf{P}}_i, \quad (6.41)$$

其中  $\mathbf{P}_i$  和  $\bar{\mathbf{P}}_i$  是第  $i$  个质点在碰撞前和碰撞后的四维动量，那么，把方程(6.41)写成分量形式，

$$\Sigma p_x = \Sigma \bar{p}_x; \quad \Sigma p_y = \Sigma \bar{p}_y; \quad \Sigma p_z = \Sigma \bar{p}_z;$$

$$\Sigma \frac{iE}{c} = \Sigma \frac{i\bar{E}}{c} \quad \text{或者} \quad \Sigma E = \Sigma \bar{E}$$

这样在方程(6.41)中既包含了动量守恒定律，也包含了质量-能量守恒定律。

有些人宁愿把所有方程都写成四维矢量方程，来求解相对论力学中的问题。可以把向量和张量分析的诸定理推广到四维情形，这些方法常可以使解决问题的过程得到简化。在第十章中，我们把这些方法应用于电磁学。对于用四维矢量方法讲述狭义相对论感兴趣的读者，可参考辛基(J. L. Synge)所著《狭义相对论》(*Relativity The Special Theory*)，以及谬勒(Møller)所著《相对论》(*The Theory of Relativity*)。

本节中我们采用了虚的第四个分量。假如我们把四维矢量定义为具有四个实分量  $x, y, z, m = ct$  的量，它按照以下方程组变换：

$$x' = \gamma \left( x - \frac{v}{c} m \right); \quad y' = y; \quad z' = z; \\ m' = \gamma \left( m - \frac{vx}{c} \right). \quad (6.42)$$

那么迄今所述的理论可以完全一样地得到阐述。原时  $d\tau$  又是不变量。借助于只用实变量的四维矢量来完整叙述狭义相对论，以及把它推广到广义相对论，需要运用微分几何的符号

和一些结果。这就要超出本书范围之外的广泛的数学预备知识。感兴趣的读者可参考例如巴诺夫斯基 (Panofsky) 和菲利浦 (Phillips) 的书。用  $X_4 = ict$  作为四维矢量的第四个分量，可以把狭义相对论推广到电磁学，并且我们在第十章中将发现，普通的笛卡儿张量——它可以简单地由矩阵理论发展起来——在这种情形中是足够用的。

## 6.5 德布洛意波

按照方程 (6.32)，质点的三维动量  $\mathbf{p}$  和能量  $E$  可联合组成四维矢量  $(p_x, p_y, p_z, iE/c) = (\mathbf{p}, iE/c)$ 。在某些情形下，光子的行为象一个粒子，并且在 5.8.3 节中曾说明，与一个能量为  $E = h\nu$  的光子相联系，有一个动量  $\mathbf{p} = \mathbf{n}h\nu/c$ ，其中  $\nu$  为频率， $h$  为普朗克常数，而  $\mathbf{n}$  为光子运动方向的单位矢量。在光子的情形四维矢量  $(\mathbf{p}, iE/c)$  可改写为  $(\mathbf{n} \frac{h\nu}{c}, \frac{i\nu}{c})$ 。现在考虑在惯性系  $\Sigma$  的  $xy$  平面中运动的一个单个光子，它也在  $\Sigma'$  的  $x'y'$  平面内，设光子的运动方向与  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  的  $x$  和  $x'$  轴分别成  $\theta$  和  $\theta'$  的角度。由方程(6.20)，对于一个四维矢量  $\mathbf{A}$ ，

$$A'_1 = \gamma \left( A_1 + i \frac{\nu}{c} A_4 \right); \quad A'_2 = A_2;$$

$$A'_4 = \gamma \left( A_4 - i \frac{\nu}{c} A_1 \right)$$

把这些方程应用于光子的四维动量，我们得到

$$\nu' \cos \theta' = \gamma \nu (\cos \theta - \nu/c)$$

$$\nu' \sin \theta' = \nu \sin \theta$$

$$\nu' = \gamma \nu (1 - \nu \cos \theta / c)$$

这三个方程分别和方程(4.36)、(4.37)、(4.38)完全一样，而后者是在4.4节中当考虑真空中平面波的变换时得出的。这就说明了光子和波的模型对于多普勒效应及光行差怎样产生了完全相同的结果。这也证明了，平面波的传播方向和频率结合在一起就组成了四维矢量( $\mathbf{n}\nu$ ,  $i\nu$ )，其中 $\mathbf{n}$ 为平面波传播方向的单位矢量，而 $\nu$ 为波的频率。乘以 $h/c$ ，便得到四维矢量 $\left(\frac{\mathbf{n}h}{\lambda}, \frac{i h \nu}{c}\right)$ ，其中 $h$ 为普朗克常数。因此，在光的情形，光子的动量和能量可以联合组成四维矢量( $\mathbf{p}$ ,  $iE/c$ )，而平面单色波的波长和频率可以联合组成四维矢量 $\left(\frac{\mathbf{n}h}{\lambda}, \frac{i h \nu}{c}\right)$ 。

德布洛意建议，有一定静止质量的那些粒子，也可能有与之相联系的“波”。如果确实是这样，那么通过和光的类比，我们将期望粒子的动量和能量联合组成四维矢量( $\mathbf{p}$ ,  $iE/c$ )，而期望粒子“波”的波长和频率将可能联合组成四维矢量 $\left(\frac{\mathbf{n}h}{\lambda}, \frac{i h \nu}{c}\right)$ ，其中 $\mathbf{n}$ 是在粒子“波”传播方向上的单位矢量。德布洛意建议，普朗克关系式 $E = h\nu$ 对粒子可能成立，在这种情况下，“波”四维矢量可改写为 $\left(\frac{\mathbf{n}h}{\lambda}, \frac{iE}{c}\right)$ 。与四维矢量 $(\mathbf{p}, \frac{iE}{c})$ 比较，便可期望 $\mathbf{p}$ 等于 $\mathbf{n}h/\lambda$ ，或

$$\lambda = h/p. \quad (6.43)$$

这就是德布洛意关系，它已被实验所证实。讨论德布洛意“波”的性质及该理论在量子力学中的推广将超出本书的范围。有兴趣的读者可参考关于量子力学的教科书。德布洛意关系不是从狭义相对论推导出来的，也就是说，它不是相对性原理和光速不变原理的逻辑推论。我们所证明的不过是：关系式 $\lambda = h/p$ 是同狭义相对论不矛盾的。德布洛意波的相速度 $v_{ph}$ 由下式给出

$$\begin{aligned}\nu_{ph} &= \lambda\nu = \frac{\hbar}{p} \frac{E}{\hbar} = \frac{E}{p} \\ &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \div \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{c^2}{u}\end{aligned}$$

因此，粒子“波”的相速度是超过光速的。另一方面，群速度  $\nu_g$  由下式给出：

$$\begin{aligned}\nu_g &= \frac{d\nu}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{d(h\nu)}{d\left(\frac{\hbar}{\lambda}\right)} = \frac{dE}{dp} \\ &= \frac{d}{du} \left[ \frac{m_0 c^2}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}} \right] \div \frac{d}{du} \left[ \frac{m_0 u}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}} \right] \\ &= \frac{m_0 u}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}} \div \frac{m_0}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}} = u\end{aligned}$$

因此，德布洛意波的群速等于粒子的速度。

### 补充读物

闵可夫斯基的原始论文，被译在由 Dover 出版公司出版的原始论文集《相对性原理》之中。在玻恩所著《爱因斯坦的相对论》，弗兰契所著《现代物理原理》(French's *Principles of Modern Physics*)，爱丁顿所著《空间，时间和引力》，以及阿霍洛尼 (Aharoni) 所著《狭义相对论》(The *Special Theory of Relativity*) 当中，可以找到关于洛伦兹变换几何表示的很好的说明。如果只想找到关于二惯性系之间洛伦兹变换的简单几何表示法的说明，读者可参考布雷姆 (R. W. Brehme) 的文章 (*Amer. J. Phys.* 30 (1962) 489, 31 (1963) 517) 和希尔斯 (F. W. Sears) 的文章 (*Amer. J. Phys.* 31 (1963) 269)。

关于用四维矢量讲述狭义相对论，读者可参考谬勒所著《相对论》，巴诺夫斯基和菲利浦所著《经典电学与磁学》以及 J. L. 辛基所著《狭义相对论》。

## 习 题

(说明: 在所有关于四维矢量的计算中, 读者应假定四维矢量是按照方程(6.20)来定义的。这同谬勒的《相对论》一书相一致。)

### 6.1 证明, 通过变换

$$x' = x \cosh \alpha - ct \sinh \alpha; \quad y' = y; \quad z' = z;$$

$$ct' = -x \sinh \alpha + ct \cosh \alpha;$$

$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2$  变成  $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$ . 再证明, 如果  $\alpha = \tanh^{-1} v/c = \frac{1}{2} \log_e \frac{(c+v)}{(c-v)}$ , 则上述变换便与洛伦兹变换相同。

### 6.2 证明, 通过变换

$$x' = x \cos \phi + ict \sin \phi$$

$$y' = y; \quad z' = z;$$

$$ict' = -x \sin \phi + ict \cos \phi$$

$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2$  变成  $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$ . 再证明, 如果  $\tan \phi = iv/c$ , 则上述变换便与洛伦兹变换相同。

6.3 说明用  $x$  和  $m = ct$  作为变量的闵可夫斯基图示法的用处。世界线有什么意义? 什么是校准双曲线?

借助于闵可夫斯基图示法来讨论(a)长度缩短, (b)时间膨胀的概念。用几何方法计算长度缩短和时间膨胀的公式。

6.4 解释洛伦兹变换如何可表示为在  $X_1 = x$ ,  $X_2 = y$ ,  $X_3 = z$ ,  $X_4 = ict$  空间中的一个旋转。

借助于用  $X_1$  和  $X_4$  作为变量的空-时图示法来讨论长度缩短和时间膨胀现象。

6.5 证明由方程(6.20)所定义的四维矢量的长度是不变量。(a) 什么是四维速度的长度平方? (b) 什么是四维动量

的长度平方?

6.6 在 3.10 节中, 如果  $dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$  是负的(是正的), 便把间距  $ds$  定义为类时(类空)间距. 证明, 单个质点的四维速度和四维动量是类时矢量, 并证明, 单个质点的四维加速度和四维力是类空矢量. [注: 在质点于其中瞬时静止的参考系中考虑这些四维矢量是有益的. 在这一参考系中, 四维加速度与四维力的第四个分量(或类时分量)均为零, 因为它们都正比于质点的三维速度. 这就证明了这两个四维矢量是类空的. 总可选择一个参考系, 使类空矢量的第四个分量在其中为零. 反之可以找到一个参考系, 使类时矢量的前三个分量在其中均为零.]

6.7 两个四维矢量的标量积可由下式定义

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 + A_4 B_4$$

证明, 这样定义的标量积是不变量, 即证明  $\mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ .

6.8 证明, 质点的四维速度和四维加速度是正交的, 即证明  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{A}$  为零. [提示: 可直接代入, 也可由  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U} = -c^2$  这一事实出发, 对  $\tau$  微分, 便给出  $\mathbf{U} \cdot \frac{d\mathbf{U}}{d\tau} = 0$ .]

6.9 作用于一质点上的闵可夫斯基四维力由关系式  $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{d\tau}$  定义. 证明, 若质点的静止质量为常数, 则  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{U} = 0$ ,

若静止质量不是常数, 则  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{U} = -c^2 \frac{dm_0}{d\tau}$  [ 提示:  $\mathbf{F} = \frac{d}{d\tau}(m_0 \mathbf{U}) = \mathbf{U} \frac{dm_0}{d\tau} + m_0 \frac{d\mathbf{U}}{d\tau}$ . 写出  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}$ , 并记住  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U} = -c^2$  ].

6.10 证明, 如果  $\mathbf{r}(\tau)$  是动点在坐标系  $\Sigma$  中的位置矢量, 则  $d\tau = (dt^2 - dr^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$  对一切互相作匀速相对运动的参考系  $\Sigma$  是一个不变量, 并证明, 闵可夫斯基速度和加速度分别是

$(\gamma \mathbf{u}, i\gamma c)$  和  $(\gamma^2(\mathbf{a} + \mathbf{u}\theta), i\gamma^2\theta)$ , 其中  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{a}$  是牛顿的三维速度和三维加速度,  $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$ , 而  $\theta = \gamma^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{a}/c^2$ .

由此(或用其他方法)证明, 如果  $\mathbf{a}_0$  为在静止参考系(在其中速度瞬时为零)中的加速度, 则在质点具有速度  $\mathbf{u}$  的参考系中, 相应的加速度  $\mathbf{a}$  为

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\gamma^2} \left\{ \mathbf{a}_0 - \left( \frac{1-\gamma}{u^2} + \frac{\gamma}{c^2} \right) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}_0) \mathbf{u} \right\}$$

6.11 一静止质量为  $m_0$  的质点, 在惯性系  $\Sigma$  中描绘出一条抛物线轨道  $x = ut$ ,  $y = \frac{1}{2}at^2$ ,  $z = 0$ . 求出  $\Sigma$  系中的闵可夫斯基四维力矢量的四个分量, 以及作用在该质点上的相应的牛顿力. [提示: 利用方程 (6.35). 作为对闵可夫斯基四维力  $\mathbf{F}$  的验算, 我们有  $\mathbf{F} = m_0 \mathbf{A}$ , 其中  $\mathbf{A}$  是四维加速度. 与问题 6.10 比较, 可写成  $\mathbf{F} = (m_0\gamma^2 u\theta, m_0\gamma^2(a + at\theta), 0, im_0c\gamma^2\theta)$ , 其中  $\gamma^2 = 1/(1 - u^2/c^2 - a^2t^2/c^2)$ ;  $\theta = \gamma^2 a^2 t/c^2$ .]

6.12 一质点上的闵可夫斯基力定义为  $(\mathbf{G}, iH)$ , 证明

$$\mathbf{G} = \mathbf{f}_0 - (1 - \gamma)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_0)\mathbf{v}/v^2;$$

$$H = \gamma(\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_0)/c$$

其中  $\mathbf{v}$  为该质点在  $\Sigma$  系中的速度,  $\mathbf{f}_0$  是在静止参考系中的牛顿力, 而  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$ .

证明, 在直线运动中,  $\Sigma$  系中的牛顿力  $(G/\gamma)$  与  $\mathbf{v}$  无关.

在一静止质量为  $m_0$  的质点上作用着一个沿  $Ox$  轴方向的常力  $m_0 f$ , 当  $t = 0$  时, 质点在  $O$  点静止. 求经过时间  $t$  质点走过的距离, 并证明, 当走过距离  $x$  时, 其动量为  $m_0(2xf + x^2f^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$ .

6.13 在惯性系  $\Sigma$  中, 一平面单色光波频率为  $\nu$ , 波前的法向具有方向余弦  $l, m, n$ . 在以速度  $V$  沿  $\Sigma$  的  $x$  方向运动的平行坐标系  $\Sigma'$  中, 频率为  $\nu'$ , 法向量的方向余弦为  $l', m'$ ,

n'. 证明

$$\nu' = \frac{(1 - lV/c)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \nu$$

并推导关于  $l'$ ,  $m'$  和  $n'$  的相应表达式.

用  $(\mathbf{p}, iE/c)$  为四维矢量的假设, 证明关于频率为  $\nu$  的光子的能量  $E$  和动量  $\mathbf{p}$  的普朗克关系即

$$E = h\nu, \quad \mathbf{p} = \frac{h\nu\mathbf{e}}{c}$$

[其中  $\mathbf{e} = (l, m, n)$  为运动方向的单位矢量, 而  $h$  为一常数] 与(平面)光波由光子组成的假说相一致.

6.14 扼要说明(说清楚所作假设) 四维动量守恒如何把动量守恒原理和能量守恒原理结合起来的. 证明一质点的动量四维矢量具有不变的大小.

由此(或用其它方法) 证明, 当具有相等静止质量的两个完全弹性的质点碰撞时(我们取这样一个参考系, 使一个质点在其中静止, 而另一个质点以速度  $\nu$  运动), 碰撞后二粒子运动方向与  $\nu$  方向之间的夹角  $\theta$ 、 $\phi$  有如下关系:

$$2 \cot \theta \cot \phi = 1 + (1 - \nu^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$$

6.15 证明与一具有静止质量  $m_0$ , 以速度  $u$  运动的粒子相联系的德布洛意波长为

$$\lambda = h(1 - u^2/c^2)^{\frac{1}{2}}/m_0 u$$

6.16 一电子由静止开始通过  $V$  伏特的电势差而加速. 证明其德布洛意波长(用埃表示)为

$$\lambda = \frac{12.27}{V^{1/2}} \left( \frac{Ve}{2m_0 c^2} + 1 \right)^{-1/2}.$$

6.17 证明与一粒子相联系的德布洛意波的群速等于粒子的速度. 证明德布洛意波的相速等于  $c^2/u$ , 其中  $u$  为粒子的速度.

## 第七章 电磁学的二级效应

### 7.1 引言

在初次给学生讲述电磁学时，不可避免地要对个别定律，诸如库仑定律，安培迴路定律和法拉第电磁感应定律等分开来进行介绍。结果使得许多学生倾向于认为这些定律描述完全互不相关的现象，许多学生不了解运动电荷之间电力和磁力的相对数量级，更不用说运动电荷之间的电力和磁力的密切联系了。在最近一次测验中，物理系高年级学生被问到，沿平行于  $x$  轴的同一方向并排匀速运动的两个相等的正“点”电荷是相互吸引，还是相互排斥[参看图 7.2(a)]。从效果上说，这等于下列问题：是电的斥力，还是磁的吸力占优势。有百分之三十的学生回答是吸力，百分之三十五的学生回答是斥力，还有百分之三十五的学生不知道。

在 7.2 节中，将用多数高年级学生熟知的公式，来计算一种简单情况下电力与磁力的比值。然后，把库仑定律和狭义相对论的变换公式作为公理，讨论一些例子。这将生动地揭示出电磁学的统一性。

### 7.2 两条相互平行的运载电流之间的力

考虑两根无穷长的、直而细的、电荷均匀分布的、不导电的电线，真空中处于  $xy$  平面内，沿正  $x$  方向相对于惯性系  $\Sigma$  以匀速  $v$  运动，如图 7.1(b) 所示。设  $\lambda$  为相对  $\Sigma$  测得的每米

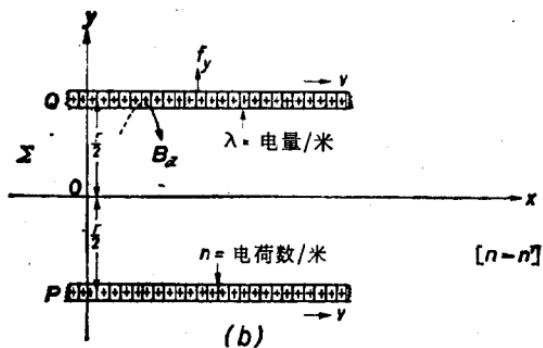
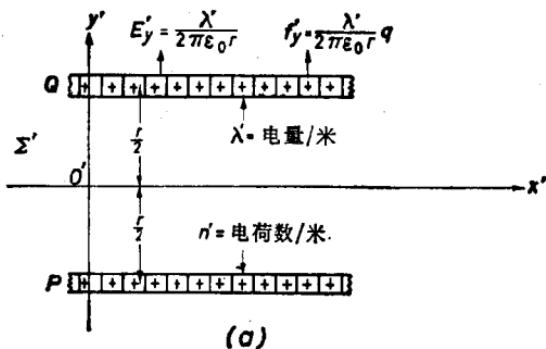


图 7.1 两条运载电流之间的电力与磁力. (a) 电荷分布在  $\Sigma'$  中静止; (b) 惯性系  $\Sigma$  以速度  $-v$  相对  $\Sigma'$  运动. 在  $\Sigma$  中电荷以速度  $v$  运动.

长线上所带的电量(用库仑表示). 当两根电线相对于  $\Sigma$  运动时, 每根线上的电荷分布都引起  $\lambda v$  安培的运载电流.

应用高斯定律和安培回路定律, 可求出距离  $P$  线为  $r$  处的电场和磁场如下:

$$E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad (7.1)$$

和

$$B_z = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} = \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi r}. \quad (7.2)$$

这个电场对  $\Omega$  线在  $y$  方向造成  $\frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 r}$  牛顿/米的斥力。磁场造成  $\mu_0 i^2 / 2\pi r$  牛顿/米的吸力，它等于  $\frac{\mu_0 \lambda^2 v^2}{2\pi r}$ 。作用在每米长  $\Omega$  线上的合力为

$$\begin{aligned} f_y &= f_{\text{电}} + f_{\text{磁}} \\ &= \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 r} - \frac{\mu_0 \lambda^2 v^2}{2\pi r} \\ &= \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 r} (1 - \mu_0 \epsilon_0 v^2). \end{aligned}$$

将  $\epsilon_0$  用数值  $8.85 \times 10^{-12}$  代入， $\mu_0$  用数值  $4\pi \times 10^{-7}$  代入，表明  $\mu_0 \epsilon_0$  等于  $1/c^2$ ，其中  $c$  是光速。因此，

$$f_y = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 r} (1 - v^2/c^2). \quad (7.3)$$

在这个简单的例子中，磁力对电力的比值是  $v^2/c^2$ ，其中  $v$  是电荷相对于所选择惯性系的速度。

在一种典型的情况下，例如 1 安培的电流流过横截面为 1 平方毫米的铜线，电子的平均移动速度为  $\sim 10^{-4}$  米/秒。如果  $\bar{v}$  为电子的平均漂移速度，则电流为  $n a \bar{v} q$ ，其中  $n$  为每单位体积中载荷子的数目， $a$  为横截面的面积， $q$  为每个载荷子的电量。假设在铜内  $n \sim 8.5 \times 10^{28}$  自由电子/米<sup>3</sup>，利用  $q = 1.6 \times 10^{-19}$  库仑，便得到  $\bar{v} \sim 7.3 \times 10^{-5}$  米/秒。因此，在这种电流中，运动电子之间的平均磁力与它们之间的电力之比为  $\sim 10^{-25}$ 。然而，在铜导体中总电荷为零，因为运动电子上所带的负电荷被带正电的铜离子所补偿，这些离子几乎是静止在固定的导体中。对于电中性的导体，作用在运动电子上的电力被作用在正离子上的电力所抵消，因此，作用在导体上的合

力是由运动电荷之间的相对讲很小的磁力造成的。

现在，我们从狭义相对论的观点来考虑上述例子。按照这一理论，在所有惯性系中，电磁定律具有相同的数学形式。考虑一个相对  $\Sigma$  以匀速  $v$  沿正  $x$  轴方向运动的惯性系  $\Sigma'$ 。在这一参考系中，两根线及其电荷分布都是静止的，如图 7.1(a) 所示。设在  $\Sigma'$  中测量的静电荷分布为  $\lambda'$  库仑/米，并设  $\lambda'$  是由每米中电量为  $q$  库仑的  $n'$  个分立电荷所构成。在  $\Sigma'$  中，麦克斯韦方程组化为静电荷之间力的库仑定律。在  $Q$  线的位置上，由  $P$  线所产生的电场和磁场为

$$E'_y = \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 r} \quad \text{和} \quad \mathbf{B}' = 0. \quad (7.4)$$

作用在  $Q$  线一个电荷上的力等于

$$f'_x = 0; \quad f'_y = \frac{\lambda' q}{2\pi\epsilon_0 r}; \quad f'_z = 0 \quad (7.5)$$

现在我们假定，在 5.5 节和 6.4 节中导出的关于作用在单个质点上的力的变换公式是正确的。由方程 (5.98), (5.99), (5.100)，当  $\mathbf{u}' = 0$  时，有

$$f_x = f'_x, \quad (7.6)$$

$$f_y = \sqrt{(1 - v^2/c^2)} f'_y, \quad (7.7)$$

$$f_z = \sqrt{(1 - v^2/c^2)} f'_z. \quad (7.8)$$

将方程(7.5)代入(7.6)、(7.7)和(7.8)，便给出

$$\begin{aligned} f_x &= f_z = 0, \\ f_y &= \sqrt{1 - v^2/c^2} \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 r} q. \end{aligned} \quad (7.9)$$

假定电荷  $q$  的值在洛伦兹变换下不变。我们忽略了由  $\Sigma'$  到  $\Sigma$  的时间变换，即

$$t = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

如果在  $\Sigma'$  中对所有的  $x'$  所取的力是同时的, 那么在  $\Sigma$  中对所有的  $x$  它们就是不同时的; 但我们假定了与时间无关的恒稳条件. 长度  $r$  在洛伦兹变换下是不变的, 因为它是在  $y$  方向测量的.

因为线在惯性系  $\Sigma$  中运动, 因此, 如果线在  $\Sigma'$  中静止时所测量的线长为  $l_0$ , 则在  $\Sigma$  中测量时便缩短为  $l_0(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$ . 因此, 在  $\Sigma$  中所测量的每单位长度的电荷数比  $\Sigma'$  中要大, 如图 7.1(a) 和 (b) 所示. 在  $\Sigma$  中每单位长度的电荷数由下面方程给出

$$n = \frac{n'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (7.10)$$

因此

$$\lambda = nq = \frac{n'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} q = \frac{\lambda'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (7.11)$$

在  $\Sigma$  中测量的每米  $Q$  线所受的力, 等于在  $\Sigma$  中所测量的每米长的电荷数乘上作用在每个电荷上的力, 即

$$\begin{aligned} nf_y &= n\sqrt{1 - v^2/c^2} \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 r} q \\ &= \frac{\lambda'\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \sqrt{1 - v^2/c^2}, \text{ 因为 } nq = \lambda. \end{aligned}$$

用方程(7.11)代换  $\lambda'$ , 便得出在  $\Sigma$  中测量的每米长  $Q$  线上的力等于

$$\frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 r} (1 - v^2/c^2),$$

这与方程(7.3)一致.

这个例子表明, 如果把由狭义相对论所给出的力变换公式和电荷不变原理作为公理, 那么在某些情况下, 电流所产生的磁力就可以由静电荷之间力的库仑定律计算出来. 磁力可以被解释为相对论效应, 它代表变换后的力中与试验电荷相

对于观察者的速度有关的那一部分。

### 7.3 运动的“点”电荷之间的力

现在我们来讨论在 7.1 节中所提出的问题，即当两个具有  $q$  库仑电量的相等的正“点”电荷，如图 7.2(a) 所示那样并排地沿平行于  $x$  轴的同一方向以匀速  $v$  运动时，它们是互相吸引还是互相排斥。我们将利用狭义相对论的变换式。考虑相对于  $\Sigma$  沿公共的  $x$  轴方向以匀速  $v$  运动的惯性系  $\Sigma'$ ，则电荷  $R$  和  $S$  在  $\Sigma'$  中静止，如图 7.2(b) 所示，并以  $f'_y = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  牛顿的力互相排斥。两个电荷在  $\Sigma'$  中开始互相离开，作用在  $R$

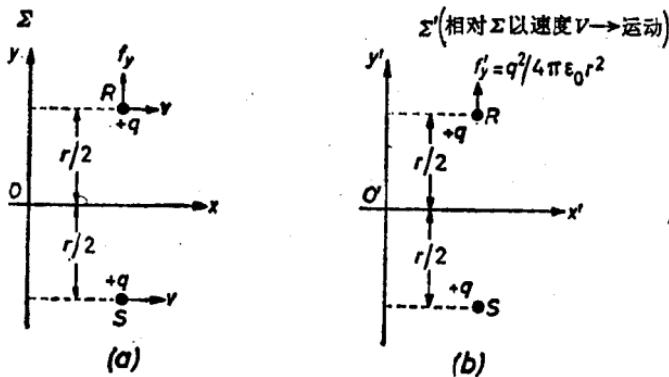


图 7.2 电荷  $R$  和  $S$  在  $\Sigma'$  中静止，在  $\Sigma'$  中电荷之间的力为静电力。在  $\Sigma$  中，电荷以匀速  $v$  运动，它们之间的力为电力与磁力之和。

上的力在正  $y$  方向。在洛伦兹变换下  $r$  的大小是不变的，因为它是在  $y$  方向测量的。我们假定  $r$  比核力的作用范围大得很多。按照力的变换式，即方程(5.98)、(5.99)和(5.100)，当  $u' = 0$  时，有

$$f_x = f'_x = 0; f_z = f'_z = 0, \quad (7.12)$$

和

$$f_y = \frac{c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}}{(c^2 + v u' x)} f'_y = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (7.13)$$

因此, 如果采用狭义相对论的变换式, 再加上  $v < c$  这一限制, 则作用在电荷  $R$  上的力是在正  $y$  方向, 并且增加观察者沿负  $O'x'$  轴方向的速度不可能使它反向。在所有惯性系中, 这两个电荷都互相排斥, 并且互相排斥的电力总是大于互相吸引的磁力。

现在我们来考虑如图 7.3(a) 所示的两个匀速运动的电荷之间的一般情况。设电荷  $q_1$  以匀速  $v$  沿  $x$  轴运动, 并设

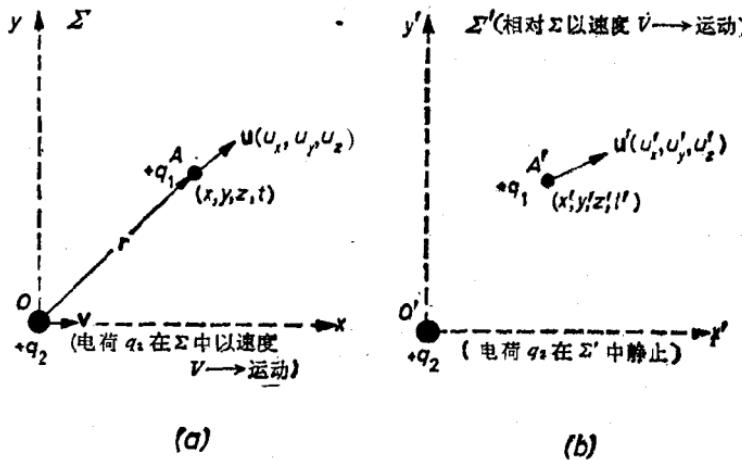


图 7.3 (a) 在惯性系  $\Sigma$  中, 两个电荷作匀速运动。  
(b) 在惯性系  $\Sigma'$  中, 电荷  $+q_2$  在原点保持静止。

它在  $t = 0$  时位于原点。设电荷  $q_1$  在时刻  $t = 0$  位于点  $A$ , 其坐标为  $x, y, z$ , 并设它在该时刻的速度为  $\mathbf{u}$ , 分量为  $u_x, u_y, u_z$ 。我们来计算在惯性系  $\Sigma$  中, 当  $q_2$  位于原点, 在  $t = 0$  时刻由电荷  $q_2$  作用在电荷  $q_1$  上的力。我们将把下面几点作为公理:

- (1) 狹义相对论的力、速度和坐标的变换式。
- (2) 在相互静止并且相对于所选择的惯性系静止的“点”电荷之间的力的库仑定律。
- (3) 总电荷的不变性。

由洛伦兹变换,如果  $t = 0$ , 在  $\Sigma'$  中有

$$x' = \frac{x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (7.14)$$

$$y' = y, \quad (7.15)$$

$$z' = z, \quad (7.16)$$

$$t' = \frac{-vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (7.17)$$

因此,在图 7.3(b) 中,

$$O'A' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{\frac{x^2}{(1 - v^2/c^2)} + y^2 + z^2},$$

$$O'A' = \frac{s}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (7.18)$$

其中

$$s = \sqrt{x^2 + (1 - v^2/c^2)(y^2 + z^2)}. \quad (7.19)$$

在  $\Sigma'$  中,因为电荷  $q_2$  在原点上总是静止的,我们将假定,在  $\Sigma'$  中的时刻  $t' = (-vx/c^2)/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$  (对应于  $\Sigma$  中  $t = 0$ ),在  $\Sigma'$  中  $A'$  点所测得的由  $q_2$  作用于  $q_1$  上的力为

$$f' = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 O'A'^2}.$$

把这一力写成分量形式,我们有

$$f'_x = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 O'A'^2} \cdot \frac{x'}{O'A'}, \text{ 等等.}$$

代换  $x'$  和  $O'A'$ ,便得

$$f'_x = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 s^3} x (1 - v^2/c^2). \quad (7.20)$$

类似地有

$$f'_y = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 s^3} y (1 - v^2/c^2)^{3/2}, \quad (7.21)$$

和

$$f'_z = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 s^3} z (1 - v^2/c^2)^{3/2}. \quad (7.22)$$

由方程(5.98), 得到

$$f_x = f'_x + \frac{u'_x v}{(c^2 + vu'_x)} f'_y + \frac{u'_x v}{(c^2 + vu'_x)} f'_z. \quad (5.98)$$

用方程(7.20), (7.21)和(7.22)代换  $f'_x$ ,  $f'_y$  和  $f'_z$ , 并用速度变换式代换  $u'_x$ ,  $u'_y$  和  $u'_z$ , 我们得到

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 s^3} x (1 - v^2/c^2) \\ &\quad + \frac{u'_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{(1 - vu_x/c^2)} \frac{v}{[c^2 + \frac{v(u_x - v)}{(1 - vu_x/c^2)}]} \\ &\quad \times \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 s^3} y (1 - v^2/c^2)^{3/2} + \frac{u'_z v}{(c^2 + vu'_z)} f'_z. \end{aligned}$$

右边第二项等于

$$\begin{aligned} u_y &= \frac{(1 - v^2/c^2)^2}{(1 - vu_x/c^2)} \frac{v(1 - vu_x/c^2)}{(c^2 - v^2)} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 s^3} y \\ &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 s^3} y u_y \frac{v}{c^2} (1 - v^2/c^2). \end{aligned}$$

类似地, 第三项等于

$$\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 s^3} z u_z \frac{v}{c^2} (1 - v^2/c^2).$$

因此,

$$f_x = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 s^3} (1 - v^2/c^2) \left\{ x + \frac{v}{c^2} (y u_y + z u_z) \right\}, \quad (7.23)$$

即

$$f_x = q_1 g \left\{ x + \frac{v}{c^2} (yu_y + zu_x) \right\}, \quad (7.24)$$

其中

$$g = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 s^3} (1 - v^2/c^2) \quad (7.25)$$

由方程(5.99),

$$f_y = \frac{c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}}{(c^2 + vu_x')} f'_y. \quad (5.99)$$

用方程(7.21)代换  $f'_y$ , 并用速度变换式代换  $u'_x$ , 便得到

$$f_y = \frac{c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}}{\left[ c^2 + \frac{v(u_x - v)}{(1 - vu_x/c^2)} \right]} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 s^3} y (1 - v^2/c^2)^{3/2}.$$

而

$$\begin{aligned} H \frac{v(u_x - v)}{c^2(1 - vu_x/c^2)} &= \frac{1 - (vu_x/c^2) + (vu_x/c^2) - v^2/c^2}{(1 - vu_x/c^2)} \\ &= \frac{(1 - v^2/c^2)}{(1 - vu_x/c^2)}. \end{aligned}$$

因此

$$f_y = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 s^3} (1 - v^2/c^2) \left( 1 - \frac{vu_x}{c^2} \right) y, \quad (7.26)$$

即

$$f_y = q_1 g (1 - vu_x/c^2) y, \quad (7.27)$$

其中  $g$  由方程(7.25)给出。

类似地,

$$f_z = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 s^3} (1 - v^2/c^2) \left( 1 - \frac{vu_x}{c^2} \right) z, \quad (7.28)$$

或

$$f_z = q_1 g \left( 1 - \frac{vu_x}{c^2} \right) z. \quad (7.29)$$

方程(7.23), (7.26)和(7.28)是由托尔曼(Tolman)<sup>[1]</sup>得到的; 它们给出了以匀速 $v$ 沿 $x$ 轴运动, 并在 $t = 0$ 时位于原点的电荷 $q_2$ 作用在 $t = 0$ 时位于点 $A$ 的电荷 $q_1$ 上的力, 如图7.3(a)所示。

## 7.4 匀速运动的电荷产生的电场和磁场

在真空中一点的电场强度 $\mathbf{E}$ 和磁感应强度 $\mathbf{B}$ , 一般是指按照作用在处于该点的试验电荷上的洛伦兹力来定义的。例如, 如果 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 是由电荷 $q_2$ 当其位于惯性系 $\Sigma$ 原点时在 $A$ 处造成的电场强度和磁感应强度, 如图7.3(a)所示, 那么, 作用在电荷 $q_1$ (现在把它看成试验电荷)上的力便应为下式:

$$\mathbf{f} = q_1 \mathbf{E} + q_1 \mathbf{u} \times \mathbf{B}. \quad (7.30)$$

右边第一项为电力, 而第二项为磁力。把洛伦兹力写成分量形式, 便有

$$f_x = q_1 E_x + q_1 (u_y B_z - u_z B_y),$$

把这一方程与方程(7.24)

$$f_x = q_1 g \left\{ x + \frac{v}{c^2} (y u_y + z u_z) \right\} \quad (7.24)$$

比较, 后者可改写成

$$f_x = q_1 g x + q_1 \left[ u_y \left( g \frac{v}{c^2} y \right) - u_z \left( -g \frac{v}{c^2} z \right) \right].$$

我们得出结论, 在点 $A$ , 在时刻 $t = 0$ ,

$$E_x = g x, \quad B_z = g \frac{v}{c^2} y; \quad B_y = -g \frac{v}{c^2} z. \quad (7.31)$$

类似地, 把洛伦兹力的 $y$ 分量, 即

$$f_y = q_1 E_y + q_1 (u_x B_z - u_z B_x),$$

与方程(7.27)

$$f_y = q_1 g \left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right) y \quad (7.27)$$

比较, 我们得出结论, 在总  $A$ , 在时刻  $t = 0$ ,

$$E_y = gy; \quad B_r = 0; \quad B_z = g \frac{v}{c^2} y. \quad (7.32)$$

把

$$f_z = q_1 E_z + q_1 (u_x B_y - u_y B_x)$$

与

$$f_z = q_1 g \left(1 - \frac{v u_x}{c^2}\right) z \quad (7.29)$$

比较, 我们得出结论, 在点  $A$ , 在时刻  $t = 0$ ,

$$E_z = gz; \quad B_y = -g \frac{v}{c^2} z; \quad B_x = 0. \quad (7.33)$$

以后将看到, 方程(7.24), (7.27)和(7.29)中所有的项都可以包括在洛伦兹力之中, 这就证实了洛伦兹力足以确定作用在试验电荷  $q_1$  上的总力。

把  $\mathbf{E}$  分量的公式集在一起, 有  $E_x = gx$ ;  $E_y = gy$ ;  $E_z = gz$ ,  $g$  由方程(7.25)给出。合电场强度由下式给出,

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = gr.$$

替换掉  $g$ , 便得到

$$\mathbf{E} = \frac{q_2 \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 s^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right), \quad (7.34)$$

$E$  的方向是由电荷  $q_2$  “此时刻”的位置(即当在  $A$  点测量电场这一瞬时电荷  $q_2$  所占据的位置)出发沿径向向外的。由方程(7.19),

$$\begin{aligned} s^2 &= x^2 + (1 - v^2/c^2)(y^2 + z^2) \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - \frac{v^2}{c^2} (y^2 + z^2), \end{aligned}$$

因此,

$$\frac{s^2}{r^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} \frac{(y^2 + z^2)}{r^2}.$$

但在图 7.4(a) 中,

$$y^2 + z^2 = AL^2,$$

设  $AL/r = \sin \theta$ , 其中  $\theta$  是电荷速度与径矢量之间的夹角, 于是

$$s^2 = r^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{\frac{3}{2}}.$$

方程(7.34)变为

$$\mathbf{E} = \frac{q_2 \mathbf{r} (1 - v^2/c^2)}{4\pi\epsilon_0 r^3 [1 - (v^2/c^2) \sin^2 \theta]^{\frac{3}{2}}}, \quad (7.35)$$

注意电场是径向的, 正比于  $1/r^2$ , 并且当  $v = 0$  时化为  $q_2/4\pi\epsilon_0 r^2$ . 但是, 除了  $v = 0$  外, 电场不是各向同性的. 从方程(7.35)可以看出, 在运动方向 ( $\theta = 0$ ) 该电场比静电场小 (其比值为  $(1 - v^2/c^2)$ ), 在与运动方向垂直的方向 ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) 该电场比静电场大 (其比值为  $1/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ ).  $\mathbf{E}$  的总通量

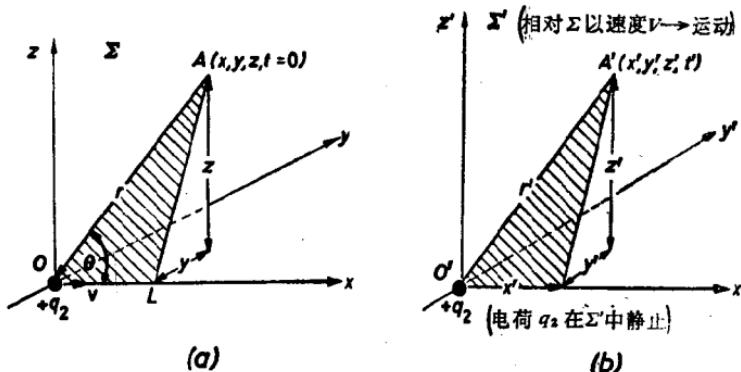


图 7.4 (a) 在惯性系  $\Sigma$  中, 电荷  $q_2$  以匀速  $v$  运动. 当  $t = 0$  电荷  $q_2$  处在  $\Sigma$  的原点时, 计算点  $A$  的电场与磁场. (b) 在  $\Sigma'$  中, 电荷  $q_2$  在原点保持静止.

仍然等于  $q_2/\epsilon_0$ 。在图 7.5(a) 中画出了由一运动电荷所产生的电场的典型情形。

把  $\mathbf{B}$  的公式集中在一起,

$$B_x = 0, \quad (7.36)$$

$$B_y = -g \frac{v}{c^4} z = -\frac{v}{c^2} E_z, \quad (7.37)$$

$$B_z = g \frac{v}{c^2} y = \frac{v}{c^2} E_y. \quad (7.38)$$

现在我们所选取的坐标轴使得电荷  $q_2$  的速度分量为:  $v_x = v$ ;  $v_y = v_z = 0$ 。由方程(7.36), (7.37)和(7.38),

$$\mathbf{B} = \frac{\nabla}{c^2} \times \mathbf{E}, \quad (7.39)$$

这便给出

$$\mathbf{B} = \frac{\nabla \times \mathbf{r} q_2 (1 - v^2/c^2)}{c^2 4 \pi \epsilon_0 r^3 [1 - (v^2/c^2) \sin^2 \theta]^{3/2}}. \quad (7.40)$$

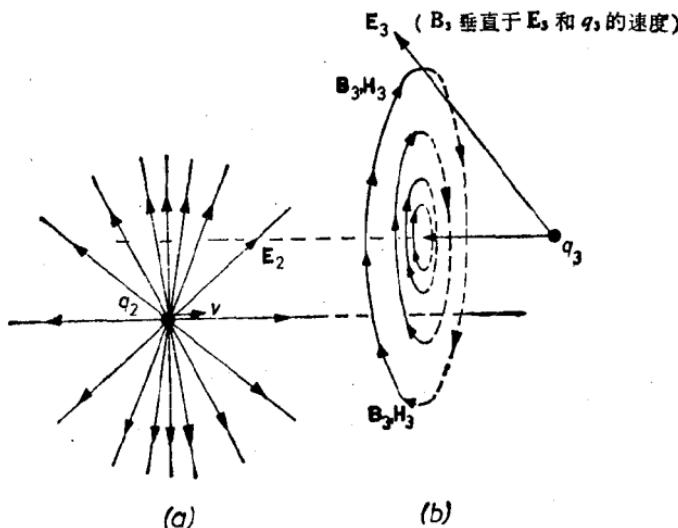


图 7.5 (a) 由一匀速运动的电荷  $q_2$  产生的电场, (b) 只在一个平面中画出的, 由一向左匀速运动的电荷  $q_3$  产生的磁场。磁场同时垂直于  $\mathbf{E}_3$  和电荷  $q_3$  的速度。

磁感应线既垂直于电荷  $q_2$  的速度，又垂直于电力线，电力线是从  $q_2$  出发沿径向发散的。因此，**B** 线在与产生场的电荷运动方向垂直的平面内构成封闭的同心圆，并以电荷运动将通过之点为圆心。图 7.5(b) 中画出了当电荷  $q_3$  匀速向左运动时，一个平面内的磁感应线。

当电荷速度趋于光速时，**E** 线将越来越紧地靠近与运动方向垂直的方向，而 **B** 保持与 **E** 垂直。当速度极高( $v \rightarrow c$ )时，运动电荷的电磁场就类似于平面波的场，而在  $v = c$  极限情形，**E** 和 **B** 将互相垂直，并与电荷速度  $\mathbf{v}$  垂直，并有  $E = cB$ ，就像在真空中平面波的情况一样。

由方程(7.30)和(7.39)，

$$\mathbf{f} = q_1 \mathbf{E} + q_1 \frac{\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{E})}{c^2}$$

第二项具有量级  $uv/c^2$ ，是二级项，因此，只要  $u$  和  $v$  都小于  $c$ ，则两个运动电荷之间的磁力就小于电力。

在上述计算中，为了要应用狭义相对论的变换式，假定了电荷  $q_2$  作匀速运动。如果假设在真空中电场与磁场以有限速度  $c$  传播，则图 7.3(a) 中在  $t = 0$  时刻（此时  $q_2$  位于原点） $A$  点的场必然是电荷  $q_2$  在其轨道的某一较前的点上所产生的，这一点一般称为“推迟”位置。在非匀速运动情形，最好是用电荷的“推迟”位置来表示场。我们将在第九章中讨论非匀速运动的情形，并将证明方程(7.35)和(7.40)和李纳-维切尔斯相一致。

## 7.5 毕奥-沙伐定律和超距作用

计算两个分别载有恒稳电流  $i_1$  和  $i_2$  安培的迴路之间的力，通常采用格拉斯曼 (Grassmann) 公式。如果  $\mathbf{f}_1$  是迴路 1

中的电流作用在迴路 2 上的力，则在真空中有

$$\mathbf{f}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \oint_1 \oint_2 \frac{dl_2 \times (dl_1 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3}. \quad (7.41)$$

通常把这个二重积分分为两部分，并写成

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 i_1}{4\pi} \oint_1 \frac{dl_1 \times \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}, \quad (7.42)$$

在方程(7.42)中， $dl_1$  是迴路 1 上的线元  $r_{12}$  是由此线元到所求磁场点的距离。方程(7.42)是沿迴路 1 的积分，给出了由迴路 1 产生的总磁场。方程(7.42)称为毕奥-沙伐定律。于是通过计算

$$\mathbf{f}_2 = i_2 \oint_2 dl_2 \times \mathbf{B}_1, \quad (7.43)$$

便可得到作用在第二个闭合迴路上的力，其中  $\mathbf{B}_1$  为由迴路 1 在电流元  $i_1 dl_1$  处产生的磁感应强度。可以证明（参看巴诺夫斯基和菲利浦的著作<sup>[2]</sup>）用此方法算出的两个完整迴路之间的力，遵从牛顿第三定律，即作用力和反作用力大小相等方向相反。并且，方程(7.42)和(7.43)的预言与用各种几何形状的电流秤所得结果均一致。然而，众所周知，如果把毕奥-沙伐公式用于孤立的电流元，则所预言的力不遵从牛顿第三定律。例如在图 7.6 中，电流元  $i_1 dl_1$  在电流元  $i_2 dl_2$  处不产生磁场，而电流元  $i_1 dl_1$  却在电流元  $i_2 dl_2$  处产生了等于  $\mu_0 i_1 i_2 dl_1 dl_2 / (4\pi x^2)$  的磁场，因而作用在  $i_1 dl_1$  上的磁力等于  $\mu_0 i_1 i_2 dl_1 dl_2 / (4\pi x^2)$  牛顿；作用在  $i_2 dl_2$  上的磁力为零。现在来证明，如果把导体中各个电荷之间的电力和磁力都包括在内，则毕奥-沙伐定律与狭义相对论一致。我们将假定每个电流元均由一静止的正电荷和一匀速运动的负电荷组成，如图 7.6 所示。在每种情形下通过选取适当的坐标轴，便可用方程(7.23)，(7.26)和(7.28)计算各电荷之间的力。不这样做，也可用(7.35)和(7.40)计算电场和磁场，再用洛伦兹力计算电荷之间的总力；这等价于直接用

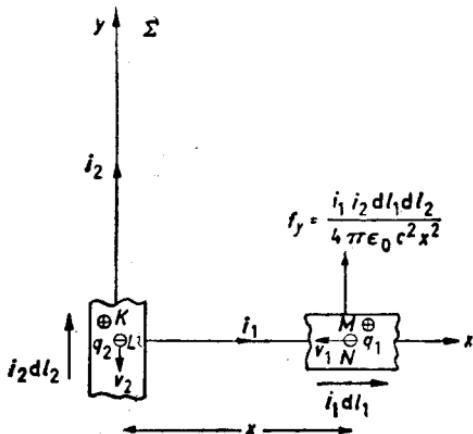


图 7.6 两个电流元:  $i_2 dl_2$  位于原点, 并且由静止电荷  $q_2$  (记为  $K$ ) 与以速度  $v_2$  运动的等于  $-q_2$  的电荷  $L$  组成;  $i_1 dl_1$  由静止电荷  $q_1$  (记为  $M$ ) 与以速度为  $v_1$  运动的电荷  $-q_1$  (记为  $N$ ) 组成.

表 7.1

电 荷	$f_x$	$f_y$
$M$ 作用于 $K$	$\frac{-q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 x^2}$	—
$M$ 作用于 $L$	$\frac{+q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 x^2}$	—
$N$ 作用于 $K$	$\frac{+q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 x^2} (1 - v_1^2/c^2)$	—
$N$ 作用于 $L$	$\frac{-q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 x^2} (1 - v_1^2/c^2)$	—
$K$ 作用于 $M$	$\frac{+q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 x^2}$	—
$K$ 作用于 $N$	$\frac{-q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 x^2}$	—
$L$ 作用于 $M$	$\frac{-q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 x^2} \frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}$	—
$L$ 作用于 $N$	$\frac{+q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 x^2} \frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}$	$\frac{+q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 x^2} \frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} \frac{v_1 v_2}{c^2}$

分量的符号指出图 7.6 中力的方向, 例如  $-f_x$  表示负  $Ox$  方向的力。

方程(7.23), (7.26)和(7.28). 这种方法可以依次用于每对电荷之间. 在表 7.1 中列出了结果. 作用在  $K$  和  $L$  上的合力为零, 而作用在  $M$  和  $N$  上的合力为

$$f_x = f_z = 0, \quad (7.44)$$

$$f_y = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 x^2} \frac{1}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} \frac{v_1 v_2}{c^2} \rightarrow \frac{i_1 dl_1 i_2 dl_2}{4\pi\epsilon_0 c^2 x^2}, \text{ 如果 } v_2 \ll c \quad (7.45)$$

如果有

$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \quad \text{或} \quad \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} = c^2, \quad (7.46)$$

则方程(7.45)就与方程(7.42)和(7.43)的结果一致. 将  $\epsilon_0$  和  $\mu_0$  的数值 ( $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$  法拉/米,  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  亨利/米)代入, 便可证实关系式(7.46)实际上成立. 通常, 方程(7.46)是通过证明真空中麦克斯韦方程组有波速为  $(\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$  的波动解而得到的, 于是这些波便与光波等同. 可以看出, 只要假定库仑定律是正确的, 则由狭义相对论便可得出方程(7.46).

上面的论述可以推广到按一定速度分布运动的电荷组成的电流元的一般情形; 感兴趣的读者可参看罗瑟 (Rosser<sup>[3]</sup>) 的文章, 其中还证明了当电流稳恒时, 载荷子的加速度所引起的效应是可以忽略的. 于是, 毕奥-沙伐定律便与狭义相对论相一致, 但一定要把各个电荷之间的电力和磁力都包括在内.

从表 7.1 可以看出, 在任何一对电荷之间的作用力与反作用力之差都只是  $v^2/c^2$  的量级. 我们已经好几次遇到与牛顿力学的偏离为  $v^2/c^2$  量级的情形, 我们要准备在狭义相对论中承认这种偏离.

了解一下在经典电磁学中如何解释这些与牛顿定律的偏离是很有意义的. 用经典电磁理论可以证明, 如果认为与电磁场相联系的电磁动量密度为  $(1/c^2)(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ , 那么在许多

电荷组成的孤立体系中实体动量与电磁场动量之和将不随时间改变，尽管单就实体本身而言，作用与反作用定律不再成立 [参看阿布拉哈姆和贝克<sup>[4]</sup>(Abraham and Becker)]. 培基(Page)和阿达姆(Adam)详细论述了电流元的特殊情况。

我们参照图 7.5 来定性地加以说明。考虑一向右运动的电荷  $q_2$ ，它在真空中一点形成场  $\mathbf{E}_2$  和  $\mathbf{H}_2$ 。再考虑一向左运动的电荷  $q_3$ ，它在同一点形成场  $\mathbf{E}_3$  和  $\mathbf{H}_3$ 。单位体积的电磁动量等于

$$\frac{1}{c^2} (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2 + \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_3 + \mathbf{E}_3 \times \mathbf{H}_2 + \mathbf{E}_3 \times \mathbf{H}_3).$$

只要两个电荷速度不变，则  $(1/c^2)\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_2$  和  $(1/c^2)(\mathbf{E}_3 \times \mathbf{H}_3)$  这两项在全空间的积分就不变，这两项代表粒子被加速时的电磁质量。另外两项是变化的；例如可以想象，当  $q_2$  和  $q_3$  如图 7.5 所示那样运动时，空间所有点的  $\mathbf{E}_2$  和  $\mathbf{H}_3$  的大小都在变化着，因此在全空间的积分  $(1/c^2) \int \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_3 dV$  就随时间变化。类似地， $(1/c^2) \int \mathbf{E}_3 \times \mathbf{H}_2 dV$  也随时间变化。培基和阿达姆证明了

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{c^2} \int (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_3 + \mathbf{E}_3 \times \mathbf{H}_2) dV \right\}$$

恰与二电荷间作用力之差平衡，这就表明，按照经典电磁理论，实体动量与电磁场动量之和是不变的。

由于电磁场的动量随诸电荷的构形和速度而变化，因此由经典电磁理论，在一孤立体系中若只考虑实体物质本身，则其总动量是变化的。一度有人曾假设，可能有些力作用在以太上，而以太又以无限大的速度传播着这些力。如果假定电磁场的动量变化引起了这样的力，并以无限大速度传播，那么作用在电荷加以太组成的这一孤立体系上的总力为零，这便与牛顿第三定律一致(希尔伯斯坦(Silberstein<sup>[10]</sup>))。按照洛伦

兹的理论，以太不传播力。如果力只作用在实体上并且它们是洛伦兹力，那么按照洛伦兹电子理论，牛顿第三定律就不成立。关于这一点洛伦兹曾写道：“但依我看来，没有什么理由迫使我们把那一命题（指牛顿第三定律）抬高成为绝对正确的基本定律”。按照狭义相对论，没有必要假设存在以太静止的绝对参考系，而且象洛伦兹电子理论那样，假设力只作用在实体上。在 5.6 节和 5.7 节中曾假设，在质点碰撞及介子衰变等情形中，均服从动量守恒定律，而基于这一假设的理论预言与实验结果是一致的。必须强调，作为一个很好的近似，这些事件可以认为是在空间一点发生在一个瞬时的。在本章中我们考虑了不在一点的两电荷之间的力，这涉及到超距作用的概念。如果在一个惯性系中，同时测量作用在两个不在一点的电荷上的变化着的力，那么，当把这两个力变换到相对于第一个惯性系运动的另一个惯性系中时，作用在两个电荷上的力在新参考系中所指的将不是同一时间。作为例子，考虑位于惯性系  $\Sigma$  的  $x$  轴上的两个物体。设在  $\Sigma$  中的时刻  $t$  它们位于  $x_1$  和  $x_2$ 。设此两物体以随时间变化的力互相作用着。设在时刻  $t$  两个力（在  $\Sigma$  中测量）大小相等方向相反；于是可以说，在  $\Sigma$  中在时刻  $t$  牛顿第三定律成立。现在如果在一个相对  $\Sigma$  以匀速  $v$  沿公共  $x$  轴运动的惯性系  $\Sigma'$  中来测量这两个随时间变化的力，那么按照洛伦兹变换，变换之后的力将指  $\Sigma'$  中的不同时间  $t'_1 = \gamma(t - vx_1/c^2)$  和  $t'_2 = \gamma(t - vx_2/c^2)$ 。因为力随时间变化，在  $\Sigma'$  中无论  $t'_1$  时刻或者  $t'_2$  时刻，两个力都不会大小相等方向相反，因此在  $\Sigma'$  中对于两个不在一处的物体之间的力而言，牛顿第三定律不成立。

按照狭义相对论，不存在瞬时超距作用，因为假如瞬时超距作用是可能的，那么就可以以超过光速的速度传播能量和动量，因而也就能以超过光速的速度传播信号。按照狭义相

对论，力的最大传播速度等于光速。在考虑分开的电荷间的力时，采用一个中间步骤是方便的，即认为电荷产生了电场和磁场（或者说产生了标量势与矢量势）；并假定在真空中电磁场以光速传播；然后再假定这些场产生作用在其它电荷上的力。这等价于假定在真空中电磁力本身以光速  $c$  传播。不在一处的电荷之间发生相互作用是需要时间的。在 7.3 节所讨论的例子中（那里我们计算了电荷  $q_2$  处于原点时作用在电荷  $q_1$  上的力，如图 7.3(a) 所示），在  $q_1$  位置的电场和磁场必然是由  $q_2$  在  $t = 0$  时刻到达原点之前、在其轨道上某一较前的点上所产生的；这一较早的位置称为电荷的推迟位置。

当图 7.5 中的两个电荷在“碰撞”之前和“碰撞”之后相距很远时， $(1/c^2)\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_3$  和  $(1/c^2)\mathbf{E}_3 \times \mathbf{H}_2$  可以忽略，因而不必考虑场有任何动量。因此，在“碰撞”前相距很远时二粒子的总动量等于碰撞后相距很远时二粒子的总动量。因此，5.6 节用动量守恒的弹性碰撞来解释电子-电子散射的查平（Champion）实验是正确的，尽管在碰撞过程中，当  $(1/c^2)\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_3$  和  $(1/c^2)\mathbf{E}_3 \times \mathbf{H}_2$  不可忽略时，两电荷的总动量并不守恒。

## 7.6 讨 论

有些狭义相对论教科书暗示说，电磁学可由库仑定律导出。这种说法假定了狭义相对论变换的正确性。必须记住，这些变换的多数所谓证实，是建立在考夫曼-布切勒（Kaufmann-Bucherer）型实验的基础上，用了电子光学，并在解释实验时假定了经典电磁学的正确性（参看奥拉赫里（O’Rahilly<sup>[7]</sup>）的书）。如果想把电磁学建立在本章所采取途径的基础上，那么最好是象我们做过的那样，首先假定变换式，然后把理论的正

确性建立在其预言与实验是否符合的基础上，而不是假定狭义相对论变换可直接建立在由实验“归纳”的基础上。实际上这一途径与第三章、第四章讲述洛伦兹变换和相对论运动学所取的途径的精神是同样的，那里是从相对性原理和光速不变原理出发来阐述这一理论。在讲述电磁学时，还必须加上电荷不变原理和静电荷之间力的库仑定律。在 3.3 节中我们讨论过电荷不变原理，那里曾证明，如果假定麦克斯韦方程组服从相对性原理，那么电荷不变原理便可由麦克斯韦方程组推出。在 5.3 节和 5.4 节我们假定电荷不变原理是正确的，那里假定离子所带电荷与离子速度无关。自然在初次学习这一课题时，在讲狭义相对论之前必须先介绍电磁学。电磁学和狭义相对论在很大程度上是同一个理论；历史上狭义相对论起源于电磁学理论。让我们引用泡利（Pauli<sup>[8]</sup>）的话：

“因为电子理论符合相对论，因此对于给定电子的运动计算电  
磁场而言，相对论不会得出为相对论以前的洛伦兹电子理论所不  
曾包括的结果。”

采用本章的途径并没有得出新的物理结果，但这是从库仑定律出发的，它说明了经典电磁理论中固有的统一性。当根据几种不同实验现象加上存在位移“电流”这一似乎很特别的假设来建立麦克斯韦方程组时，这种统一性并不是这么明显的。本章所采取的途径适用于单个电荷之间的力。人们本来可以应用叠加原理来计算由运动电荷的体系所产生的场，但回过头来从麦克斯韦方程组出发却要方便得多。这就是第八章所用的方法。

由于孤立电流元之间的力无法由实验决定，因此关于电流元之间力的真正本性尚有一些争论。在推导电流元之间力的最初公式时，安培假定电流元之间的力沿着它们的联线，并且作用与反作用大小相等方向相反。根据他的实验及上述假

设,安培证明了由相距  $\mathbf{r}$  的电流元  $i_1 d\mathbf{l}_1$  作用在电流元  $i_2 d\mathbf{l}_2$  上的力由下式给出

$$d\mathbf{f} = -\mathbf{r} \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi r^3} \left\{ 2 d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 - \frac{3}{r^2} (\mathbf{dl}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{dl}_2 \cdot \mathbf{r}) \right\},$$

其中  $\mathbf{r}$  是从  $i_1 d\mathbf{l}_1$  到  $i_2 d\mathbf{l}_2$  的矢量;如果  $i_1$  和  $i_2$  用安培为单位,所有长度都用米为单位,则  $d\mathbf{f}$  的单位就是牛顿.尽管安培和格拉斯曼公式所得出的电流元之间的力如此不同,但当绕着两个完整迴路积分后,两公式对于两个完整迴路之间却给出了相同的力.穆恩和斯潘塞 (Moon and Spencer<sup>[9]</sup>) 把安培的方法发展成相当完整的电动力学,他们放弃了狭义相对论,而用作用反作用相等来解释运动电荷之间的力,并回到伽利略变换.量子电动力学的未来发展或者某种其它的未来理论也许会有必要回到这一理论,但电流元之间力的格拉斯曼公式与狭义相对论相一致,在目前已得到大部分人的支持.因为在电学的初等叙述中没有必要讨论运动电荷的磁场,因此最聪明的办法是让毕奥-沙伐定律尽可能采用积分形式.在这种形式下,它可用电流秤进行实验检验.对于完整的迴路,作用和反作用是大小相等方向相反的,于是人们便不必在过早时期就面临狭义相对论概念的严峻性.在麦克斯韦方程组建立以前,把毕奥-沙伐定律写成微分形式没有什么好处,因为可直接由积分形式的毕奥-沙伐定律推得安培迴路定理,反过来也一样.

### 参 考 文 献

- [1] Tolman, R. C. *Phil. Mag.* 25(1913) 150
- [2] Panofsky, W. H. K. and Phillips, M. *Classical Electricity and Magnetism*. p. 112. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1955
- [3] Rosser, W. G. V. *Contemporary Physics* 3(1961) 28
- [4] Abraham, M. and Becker, R. *Classical Theory of Electricity and Magnetism*. p. 244. Blackie, Glasgow and London, 1932

- [ 5 ] Page, L and Adams, N. I. *Amer. J. Phys.* 13(1945) 141
- [ 6 ] Lorentz, H. A. *Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern.* p. 28. Brill, Leiden, 1895
- [ 7 ] O'Rahilly, A. *Electromagnetism.* p. 91 Pergamon London, 1958
- [ 8 ] Pauli, W. *Theory of Relativity.* p. 91. Pergamon, London, 1958
- [ 9 ] Moon, P. and Spencer, D. *J. Franklin Inst.* 257(1954) 203, 305, 369
- [10] Silberstein, L. *The Theory of Relativity.* p. 50. Macmillan, London, 1914

## 第八章 麦克斯韦方程组的相对论变换

### 8.1 引言

无论在真空中还是在静止介质中，麦克斯韦方程组都能很好地描述宏观电场和磁场，在介质静止的惯性系  $\Sigma'$  中麦克斯韦方程组为如下形式：

$$\operatorname{curl}' \mathbf{E}' = -\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} \quad (8.1)$$

$$\operatorname{curl}' \mathbf{H}' = \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t'} + \mathbf{J}' \quad (8.2)$$

$$\operatorname{div}' \mathbf{D}' = \rho' \quad (8.3)$$

$$\operatorname{div}' \mathbf{B}' = 0 \quad (8.4)$$

在方程(8.1)–(8.4)中， $\mathbf{E}'$  为电场强度， $\mathbf{D}'$  为电位移矢量， $\mathbf{B}'$  为磁感应强度， $\mathbf{H}'$  为磁化力， $\rho'$  为真实的宏观电荷密度， $\mathbf{J}'$  是真实的宏观传导电流密度。出现在方程(8.1)，(8.2)，(8.3)和(8.4)中的所有量都在惯性系  $\Sigma'$  中同一点  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  及时刻  $t'$  取值。方程中的所有微分符号，都是对于  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  或  $t'$  的，例如方程(8.4)为

$$\frac{\partial B'_x}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} = 0.$$

附录 2 中对于静止介质情形定义了量  $\mathbf{D}'$  和  $\mathbf{H}'$ 。为了解题，除这些方程外，还需补充联系  $\mathbf{D}'$  与  $\mathbf{E}'$ ,  $\mathbf{B}'$  与  $\mathbf{H}'$ ，以及  $\mathbf{E}'$  与传导电流密度  $\mathbf{J}'$  的本构方程。这些本构方程取决于该体系中的介质的性质。

狭义相对论的假设之一是，在一切惯性系中物理定律具

有相同的数学形式。如果麦克斯韦方程组是正确的，并且服从相对性原理，那么在沿负  $Ox'$  方向相对  $\Sigma'$  以速度  $v$  运动的惯性系  $\Sigma$  中，就有

$$\operatorname{curl} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (8.5)$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (8.6)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (8.7)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (8.8)$$

这些方程对  $\Sigma$  中的点  $x, y, z$  在时刻  $t$  成立。如果一切物体均在  $\Sigma'$  中静止，则它们以匀速  $v$  相对  $\Sigma$  运动。运动物体的本构方程可取不同的数学形式。在 8.6 节中将详细讨论这一点。 $\Sigma$  中的电流密度  $\mathbf{J}$  包括运载电流密度以及传导电流密度。如果麦克斯韦方程组确实服从相对性原理，那么，当方程 (8.5), (8.6), (8.7) 和 (8.8) 中的坐标和时间按洛伦兹变换式变换时，方程 (8.5) — (8.8) 就应当变成 (8.1) — (8.4)。本章中将证明确实如此。当坐标和时间按洛伦兹变换式变换时，在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中取相同数学形式的方程称为洛伦兹协变的。在 3.3 节讨论光速不变原理时，我们曾证明，如果假定麦克斯韦方程组服从相对性原理，那么便可推出光速不变原理和总电荷不变原理。本章将采取的途径与此相反。从 3.3 节以后，我们是把相对性原理和光速不变原理当作公理，而不是把麦克斯韦方程组的相对论协变性当作公理。我们曾经由这两个假设推得出洛伦兹变换。现在我们推广这一方法，来证明只要在这组假设中加进电荷不变原理，那么当坐标和时间按洛伦兹变换式变换时，麦克斯韦方程组确实服从相对性原理。

方程 (8.5) 和 (8.8) 只涉及场量  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$ 。这两个方程在真空中与在介质中具有相同的数学形式，它们与洛伦兹电子理

论的方程相一致。我们首先来讨论这两个方程的协变性，这将导致考虑 **E** 和 **B** 的变换。在 3.3 节中，我们用洛伦兹力定义了真空中一点的电场与磁场，用在  $\Sigma'$  中静止的电荷所受的力（在  $\Sigma'$  中测量的）定义了  $\mathbf{E}' = \mathbf{f}'_q/q'$ ，用在  $\Sigma$  中静止的电荷所受的力（在  $\Sigma$  中测量的）定义了  $\mathbf{E} = \mathbf{f}_q/q$ 。

## 8.2 **E** 和 **B** 的变换

把方程(8.5)和(8.8)写成分量形式，有

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}, \quad (8.9)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}, \quad (8.10)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}, \quad (8.11)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \quad (8.12)$$

由洛伦兹变换，

$$x' = \gamma(x - vt); \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \gamma(t - vx/c^2) \quad (8.13)$$

其中

$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}. \quad (8.14)$$

对一组变量的偏微分变换为另一组变量的偏微分的规则可用下面方法得出。设  $f$  为一组独立变量  $a_1, a_2, \dots, a_n$  的函数。 $f$  的全微分由下式给出

$$df = \frac{\partial f}{\partial a_1} da_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial a_n} da_n, \quad (8.15)$$

设独立变量  $a_1, \dots, a_n$  为另一组独立变量  $b_1, b_2, \dots, b_n$  的函数。对任何  $a_i$ ，我们有

$$da_i = \frac{\partial a_i}{\partial b_1} db_1 + \cdots + \frac{\partial a_i}{\partial b_n} db_n; \quad (8.16)$$

将(8.16)代入(8.15), 替换掉  $da_i$ , 得到

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial a_1} \left( \frac{\partial a_1}{\partial b_1} db_1 + \cdots + \frac{\partial a_1}{\partial b_n} db_n \right) + \cdots \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial a_n} \left( \frac{\partial a_n}{\partial b_1} db_1 + \cdots + \frac{\partial a_n}{\partial b_n} db_n \right), \end{aligned}$$

把  $db_i$  的项合并,

$$\begin{aligned} df &= \left( \frac{\partial f}{\partial a_1} \frac{\partial a_1}{\partial b_1} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial a_n} \frac{\partial a_n}{\partial b_1} \right) db_1 + \cdots \\ &\quad + \left( \frac{\partial f}{\partial a_1} \frac{\partial a_1}{\partial b_n} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial a_n} \frac{\partial a_n}{\partial b_n} \right) db_n. \end{aligned}$$

由于  $f$  可用新独立变量  $b_1 \cdots b_n$  表达, 因此

$$df = \frac{\partial f}{\partial b_1} db_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial b_n} db_n,$$

比较  $db_i$  的系数, 得

$$\frac{\partial f}{\partial b_i} = \frac{\partial f}{\partial a_1} \frac{\partial a_1}{\partial b_i} + \frac{\partial f}{\partial a_2} \frac{\partial a_2}{\partial b_i} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial a_n} \frac{\partial a_n}{\partial b_i}; \quad (8.17)$$

或

$$\frac{\partial f}{\partial b_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial a_j} \frac{\partial a_j}{\partial b_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial b_i} \frac{\partial}{\partial a_j} f. \quad (8.18)$$

现在在惯性系  $\Sigma$  中, **E** 和 **B** 是独立变量  $x, y, z$  和  $t$  的函数。而  $x, y, z, t$  可通过洛伦兹变换用独立变量  $x', y', z', t'$  表示, 因此 **E** 和 **B** 可用  $x', y', z', t'$  表示。令  $x', y', z'$  和  $t'$  与  $a_1, a_2, \dots, a_n$  对应, 并令  $x, y, z$  和  $t$  与  $b_1, b_2, \dots, b_n$  对应, 方程(8.18)变为

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'}, \quad (8.19)$$

由洛伦兹变换[方程(8.13)]取偏微分之后, 得到

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \gamma; \quad \frac{\partial y'}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial z'}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial t'}{\partial x} = -\frac{v}{c^2} \gamma. \quad (8.20)$$

由于假定了惯性系之间的相对速度  $v$  为常数, 因此  $\gamma$  与  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中的坐标和时间均无关. 将方程(8.20)代入(8.19), 得到

$$\frac{\partial}{\partial x} = \gamma \left( \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right). \quad (8.21)$$

类似地, 有

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'}, \quad (8.22)$$

和

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}, \quad (8.23)$$

而

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial y'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y'} + \frac{\partial z'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'},$$

由方程(8.13), 通过偏微分, 得到

$$\frac{\partial x'}{\partial t} = -v\gamma; \quad \frac{\partial y'}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial z'}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial t'}{\partial t} = \gamma.$$

因此

$$\frac{\partial}{\partial t} = \gamma \left( \frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \right). \quad (8.24)$$

现在来考虑方程(8.10), 即

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}, \quad (8.10)$$

将(8.23), (8.21)和(8.24)代入, 得

$$\frac{\partial E_x}{\partial z'} - \gamma \left( \frac{\partial E_x}{\partial x'} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t'} \right) = -\gamma \left( \frac{\partial B_y}{\partial t'} - v \frac{\partial B_y}{\partial x'} \right),$$

整理后得

$$\frac{\partial E_x}{\partial z'} - \frac{\partial}{\partial x'} \gamma (E_x + v B_y) = -\frac{\partial}{\partial t'} \gamma \left( B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right). \quad (8.25)$$

如果麦克斯韦方程组是洛伦兹协变的，即在一切惯性参考系中数学形式不变，则在  $\Sigma'$  中必需有

$$\frac{\partial E'_x}{\partial z'} - \frac{\partial E'_z}{\partial x'} = -\frac{\partial B'_y}{\partial t'}. \quad (8.26)$$

方程(8.25)与(8.26)具有相同的数学形式，这就表明方程(8.5)的  $y$  分量是洛伦兹协变的。事实上，如果令

$$E'_x = E_x, \quad (8.27)$$

$$E'_z = \gamma(E_x + vB_y), \quad (8.28)$$

$$B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_x\right); \quad (8.29)$$

则方程(8.25)和(8.26)完全相同。类似地，方程(8.11)变成

$$\frac{\partial}{\partial x'} \gamma(E_y - vB_z) - \frac{\partial}{\partial y'} E_x = -\frac{\partial}{\partial t'} \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right).$$

这与方程

$$\frac{\partial E'_y}{\partial x'} - \frac{\partial E'_x}{\partial y'} = -\frac{\partial B'_z}{\partial t'}$$

具有相同数学形式，如果令

$$E'_y = \gamma(E_y - vB_z), \quad (8.30)$$

$$E'_x = E_x,$$

$$B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right); \quad (8.31)$$

则此二方程相同。只剩下  $B_x$  的变换尚待确定。为确定这一变换，必须同时考虑方程(8.9)和(8.12)。将方程(8.21)，(8.22)和(8.23)代入方程(8.12)，得到

$$\gamma\left(\frac{\partial B_z}{\partial x'} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial B_x}{\partial t'}\right) + \frac{\partial B_y}{\partial y'} + \frac{\partial B_x}{\partial z'} = 0. \quad (8.32)$$

方程(8.29)和(8.31)的逆变换分别为

$$B_y = \gamma\left(B'_y - \frac{v}{c^2}E'_x\right)$$

和

$$B_x = \gamma \left( B'_x + \frac{\nu}{c^2} E'_y \right),$$

代入方程(8.32), 得

$$\begin{aligned} & \gamma \left( \frac{\partial B_x}{\partial x'} - \frac{\nu}{c^2} \frac{\partial B_x}{\partial t'} \right) + \gamma \frac{\partial}{\partial y'} \left( B'_y - \frac{\nu}{c^2} E'_x \right) \\ & + \gamma \frac{\partial}{\partial z'} \left( B'_z + \frac{\nu}{c^2} E'_y \right) = 0, \end{aligned}$$

整理并消去  $\gamma$ , 得

$$\frac{\partial B_x}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} = \frac{\nu}{c^2} \left\{ \frac{\partial E'_x}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} + \frac{\partial B_x}{\partial t'} \right\}. \quad (8.33)$$

类似地, 将方程(8.22), (8.23)和(8.24)代入方程

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = - \frac{\partial B_x}{\partial t}$$

之后, 得到

$$\frac{\partial E_x}{\partial y'} - \frac{\partial E_y}{\partial z'} = - \gamma \left( \frac{\partial B_x}{\partial t'} - \nu \frac{\partial B_x}{\partial x'} \right),$$

用方程(8.28)和(8.30)的逆变换代入  $E_x$  和  $E_y$ , 得

$$\begin{aligned} & \gamma \left( \frac{\partial E'_x}{\partial y'} - \nu \frac{\partial B'_y}{\partial y'} \right) - \gamma \left( \frac{\partial E'_y}{\partial z'} + \nu \frac{\partial B'_x}{\partial z'} \right) \\ & = - \gamma \left( \frac{\partial B_x}{\partial t'} - \nu \frac{\partial B_x}{\partial x'} \right), \end{aligned}$$

整理并消去  $\gamma$ , 得

$$\begin{aligned} & - \nu \left( \frac{\partial B_x}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} \right) + \frac{\partial E'_x}{\partial y'} \\ & - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} + \frac{\partial B_x}{\partial t'} = 0, \end{aligned}$$

即

$$\frac{\partial B_x}{\partial x'} + \frac{\partial B_y'}{\partial y'} + \frac{\partial B_z'}{\partial z'} = \frac{1}{v} \left( \frac{\partial E_z'}{\partial y'} - \frac{\partial E_y'}{\partial z'} + \frac{\partial B_x}{\partial t'} \right). \quad (8.34)$$

比较方程(8.33)和(8.34)可得出结论：如果  $v \neq c$ ，必定有

$$\frac{\partial B_x}{\partial x'} + \frac{\partial B_y'}{\partial y'} + \frac{\partial B_z'}{\partial z'} = 0 \quad (8.35)$$

和

$$\frac{\partial E_z'}{\partial y'} - \frac{\partial E_y'}{\partial z'} = -\frac{\partial B_x}{\partial t'}. \quad (8.36)$$

如果麦克斯韦方程组服从相对性原理，则在惯性系  $\Sigma'$  中与方程(8.12)和(8.9)相应，就有

$$\frac{\partial B_x'}{\partial x'} + \frac{\partial B_y'}{\partial y'} + \frac{\partial B_z'}{\partial z'} = 0 \quad (8.37)$$

和

$$\frac{\partial E_z'}{\partial y'} - \frac{\partial E_y'}{\partial z'} = -\frac{\partial B_x'}{\partial t'}. \quad (8.38)$$

方程(8.35)和(8.37)具有相同的数学形式，并且如果

$$B_x' = B_x, \quad (8.39)$$

则它们完全相同。于是方程(8.36)和(8.38)也完全相同。这就完成了场的变换。把公式集中如下：

$$\left. \begin{aligned} E_x' &= E_x, & E_x &= E_x', \\ E_y' &= \gamma(E_y - vB_x), & E_y &= \gamma(E_y' + vB_z'), \\ E_z' &= \gamma(E_z + vB_y), & E_z &= \gamma(E_z' - vB_y'); \end{aligned} \right\} \quad (8.40)$$

$$\left. \begin{aligned} B_x' &= B_x, & B_x &= B_x', \\ B_y' &= \gamma \left( B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right), & B_y &= \gamma \left( B_y' - \frac{v}{c^2} E_z' \right), \\ B_z' &= \gamma \left( B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right), & B_z &= \gamma \left( B_z' + \frac{v}{c^2} E_y' \right). \end{aligned} \right\} \quad (8.41)$$

这些变换式把  $\Sigma$  中点  $x, y, z$  在时刻  $t$  的电场与磁场的数值与  $\Sigma'$  中点  $x', y', z'$  在时刻  $t'$  的电场与磁场的数值联系起

来,其中  $x, y, z, t$  与  $x', y', z', t'$  用洛伦兹变换相联系. 如用下标  $\parallel$  和  $\perp$  来表示平行于和垂直于  $\Sigma'$  相对  $\Sigma$  以匀速  $\mathbf{v}$  运动的方向,并记住  $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\parallel}$  和  $(\mathbf{v} \times \mathbf{E}/c^2)_{\parallel}$  均为零,则上述方程可改写为矢量形式

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\parallel}, \quad (8.40a)$$

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\perp};$$

$$\mathbf{B}'_{\parallel} = (\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}/c^2)_{\parallel}.$$

$$\mathbf{B}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{E}/c^2)_{\perp}, \quad (8.41a)$$

我们已证明当坐标和时间按洛伦兹变换式变换时,只要电磁场按方程(8.40)和(8.41)变换,则两个麦克斯韦方程,即(8.5)和(8.8)就是协变的(即数学形式不变),因而服从相对性原理. 我们将先来考虑  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$  的变换式的几点应用,然后再证明方程(8.6)和(8.7)也是洛伦兹协变的.

### 8.3 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 的变换式的某些应用

#### 8.3.1 匀速运动的电荷产生的电场与磁场

方程(8.40)和(8.41)表明,如果在  $\Sigma'$  中有电场而没有磁场,在  $\Sigma$  中应该既有电场又有磁场. 作为例子,我们考虑一个在惯性系  $\Sigma'$  原点静止的电荷  $q$ . 在沿负  $O'x'$  轴相对  $\Sigma'$  以匀速  $v$  运动的惯性系  $\Sigma$  中,电荷  $q$  以匀速  $v$  沿正  $Ox$  轴运动. 我们想计算惯性系  $\Sigma$  中在点  $A(x, y, z)$  处  $t = 0$  时的电磁场,这时电荷  $q$  位于  $\Sigma$  的原点. 这就是在 7.3 节用狭义相对论中力的变换式处理过的那个问题.

由于电荷在  $\Sigma'$  中静止,因此对于一切  $t'$ , 电场便由库仑定律给出为

$$\mathbf{E}' = \frac{qr'}{4\pi\epsilon_0 r'^3}. \quad (8.42)$$

由洛伦兹变换,与 $\Sigma$ 中 $x, y, z, t = 0$ 相对应,在 $\Sigma'$ 中有

$$x' = \gamma x; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = -\gamma \frac{vx}{c^2}. \quad (8.43)$$

我们有

$$\begin{aligned} r'^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 = \gamma^2 x^2 + y^2 + z^2 \\ &= \gamma^2 \left\{ x^2 + \frac{1}{\gamma^2} (y^2 + z^2) \right\} = \gamma^2 s^2, \end{aligned}$$

$$\text{其中 } s^2 = x^2 + (1 - v^2/c^2)(y^2 + z^2).$$

因此

$$r' = \gamma s, \quad (8.44)$$

把方程(8.42)写成分量,并对 $r', x', y'$ 和 $z'$ 进行代换,得出:

$$E'_x = \frac{qx'}{4\pi\epsilon_0 r'^3} = \frac{q\gamma x}{4\pi\epsilon_0 \gamma^3 s^3} = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 \gamma^2 s^3},$$

$$E'_y = \frac{qy'}{4\pi\epsilon_0 r'^3} = \frac{qy}{4\pi\epsilon_0 \gamma^3 s^3},$$

$$E'_z = \frac{qz'}{4\pi\epsilon_0 r'^3} = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 \gamma^3 s^3}.$$

由于电荷 $q$ 在 $\Sigma'$ 中静止,

$$B'_x = B'_y = B'_z = 0.$$

用方程(8.40)从 $\Sigma'$ 变换到 $\Sigma$ ,

$$E_x = E'_x = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 \gamma^2 s^3} = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 r^3} (1 - v^2/c^2) = gx, \quad (8.45)$$

$$E_y = \gamma(E'_y + vB'_z) = \gamma E'_y = \frac{qy}{4\pi\epsilon_0 \gamma^2 s^3} = gy, \quad (8.46)$$

$$E_z = \gamma(E'_z - vB'_y) = \gamma E'_z = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 \gamma^2 s^3} = gz, \quad (8.47)$$

其中

$$g = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \gamma^2 s^3}. \quad (8.48)$$

方程(8.45), (8.46)和(8.47)与方程(7.31), (7.32)和(7.33)一致, 后者是用力的变换式导出的。和7.4节一样地得到了**E**的方程:

$$\mathbf{E} = \frac{qr(1 - v^2/c^2)}{4\pi\epsilon_0 r^3 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2\theta\right)^{3/2}}, \quad (8.49)$$

其中 $\theta$ 为**r**和**v**之间的夹角。

由方程(8.41), 因为在 $\Sigma'$ 中 $\mathbf{B}' = 0$ , 在 $\Sigma$ 中有

$$B_z = B'_z = 0,$$

$$B_y = \gamma \left( B'_y - \frac{v}{c^2} E'_z \right) = -\frac{v}{c^2} \gamma E'_z,$$

但由方程(8.47)

$$E_z = \gamma E'_z,$$

因此

$$B_y = -\frac{v}{c^2} E_z.$$

类似地,

$$B_x = \gamma \left( B'_x + \frac{v}{c^2} E'_y \right) = \gamma \frac{v}{c^2} E'_y = \frac{v}{c^2} E_y,$$

因此

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2} = \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{r}(1 - v^2/c^2)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2\theta\right)^{3/2}}. \quad (8.50)$$

这与方程(7.40)一致。在7.3节中, 我们把狭义相对论力的变换式和电荷不变取作公理, 电场和磁场是在决定了运动电荷之间的力之后才引进的。本节从考虑电场与磁场的变换公式出发, 而后者可由要求麦克斯韦方程组服从相对性原理而得出。这两条途径给出了相同结果。这就作为一个例子说明了狭义相对论的内部一致性, 并证明了力的变换式 [方程

(5.98)–(5.100)，在第五章中，它们是从考虑机械碰撞导出的]也适用于电磁力。

### 8.3.2 运动的电动势

上述例子中在一个惯性系内有电场而没有磁场。当从相对于前一惯性系运动的另一惯性系观察时，既有电场又有磁场。现在来讨论在一惯性系中只有磁场的例子。

考虑一个电量为  $q$  库仑的单个正“点”电荷以匀速  $v$  米/秒沿惯性系  $\Sigma$  的  $Ox$  轴运动，而这一惯性系就被当作实验室系统。我们假定在  $\Sigma$  中存在负  $z$  方向的磁场  $\mathbf{B}$ ，即在图8.1(a)中指向书后的方向。可用激磁线圈或永久磁铁来产生磁场；假设激磁线圈或永久磁铁中的电荷的构形和速度使得在实验室系中作用在静止的电荷上的总电力为零。在实验室系  $\Sigma$  中，作用在电荷  $q$  上的力是由下式给出的磁力：

$$f_x = f_z = 0; \quad f_y = qvB. \quad (8.51)$$

考虑沿  $Ox$  轴相对  $\Sigma$  以匀速  $v$  运动的惯性系  $\Sigma'$ 。如果在  $t = 0$  时  $\Sigma$  与  $\Sigma'$  的原点重合，电荷  $q$  位于  $\Sigma$  的原点，那么在  $\Sigma'$  中静止的观察者将记录电荷  $q$  于  $t = t' = 0$  瞬间在  $\Sigma'$  原点静止。即使  $\Sigma'$  中有磁场  $\mathbf{B}'$ ，在  $t' = 0$  在  $\Sigma'$  中也不会有磁力作用在电荷  $q$  上，因为这一瞬间电荷  $q$  静止。在  $\Sigma'$  中静止的观察者将看到电荷  $q$  开始在  $O'y'$  方向上运动。他将认为这种初始运动是由于  $\Sigma'$  中有电场存在。现在我们证明这两种观点是如何通过场变换联系起来的。在  $\Sigma$  中，

$$E_x = E_y = E_z = B_x = B_y = 0; \quad B_z = -B. \quad (8.52)$$

作用在  $q$  上的力是洛伦兹力，而在  $t = 0$  时它等于

$$f_y = qvB, \quad (8.53)$$

这是磁力，它总是垂直于电荷速度，并在惯性系  $\Sigma$  中该力的大小不变。在惯性系  $\Sigma$  中，电荷  $q$  将在  $xy$  平面内沿圆周运

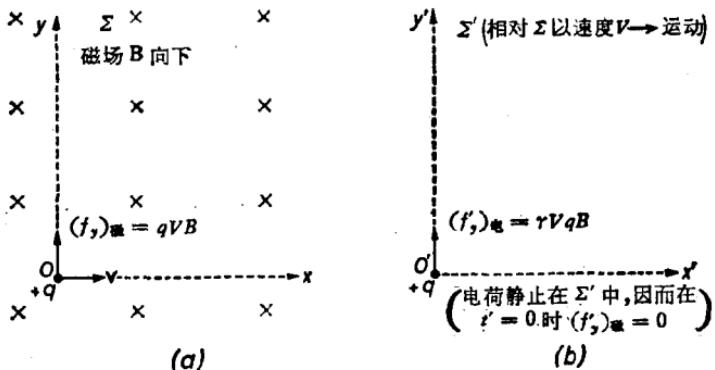


图 8.1 (a) 在惯性系中有磁场而没有电场, 作用在运动电荷  $q$  上的力为磁力; 在  $\Sigma$  中没有电力作用在电荷上。 (b) 在  $\Sigma'$  中在  $t' = 0$  时电荷静止, 在电力影响下, 电荷开始相对  $\Sigma'$  运动。

动。

利用方程(8.40)和(8.52), 在  $\Sigma'$  中有

$$E'_x = E'_z = 0, \\ E'_y = \gamma(E_y - vB_z) = -\gamma v B_z.$$

利用方程(8.41)和(8.52), 得到

$$B'_x = B'_y = 0,$$

和

$$B'_z = \gamma B_z.$$

由于  $t' = 0$  时电荷在  $\Sigma'$  中静止, 因此在  $t' = 0$  时在  $\Sigma'$  中测量的作用在该电荷上的磁力等于零。因此在  $\Sigma'$  中测量的, 作用在  $q$  上的总力为

$$f'_x = f'_z = 0, \\ f'_y = qE'_y = -qv\gamma B_z = +\gamma qvB. \quad (8.54)$$

于是在  $\Sigma'$  中静止的观察者在  $t' = 0$  时将只观察到电力, 而在  $\Sigma$  中静止的观察者将只观察到磁力 [给读者留作练习, 证明这些力符合力的变换式, 即方程(5.98)–(5.100)]. 在  $\Sigma'$  中

由(8.54)给出的力引起电荷  $+q$  的加速度,于是它开始运动。一旦电荷开始相对  $\Sigma'$  运动,便有等于  $q\mathbf{u}' \times \mathbf{B}'$  的磁力作用在电荷上,其中  $\mathbf{u}'$  为  $\Sigma'$  中电荷速度的瞬时值,该点磁场强度等于  $\mathbf{B}'$ 。电荷除受电力外,还受到这样一个磁力。

众所周知,当导体在磁场中运动时,导体中出现电动势。这就是发电机的原理。考虑实验室系( $\Sigma$ )中一个孤立导体顺  $y$  轴放置,并沿  $Ox$  轴以匀速  $v$  运动,如图 8.2(a)所示。设磁场在负  $z$  方向。相对于实验室系,导体内所有电子和正的原子核都以速度  $v$  运动,因此在实验室中静止的观察者将认为它们受有  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  的磁力。在随导体一起运动的惯性系  $\Sigma'$  中,电荷静止,因此作用在电荷上的力将被解释为电力,如图 8.2(b)所示。运动导体中的正核和紧密结合的电子将被固体内部粘聚力束缚不动,而传导电子和正的空穴是比较容易运动的。正的空穴将在正  $Oy$  方向运动,电子将在相反方向运动;电荷的运动一直进行到形成了这样分布的电荷分离,使得所引起的作用在运动导体内电荷上的电力与作用在这些电荷

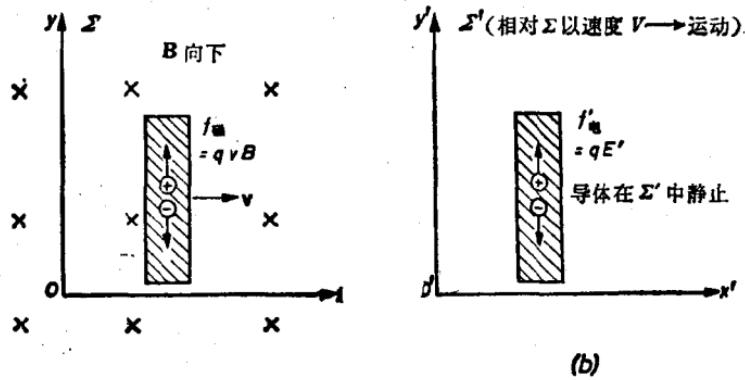


图 8.2 (a) 一个以匀速  $v$  相对惯性系  $\Sigma$  运动的导体。作用在运动导体内部电荷上的力为运动导体内的电荷尚未发生任何位移时的力。(b) 在  $\Sigma'$  中导体静止。

上的磁力  $qv \times \mathbf{B}$  大小相等方向相反为止, 如图 8.3 所示. 被移动的电荷引起了在导体外面的电场. 现在如果运动导体是在一弯曲的静止导轨上运动, 导轨与运动导体两端滑动接触, 那么外电场将在静止导轨中产生传导电流, 这一电流减少了运动导体两端的电荷数目. 于是作用在运动导体内部电荷上的磁力便超过电力, 因而运动导体内的电荷便要运动以补偿被静止导轨中电流带走的电荷. 如果导体作匀速运动, 并且由于构成电迴路的那部分静止导轨长度的变化而引起的电阻变化可以忽略, 则电流成为常数, 达到了动态平衡. 在达到稳定状态之前, 电荷在运动导体和静止导轨上重新分布, 使得对于欧姆导体, 回路中所有部分的电势差均满足克希霍夫定律.

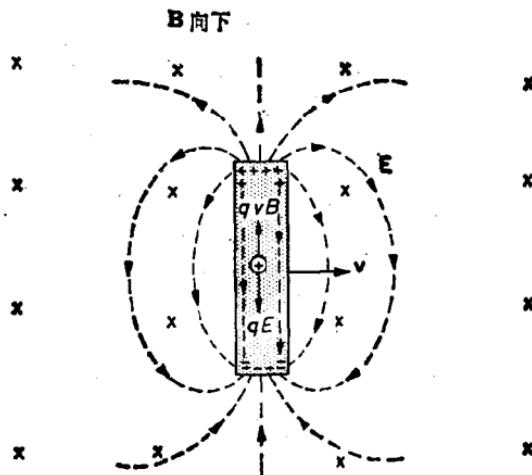


图 8.3 实验室系统, 导体在运动. 在磁场力  $qvB$  的影响下, 在运动导体内出现了电荷的移动. 被移动的电荷引起电场, 它与作用在相对实验室运动的导体内的电荷上的磁力相反.

如果运动导体的速度增加, 那么作用在运动导体内电荷上的磁力便增加, 于是在运动导体两端将出现更多的电荷; 这

就增加了外电势差,因而增加了静止导轨中的传导电流.

关于什么原因使传导电流在导体中“流过”的讨论,读者可参看罗瑟<sup>[6]</sup>的文章.

### 8.3.3 真空中的平面波

麦克斯韦方程组可以有一些解相当于以速度  $c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-\frac{1}{2}}$  在真空中传播的平面波. 在经典物理学认为这些波与光波等同. 对于真空中的平面波,有  $E = cB$ , 因此  $E^2 - c^2 B^2$  为零.

由方程(8.40)和(8.41),通过直接代换得到

$$E^2 - c^2 B^2 = E'^2 - c^2 B'^2. \quad (8.55)$$

如果在惯性系  $\Sigma$  中,有在真空中  $E$  等于  $cB$  的平面波,那么在  $\Sigma'$  中有  $E' = cB'$ . 一惯性系中的平面波可以变换到另一惯性系中的平面波. 通过变换改变了平面波的频率和方向, 分别导致多普勒效应和光行差(参考 4.4 节).

## 8.4 电荷密度与电流密度的变换

现在大家知道,物质由原子组成,原子由正的核和电子组成. 当有一些电子从一“点”的某些原子移开时,在该点就有了电荷密度. 在时刻  $t$  点  $x, y, z$  的电荷密度  $\rho$  定义为

$$\rho = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\Delta V}, \quad (8.56)$$

其中求和是对点  $x, y, z$  周围的小体积元中的所有电荷进行的. 即使当  $\Delta V$  对实验室尺度而言非常小,它仍然能含有大量原子,因此由于物质不连续结构引起的效果就被消除了,于是在宏观理论中  $\rho$  就可作为位置的连续函数处理. 如果体积元中的电荷在运动,那么该点就有电流. 电流密度被定义为

垂直于电流方向的每单位面积上的电流。如果  $\delta i$  为流过面积  $\delta S$  (该面积与  $\delta i$  垂直) 的电流, 那么

$$\mathbf{J} = \frac{\delta \mathbf{i}}{\delta S} \quad (8.57)$$

这一电流是由大量不连续电荷的运动所造成的。

我们将从一简化模型出发, 考虑惯性系  $\Sigma$  中体积  $V$  内的均匀电荷分布, 每立方米中有  $n$  个不连续电荷, 每个电荷电量为  $q$  库仑。我们将假设所有电荷相对惯性系  $\Sigma$  具有相同速度  $\mathbf{u}$ 。对于这一简化情形, 有

$$\rho = nq. \quad (8.58)$$

电流密度(即流过与电流方向垂直的单位面积的电流)为

$$\mathbf{J} = nq\mathbf{u}, \quad (8.59)$$

或者写成分量,  $J_x = nqu_x$ ;  $J_y = nqu_y$ ;  $J_z = nqu_z$ 。

设在相对于  $\Sigma$  以匀速  $v$  运动的惯性系  $\Sigma'$  中测量时, 这同一个电荷分布具有体积  $V'$ , 并设每立方米有  $n'$  个不连续电荷, 它们以速度  $\mathbf{u}'$  相对  $\Sigma'$  运动。于是有

$$\rho' = n'q, \quad (8.60)$$

$$\mathbf{J}' = n'\mathbf{u}'. \quad (8.61)$$

本节中将把总电荷不变原理作为公理。因此在方程 (8.58), (8.59), (8.60) 和 (8.61) 中用的是同一个  $q$  值。

考虑电荷分布在其中静止的惯性系  $\Sigma^0$ ;  $\Sigma^0$  以速度  $\mathbf{u}$  相对  $\Sigma$  运动。设  $V_0$  为该电荷分布在  $\Sigma^0$  中的原体积。设  $n_0$  为在  $\Sigma^0$  中测出的每立方米的电荷数, 于是总电荷数等于  $n_0V_0$ 。由于长度缩短, 在  $\Sigma$  中测量该电荷分布的体积为

$$V_0(1 - u^2/c^2)^{\frac{1}{2}}.$$

在  $\Sigma$  中测量的电荷总数等于  $nV$ , 即  $nV_0(1 - u^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$ 。但电荷总数是不变量, 因为它是纯粹的数目。因此,

$$nV = nV_0\sqrt{(1 - u^2/c^2)} = n_0V_0,$$

或

$$n = \frac{n_0}{\sqrt{(1 - u^2/c^2)}}. \quad (8.62)$$

类似地在  $\Sigma'$  中, 有

$$n' = \frac{n_0}{\sqrt{(1 - u'^2/c^2)}}, \quad (8.63)$$

因此

$$n' = n \sqrt{\frac{(1 - u^2/c^2)}{(1 - u'^2/c^2)}}. \quad (8.64)$$

由方程(4.14),

$$\sqrt{\frac{(1 - u^2/c^2)}{(1 - u'^2/c^2)}} = \frac{(1 - vu_r/c^2)}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}} \quad (4.14)$$

代入方程(8.64), 得到

$$n' = \frac{n(1 - vu_x/c^2)}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}} = \gamma n(1 - vu_x/c^2), \quad (8.65)$$

乘以  $q$ , 得

$$qn' = \gamma \left( qn - \frac{vqnu_r}{c^2} \right),$$

将方程(8.58)和(8.59)代入, 得到

$$\rho' = \gamma \left( \rho - \frac{vJ_x}{c^2} \right). \quad (8.66)$$

由方程(8.61), 有

$$J'_x = qu'_xn',$$

而由速度变换, 有

$$u'_x = (u_x - v)(1 - vu_x/c^2),$$

代换  $u'_x$ , 并用方程(8.65)代换  $n'$ , 得

$$J'_x = -\frac{q(u_x - v)}{(1 - vu_x/c^2)} n \gamma (1 - vu_x/c^2);$$

将方程(8.58)和(8.59)代入, 得

$$J'_x = \gamma(J_x - v\rho). \quad (8.67)$$

类似地,由方程(8.61),

$$J'_y = qu'_y n',$$

由速度变换,

$$u'_y = \frac{u_y \sqrt{(1 - v^2/c^2)}}{(1 - vu_x/c^2)},$$

代换  $u'_y$  和  $n'$ , 得

$$J'_y = qu_y \frac{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}}{(1 - vu_x/c^2)} n \gamma (1 - vu_x/c^2) = J_y. \quad (8.68)$$

类似地,

$$J'_z = J_z. \quad (8.69)$$

这就完成了电荷密度和电流密度的变换。到此为止我们只用了简化模型。通常电荷和电流分布是由大量的正负电荷所组成,所有这些电荷可能以不同速度运动着。设一立方米中,具有  $+q$  库仑电量和速度  $\mathbf{u}$  的正电荷数目为  $n_+(\mathbf{u})$ , 而具有速度  $\mathbf{u}$  和  $-q$  库仑电量的负电荷数目为  $n_-(\mathbf{u})$ 。电荷密度和电流密度定义为

$$\rho = \sum_{\mathbf{u}} q[n_+(\mathbf{u}) - n_-(\mathbf{u})], \quad (8.70)$$

$$J_x = \sum_{\mathbf{u}} q[n_+(\mathbf{u})u_x - n_-(\mathbf{u})u_x] \text{ 等等}, \quad (8.71)$$

其中求和是对速度  $\mathbf{u}$  的一切可能值进行的。如果有以速度  $\mathbf{u}$  运动的双电荷离子, 则可作为两个分开的以速度  $\mathbf{u}$  运动的单电荷离子来处理。电流密度表达式既包括传导电流密度, 又包括运载电流密度。如果  $\rho$  为零, 只要正负离子以不同速度运动, 仍可得到有限的  $\mathbf{J}$  值, 这就是传导电流。

类似地, 如果  $n'_+(\mathbf{u}')$  和  $n'_-(\mathbf{u}')$  分别是一立方米中具有电荷  $+q$  或  $-q$ , 并在  $\Sigma'$  中测量速度为  $\mathbf{u}'$  的正负离子数, 与

$\Sigma$  中以速度  $\mathbf{u}$  运动的电荷相对应，则有

$$\rho' = \sum_{\mathbf{u}'} q[n'_+(\mathbf{u}') - n'_-(\mathbf{u}')], \quad (8.72)$$

$$J'_x = \sum_{\mathbf{u}'} q[n'_+(\mathbf{u}') u'_x - n'_-(\mathbf{u}') u'_x] \text{ 等等.} \quad (8.73)$$

由方程(8.65)，有

$$n'_+(\mathbf{u}') = n_+(\mathbf{u}) \gamma (1 - \nu u_x / c^2)$$

$$\text{和} \quad n'_-(\mathbf{u}') = n_-(\mathbf{u}) \gamma (1 - \nu u_x / c^2),$$

代入方程(8.72)，得到

$$\begin{aligned} \rho' &= \sum_{\mathbf{u}} q \gamma [n_+(\mathbf{u}) - n_-(\mathbf{u})] (1 - \nu u_x / c^2) \\ &= \gamma \left\{ \sum_{\mathbf{u}} q [n_+(\mathbf{u}) - n_-(\mathbf{u})] \right. \\ &\quad \left. - \frac{\nu}{c^2} \sum_{\mathbf{u}} q [n_+(\mathbf{u}) - n_-(\mathbf{u})] u_x \right\}. \end{aligned} \quad (8.74)$$

将方程(8.70)和(8.71)代入，得

$$\rho' = \gamma [\rho - (\nu / c^2) J_x].$$

这与方程(8.66)相同，

于是

$$\begin{aligned} J'_x &= \sum_{\mathbf{u}'} q [n'_+(\mathbf{u}') - n'_-(\mathbf{u}')] u'_x \\ &= \sum_{\mathbf{u}} q \gamma [n_+(\mathbf{u}) - n_-(\mathbf{u})] (1 - \nu u_x / c^2) \frac{(u_x - \nu)}{(1 - \nu u_x / c^2)}, \end{aligned}$$

其中我们已用速度变换把  $u'_x$  替换掉了。化简得

$$J'_x = \gamma (J_x - \nu \rho). \quad (8.75)$$

类似地，在一般情形有  $J'_y = J_y$  和  $J'_z = J_z$ 。把变换公式集中如下：

$$\begin{aligned} J'_x &= \gamma (J_x - \nu \rho), & J_x &= \gamma (J'_x - \nu \rho'), \\ J'_y &= J_y, & J_y &= J'_y, \end{aligned} \quad (8.76)$$

$$J'_z = J_z, \quad J_z = J'_z, \\ \rho' = \gamma \left( \rho - \frac{\nu J_x}{c^2} \right), \quad \rho = \gamma \left( \rho' + \frac{\nu J'_x}{c^2} \right).$$

电流密度  $\mathbf{J}$  和电荷密度  $\rho$  为  $\Sigma$  中在点  $x, y, z$  及时刻  $t$  的值，而  $\mathbf{J}'$  和  $\rho'$  为  $\Sigma'$  中在点  $x', y', z'$  及时刻  $t'$  的值， $\Sigma$  和  $\Sigma'$  的坐标和时间用洛伦兹变换相联系。

值得注意， $J_x, J_y, J_z, \rho$  以和  $x, y, z, t$  相同的方式变换；方程(8.76)的数学形式与洛伦兹变换的数学形式相同。在 6.4 节中我们把具有象  $x, y, z, ict$  一样变换的四个分量的量定义为四维矢量。因此， $J_x, J_y, J_z$  和  $ic\rho$  构成一个四维矢量的分量。

如果在  $\Sigma'$  中电荷密度  $\rho'$  为零，那么在  $\Sigma'$  中运载电流密度就为零，电流密度就只是传导电流密度。在这种情况下，方程(8.76)简化为

$$J_x = \gamma J'_x; \quad J_y = J'_y; \quad J_z = J'_z; \quad \rho = \gamma \frac{\nu J'_x}{c^2}. \quad (8.77)$$

按照这些方程，在  $\Sigma$  中将有等于  $\gamma \nu J'_x / c^2$  的电荷密度  $\rho$ 。因此，相对  $\Sigma'$  静止并为电中性的载流导体，相对  $\Sigma$  将有电荷密度。我们将通过考虑一个简单例子来说明这一效应。

考虑由数目相等的正负电荷组成的导体；每个电荷电量为  $\pm q$ ，在  $t' = 0$  时刻这些电荷沿惯性系  $\Sigma'$  的  $O'x'$  轴分布着，如图 8.4(a) 所示。设负电荷以匀速  $+u'_x$  沿  $O'x'$  轴运动，而正电荷在  $\Sigma'$  中静止。在  $\Sigma'$  中电荷密度  $\rho'$  为零。总电流（是负  $x$  方向的传导电流）等于  $-qu'_x/a$ ，其中  $a$  为相邻电荷之间的距离（在  $\Sigma'$  中每单位长度中的电荷数等于  $1/a$ ）。如果  $A'$  为在  $\Sigma'$  中测量的导线横截面积，则

$$J'_x = \frac{qu'_x}{A'a}; \quad J'_y = J'_z = \rho' = 0. \quad (8.78)$$

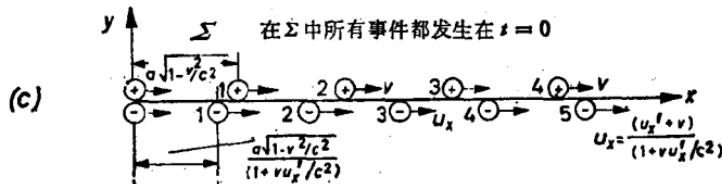
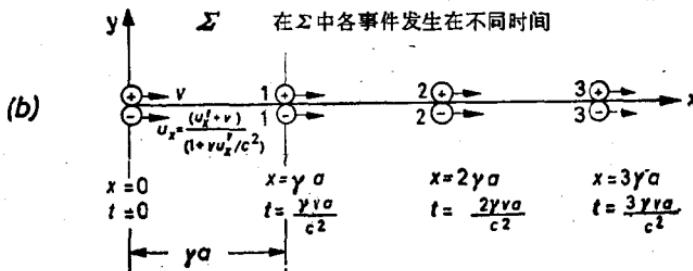
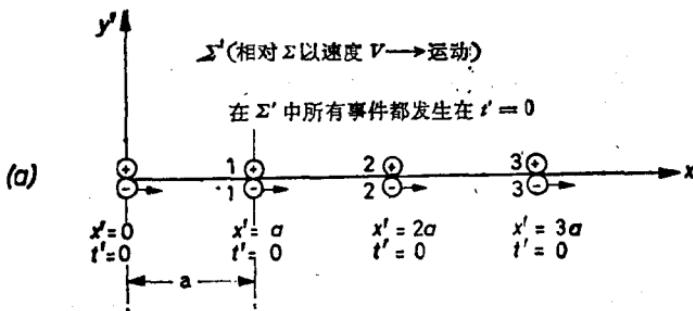


图 8.4 (a) 在  $\Sigma'$  中由数目相等的正、负电荷构成的电荷分布，正电荷静止，而负电荷以匀速  $u'_x$  相对  $\Sigma'$  运动。(b) 与图 (a) 所示的在  $\Sigma'$  中电荷诸位置相对应的，在  $\Sigma$  中的诸事件；在  $\Sigma$  中这些事件是不同的。 (c) 在  $\Sigma$  中，同样这些电荷在  $t = 0$  时刻的位置。注意在  $\Sigma$  中有负的电荷密度。

在沿负  $Ox$  轴相对  $\Sigma'$  以匀速  $v$  运动的  $\Sigma$  中，图 8.4(a) 所示诸事件的位置和时间为：

$$x = 0; \quad \gamma a; \quad 2\gamma a; \quad \dots$$

$$t = 0; \quad \gamma \frac{v a}{c^2}; \quad 2\gamma \frac{v a}{c^2}; \quad \dots$$

这些事件在图 8.4(b) 中表出; 在惯性系  $\Sigma$  中它们是不同时的。为了计算  $\Sigma$  中的电流密度和电荷密度, 必须在  $\Sigma$  中的同一时刻来数正负电荷。我们将把这一时刻取为  $t = 0$ 。由速度变换式, 在  $\Sigma$  中正电荷以匀速  $v$  运动, 负电荷以匀速  $(u'_x + v)/(1 + vu'_x/c^2)$  运动。由于这些速度是不变的, 每个粒子在  $t = 0$  时刻的位置便可由图 8.4(b) 所示诸事件的位置和时间计算出来。例如, 在一段时间  $\gamma v a/c^2$  内, 电荷 +1 移动了一段距离  $\gamma v^2 a/c^2$ , 而电荷 -1 移动了一段距离  $(\frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2})$   
 $\gamma \frac{v a}{c^2}$ 。因此, 在  $t = 0$  时电荷 +1 离原点的距离等于  $(\gamma a - \gamma v^2 a/c^2) = (1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}} a$ , 而  $t = 0$  时电荷 -1 离原点的距离等于  $\left[ \gamma a - \frac{\gamma a v (u'_x + v)}{c^2 (1 + vu'_x/c^2)} \right]$ , 即等于  $a(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}} / (1 + vu'_x/c^2)$ 。因此  $\Sigma$  中  $t = 0$  时刻的电荷分布便如图 8.4(c) 所示。可以看出有净剩的负电荷密度。 $\Sigma$  中每单位长度中的正电荷数等于  $1/a(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$ , 而每单位长度中的负电荷数等于  $(1 + u'_x v/c^2)/a(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$ 。每单位长度的电量等于  $-\gamma q u'_x v / a c^2$ 。这一电量在导线横截面上分布着。因为该面积垂直于  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  相对运动的方向, 它不受洛伦兹变换的影响。因此,

$$\rho = -\frac{\gamma q u'_x v}{A' a c^2}.$$

但由方程(8.78),  $\Sigma'$  中的电流密度等于

$$J'_x = -\frac{q u'_x}{A' a}.$$

因此,

$$\rho = +\gamma v J'_x / c^2. \quad (8.79)$$

这与方程(8.77)一致。可以看出, 这一结果是由  $\Sigma$  与  $\Sigma'$  中对

同时性测量的差别所造成的。这是一种相对论效应，没有经典的类似效应。

这一结果的一个推论是，一个  $\Sigma'$  中静止时为电中性的电流线圈，当在一个它在其中运动的惯性系  $\Sigma$  中观察时，有电偶极矩。考虑一个矩形线圈，尺寸为  $a'$  乘  $b'$ ，在惯性系  $\Sigma'$  的  $x'y'$  平面上静止。设它有传导电流  $i'$ ，并设  $\Sigma'$  中导线横截面积等于  $A'$ ，因此导线内的电流密度等于  $i'/A'$ 。静止平面线圈的磁矩为一矢量，等于线圈面积与线圈中电流的乘积，矢量方向垂直于面积并指向这样一个方向，使得在电流方向旋转的右手螺旋指向磁矩的方向，即

$$\mathbf{m}' = \mathbf{n} i' a' b', \quad (8.80)$$

其中  $\mathbf{n}$  是线圈平面的单位法向量。对于图 8.5(a) 中所示的线圈，在  $\Sigma'$  中我们有

$$m'_z = -i' a' b'.$$

线圈在  $\Sigma$  中的尺寸可由洛伦兹变换得到。由于  $PQ$  和  $RS$  两边是在运动方向，因此缩短为  $a'(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$ ，而横截面积不变，仍等于  $A'$ 。 $PS$  和  $QR$  两边不变，但它们的横截面积减小为  $A'(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$ 。按照方程 (8.77)，在  $\Sigma$  中沿  $PQ$  边有电荷密度  $\rho = \gamma v J'_x / c^2$ 。沿  $PQ$  边的总电量等于  $\rho a'(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}} A'$ ，即等于  $\gamma v J'_x A' a'(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}} / c^2 = i' a' v / c^2$ 。类似地沿  $RS$  边有负电荷  $-i' a' v / c^2$ ，如图 8.5(b) 所示。在  $\Sigma$  中有  $y$  方向的电偶极矩  $\mathbf{p}$ ，等于电量乘以电荷之间的间隔，即

$$p_y = \frac{i' a' v}{c^2} b' = -\frac{v}{c^2} m'_z.$$

一般说来，一个在其静止惯性系中具有磁矩  $\mathbf{m}'$  的电流线圈，当它以匀速  $v$  相对实验室运动时，具有电偶极矩，等于

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{m}'}{c^2}. \quad (8.81)$$

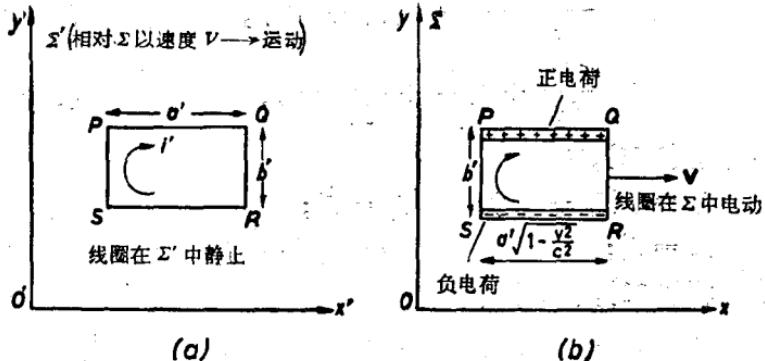


图 8.5 (a) 载流线圈在惯性系  $\Sigma'$  中静止. (b) 线圈在  $\Sigma$  中匀速运动. 按照狭义相对论, 相对于  $\Sigma$ , 线圈将具有电偶极矩.

我们是在采用安培的途径来解释物质的磁性. 按这一途径, 物质的磁性来源于原子的环形电流. 如果方程(8.81)适用于这些原子环形电流, 那么相对于实验室运动的磁化物体, 相对于实验室便应具有有限的电极化. 我们将在 8.6 节中讨论对运动物体极化的这种影响.

## 8.5 D 和 H 的变换

在 8.2 节中证明了方程(8.5)和(8.8)是洛伦兹协变的, 即当坐标和时间按洛伦兹变换式变换时其数学形式不变. 现在既已得到电荷密度和电流密度的变换式, 便可着手证明当坐标和时间按洛伦兹变换式变换时方程(8.7)和(8.6)也是协变的. 把方程(8.6)和(8.7)写成分量形式:

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_z + \frac{\partial D_x}{\partial t}, \quad (8.82)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y + \frac{\partial D_x}{\partial t}, \quad (8.83)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z + \frac{\partial D_x}{\partial t}, \quad (8.84)$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho. \quad (8.85)$$

由方程(8.76),有

$$J_x = \gamma(J'_x + v\rho'); \quad J_y = J'_y; \\ J_z = J'_z; \quad \rho = \gamma(\rho' + vJ'_x/c^2). \quad (8.86)$$

由方程(8.21),(8.22),(8.23)和(8.24),即:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \gamma \left( \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right); \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'}; \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}; \\ \frac{\partial}{\partial t} = \gamma \left( \frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \right);$$

代换方程(8.83)中的  $\frac{\partial}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $J_y$  和  $\frac{\partial}{\partial t}$ , 就得到

$$\frac{\partial H_x}{\partial z'} - \gamma \left( \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right) H_x \\ = J'_y + \gamma \left( \frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \right) D_y,$$

或者

$$\frac{\partial H_x}{\partial z'} - \frac{\partial}{\partial x'} \gamma (H_x - vD_y) \\ = J'_y + \frac{\partial}{\partial t'} \gamma \left( D_y - \frac{v}{c^2} H_x \right). \quad (8.87)$$

如果麦克斯韦方程组在  $\Sigma'$  中成立, 将有

$$\frac{\partial H'_x}{\partial z'} - \frac{\partial H'_x}{\partial x'} = J'_y + \frac{\partial D'_y}{\partial t'}, \quad (8.88)$$

方程(8.87)和(8.88)具有相同的数学形式, 并且如果令

$$H'_x = H_x; \quad H'_z = \gamma(H_x - vD_y); \quad D'_y = \gamma \left( D_y - \frac{v}{c^2} H_x \right),$$

则它们完全相同。

代换方程(8.84)中的  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}$ ,  $J_z$  和  $\frac{\partial}{\partial t}$ , 得到

$$\begin{aligned} & \gamma \left( \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right) H_y - \frac{\partial H_x}{\partial y'} \\ & = J'_z + \gamma \left( \frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \right) D_{xz}, \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x'} \gamma (H_y + v D_x) - \frac{\partial H_x}{\partial y'} \\ & = J'_z + \frac{\partial}{\partial t'} \gamma \left( D_x + \frac{v}{c^2} H_y \right). \end{aligned} \quad (8.89)$$

如果麦克斯韦方程组在  $\Sigma'$  中成立, 有

$$\frac{\partial H'_y}{\partial x'} - \frac{\partial H'_x}{\partial y'} = J'_z + \frac{\partial D'_z}{\partial t'}, \quad (8.90)$$

方程(8.89)和(8.90)具有相同的数学形式, 并且如果

$$H'_y = \gamma (H_y + v D_x); \quad H'_x = H_x; \quad D'_z = \gamma \left( D_x + \frac{v}{c^2} H_y \right),$$

则它们完全相同。

逆变换给出

$$H_x = \gamma (H'_x + v D'_y) \text{ 和 } H_y = \gamma (H'_y - v D'_z),$$

替换掉方程(8.82)中的  $\frac{\partial}{\partial y}$ ,  $H_z$ ,  $\frac{\partial}{\partial z}$ ,  $H_y$ ,  $J_x$  和  $\frac{\partial}{\partial t}$ , 得到

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y'} \gamma (H'_x + v D'_y) - \frac{\partial}{\partial z'} \gamma (H'_y - v D'_z) \\ & = \gamma (J'_z + v \rho') + \gamma \left( \frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \right) D_{xz}, \end{aligned}$$

整理得

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial D_x}{\partial x'} + \frac{\partial D'_y}{\partial y'} + \frac{\partial D'_z}{\partial z'} - \rho' \right) \\ & = -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial H'_z}{\partial y'} - \frac{\partial H'_y}{\partial z'} - J'_z - \frac{\partial D_x}{\partial t'} \right). \end{aligned} \quad (8.91)$$

由逆变换,

$$D_y = \gamma \left( D'_y + \frac{v}{c^2} H'_z \right) \quad \text{和} \quad D_z = \gamma \left( D'_z - \frac{v}{c^2} H'_y \right)$$

替换掉方程(8.85)中的  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}$ ,  $D_y$ ,  $\frac{\partial}{\partial z}$ ,  $D_z$  和  $\rho$ , 得到

$$\begin{aligned} & \gamma \left( \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right) D_x' + \frac{\partial}{\partial y'} \gamma \left( D'_y + \frac{v}{c^2} H'_z \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z'} \gamma \left( D'_z - \frac{v}{c^2} H'_y \right) \\ & = \gamma \left( \rho' + \frac{v}{c^2} J_x' \right); \end{aligned}$$

整理并消去  $\gamma$ , 我们有

$$\begin{aligned} & \frac{\partial D_x'}{\partial x'} + \frac{\partial D_y'}{\partial y'} + \frac{\partial D_z'}{\partial z'} - \rho' \\ & = -\frac{v}{c^2} \left( \frac{\partial H_z'}{\partial y'} - \frac{\partial H_y'}{\partial z'} - J_x' - \frac{\partial D_x'}{\partial t'} \right). \end{aligned} \quad (8.92)$$

比较方程(8.91)和(8.92), 由于  $v$  不能等于  $c$ , 我们得出结论

$$\frac{\partial D_x'}{\partial x'} + \frac{\partial D_y'}{\partial y'} + \frac{\partial D_z'}{\partial z'} = \rho', \quad (8.93)$$

$$\frac{\partial H_z'}{\partial y'} - \frac{\partial H_y'}{\partial z'} = J_x' + \frac{\partial D_x'}{\partial t'}. \quad (8.94)$$

如果麦克斯韦方程在  $\Sigma'$  中成立, 便有

$$\frac{\partial D_x'}{\partial x'} + \frac{\partial D_y'}{\partial y'} + \frac{\partial D_z'}{\partial z'} = \rho', \quad (8.95)$$

$$\frac{\partial H_z'}{\partial y'} - \frac{\partial H_y'}{\partial z'} = J_x' + \frac{\partial D_x'}{\partial t'}. \quad (8.96)$$

方程(8.93)和(8.95)具有相同数学形式, 如果令

$$D_x = D_x'$$

则它们完全相同. 方程(8.94)和(8.96)于是也完全相同. 把这些变换式集中如下:

$$\left. \begin{array}{l} D_x = D'_x, \\ D_y = \gamma \left( D_y - \frac{v}{c^2} H_z \right), \quad D'_y = \gamma \left( D'_y + \frac{v}{c^2} H'_z \right), \\ D'_z = \gamma \left( D_z + \frac{v}{c^2} H_y \right), \quad D_z = \gamma \left( D'_z - \frac{v}{c^2} H'_y \right); \end{array} \right\} \quad (8.97)$$

$$\left. \begin{array}{l} H'_x = H_x, \\ H'_y = \gamma (H_y + v D_z), \quad H_y = \gamma (H'_y - v D'_z), \\ H'_z = \gamma (H_z - v D_y), \quad H_z = \gamma (H'_z + v D'_y). \end{array} \right\} \quad (8.98)$$

或用矢量形式

$$\begin{aligned} \mathbf{D}'_{\parallel} &= \left( \mathbf{D} + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right)_{\parallel} \\ \text{和 } \mathbf{D}'_{\perp} &= \gamma \left( \mathbf{D} + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right)_{\perp} \end{aligned} \quad (8.97a)$$

和

$$\begin{aligned} \mathbf{H}'_{\parallel} &= (\mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D})_{\parallel} \\ \text{和 } \mathbf{H}'_{\perp} &= \gamma (\mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D})_{\perp}, \end{aligned} \quad (8.98a)$$

其中

$$\gamma = 1/\sqrt{(1 - v^2/c^2)}.$$

量  $\mathbf{H}$  和  $\mathbf{D}$  是指在  $\Sigma$  中的点  $x, y, z$  和时刻  $t$  的值, 量  $\mathbf{H}'$  和  $\mathbf{D}'$  在  $\Sigma'$  中的点  $x', y', z'$  和时刻  $t'$  取值, 其中  $x', y', z'$ ,  $t'$  与  $x, y, z, t$  用洛伦兹变换相联系。

我们已证明, 如果麦克斯韦方程组在  $\Sigma$  中成立, 那么, 如果坐标和时间用洛伦兹变换式变换, 并把电荷不变原理作为公理, 则变换后的方程组便与麦克斯韦方程组(如果在  $\Sigma'$  中成立)具有相同的数学形式。无论在该点有没有介质, 此结论都是对的。于是, 当坐标和时间是按洛伦兹变换式变换时, 麦克斯韦方程组服从相对性原理。

自 3.3 节以来, 我们是从相对性原理, 光速不变原理和电

荷不变原理这几个假设出发来阐述狭义相对论的。这使我们得出洛伦兹变换，然后证明了麦克斯韦方程组服从相对性原理。还有另一种途径：如果假设麦克斯韦方程组是正确的并服从相对性原理，那么便可得出光速不变原理和电荷守恒原理，如3.3节指出的那样。选择什么假设来阐述狭义相对论是个人爱好的问题。这是同一理论可有不同公理系统之一例。

## 8.6 运动介质的电动力学

在2.4节中我们曾说明狭义相对论在很大程度上最初是从对运动介质电动力学的研究发展起来的。例如，爱因斯坦1905年文章的题目就是“关于运动物体的电动力学”。

现在我们将用狭义相对论的变换来阐述运动介质的电动力学。所用方法是由闵可夫斯基在1908年首先阐明的。

有介质存在时，场量的值依赖于介质性质。为了求解麦克斯韦方程组，一定要有本构方程作补充。对于很大一类物质，当物质静止时，本构方程为如下形式：

$$\mathbf{B} = \kappa_m \mu_0 \mathbf{H}; \quad \mathbf{D} = \kappa \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{J}_{\text{磁}} = \sigma \mathbf{E}; \quad (8.99)$$

其中 $\kappa_m$ 为相对磁导率， $\kappa$ 为介电系数， $\sigma$ 为电导率。对于单晶体， $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{H}$ 不一定平行， $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{E}$ 不一定平行， $\mathbf{J}$ 和 $\mathbf{E}$ 也不一定平行。在这些情形下， $\kappa_m$ ， $\kappa$ 和 $\sigma$ 是二阶张量。对于某些物质，例如铁磁物质， $\kappa_m$ 不是常数而与 $\mathbf{H}$ 有关。但有相当多的物质，当介质静止时可把 $\kappa_m$ ， $\kappa$ 和 $\sigma$ 作为常数。

如果介质在惯性系 $\Sigma'$ 中静止，那么在惯性系 $\Sigma$ 中它以匀速 $v$ 运动。如果麦克斯韦方程组服从相对性原理，那么它在介质于其中运动的惯性系 $\Sigma$ 中也成立。由闵可夫斯基开创的方法是假定介质性质和本构方程在介质静止的惯性系 $\Sigma'$ 中

为已知。然后利用狭义相对论变换得出在惯性系  $\Sigma$  中成立的方程，在  $\Sigma$  中介质作匀速运动。我们将把这一方法用于各种电磁量。

### 8.6.1 极化矢量 $\mathbf{P}$ 的变换

对于静止介质，极化矢量  $\mathbf{P}$  定义为单位体积电介质中由于外加电场的影响而感生的偶极矩。电介质的极化，部分是由于极性分子按外加电场方向重新排列其方向，部分是由于外加电场使电介质中原子和分子内正负电荷分离。附录 2 中介绍了一种用来解释极化的简化的经典模型。在这一模型中假定，原子电偶极子由两个大小相等、符号相反的电荷组成，当电场存在时，此二电荷就分开。为了便于计算，我们引进位移矢量  $\mathbf{D}$ ，其定义为

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (8.100)$$

出现在麦克斯韦方程组中的，是矢量  $\mathbf{D}$  而不是矢量  $\mathbf{P}$ 。 $\mathbf{P}$  的变换式可由关系式

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E},$$

及  $\Sigma'$  中的相应关系式

$$\mathbf{P}' = \mathbf{D}' - \epsilon_0 \mathbf{E}',$$

并应用分别由方程 (8.97) 和 (8.40) 给出的  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$  的变换式而得出。由于 3.3 节讨论过的理由， $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中的电空间常数  $\epsilon_0$  取同一数值。对于  $\mathbf{P}$  的  $x$  分量，有

$$P_x = D_x - \epsilon_0 E_x,$$

将  $D_x$  和  $E_x$  的变换式 (8.97) 和 (8.40) 代入，得到

$$P_x = D'_x - \epsilon_0 E'_x,$$

因此，

$$P_x = P'_x.$$

将  $D_y$  和  $E_y$  的变换式代入方程  $P_y = D_y - \epsilon_0 E_y$ ，得到

$$\begin{aligned}
 P_y &= \gamma \left( D'_y + \frac{\nu}{c^2} H'_z \right) - \varepsilon_0 \gamma (E'_y + \nu B'_z) \\
 &= \gamma \left\{ (D'_y - \varepsilon_0 E'_y) - \nu \left( \varepsilon_0 B'_z - \frac{1}{c^2} H'_z \right) \right\} \\
 &= \gamma \left\{ P'_y - \frac{\nu}{c^2} (\varepsilon_0 c^2 B'_z - H'_z) \right\},
 \end{aligned}$$

但  $c^2 = 1/\varepsilon_0 \mu_0$ , 因此

$$P_y = \gamma \left\{ P'_y - \frac{\nu}{c^2} \left( \frac{B'_z}{\mu_0} - H'_z \right) \right\}.$$

但按照定义  $\mathbf{B}' = \mu_0 \mathbf{H}' + \mu_0 \mathbf{M}'$  (参看附录 2). 因此

$$P_y = \gamma \left( P'_y - \frac{\nu}{c^2} M'_z \right).$$

类似地,

$$\begin{aligned}
 P_z &= D_z - \varepsilon_0 E_z = \gamma \left( D'_z - \frac{\nu}{c^2} H'_y \right) - \varepsilon_0 \gamma (E'_z - \nu B'_y) \\
 &= \gamma \left\{ (D'_z - \varepsilon_0 E'_z) + \frac{\nu}{c^2} \left( \frac{B'_y}{\mu_0} - H'_y \right) \right\},
 \end{aligned}$$

或

$$P_z = \gamma \left( P'_z + \frac{\nu}{c^2} M'_y \right).$$

这就完成了  $\mathbf{P}$  的变换. 将变换式集中如下:

$$\left. \begin{aligned}
 P_x &= P'_x, & P'_x &= P_x, \\
 P_y &= \gamma \left( P'_y - \frac{\nu}{c^2} M_z \right), & P'_y &= \gamma \left( P_y + \frac{\nu}{c^2} M_z \right), \\
 P_z &= \gamma \left( P'_z + \frac{\nu}{c^2} M'_y \right), & P'_z &= \gamma \left( P_z - \frac{\nu}{c^2} M_y \right).
 \end{aligned} \right\} \quad (8.101)$$

如果  $\mathbf{P}_{\parallel}$  和  $\mathbf{P}_{\perp}$  为平行于  $\mathbf{v}$  和垂直于  $\mathbf{v}$  的  $\mathbf{P}$  的分量, 方程 (8.101) 可改写为

$$\mathbf{P}_{\parallel} = \mathbf{P}'_{\parallel}; \quad \mathbf{P}_{\perp} = \gamma \left( \mathbf{P}'_{\perp} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{M}'_{\perp}}{c^2} \right). \quad (8.101a)$$

我们现在用简化的经典模型来解释  $\mathbf{P}$  的变换式。假定电介质在  $\Sigma'$  中静止，它由每立方米  $n'$  个偶极子构成。为了计算  $\mathbf{P}'$ ，可将每个偶极子看作相距  $l_0$ 、电量为  $\pm q$  的两个电荷，因此  $\Sigma'$  中的每个原子偶极矩  $\mathbf{p}'$  等于  $ql_0$ 。为计算  $\mathbf{M}'$ ，可把磁偶极子当作小的环形电流。如果电偶极子平行于  $\mathbf{v}$ ，那么由于长度缩短，每个原子偶极子中两电荷间的距离在  $\Sigma$  中将从  $l_0$  缩短为  $l_0(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$ ，而按照电荷不变原理， $q$  为不变量，因此每个原子电偶极子的偶极矩在  $\Sigma$  中就减小为  $ql_0(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}} = p'(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$ 。如果当电介质在  $\Sigma'$  中静止时，其体积为  $V_0$ ，那么，当它相对  $\Sigma$  运动时，其体积就是  $V_0(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$ ，于是每立方米中的偶极子数目就从  $n'$  增加到  $n = n'/(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$ 。在  $\Sigma$  中， $\mathbf{P} = np$ ，如果  $\mathbf{P}'$  平行于  $\mathbf{v}$ ，就有

$$P = np = \frac{n'}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}} p' \sqrt{(1 - v^2/c^2)} = n' p',$$

因此

$$P_x = P'_x.$$

如果原子电偶极子垂直于  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  之间相对速度的方向，则电荷之间距离不变，因此  $p = p'$ 。 $\Sigma$  中每立方米的偶极子数目比  $\Sigma'$  中大，因此原子电偶极子在  $\Sigma$  中造成了  $\gamma \mathbf{P}'_{\perp}$  的极化。方程(8.101)中有一等于  $\gamma(\mathbf{v} \times \mathbf{M}'_{\perp})/c^2$  的附加项。这一项在非相对论情形是没有相应项的，除非接受磁“极”的概念（参看卡尔威克（Cullwick<sup>[1]</sup>））。我们在 8.4 节利用电流和电荷的变换，考虑过在  $\Sigma'$  中静止，磁矩为  $\mathbf{m}'$  的矩形电流圈的简单情形。我们证明了相对于  $\Sigma$ ，运动线圈具有电偶极矩

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{m}'}{c^2}, \quad (8.81)$$

如果这一公式对运动介质中的每个原子磁偶极子都成立，由于  $n = n'/(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$ ，对于  $\Sigma$  中每单位体积的电偶极矩便

有

$$\frac{n'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{m}'}{c^2} = \gamma \frac{\mathbf{v} \times n' \mathbf{m}'}{c^2} = \gamma \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{M}'}{c^2} = \gamma \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{M}'_\perp}{c^2},$$

把这项与  $\gamma \mathbf{P}'_\perp$  相加,

$$\mathbf{P}_\perp = \gamma \left( \mathbf{P}'_\perp + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{M}'_\perp}{c^2} \right),$$

它和方程(8.101)一致。

### 8.6.2 磁化矢量 $\mathbf{M}$ 的变换

在附录 2 中把静止介质中的磁化矢量  $M$  定义为每单位体积中由外加磁场感生的磁偶极矩。由磁化力的定义, 即方程(A2.22), 得到

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{H} \quad (\text{在 } \Sigma \text{ 中成立}), \quad (8.102)$$

$$\mathbf{M}' = \frac{\mathbf{B}'}{\mu_0} - \mathbf{H}' \quad (\text{在 } \Sigma' \text{ 中成立}). \quad (8.103)$$

在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中磁空间常数  $\mu_0$  取同一数值, 因为由定义都等于  $4\pi \times 10^{-7}$ 。将  $B_x$  和  $H_x$  的变换式(8.41)和(8.98)代入方程  $M_x = [(B_x/\mu_0) - H_x]$

得到  $M_x = \frac{B'_x}{\mu_0} - H'_x.$

因此

$$M_x = M'_x.$$

类似地,

$$\begin{aligned} M_y &= \frac{B_y}{\mu_0} - H_y = \frac{\gamma}{\mu_0} \left( B'_y - \frac{v}{c^2} E'_z \right) - \gamma (H'_y - v D'_z) \\ &= \gamma \left( \frac{B'_y}{\mu_0} - H'_y \right) + \gamma v \left( D'_z - \frac{1}{c^2 \mu_0} E'_z \right). \end{aligned}$$

但是

$$\frac{1}{c^2 \mu_0} = \varepsilon_0,$$

因此,

$$M_y = \gamma \left( \frac{B'_y}{\mu_0} - H'_y \right) + \gamma \nu (D'_y - \varepsilon_0 E'_y),$$

$$\text{或 } M_y = \gamma (M'_y + \nu P'_y).$$

类似地,

$$\begin{aligned} M_z &= \frac{B_z}{\mu_0} - H_z = \frac{\gamma}{\mu_0} \left( B'_z + \frac{\nu}{c^2} E'_y \right) - \gamma (H'_z + \nu D'_y) \\ &= \gamma \left( \frac{B'_z}{\mu_0} - H'_z \right) - \nu \gamma \left( D'_y - \frac{1}{\mu_0 c^2} E'_y \right) \\ &= \gamma (M'_z - \nu P'_y). \end{aligned}$$

把变换式及逆变换式集中如下:

$$\left. \begin{aligned} M'_x &= M_x, & M_x &= M'_x, \\ M'_y &= \gamma (M_y - \nu P_z), & M_y &= \gamma (M'_y + \nu P'_z), \\ M'_z &= \gamma (M_z + \nu P_y), & M_z &= \gamma (M'_z - \nu P'_y). \end{aligned} \right\} \quad (8.104)$$

写成矢量形式,

$$\mathbf{M}_{\parallel} = \mathbf{M}'_{\parallel};$$

$$\mathbf{M}_{\perp} = \gamma (\mathbf{M}'_{\perp} - \mathbf{v} \times \mathbf{P}'_{\perp}) = \gamma (\mathbf{M}'_{\perp} + \mathbf{P}'_{\perp} \times \mathbf{v}). \quad (8.104a)$$

我们将再次假定运动磁化介质在  $\Sigma'$  中静止。根据  $-\gamma \mathbf{v} \times \mathbf{P}'$  这一项, 极化电介质相对  $\Sigma$  的运动对磁化是有贡献的。这一项曾在 2.4 节中讨论过。它称为电介质的运载电流或者伦琴 (Röntgen) 电流。为了计算场, 可用等于  $P_s$  库仑/米<sup>2</sup> 的面电荷分布来代替在  $\Sigma'$  中静止的均匀极化介质。这些电荷分布相对惯性系  $\Sigma$  运动从而造成磁场, 如图 2.13 所示。

在伦琴 1888 年所作的实验中, 他把一块非磁性的电介质板放在一个充了电的平行板电容器的两极板之间。让电介质高速旋转, 而电容器的两极板保持静止。电介质极化了, 按照方程(8.104a), 当它旋转时应具有磁矩并造成伸向电介质以外

的空间的磁场。伦琴测量了在一旋转电介质圆盘边缘外紧邻处的磁场，证明在一级近似下，磁场与方程  $\mathbf{M} = \mathbf{P}' \times \mathbf{v}$  一致。

方程(8.104)中其它的项是由  $\Sigma$  与  $\Sigma'$  中对原子磁偶极矩及与单位体积中原子磁偶极子数目的不同测量值所造成的。给读者留作练习，对每一原子磁偶极子可考虑一简化的经典模型，例如一个方形电流线圈，并证明在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中磁偶极矩的不同测量值与方程(8.104a)一致。

### 8.6.3 本构方程

我们将假定，当介质在  $\Sigma'$  中静止时，本构方程取如下形式：

$$\mathbf{D}' = \kappa \epsilon_0 \mathbf{E}'; \quad \mathbf{B}' = \kappa_m \mu_0 \mathbf{H}'; \quad \mathbf{J}' = \sigma \mathbf{E}', \quad (8.105)$$

其中  $\kappa$ ,  $\kappa_m$  和  $\sigma$  为常数。由方程(8.40a)，

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\parallel}; \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\perp}.$$

由方程(8.97a)，

$$\mathbf{D}'_{\parallel} = \left( \mathbf{D} + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right)_{\parallel}; \quad \mathbf{D}'_{\perp} = \gamma \left( \mathbf{D} + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right)_{\perp}.$$

在方程  $\mathbf{D}' = \kappa \epsilon_0 \mathbf{E}'$  中代换  $\mathbf{D}'$  和  $\mathbf{E}'$  的平行分量，

$$\left( \mathbf{D} + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right)_{\parallel} = \kappa \epsilon_0 (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\parallel}, \quad (8.106)$$

代换  $\mathbf{D}'$  和  $\mathbf{E}'$  的垂直分量，

$$\gamma \left( \mathbf{D} + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right)_{\perp} = \kappa \epsilon_0 \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\perp},$$

消去  $\gamma$ ，

$$\left( \mathbf{D} + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right)_{\perp} = \kappa \epsilon_0 (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_{\perp}. \quad (8.107)$$

方程(8.106)和(8.107)可合并为一个方程

$$\left( \mathbf{D} + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right)_{\perp} = \kappa \epsilon_0 (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (8.108)$$

这就是在相对惯性系  $\Sigma$  以匀速  $\mathbf{v}$  运动的介质中成立的本构

方程;当  $\mathbf{v} = 0$  时,化为方程  $\mathbf{D} = \kappa\epsilon_0\mathbf{E}$ .

类似地,用方程(8.41a)和(8.98a)代换方程  $\mathbf{B}' = \kappa_m\mu_0\mathbf{H}'$  中的  $\mathbf{B}'$  和  $\mathbf{H}'$ ,得到

$$\left(\mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\mathbf{v} \times \mathbf{E}\right) = \kappa_m\mu_0(\mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D}), \quad (8.109)$$

这就是在  $\Sigma$  中对于以匀速  $v$  相对  $\Sigma$  运动的介质成立的本构方程.

在  $\Sigma'$  中我们有

$$Jx' = \sigma E'_x.$$

由方程(8.76),  $J'_x = \gamma(J_x - v\rho)$ , 由方程(8.40)  $E'_x = E_x$ , 因此

$$\gamma(J_x - v\rho) = \sigma E_x. \quad (8.110)$$

类似地,对方程  $J'_y = \sigma E'_y$  和  $J'_z = \sigma E'_z$  作代换,得到

$$J_y = \sigma\gamma(E_y - vB_z), \quad (8.111)$$

$$J_z = \sigma\gamma(E_z + vB_y). \quad (8.112)$$

方程(8.110),(8.111)和(8.112)可改写为如下形式:

$$\gamma(\mathbf{J} - \mathbf{v}\rho)_\parallel = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_\parallel \quad (8.113)$$

$$(\mathbf{J} - \mathbf{v}\rho)_\perp = \sigma\gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_\perp. \quad (8.114)$$

其中总电流密度  $\mathbf{J}$  包括运载电流密度  $\mathbf{v}\rho$ . 因此,  $\mathbf{J} - \mathbf{v}\rho$  等于  $\Sigma$  中的传导电流密度. 当  $\mathbf{v} = 0$ , 方程(8.113)和(8.114)化为方程  $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ .

我们一直都假定了  $\kappa$ ,  $\kappa_m$  和  $\sigma$  为常数. 关于匀速运动介质电动力学方程的完整说明以及对边界条件的讨论,读者可参看卡尔威尔,谬勒,泡利和索麦菲著的教科书.

#### 8.6.4 运动介质电动力学的一级理论及其对运动介质中光速计算的应用

我们将忽略一切  $\frac{v^2}{c^2}$  量级的项,于是可令  $\gamma$  处处等于 1

假定介质在惯性系  $\Sigma'$  中静止，因此介质以匀速  $\mathbf{v}$  相对  $\Sigma$  运动。如果麦克斯韦方程组是正确的并服从相对性原理，则它在  $\Sigma$  中成立，于是

$$\operatorname{curl} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (8.115)$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (8.116)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (8.117)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho. \quad (8.118)$$

我们将假定运动介质是非磁性的，于是在  $\Sigma'$  中有  $\mathbf{M}' = 0$ ，因此  $\mathbf{B}' = \mu_0 \mathbf{H}'$ 。如果  $\mathbf{M}' = 0$ ，应用方程(8.104)，精确到  $v/c$  的一级项，我们得到

$$\mathbf{M}_{\parallel} = \mathbf{M}'_{\parallel} = 0,$$

$$\mathbf{M}_{\perp} = \gamma(\mathbf{M}'_{\perp} - \mathbf{v} \times \mathbf{P}'_{\perp}) = -\gamma \mathbf{v} \times \mathbf{P}'_{\perp} \simeq -\mathbf{v} \times \mathbf{P}'_{\perp}.$$

按照  $\mathbf{P}$  的变换式(8.101)，如果  $\mathbf{M}' = 0$ ，精确到  $v/c$  的一级项有

$$\mathbf{P}_{\parallel} = \mathbf{P}'_{\parallel};$$

$$\mathbf{P}_{\perp} = \gamma(\mathbf{P}'_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{M}'_{\perp}/c^2) = \gamma \mathbf{P}'_{\perp} \simeq \mathbf{P}'_{\perp}$$

因此，在一级近似下

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}'.$$

这样以来，在一级近似下

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\perp} = -\mathbf{v} \times \mathbf{P}'_{\perp} = -\mathbf{v} \times \mathbf{P} = +\mathbf{P} \times \mathbf{v} \quad (8.119)$$

而在  $\Sigma$  中，

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{P} \times \mathbf{v},$$

代入方程(8.115)，

$$\operatorname{curl} \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

或者

$$\operatorname{curl} \mathbf{B} = \mu_0 \left[ \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \operatorname{curl}(\mathbf{P} \times \mathbf{v}) \right] \quad (8.120)$$

这和方程(2.41)相同, 而后者是洛伦兹用他的电子论得出的。方程(8.120), (8.116), (8.117)和(8.118)是对于非磁性运动介质精确到  $v/c$  一级项的一组方程。这些方程必须再加上 8.6.2 节所讲的本构方程。

在  $\Sigma'$  中我们有

$$\mathbf{P}' = \mathbf{D}' - \varepsilon_0 \mathbf{E}' = \kappa \varepsilon_0 \mathbf{E}' - \varepsilon_0 \mathbf{E}' = \varepsilon_0 (\kappa - 1) \mathbf{E}', \quad (8.121)$$

其中  $\kappa$  为介质静止时的介电系数。但  $\mathbf{P} = \mathbf{P}'$ : 由方程(8.40a)我们有  $\mathbf{E}' = (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ 。代入方程(8.121), 得到

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 (\kappa - 1) (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (8.122)$$

现在把上述一级理论用来计算非磁性运动介质中的光速。假定介质不带电(即  $\rho = 0$ )。又假定  $\mathbf{J} = 0$ ,  $\kappa_m = 1$ , 以及介质在正  $x$  方向以匀速  $\mathbf{v}$  运动。假定有一平面偏振的平面波在平行于  $\mathbf{v}$  的正  $x$  方向运动, 平面波的电矢量在  $y$  方向, 磁矢量在  $z$  方向。在这些条件下,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{E}$  分别只有分量  $v_x = v$ ,  $B_z$  和  $E_y$ 。由方程(8.122),  $\mathbf{P}$  只有  $y$  分量, 并等于

$$P_y = \varepsilon_0 (\kappa - 1) (E_y - v B_z). \quad (8.123)$$

方程(8.120)的  $y$  分量给出

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial P_y}{\partial t} + \mu_0 v \frac{\partial P_y}{\partial x}, \quad (8.124)$$

方程(8.116)的  $z$  分量给出

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}, \quad (8.125)$$

把方程(8.123)代入方程(8.124)替换掉  $P_y$ , 得

$$\begin{aligned} -\frac{\partial B_z}{\partial x} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ &+ \mu_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) \varepsilon_0 (\kappa - 1) (E_y - v B_z). \end{aligned} \quad (8.126)$$

整理方程(8.126)并用关系式  $(\partial B_z / \partial t) = -(\partial E_y / \partial x)$ , 得到

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial B_z}{\partial x} [1 - v^2 \mu_0 \varepsilon_0 (\kappa - 1)] \\ &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \mu_0 \varepsilon_0 (\kappa - 1) \left( \frac{\partial}{\partial t} + 2v \frac{\partial}{\partial x} \right) E_y. \quad (8.127) \end{aligned}$$

由于  $\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$ ,  $v^2 \mu_0 \varepsilon_0 (\kappa - 1)$  这项与 1 比较可以忽略. 将方程(8.125)对  $x$  求偏微商, 得

$$-\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}, \quad (8.128)$$

将方程(8.127)对  $t$  求偏微商, 得

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial^2 B_z}{\partial t \partial x} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \\ &+ \mu_0 \varepsilon_0 (\kappa - 1) \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \right) E_y. \quad (8.129) \end{aligned}$$

令方程(8.128)与(8.129)的右边相等, 得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} + \mu_0 \varepsilon_0 (\kappa - 1) \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \\ &+ 2\mu_0 \varepsilon_0 (\kappa - 1)v \frac{\partial^2 E_y}{\partial t \partial x}, \\ & \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \kappa \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} + 2\mu_0 \varepsilon_0 (\kappa - 1)v \frac{\partial^2 E_y}{\partial t \partial x}. \quad (8.130) \end{aligned}$$

如令  $v = 0$ , 便得到光在静止介质中传播的通常的波动方程. 介质静止时波速等于  $(\mu_0 \varepsilon_0 \kappa)^{-\frac{1}{2}} = c/\kappa^{\frac{1}{2}} = c/n$ , 其中  $n$ , 即介质在静止时的折射率, 等于  $\kappa^{\frac{1}{2}}$ . 我们将假定方程(8.130)的解具有如下形式:

$$E_y = E_0 e^{i\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - 2\pi\nu t\right)} = E_0 e^{i\pi\nu\left(\frac{x}{u} - t\right)}, \quad (8.131)$$

其中  $u = \nu\lambda$  为平面波的速度, 而  $i = \sqrt{-1}$ . 于是

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -(2\pi\nu)^2 \frac{E_y}{u^2}; \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = -(2\pi\nu)^2 E_y,$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t} = +(2\pi\nu)^2 \frac{E_y}{u}.$$

代入方程(8.130)并消去  $(2\pi\nu)^2$ , 得

$$\frac{-E_y}{u^2} = -\mu_0 \epsilon_0 \kappa E_y + 2\mu_0 \epsilon_0 (\kappa - 1) \nu \frac{E_y}{u},$$

或

$$u^2 - \frac{2(\kappa - 1)}{\kappa} \nu u - \frac{c^2}{\kappa} = 0. \quad (8.132)$$

在正  $x$  方向行进的光的解为

$$u = \frac{(\kappa - 1)}{\kappa} \nu + \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{4(\kappa - 1)^2 \nu^2}{\kappa^2} + \frac{4c^2}{\kappa} \right)}.$$

精确到一级近似,

$$u = \left( \frac{\kappa - 1}{\kappa} \right) \nu + \frac{c}{\kappa^{\frac{1}{2}}},$$

或者, 由于  $n = \kappa^{\frac{1}{2}}$ ,

$$u = \frac{c}{n} + \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \nu, \quad (8.133)$$

其中  $\kappa$  为介电系数,  $n$  为介质静止时的折射率。这与在运动水中的光速实验结果一致。我们在 4.4 节曾用狭义相对论速度变换得出过方程(8.133)。运动介质中光传播的一般解, 精确到  $\nu/c$  的一级项, 为

$$u = \frac{c}{n} + \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{I}, \quad (8.134)$$

其中  $\mathbf{I}$  为波传播方向的单位矢量。 $u$  的大小随着光方向相对介质运动方向的变化而变化。对方程(8.134)的更严格推导感兴趣的读者可参考巴诺夫斯基和菲利浦的书<sup>[2]</sup>。

如果在惯性系  $\Sigma'$  (介质于其中静止) 中发射球面波的光,

则相对于  $\Sigma$  就不是球面波。应当注意，在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中所用的定律是相同的，即麦克斯韦方程组和平均方程(8.108)，(8.109)，(8.113)和(8.114)。如果  $\mathbf{v} = 0$  本构方程化为静止介质的本构方程。尽管光传播的表达式在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中具有不同数学形式（一个是椭球，另一个是球），但  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中场的微分方程和本构方程（均指空间同一点与同一瞬时）却具有相同的数学形式，因而服从相对性原理。如果在  $\Sigma'$  中光的波前为球面波，那么在  $\Sigma$  中除了  $n = 1$  情形外它就不是球面波，在  $n = 1$  情形波以速度  $c$  传播。在所有情形中， $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中各个时刻的波前位置都通过洛伦兹变换相联系。

### 8.6.5 威尔逊 (Wilson-Wilson) 实验

一个令人满意的理论必须能够解释在引入该理论的当时所知道的实验结果。在 8.6.4 节中我们证明了，运动介质电动力学的相对论可以解释关于流动水中光速的实验结果。一个新的理论也被用来作出新的预言，而后由实验来检验。为检验闵可夫斯基的运动物体的电动力学理论的正确性，爱因斯坦和劳伯 (Laub) 在 1908 年建议了一个实验。M. 威尔逊和 H. A. 威尔逊<sup>[4]</sup> 在 1913 年以稍有修改的方式作了这一实验。

考虑一个大的平行板电容器，板平行于  $xy$  平面放置，如图 8.6 所示。设两板间的电介质具有介电系数  $\kappa$  和相对磁导率  $\kappa_m$ ，在介质于其中静止的惯性系中  $\kappa_m$  大于 1。设在  $\Sigma$  中有一正  $y$  方向的磁场，如图 8.6 所示，并设磁化力等于  $H_0$ 。设电容器和电介质相对于惯性系  $\Sigma$  以匀速  $v$  沿正  $x$  方向运动，如图 8.6 所示。用一导线将运动电容器的两板短路，这根导线在  $\Sigma$  中静止，并与运动电容器两板的外表面滑动接触。 $\Sigma$  中有

$$\operatorname{curl} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \quad (8.135)$$

假如电容器在  $xy$  平面具有无穷大的尺寸,那么只要电容器作匀速运动,  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  就为零. 静止导线加上运动“磁性”介质中的一段路径构成一个迴路, 将方程(8.135)沿该迴路形成的面积积分, 得到

$$\int \operatorname{curl} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

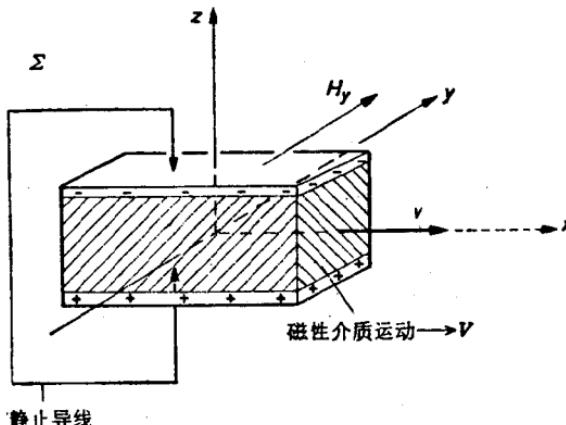


图 8.6 威尔逊实验的理论. 平行板电容器两板之间的“磁性”介质在正  $x$  方向运动. 在正  $y$  方向加磁场. 运动的“磁性”介质被极化. 假如用一根静止的联结导线将运动电容器的两板短接, 则电容器两板上出现这样的电荷分布, 使得运动介质内部电场强度  $\mathbf{E}$  为零. 如果磁场反向, 电容器两板上的电荷必然反号, 于是瞬时电流将在联结导线中流过.

当达到定常状态时, 联结导线中没有电流流过, 因而导线内的电场为零. 如果  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ , 则运动电介质的电场的分量  $E_x$  也必须为零. 这是在  $\Sigma$  中静止的观察者测量的电场, 相对于他, 电介质以匀速  $v$  运动. 由运动介质的本构方程, 有

$$\left( \mathbf{D} + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right) = \kappa \epsilon_0 (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (8.108)$$

由于  $E_z$  为零, 方程(8.108)的  $z$  分量可改写为

$$D_z + \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{H})_z}{c^2} = \kappa \epsilon_0 (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_z.$$

由于  $\mathbf{v}$  是在  $z$  方向,

$$D_z + \frac{\nu H_y}{c^2} = \kappa \epsilon_0 \nu B_y. \quad (8.136)$$

由方程(8.109),

$$\mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} = \kappa_m \mu_0 (\mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D}),$$

对于  $y$  分量, 有

$$B_y - \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{E})_y}{c^2} = \kappa_m \mu_0 [H_y - (\mathbf{v} \times \mathbf{D})_y];$$

或者, 由于  $E_z$  是零,

$$B_y = \kappa_m \mu_0 (H_y + \nu D_z). \quad (8.137)$$

将方程(8.137)代入方程(8.136)消去  $B_y$ , 由于  $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$ , 得

$$\begin{aligned} D_z + \frac{\nu H_y}{c^2} &= \kappa \epsilon_0 \nu \kappa_m \mu_0 (H_y + \nu D_z) \\ &= \frac{\kappa \kappa_m \nu}{c^2} (H_y + \nu D_z), \end{aligned}$$

整理得,

$$D_z (1 - \kappa \kappa_m \nu^2 / c^2) = H_y \frac{\nu}{c^2} (\kappa \kappa_m - 1).$$

略去量级高于  $\nu^2/c^2$  的项, 在运动磁性介质内部有

$$D_z = (\kappa \kappa_m - 1) \frac{\nu}{c^2} H_y. \quad (8.138)$$

如果麦克斯韦方程组在  $\Sigma$  中成立, 我们有

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho,$$

其中  $\rho$  为相对于实验室的真实电荷密度 [ $\rho$  不包括极化电

荷]. 在电容器外面  $\rho = 0$ ,  $E = 0$ , 并且  $D = 0$ ; 因此运动介质内部的电位移矢量必须在电容器两板上终止, 因此当电容器以匀速  $v$  运动时, 其两板上必然有面电荷密度  $\sigma = D$ , 库仑/米<sup>2</sup>.

在以匀速  $v$  相对  $\Sigma$  运动的惯性系  $\Sigma'$  中, 介质是静止的。按照电场变换式, 在  $\Sigma'$  中有磁场也有电场。这些电场和磁场在静止电介质内部分别引起极化矢量  $\mathbf{P}'$  和磁化矢量  $\mathbf{M}'$ 。按照方程 (8.101),  $\mathbf{P}'$  和  $\mathbf{M}'$  对  $\Sigma$  中的极化都有贡献。为计算场, 惯性系  $\Sigma$  中的极化可用介质表面的面电荷密度  $P_s$  来代替。在介质内部, 由极化引起的电场是在负  $z$  方向, 而与极化矢量方向相反。在电容器作匀速运动的定常状态中, 介质内部  $\mathbf{E}$  必然为零。在电容器开始匀速运动的那一瞬间, 电流在联结导线中流过, 直到在电容器的两个相对板上建立起这样的电荷分布, 使得在运动介质内部, 它们所产生的电场与由运动介质极化所产生的电场大小相等方向相反为止。如果磁场方向相反, 则  $\Sigma$  中的介质极化也反向, 因此如果介质内部  $E_s$  为零, 电容器两极上的电荷就必须改变符号, 于是将有瞬时电流通过静止的短路导线。用冲击式电流计可以测量流过的总电量。按照方程 (8.138) 流过的电量应当正比于  $(\kappa \kappa_m - 1)$ 。在 8.4 节中我们曾证明, 运动磁化物体所显示的极化是由于  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中时间的不同测量所造成的一种相对论效应。洛伦兹最初的电子理论没有包括这一效应, 因此按照那个理论流过的电量应当正比于  $(\kappa - 1)$ 。让我们引证洛伦兹的一段话:

“于是, 按照赫兹的理论, 此效应正比于  $\kappa$ 。另一方面, 按照旧的电子理论, 以太不参与介质的运动, 因此不受感生电力的作用。后者只在介质中产生极化, 因此该效应正比于  $(\kappa - 1)$ 。按照相对论, 该效应正比于  $(\kappa \kappa_m - 1)$ 。”

关于该实验理论的更严格的讨论, 读者可参考卡尔威

克<sup>[5]</sup>的书。

在 M. 威尔逊和 H. A. 威尔逊 1913 年所作的实验中，他们用的是一个高速旋转的柱形电容器，因为实际上不可能让一个大的平行板电容器以充分均匀的直线速度运动以产生可观察效应。他们把直径 3 毫米的许多钢球嵌在蜡里，制成一种人造“磁性”介质。这种“磁性”介质的  $\kappa_m$  和  $\kappa$  的值分别为 3 和 6。这种介质被作成长 9.5 厘米，内外直径分别为 2.0 和 3.73 厘米的空心圆柱形状。空心圆柱的内外表面覆盖着金属。柱形电容器绕它的轴转动，磁场加在柱轴的方向。内外金属表面各同一个金属刷接触，而这两个金属刷同一个静止的象限静电计联结着。他们观察到，当磁场反向时，有电荷流过。如果只由旋转运动引起的效应可以忽略，该实验就与爱因斯坦和劳伯所建议的相同。对于当磁场反向时感生的电动势作了修正后，M. 威尔逊和 H. A. 威尔逊得出结论： $1 - (1/\kappa \kappa_m)$  的实验值为 0.96，相对论所预言的值为  $1 - \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{3}\right) = 0.944$ ，而洛伦兹电子理论所预言的值为  $(1 - 1/\kappa) = \left(1 - \frac{1}{6}\right) = 0.83$ 。相对论与实验值符合得比洛伦兹电子论更好。

### 参 考 文 献

- [1] Cullwick, E. G. *Electromagnetism and Relativity* 2nd. Ed. Ch. 4. Longmans, London, 1959
- [2] Panofsky, W. K. H. and Phillips, M. *Classical Electricity and Magnetism*. p. 174. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1955
- [3] Einstein, A. and Laub, J. *Ann. Phys., Lpz.* 26(1908) 536
- [4] Wilson, M. and Wilson, H. A. *Proc. Roy. Soc. A89*(1913) 99
- [5] Cullwick, E. G. *Electromagnetism and Relativity*, 2nd. Ed. Ch. 11. Longmans, London, 1959
- [6] Rosser, W. G. V. *Amer. J. Phys.* 31(1963) 884

## 补充读物

关于电磁量的相对论变换所根据的物理原理，以及这些变换应用于威尔逊实验和电动势实验的全面讨论，读者可参考卡尔威克著的《电磁学与相对论》。在巴诺夫斯基和菲利浦著的《经典电学与磁学》中也可找到极好的说明。关于运动介质电动力学的闵可夫斯基理论的完整叙述，读者可参考索麦菲著《电动力学》，泡利著《相对论》，谬勒著《相对论》及托尔曼著《相对论，热力学与宇宙学》。

## 习题

8.1 由麦克斯韦方程组出发，推导电场与磁场矢量  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$  从一个惯性系到以匀速  $v$  相对它运动的另一惯性系的变换式。由此证明，一个电量为  $q$ 、位于  $O$  点并以匀速  $\mathbf{v}$  运动的电荷在真空中  $P$  点产生的电场由下式给出：

$$\mathbf{E} = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 r^3} (1 - \beta^2) (1 - \beta^2 \sin^2\theta)^{-\frac{3}{2}}, \quad \beta = v/c$$

其中  $\mathbf{r}$  是从  $O$  到  $P$  的矢量， $\theta$  为  $\mathbf{r}$  和  $\mathbf{v}$  之间的夹角。证明  $P$  点的磁场为

$$\mathbf{B} = \mathbf{v} \times \mathbf{E}/c^2.$$

按照方程(8.40)  $E'_\parallel = E_\parallel$ 。这一事实如何与电场沿运动线减小的事实相一致？

8.2 把库仑定律和狭义相对论力的变换式作为公理，重複上一问题。[提示：象第七章那样进行。]

8.3 一个电量为  $q$  库仑的电荷在惯性参考系  $\Sigma$  中以匀速  $\mathbf{u}$  运动。在以速度  $\mathbf{u}$  相对  $\Sigma$  运动的惯性系  $\Sigma'$  中，电荷  $q$  静止，它所受的力为  $q\mathbf{E}'$ 。用力的变换式以及  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$  的变换式证明在  $\Sigma$  中作用在该质点上的力为  $q\mathbf{E} + q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ 。

8.4 用直接代换证明以下各量为洛伦兹变换下的不变量：(a)  $E^2 - c^2B^2$ ; (b)  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}$ ; (c)  $H^2 - c^2D^2$ ; (d)  $\mathbf{H} \cdot \mathbf{D}$ ; (e)  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$ ; (f)  $c\mathbf{B} \cdot \mathbf{D} + (1/c)\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}$ . [提示：用场的变换式证明  $\mathbf{B}' \cdot \mathbf{E}' = \mathbf{B} \cdot \mathbf{E}$  等等.]

由此，或用其它方法，证明(i)如果在任一惯性系中  $E > cB$ ，则在任一其它惯性系中也有  $E > cB$ ，反过来也一样；(ii)如果在一个洛伦兹系中  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$  正交，则它们在任何其它洛伦兹系中也正交，反过来也一样；(iii)如果  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$  正交，则可以选出一组运动坐标轴，使  $\mathbf{E}$  和  $c\mathbf{B}$  中的较小者化为零；(iv)如果在一个惯性系中  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$  两点之间夹角为锐角(或钝角)，则在任何其它惯性系中也是锐角(或钝角).

8.5 沿  $\Sigma'$  系  $x'$  轴静止，电量为  $\lambda'$  库仑/米的无限长线电荷的电场为  $E'_x = B'_x = B'_y = B'_z = 0$ ；

$$E'_y = \frac{\lambda' y'}{2\pi\epsilon_0(y'^2 + z'^2)}; \quad E'_z = \frac{\lambda' z'}{2\pi\epsilon_0(y'^2 + z'^2)}$$

用此结果决定沿  $\Sigma$  系  $x$  轴一线电流  $i$  的磁场。在此情形电场等于什么？比较作用在总  $x, y, z$  处以速度  $\mathbf{u}$  运动的试验电荷  $q$  上的电力与磁力的大小。

8.6 一观察者  $O$  发现自己处在电场  $\mathbf{E} = (0, E, 0)$  中，而磁场为零。另一观察者  $O'$  以匀速  $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$  相对  $O$  运动。证明  $O'$  所测量的电磁场  $\mathbf{E}', \mathbf{B}'$  满足以下关系式：

$$c^2\mathbf{B}' + \mathbf{v} \times \mathbf{E}' = 0.$$

8.7 设简单磁控管由一截面可忽略的细金属丝和一半径为  $b$  米的同心导电圆筒所组成。金属丝和圆筒之间维持着  $V$  伏的电势差。电量为  $q$ ，质量为  $m_0$  的电子由金属丝释放出来，初速度可忽略。平行于金属丝加有  $B$  韦·伯/米<sup>2</sup> 的均匀磁场。证明，如果

$$B^2 > \frac{4V}{b^2} \left( \frac{2m_0}{q} + \frac{V}{c^2} \right)$$

则电子不能到达圆筒。

[参考：斯麦司《静电学与电动力学》(Smythe, *Static and Dynamic Electricity*) 第二版, 568 页.]

8.8 求在互相垂直的均匀电场  $E$  和均匀磁场  $B$  中由静止开始运动的电子的轨道，其中  $E > cB$ . 可忽略质量随速度的变化。

[参考：斯麦司《静电学与电动力学》第二版, 577 页.]

8.9 在与均匀磁场  $\mathbf{B}$  垂直的平面内运动的粒子，受到与粒子速度  $\mathbf{u}$  成正比的介质的阻力 ( $-K\mathbf{u}$ )，证明其轨道为一条等角螺线。(参考：斯麦司《静电学与电动力学》第二版, 569 页。)

8.10 单色光通过折射率为  $n$  的无色散介质。介质本身具有与光同一方向的速度  $v$ . 对于运动介质内部一点，当介质运动时，在  $v/c$  的一级近似下麦克斯韦方程组应如何修改。证明在这种近似下，运动介质中的光速为  $c/n + v(1 - 1/n^2)$ .

8.11 说明爱因斯坦和劳伯为证实运动介质电动力学的闵可夫斯基理论所建议的实验。比较闵可夫斯基理论与洛伦兹和赫兹理论关于运动介质电动力学所作的预言。描述威尔逊实验，并讨论由此实验得出的结论。用现代磁性材料来设计一个实验，来重复威尔逊实验。

## 第九章 势的相对论变换

### 9.1 关于标势与矢势的复习

在静电学中，一点的标势  $\phi$  可定义为把单位电荷从无限远移到该点所作的功。在静电学中，电场强度矢量  $\mathbf{E}$  和势  $\phi$  由以下方程相联系：

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi. \quad (9.1)$$

在磁学中可引进磁标势  $\phi_m$ ，满足

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \phi_m, \quad (9.2)$$

这种方法的用处有限，因为如果有电流存在， $\operatorname{curl} \mathbf{H}$  就不为零。另一方面， $\operatorname{div} \mathbf{B}$  总是零，由于任何矢量旋度的散度等于零，因此总可写为：

$$\mathbf{B} = \operatorname{curl} \mathbf{A}. \quad (9.3)$$

由麦克斯韦方程组，有

$$\operatorname{curl} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{curl} \mathbf{A},$$

或

$$\operatorname{curl} \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

由于任何标量函数梯度的旋度总为零，因此可令  $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$  等于一标量的梯度，即

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (9.4)$$

如果没有静电场存在，即如果  $\phi = 0$ ，则

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

绕一封闭迴路积分, 得

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \oint \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l},$$

用斯托克司定理, 得

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int \operatorname{curl} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = - \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS.$$

即, 环绕一迴路的电动势等于穿过迴路的磁通量变化率的负值; 这就是电磁感应的法拉第定律. 方程(9.4)中有一项

$-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$  代表由电磁感应对一点电场的贡献. 如果  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  为零,

则  $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$  为零, 于是可写成  $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi$ .

由麦克斯韦方程组, 有

$$\operatorname{curl} \mathbf{H} = -\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$$

如果令  $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\kappa_m \mu_0$ ,  $\mathbf{D} = \kappa \epsilon_0 \mathbf{E}$ , 假定其中相对磁导率  $\kappa_m$  和介电系数  $\kappa$  均为常数而与位置无关, 便得到

$$\operatorname{curl} \mathbf{B} = \kappa_m \kappa \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \kappa_m \mu_0 \mathbf{J},$$

将  $\mathbf{B} = \operatorname{curl} \mathbf{A}$  和  $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$  代入, 得到

$$\operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{A} = \kappa_m \kappa \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( -\operatorname{grad} \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + \kappa_m \mu_0 \mathbf{J}$$

但

$$\operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A},$$

因此

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$$

$$= \kappa_m \kappa \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (-\operatorname{grad} \phi) - \kappa_m \kappa \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \kappa_m \mu_0 \mathbf{J}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{A} - \kappa_m \kappa \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= \operatorname{grad} \left( \operatorname{div} \mathbf{A} + \kappa_m \kappa \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \\ &= -\kappa_m \mu_0 \mathbf{J}\end{aligned}\quad (9.5)$$

关系式  $\mathbf{B} = \operatorname{curl} \mathbf{A}$  只确定了矢量  $\mathbf{A}$  的旋度。还必须确定  $\mathbf{A}$  的散度。现在规定  $\mathbf{A}$  和  $\phi$  满足条件

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \kappa_m \kappa \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0. \quad (9.6)$$

这一条件叫作洛伦兹条件。于是方程(9.5)变成

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \kappa_m \kappa \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\kappa_m \mu_0 \mathbf{J} \quad (9.7)$$

由麦克斯韦方程组，如果  $\rho$  为一点的真实电荷密度，则有

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad \text{或者} \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho / \kappa \varepsilon_0.$$

用方程(9.4)代换  $\mathbf{E}$ ，得

$$\operatorname{div} \left( \operatorname{grad} \phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\rho / \kappa \varepsilon_0 \quad (9.8)$$

但  $\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \nabla^2 \phi$ ，又由洛伦兹条件  $\operatorname{div} \mathbf{A} = -\kappa_m \kappa \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}$ 。

代入方程(9.8)得

$$\nabla^2 \phi - \kappa_m \kappa \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\rho / \kappa \varepsilon_0 \quad (9.9)$$

可以看到，方程(9.7)和(9.9)具有相同的数学形式，而  $\phi$  和  $\mathbf{A}$  出现于类似的位置。这是选择  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  使之满足洛伦兹条件的好处之一。在 9.2 节中我们将证明这一选择将导致洛伦兹协变的方程。在实验上并不测量  $\phi$  和  $\mathbf{A}$ ，而是按照作用在运动电荷上的洛伦兹力来测量  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$ 。因此， $\phi$  和  $\mathbf{A}$  是可以改变的，只要  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$  不变就行。作为类比可考虑物体在重力作用下的运动。可以指定任何高度作为势能的零点。作用在质点上的力等于势能随位移的变化率。如果

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \operatorname{grad} \phi \quad (9.10)$$

$$\phi' = \phi + \partial\phi/\partial t \quad (9.11)$$

其中  $\psi$  可为坐标和时间的任意标量函数，由于任何标量的梯度的旋度为零，因此

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \mathbf{A}' &= \operatorname{curl} \mathbf{A} - \operatorname{curl} \operatorname{grad} \phi = \operatorname{curl} \mathbf{A} \\ &= \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \operatorname{grad} \phi' \\ &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \phi - \operatorname{grad} \phi - \operatorname{grad} \frac{\partial \phi}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \phi = \mathbf{E} \end{aligned}$$

方程(9.10)和(9.11)给出的变换称为规范变换。任何用  $\phi$  和  $\mathbf{A}$  表达的物理定律必然不受规范变换的影响。在规范变换下不变的定律称为规范不变的。

对于真空中的点电荷，方程(9.9)，(9.7)和(9.6)变为

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\rho/\epsilon_0 \quad (9.12)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (9.13)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (9.14)$$

其中我们用了

$$(\mu_0 \epsilon_0)^{-\frac{1}{2}} = c \quad (9.15)$$

微分算子  $\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$  称为达朗贝尔算子，通常<sup>1)</sup>用符号  $\square$

表示。方程(9.12)和(9.13)可以写成

$$\square^2 \phi = -\rho/\epsilon_0 \quad (9.16)$$

$$\square^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (9.17)$$

1) 有些作者，如巴诺夫斯基和菲利浦，用符号  $\square$ ，而不用  $\square^2$ ，来表示  $\nabla^2 - (1/c^2) \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)$ 。

方程(9.12)和(9.13)的解是众所周知的推迟势(参看巴诺夫斯基和菲利浦著的书<sup>[1]</sup>):

$$\begin{aligned}\phi(x, y, z, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x', y', z', t - r/c)}{r} dx' dy' dz' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{[\rho]}{r} dV'\end{aligned}\quad (9.18)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(x, y, z, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(x', y', z', t - r/c)}{r} dx' dy' dz' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\mathbf{J}]dV'}{r}.\end{aligned}\quad (9.19)$$

我们所求的势都是时刻  $t$  在  $x, y, z$  那一点的, 如图 9.1 所示。在离观测点距离为  $r$  的点  $x', y', z'$  处的电荷密度和电流密度则是比观测时刻早  $\frac{r}{c}$  的时刻的。方括号用来表示在其内的变量要取其在推迟时刻  $(t - r/c)$  的值。按照方程(9.18)和(9.19),  $\rho(x', y', z')$  和  $\mathbf{J}(x', y', z')$  对点  $x, y, z$  在时刻  $t$  的势的贡献, 是从位于  $x', y', z'$  的源(或电荷)出发, 以速度  $c$  在真空中传播的。想象有一个球面以速度  $c$  向求势的点

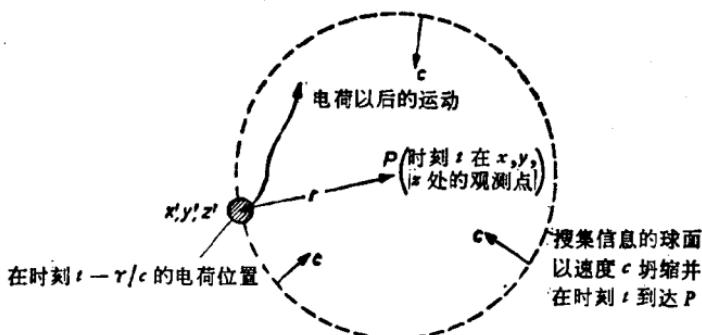


图 9.1 时刻  $t$  在点  $P$  的推迟势可以这样计算: 想象一个在真空中以速度  $c$  收拢的球, 使得在时刻  $t$  到达观测点  $P$ 。这个球沿途“搜集”关于电荷密度与电流密度的信息。

收拢，使得在求势的瞬间球面到达观测点，这对于解释方程(9.18)和(9.19)是有帮助的。我们将假定该球面沿途搜集着关于电荷和电流分布的信息。“搜集信息的球面”一旦在时刻  $t - r/c$  经过了  $x', y', z'$  处的电荷，如图 9.1 所示，则在时刻  $t - r/c$  之后， $x', y', z'$  处电荷运动的任何变化均不影响该电荷对时刻  $t$  在观测点  $p$  的势的贡献。

当电荷和电流分布为稳定时， $\frac{\partial \phi}{\partial t}$  和  $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$  皆为零，于是方程(9.12)和(9.13)分别简化为  $\nabla^2 \phi = -\rho/\epsilon_0$  和  $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$ 。由这两个方程，可以算出电荷分布所引起的电势  $\phi$  和稳定电流分布所引起的矢势，其解为

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho dV'}{r} \quad \text{和} \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J} d\nu'}{r}.$$

## 9.2 势的变换

现在证明当坐标和时间按洛伦兹变换式变换时，势方程的数学形式不变(即协变)。由方程(9.12)和(9.13)，在  $\Sigma$  中有

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\rho/\epsilon_0, \quad (9.12)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}, \quad (9.13)$$

并满足条件

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0. \quad (9.14)$$

在 8.2 节我们曾证明，

$$\frac{\partial}{\partial x} = \gamma \left( \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\nu}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right); \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}; \quad \frac{\partial}{\partial t} = \gamma \left( \frac{\partial}{\partial t'} - \nu \frac{\partial}{\partial x'} \right). \quad (9.20)$$

于是

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \\ &= \gamma^2 \left( \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\nu}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \\ &\quad - \frac{1}{c^2} \gamma^2 \left( \frac{\partial}{\partial t'} - \gamma \frac{\partial}{\partial x'} \right)^2. \end{aligned}$$

记住

$$\frac{\partial^2}{\partial t' \partial x'} = \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'}, \text{ 得到}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{2\nu}{c^2} \frac{\gamma^2 \partial^2}{\partial x' \partial t'} \\ &+ \gamma^2 \frac{\nu^2}{c^4} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{\gamma^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \\ &+ 2\nu \frac{\gamma^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t' \partial x'} - \gamma^2 \frac{\nu^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} = \gamma^2 (1 - \nu^2/c^2) \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{\gamma^2}{c^2} (1 - \nu^2/c^2) \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2}, \end{aligned}$$

即

$$\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \nabla'^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2}, \quad (9.21)$$

或即

$$\square^2 = \square'^2. \quad (9.22)$$

由方程(8.76),

$$\rho = \gamma(\rho' + vJ'_x/c^2) \quad (8.76)$$

代换方程(9.12)中的  $\square^2$  和  $\rho$ , 得到

$$\square'^2\phi = -\frac{\gamma}{\epsilon_0}(\rho' + vJ'_x/c^2). \quad (9.23)$$

由方程(8.78),

$$J_x = \gamma(J'_x + v\rho'); J_y = J'_y; J_z = J'_z,$$

代入方程(9.13), 对于  $\mathbf{A}$  的各分量, 有

$$\square'^2A_x = -\mu_0\gamma(J'_x + v\rho'), \quad (9.24)$$

$$\square'^2A_y = -\mu_0J'_y, \quad (9.25)$$

$$\square'^2A_z = -\mu_0J'_z. \quad (9.26)$$

将方程(9.24)乘以  $v$ , 再由方程(9.23)减去它, 得到

$$\begin{aligned} & \square'^2(\phi - vA_x) \\ &= -\frac{\gamma}{\epsilon_0}\left(\rho' + v\frac{J'_x}{c^2}\right) + v\mu_0\gamma(J'_x + v\rho'). \end{aligned}$$

但

$$\frac{1}{\mu\epsilon_0} = c^2, \quad \text{或} \quad \mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2},$$

因此,

$$\begin{aligned} \square'^2(\phi - vA_x) &= -\frac{\gamma}{\epsilon_0}\left(\rho' + v\frac{J'_x}{c^2}\right) + \frac{v\gamma}{\epsilon_0 c^2}(J'_x + v\rho') \\ &= -\frac{\gamma}{\epsilon_0}\left[\rho'\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right] = -\frac{\rho'}{\gamma\epsilon_0}. \end{aligned}$$

由于假定  $v$  和  $\gamma$  为常数, 上式可改写为

$$\square'^2\gamma(\phi - vA_x) = -\rho'/\epsilon_0. \quad (9.27)$$

将方程(9.23)乘以  $v/c^2$ , 再由方程(9.24)减去它, 得到

$$\begin{aligned} & \square'^2\left(A_x - \frac{v}{c^2}\phi\right) \\ &= -\mu_0\gamma(J'_x + v\rho') + \frac{v}{c^2}\frac{\gamma}{\epsilon_0}(\rho' + vJ'_x/c^2). \end{aligned}$$

但

$$\frac{1}{\epsilon_0 c^2} = \mu_0,$$

因此

$$\square'^2 \left( A_x - \frac{v}{c^2} \phi \right) = -\mu_0 \gamma \left[ J'_x + v\rho' - v\rho' - \frac{v^2}{c^2} J'_x \right],$$

所以

$$\square'^2 \gamma \left( A_x - \frac{v}{c^2} \phi \right) = -\mu_0 J'_x. \quad (9.28)$$

把变换后的方程集中在一起，并把它们与电磁学方程服从相对性原理时  $\mathbf{A}'$  和  $\phi'$  在  $\Sigma'$  中所要满足的方程加以比较，我们有

$$\square'^2 \gamma \left( A_x - \frac{v}{c^2} \phi \right) = -\mu_0 J'_x, \quad \square'^2 A'_x = -\mu_0 J'_x,$$

$$\square'^2 A_y = -\mu_0 J'_y, \quad \square'^2 A'_y = -\mu_0 J'_y,$$

$$\square'^2 A_z = -\mu_0 J'_z, \quad \square'^2 A'_z = -\mu_0 J'_z,$$

$$\square'^2 \gamma (\phi - v A_x) = -\rho'/\epsilon_0; \quad \square'^2 \phi' = -\rho'/\epsilon_0.$$

左边的方程是由  $\Sigma$  中的方程用洛伦兹变换导出的。它们和右边的方程具有相同的数学形式，如果电磁学定律服从相对性原理，右边的方程就在  $\Sigma'$  中成立。因此势方程在洛伦兹变换下是协变的，并且如果令

$$A'_x = \gamma \left( A_x - \frac{v}{c^2} \phi \right), \quad (9.29)$$

$$A'_y = A_y, \quad (9.30)$$

$$A'_z = A_z, \quad (9.31)$$

$$\phi' = \gamma (\phi - v A_x), \quad (9.32)$$

则这两组方程变为相同。

现在来考虑洛伦兹条件 [方程(9.14)]。用方程(9.20)代换  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial}{\partial t}$ , 得到

$$\begin{aligned}
O &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \\
&= \gamma \left( \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right) A_x + \frac{\partial A_y}{\partial y'} + \frac{\partial A_z}{\partial z'} \\
&\quad + \frac{\gamma}{c^2} \left( \frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \right) \phi \\
&= \frac{\partial}{\partial x'} \gamma \left( A_x - \frac{v}{c^2} \phi \right) + \frac{\partial A_y}{\partial y'} + \frac{\partial A_z}{\partial z'} \\
&\quad + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \gamma (\phi - v A_x).
\end{aligned}$$

如果  $\mathbf{A}$  和  $\phi$  按方程(9.29), (9.30), (9.31)和(9.32)变换, 则此式与方程

$$\frac{\partial A'_x}{\partial x'} + \frac{\partial A'_y}{\partial y'} + \frac{\partial A'_z}{\partial z'} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi'}{\partial t'} = 0$$

相同. 因此, 按照洛伦兹条件[方程(9.14)]来选择  $\operatorname{div} \mathbf{A}$ , 则  $\phi$  和  $\mathbf{A}$  的微分方程以及洛伦兹条件本身都是洛伦兹协变的.

注意  $A_x, A_y, A_z, \phi/c^2$  和  $x, y, z, t$  以同样的方式变换. 在 6.4 节我们把四维矢量定义为其四个分量和  $x, y, z, ct$  以同样方式变换的量. 因此  $A_x, A_y, A_z, i\phi/c$  是一个四维矢量的分量, 按方程(6.20)变换.

### 9.3 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 的变换

在 8.2 节中我们曾由麦克斯韦方程组的协变性推得了电场和磁场的变换式. 它们也可由  $\mathbf{A}$  和  $\phi$  的变换式得出. 在  $\Sigma'$  中,

$$\mathbf{B}' = \operatorname{curl}' \mathbf{A}' \text{ 和 } \mathbf{E}' = -\operatorname{grad}' \phi' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t'}$$

因此

$$B'_x = \frac{\partial A'_z}{\partial y'} - \frac{\partial A'_y}{\partial z'},$$

将(9.20),(9.30)和(9.31)代入,得到

$$B'_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = B_x. \quad (9.33)$$

类似地,

$$\begin{aligned} B'_y &= \frac{\partial A'_x}{\partial z'} - \frac{\partial A'_z}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial z} \gamma \left( A_x - \frac{\nu}{c^2} \phi \right) \\ &\quad - \gamma \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\nu}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) A_z \\ &= \gamma \left\{ \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\nu}{c^2} \left( -\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} \right) \right\} \\ &= \gamma \left( B_y + \frac{\nu}{c^2} E_z \right) \end{aligned} \quad (9.34)$$

$$B'_z = \frac{\partial A'_y}{\partial x'} - \frac{\partial A'_x}{\partial y'} = \gamma \left( B_z - \frac{\nu}{c^2} E_y \right). \quad (9.35)$$

方程(9.33),(9.34)和(9.35)与方程组(8.41)相同,对于电场强度,有

$$\begin{aligned} E'_x &= -\frac{\partial \phi'}{\partial x'} - \frac{\partial A'_x}{\partial t'} \\ &= -\gamma^2 \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\nu}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) (\phi - \nu A_x) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial}{\partial t} + \nu \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( A_x - \frac{\nu}{c^2} \phi \right) \right\} \\ &= -\gamma^2 \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial x} \left( 1 - \frac{\nu^2}{c^2} \right) + \frac{\partial A_x}{\partial t} \left( 1 - \frac{\nu^2}{c^2} \right) \right\} \\ &= \left( -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) = E_x, \end{aligned} \quad (9.36)$$

$$E'_y = -\frac{\partial \phi'}{\partial y'} - \frac{\partial A'_y}{\partial t'}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\partial}{\partial y} \gamma(\phi - v A_x) - \gamma \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) A_y \\
&= \gamma \left\{ \left( -\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t} \right) - v \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial x} \right) \right\} \\
&= \gamma(E_y - v B_z), \tag{9.37}
\end{aligned}$$

类似地,

$$E'_z = -\frac{\partial \phi'}{\partial z'} - \frac{\partial A'_z}{\partial t'} = \gamma(E_z + v B_y). \tag{9.38}$$

方程(9.36),(9.37)和(9.38)与方程组(8.40)一致。这就完成了场量 **E** 和 **B** 的变换。所得结果与 8.2 节中由麦克斯韦方程组的协变性得出的结果相同。

#### 9.4 匀速运动的“点”电荷产生的标势与矢势

考虑一电荷  $q$  相对于惯性系  $\Sigma$  以匀速  $v$  平行于  $x$  轴运动，如图 9.2(a) 所示。在相对  $\Sigma$  以匀速  $v$  沿公共  $x$  轴运动的惯性系  $\Sigma'$  中，电荷  $q$  保持静止，如图 9.2(b) 所示。设电荷  $+q$  在  $\Sigma'$  中  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  点静止。我们来计算在时刻  $t = 0$  (这时  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  的原点重合)  $\Sigma$  的原点  $O$  处的势。因为电荷  $q$  在  $\Sigma'$  中静止， $\Sigma'$  中只有静电场， $O'$  点的势为

$$\phi' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'}, \quad \mathbf{A}' = 0, \tag{9.39}$$

其中

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

应用势的变换式，可算出  $t = 0$  时  $\Sigma$  原点处 **A** 和  $\phi$  的值。我们有，

$$A_x = \gamma \left( A'_x + \frac{v}{c^2} \phi' \right) = \gamma \frac{v}{c^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'}, \tag{9.40}$$

$$A_y = A'_y = 0, \tag{9.41}$$

$$A_z = A'_z = 0, \quad (9.42)$$

$$\phi = \gamma(\phi' + vA'_z) = \gamma \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'}. \quad (9.43)$$

方程(9.40)和(9.43)中的量  $r'$  必须用惯性系  $\Sigma$  中测得的量来表示。既然在  $\Sigma'$  中  $r'$  与时间无关, 于是  $r'$  可以用在  $\Sigma'$  中任何时间测量的量来表示, 而不影响  $r'$  的值。为了把方程(9.40)–(9.43)与李纳-维切尔势比较,  $r'$  在  $\Sigma'$  中的时刻  $t' = -r'/c$  测量。“搜集信息的球面”(它在  $t' = 0$  瞬间到达  $\Sigma'$  的原点)在时刻  $t' = -r'/c$  经过电荷  $+q$ 。与  $\Sigma'$  中发生于  $x', y', z'$  和  $t' = -r'/c$  的事件相对应, 在  $\Sigma$  中有

$$x = \gamma(x' + vt') = \gamma(x' - vr'/c),$$

$$y = y',$$

$$z = z',$$

$$t = \gamma \left( t' + \frac{vx'}{c^2} \right) = \gamma \left( -\frac{r'}{c} + \frac{vx'}{c^2} \right).$$

用直接代换, 得

$$\begin{aligned} r^2 - c^2 t^2 &= x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \\ &= r^2 \left( x' - \frac{vr'}{c} \right)^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 \gamma^2 \left( \frac{vx'}{c^2} - \frac{r'}{c} \right)^2 = 0. \end{aligned}$$

因此  $r = \pm ct$ 。我们取  $r = -ct$  的值。与  $\Sigma'$  中在时刻  $t' = -r'/c$  的电荷位置相对应, 在  $\Sigma$  中测量的时刻  $t$ , 电荷位于离  $\Sigma$  原点距离为  $r$  处。 $\Sigma$  中“搜集情报的球面”(它在时刻  $t = 0$  到达  $\Sigma$  的原点)在这一瞬间正经过电荷  $q$ , 如图 9.2(a) 和 9.2(b) 所示。在时刻  $t = -r/c$  测量的  $r$  值是从电荷的推迟位置到观测点的距离。由于  $t' = \gamma(t - vx/c^2)$  和  $t = -r/c$ , 所以

$$r' = -ct' = -\gamma c \left( t - \frac{vx}{c^2} \right) = \gamma \left( r + \frac{vx}{c} \right),$$

由于  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = vr \cos\phi = -vx$ , 其中  $\phi$  是  $\mathbf{v}$  和  $\mathbf{r}$  之间的夹角,

如图 9.2(a) 所示, 而  $\mathbf{r}$  为从电荷推迟位置到观测点的矢量。因此

$$r'/\gamma = (\mathbf{r} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}/c).$$

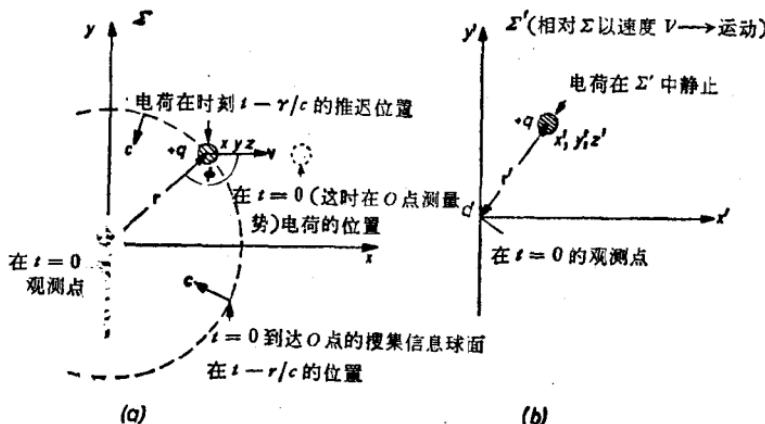


图 9.2 (a) 在  $\Sigma$  原点, 在时刻  $t$  计算以匀速  $\mathbf{v}$  相对惯性系  $\Sigma$  运动的“点”电荷的标势和矢势。(b) 电荷在  $\Sigma'$  中  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  处静止。

距离  $r'$  (它在  $\Sigma'$  中为常数)已用  $\Sigma$  中在时刻  $t = -r/c$  测得的量表示, 并与电荷在  $\Sigma$  中的推迟位置联系起来。代入方程(9.40), (9.41), (9.42)和(9.43), 得到在  $\Sigma$  原点处  $t = 0$  时刻的势:

$$\left. \begin{aligned} A_x &= \frac{1}{c^2 4\pi \epsilon_0} \left[ \frac{qv}{r - \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}/c} \right], \\ A_y &= 0, \\ A_z &= 0, \end{aligned} \right\} \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{q\mathbf{v}}{r - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c}} \right], \quad (9.44)$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left[ \frac{q}{r - \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}/c} \right]. \quad (9.45)$$

这就是李纳-维切尔势。匀速运动电荷的李纳-维切尔势是和狭义相对论一致的。在经典电磁理论中, 假定李纳-维切尔势由源(电荷)出发以速度  $c$  在真空中传播, 而不受此后源运动

的任何变化的影响，并假定对加速电荷也成立。现在我们将从推迟势，即方程(9.18)和(9.19)出发，对于加速电荷的一般情形来得出李纳-维切尔势。

## 9.5 李纳-维切尔势

首先我们假定，“点”电荷  $+q$  具有有限的尺寸。我们将用推迟势的表达式，即

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{[\rho]}{r} dV', \quad (9.18)$$

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\mathbf{J}]}{r} dV', \quad (9.19)$$

来计算图 9.3 中  $P$  点的势。如果在“点”电荷体积内电荷到处均匀分布，那么当“搜集信息的球面”通过图 9.3 所示的“点”电荷时，它将记录“点”电荷内的电荷密度等于总电量与“点”电荷体积之比。如果“点”电荷向着观测点运动，如图 9.3 所示，那么“搜集信息的球面”通过“点”电荷的时间就要比“点”电荷静止的情况所需的时间长些。“搜集信息的球面”将在运动球内所有点记录下电荷密度  $\rho$ ，于是在这种情况下  $\int [\rho] dV'$  (对应着“搜集信息的球面”的不同位置，它是在不同时刻计算的) 将比  $q$  大，因此方程(9.18)中的  $\int \frac{[\rho]}{r} dV'$  不能用  $q/r$  来代替。设在时刻  $t - r/c$  “搜集信息的球面”离  $P$  点距离为  $r$ ，设在时刻  $t - (r/c) + \delta t$  的距离为  $r - \delta r$ ，其中  $\delta t = \delta r/c$ ，考虑“搜集信息的球面”上一个面元，面积为  $\delta S$ ，如图 9.3 所示。在时间间隔  $\delta t$  内，“搜集信息的球面”的这一部分将记录下电荷密度  $\rho$  和对方程(9.18)中积分的贡献  $(\rho \delta S \delta r)/r$ ，此贡献来自体积元  $\delta V' = \delta S \delta r$ 。然而，“搜集信息的球面”上

的面元  $\delta S$  实际经过的电量小于  $\rho \delta S \delta r$ , 二者之差等于在时间  $\delta t$  内离开表面  $\delta S$  的电量, 即

$$\rho u \delta S \delta t \cos \theta = \rho \delta S \frac{\delta r \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}}{c} = \rho \delta V' \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}}{rc}$$

其中  $\mathbf{r}$  为从电荷的推迟位置到观测点的矢量.

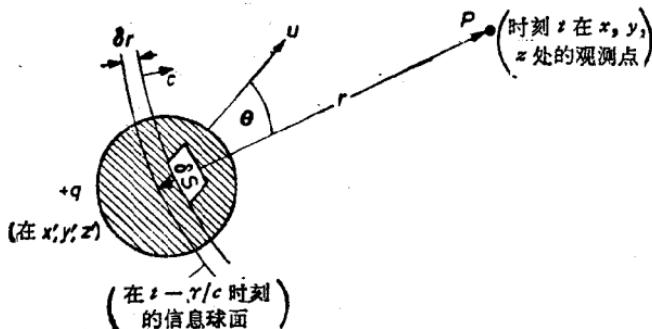


图 9.3 非匀速运动的“点”电荷  $+q$  在  $P$  点的标势与矢势(李纳-维切尔势)的计算. 在时刻  $t - r/c$  电荷  $q$  位于点  $x', y', z'$ .

因而“搜集信息的球面”上的面元  $\delta S$  在时间  $\delta t$  内实际经过的电量为

$$\delta q = \rho \delta V' - \rho \delta V' \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}}{rc},$$

或者

$$[\rho] = \frac{\delta q}{\left[1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}}{rc}\right] \delta V'} \quad (9.46)$$

代入方程(9.18), 得

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{[\rho] dV'}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{\left[r - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}}{c}\right]}$$

如果假定电荷尺寸非常小, 则可忽略积分中分母的变化, 如果把  $\int dq$  记为  $q$ , 便得到

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{r - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}}{c}} \right] \quad (9.47)$$

将  $[\mathbf{J}] = [\rho\mathbf{u}]$  代入方程(9.19)并用方程(9.46), 得到

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{q\mathbf{u}}{r - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}}{c}} \right] \quad (9.48)$$

方程(9.47)和(9.48)称为李纳-维切尔斯势。这两个表达式与“点”电荷的细致结构无关，并且由于方程(9.46)对电荷内的任一点均成立，因此不论在“点”电荷的体积内电荷是否到处均匀分布，李纳-维切尔斯势均成立。方程(9.47)和(9.48)中方括号内所有的量，即  $q$ ,  $\mathbf{r}$  和  $\mathbf{u}$  均指在电荷推迟位置的值，而  $\mathbf{r}$  为从电荷推迟位置指向观测点的矢量。在经典电磁理论中，假定李纳-维切尔斯势在真空中以速度  $c$  传播。而不受此后电荷运动任何变化的影响。在 9.4 节我们证明了匀速运动电荷的李纳-维切尔斯势与狭义相对论一致。

应用方程  $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi - \partial \mathbf{A} / \partial t$  和  $\mathbf{B} = \operatorname{curl} \mathbf{A}$  可从方程(9.47)和(9.48)得出运动“点”电荷的电场和磁场。微分必须对观测点的坐标和时间进行。可以证明（参看巴诺夫斯基和菲利浦的书<sup>[1c]</sup>）

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3} \left( \mathbf{r} - \frac{r\mathbf{u}}{c} \right) \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \\ &\quad + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2} \times \left\{ \mathbf{r} \times \left[ \left( \mathbf{r} - \frac{r\mathbf{u}}{c} \right) \times \dot{\mathbf{u}} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (9.49)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{E}}{rc} \\ &= \frac{q\mathbf{u} \times \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 c^2 s^3} \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \\ &\quad + \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 c^3 s^3 r} \left\{ \mathbf{r} \times \left[ \left( \mathbf{r} - \frac{r\mathbf{u}}{c} \right) \times \dot{\mathbf{u}} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (9.50)$$

其中

$$s = r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}}{c}. \quad (9.51)$$

在方程(9.49), (9.50)和(9.51)中,  $q$ ,  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{u}$ , 和  $\dot{\mathbf{u}}$  均在电荷的推迟位置取值。如果  $[\dot{\mathbf{u}}]$  为零, 则方程(9.49)和(9.50)右边的第二项均为零。于是方程(9.49)和(9.50)右边的第一项就化为曾在第七章所述关于匀速运动电荷的电场和磁场的(7.35)和(7.40)式。这两项的量级均为  $1/r^2$ 。方程(9.49)和(9.50)的第二项的量级为  $1/r$ ; 这两项称为辐射项, 它们给出加速电荷的辐射场。为得到一加速电荷的合电场, 必须把方程(9.49)中的两项按矢量相加; 合电场不是径向的, 而是由于电荷的加速变了形的。在一般情形下 **B** 线与 **E** 线垂直。能流可用玻印亭矢量  $\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  计算。

有两种重要的情况。第一种情况是当  $\dot{\mathbf{u}}$  平行于  $\mathbf{u}$ , 这时辐射项变为

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 s^3} \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{u}}), \quad (9.52)$$

$$\mathbf{B} = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 c^3 s^3} \dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{r}. \quad (9.53)$$

这两个方程与低速近似情况不同之处在于  $s^3$  各项中。在  $\mathbf{u} \rightarrow 0$  的极限情形, 电场在前后方向是对称的, 但由于分母中的项  $s^3$ , 随着  $\mathbf{u}$  的增大, 电场和磁场以及辐射强度将在  $\mathbf{u}$  方向取越来越大的峰值。这一情形主要应用在假定加速度在电荷运动方向这一简化情形下的轫致辐射的经典理论。另一重要情形是当  $\dot{\mathbf{u}}$  与  $\mathbf{u}$  垂直的情形。这给出了作圆运动的电荷所发出的辐射。这一情况对于设计电子迴旋加速器和电子同步加速器, 以及解释射电天文学中的同步加速器辐射均有重要意义。关于加速电荷辐射经典理论的完整说明, 读者可参考巴诺夫斯基和菲利浦<sup>[1]</sup>, 以及朗道和栗弗希兹<sup>[2]</sup>的著作。关

于辐射的量子理论，读者可参考海特勒 (Heitler<sup>[3]</sup>) 的著作。

一般认为，一点的电场和磁场是由微观原子电荷的运动所造成的，尽管基本粒子（如电子）的自旋也可能有贡献。按照推迟势和李纳-维切尔斯，电场和磁场从运动电荷出发以速度  $c$  在真空中传播，因此一点的电场和磁场取决于某一较早时刻电荷的位置和运动。如要把变化的电场和磁场以及电磁辐射的强度与作为电磁场源的电荷联系起来，就必须应用推迟势或者李纳-维切尔斯。麦克斯韦方程组中所有的变量都是指同一空间点和同一瞬时。这些方程把一点的场量随位置和时间的变化率与该点的电荷密度和电流密度联系起来。如果将麦克斯韦方程组直接在一有限面积或有限体积内积分，则所得方程组也是适用于同一瞬时的。当推迟效应可以忽略时，以及当讨论电磁波的行为（例如电磁辐射在电介质或导体表面的反射）时，没必要追溯电磁辐射与其源的联系，这时，麦克斯韦方程组是有用的。依照原子论的观点，一点的位移电流项  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  并不被认为是由该点电荷实际运动而成的“真实”电流，或者在“真实以太”中电荷的实际位移，而是作如下解释。如果引起电磁场的电荷在过去的运动使空间一点的电位移随时间而变化，那么同样这些运动电荷按照以下方程也对空间磁场有贡献：

$$\text{curl } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

没有必要说是位移“电流”  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  引起了这一磁场，而只要说当位移矢量在空间中变化时，总伴随着有对空间中磁场的贡献，这一磁场是由在空间中引起变化电位移的同样一些运动电荷产生的。同样地，如果运动电荷引起变化的磁感应强度，则按照以下方程也对合电场有贡献：

$$\operatorname{curl} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

## 9.6 拉格朗日方程

为了有益于那些熟悉拉格朗日方程和哈密尔顿方程的读者，这里将这些方法推广到粒子以相对论速度运动的情形。对于用这些方法解决牛顿力学中的问题尚不熟悉的读者，可参考力学教科书，例如斯拉特和弗兰克（Slater and Frank<sup>[4]</sup>）的书。

在牛顿力学中求解问题时，使用广义坐标  $q_1, \dots, q_s$  表示的拉格朗日方程有时是方便的。在牛顿力学中，拉格朗日函数  $L$  定义为  $T - V$ ，其中  $T$  为动能， $V$  为势能。按照拉格朗日方程，有

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (9.54)$$

可以从牛顿运动定律推出拉格朗日方程，反过来也一样。用拉格朗日方程计算带电粒子在电磁场中的运动有时是方便的，尤其当采用球极坐标或柱坐标较方便时，更是这样。如果定义拉格朗日函数为

$$L = T - q(\phi - \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}), \quad (9.55)$$

其中  $q$  为粒子的电量该粒子以速度  $\mathbf{u}$  在用势  $\phi$  和  $\mathbf{A}$  描述的电磁场中运动，便可应用拉格朗日方程。对于高能带电粒子，相对论效应变得重要，因此有必要修改由方程 (9.55) 给出的拉格朗日函数。现在我们来证明，如果把带电粒子的拉格朗日函数定义为

$$L = m_0 c^2 (1 - \sqrt{1 - u^2/c^2}) + q(\mathbf{u} \cdot \mathbf{A}) - q\phi, \quad (9.56)$$

则对于静止质量为  $m_0$  的带电粒子，拉格朗日方程给出了正确

的运动方程。把拉格朗日函数按分量写出,为

$$L = m_0 c^2 \{1 - \sqrt{1 - (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)/c^2}\} \\ + q(u_x A_x + u_y A_y + u_z A_z) - q\phi. \quad (9.57)$$

对  $x$  取偏微商,并记住  $\phi$  和  $\mathbf{A}$  取决于电荷位置,而与它的速度无关,便得到

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -q \frac{\partial \phi}{\partial x} + q \left\{ u_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \right\}. \quad (9.58)$$

将方程(9.57)对  $u_x$  取偏微商,得到

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial u_x} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{(1 - u^2/c^2)}} \frac{u_x}{c^2} + q A_x \\ = \frac{m_0 u_x}{\sqrt{(1 - u^2/c^2)}} + q A_x. \quad (9.59)$$

因此,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 u_x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) + q \frac{d A_x}{dt}. \quad (9.60)$$

由于  $A_x$  是  $x, y, z$  和  $t$  的函数,因此

$$dA_x = \frac{\partial A_x}{\partial x} dx + \frac{\partial A_x}{\partial y} dy + \frac{\partial A_x}{\partial z} dz + \frac{\partial A_x}{\partial t} dt,$$

除以  $dt$ ,得

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial A_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial A_x}{\partial z} u_z + \frac{\partial A_x}{\partial t}. \quad (9.61)$$

代入方程(9.60),对  $dA_x/dt$  进行代换得

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 u_x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) \\ + q \left( u_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial A_x}{\partial z} + \frac{\partial A_x}{\partial t} \right). \quad (9.62)$$

将方程(9.62)和(9.58)代入方程(9.54),

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 u_x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) + q \left( u_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

$$+ u_z \frac{\partial A_x}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial t} \Big) + q \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ - q \left( u_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial A_x}{\partial x} + u_z \frac{\partial A_x}{\partial x} \right) = 0,$$

整理得

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 u_x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) = -q \frac{\partial \phi}{\partial x} - q \frac{\partial A_x}{\partial t} \\ + q \left\{ u_y \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - u_z \left( \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \right\} \\ = q \left\{ -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \right\} + q \{ u_y (\text{curl } \mathbf{A})_x - u_z (\text{curl } \mathbf{A})_y \} \\ = q \left\{ -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \right\} + q \{ \mathbf{u} \times \text{curl } \mathbf{A} \}_x.$$

但

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \text{curl } \mathbf{A},$$

因此，

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 u_x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) = q E_x + q (\mathbf{u} \times \mathbf{B})_x,$$

类似地，

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 u_y}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) = q E_y + q (\mathbf{u} \times \mathbf{B})_y,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 u_z}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) = q E_z + q (\mathbf{u} \times \mathbf{B})_z.$$

在 5.4 节中我们曾证明上述这些方程令人满意地说明了高能带电粒子在电场和磁场中的运动。因此，只要按照方程(9.56)定义  $L$ ，则对于电磁场中带电粒子，拉格朗日方程给出了一般承认的相对论运动方程。

按照哈密顿最小作用原理

$$\delta \int L dt = 0 \quad (9.63)$$

拉格朗日方程可由这一原理应用变分法而得出，并且如用方程(9.57)定义  $L$ ，则所得方程与狭义相对论一致。某些作者宁愿用方程(9.63)，而不用牛顿运动定律，作为力学的出发点。

## 9.7 哈密顿方程

哈密顿函数通常定义为

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L, \quad (9.64)$$

其中  $L$  为拉格朗日函数， $q_i$  为广义坐标， $p_i$  为由下式定义的广义动量：

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (9.65)$$

对于牛顿力学中大多数有实际意义的情形（尽管不一定总是如此）， $H$  等于  $T + V$ 。按照哈密顿方程，

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (9.66)$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \quad (9.67)$$

现在我们来证明，对于单个带电粒子，如果用关系式

$$H = q\phi + c\{m_0^2c^2 + (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2\}^{\frac{1}{2}} \quad (9.68)$$

来定义  $H$ ，则哈密顿方程便给出单个带电粒子的相对论运动方程。[有时在方程(9.68)右边加进一项  $-m_0c^2$ ，以便当粒子速度比光速小得多时，方程(9.68)还原为哈密顿函数的非相对论表达式。]把方程(9.68)按分量写出，

$$H = q\phi + c\{m_0^2c^2 + (p_x - qA_x)^2 + (p_y - qA_y)^2 + (p_z - qA_z)^2\}^{\frac{1}{2}}. \quad (9.69)$$

按照方程(9.67)，

$$u_x = \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{c(p_x - qA_x)}{\{m_0^2 c^2 + (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2\}^{\frac{1}{2}}}, \quad (9.70)$$

而由方程(9.66)

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -q \frac{\partial \phi}{\partial x} + \left[ c(p_x - qA_x)q \frac{\partial A_x}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. + c(p_y - qA_y)q \frac{\partial A_y}{\partial x} + c(p_z - qA_z)q \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] \\ &\quad \div \{m_0^2 c^2 + (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

将方程(9.70)代入, 得

$$\dot{p}_x = -q \frac{\partial \phi}{\partial x} + q \left\{ u_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + u_z \frac{\partial A_z}{\partial x} \right\}. \quad (9.71)$$

由方程(9.61)

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial A_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial A_x}{\partial z} u_z + \frac{\partial A_x}{\partial t}, \quad (9.61)$$

将方程(9.61)乘以  $q$ , 并从方程(9.71)中减去它, 得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(p_x - qA_x) &= -q \frac{\partial \phi}{\partial x} - q \frac{\partial A_x}{\partial t} \\ &\quad + qu_y \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - qu_z \left( \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(p_x - qA_x) &= qE_x + q(\mathbf{u} \times \operatorname{curl} \mathbf{A})_x \\ &= qE_x + q(\mathbf{u} \times \mathbf{B})_x. \end{aligned} \quad (9.72)$$

但由方程(9.65), 和(9.59),

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m_0 u_x}{\sqrt{(1 - u^2/c^2)}} + qA_x,$$

或

$$(p_x - qA_x) = \frac{m_0 u_x}{\sqrt{(1 - u^2/c^2)}},$$

代入方程(9.72), 得到

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 u_x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) = q E_x + q(\mathbf{u} \times \mathbf{B})_x.$$

因此, 如果按照方程(9.68)来定义哈密顿函数, 则哈密顿方程便给出带电粒子的相对论运动方程。如果  $\phi$  和  $\mathbf{A}$  均为零, 则哈密顿函数变为

$$H = c \sqrt{m_0^2 c^2 + p^2} = E,$$

对于求解, 哈密顿方程不如拉格朗日方程用得广泛, 但哈密顿方程具有很重要的意义, 因为它构成统计力学和量子力学的发展基础。狄拉克的电子波动方程在很大程度上是根据方程(9.68)。有兴趣的读者可参考曼德尔<sup>[5]</sup>的书。

### 参 考 文 献

- [1] Panofsky, W. K. H. and Phillips, M. *Classical Electricity and Magnetism*. (a) Ch. 17; (b) Ch. 13; (c) Ch. 19; (d) p. 289. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1955
- [2] Landau, L. and Lifshitz, E. *The Classical Theory of Fields*. Ch. 8 and 9. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1951
- [3] Heitler, W. *Quantum Theory of Radiation*. Oxford University Press, London, 1936
- [4] Slater, J. C. and Frank, N. H. *Mechanics*. Ch. 4. McGraw-Hill, New York and London, 1947
- [5] Mandl, F. *Quantum Mechanics*. 2nd. Ed. Ch. 10. Butterworths, London, 1957
- [6] Jackson, J. D. *Classical Electrodynamics*. Ch. 14. Wiley, London, 1962

### 补 充 读 物

关于李纳-维切尔斯势及其对计算加速电荷辐射的应用, 读者可参考巴诺夫斯基和菲利浦著的《经典电学与磁学》, 以及朗道和栗弗希兹著的《经典场论》。关于从狭义相对论观点出发对李纳-维切尔斯势的另一种推导, 读者可参考谬勒著的《相

对论》。

## 习 题

9.1 如果  $\mathbf{J}$ ,  $\rho$ ,  $\mathbf{A}$  和  $\phi$  分别为电流密度矢量, 电荷密度, 电磁场的矢势和标势, 证明当从惯性系  $\Sigma$  变换到相对  $\Sigma$  以匀速  $v$  沿  $x$  轴运动的惯性系  $\Sigma'$  时,  $(J_x, J_y, J_z, \rho)$  和  $(A_x, A_y, A_z, \phi/c^2)$  按照洛伦兹变换式变换。

推导电场强度  $\mathbf{E}$  和磁感应强度(或者磁通密度)  $\mathbf{B}$  各分量的变换规律。

9.2 证明以匀速  $\mathbf{u}$  运动的电荷在距离它的“现在”位置为  $\mathbf{r}_0$  的  $P$  点所产生的势为

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 q u}{4\pi s}, \quad \phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s},$$

其中  $s = r_0 [1 - (u^2/c^2) \sin^2 \phi]^{1/2}$ ,  $\phi$  为  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{r}_0$  之间的夹角。由此导出  $P$  点的电场和磁场。(提示: 可以用  $\mathbf{A}$  和  $\phi$  的变换式从电荷在其中静止的洛伦兹系出发进行变换, 也可以用巴诺夫斯基和菲利浦<sup>[1d]</sup>中的办法用实验室系统的李纳-维切尔势。)

9.3 一带电粒子以速度  $u$  运动,  $(1 - u^2/c^2)^{-1/2} = 2$ . 该电荷在运动方向上被加速。应用方程(9.52)和(9.53)及玻印亭矢量来计算辐射场的角分布以及加速电荷在各个方向的能量损失率。(参考: 巴诺夫斯基和菲利浦。)

9.4 对于  $u \ll c$  的粒子重复上题。在此情形下, 辐射能正比于  $\sin^2 \theta$ , 其中  $\theta$  为加速度  $\dot{\mathbf{u}}$  和位置矢量  $\mathbf{r}$  之间的夹角。通过从粒子在其中瞬时静止的参考系到电荷在其中以速度  $u \simeq c$  ( $\mathbf{u}$  平行于  $\dot{\mathbf{u}}$ ) 运动的参考系的变换而由本题的解得到上题的解, 是有益的。变换  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  和光子的能量, 对于光子的能量, 还要考虑主体角的变换。

9.5 绘出以速度  $u$  [ $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-\frac{1}{2}} = 2$ ] 作圆周运动的带电粒子的辐射分布。应用方程(9.49)和(9.50)。并应用从电荷在其中瞬时静止的惯性系的变换来重做一遍。当  $\gamma \gg 1$  时,由于多普勒效应,辐射总能越来越多地在前进的方向发出。证明当  $\gamma \gg 1$ , 辐射能几乎全部包括在电荷运动方向上半角为  $\sim \gamma^{-1}$  的一个锥内。

9.6 考虑在半径为  $\rho$  米的圆上运动的一个电子 ( $\gamma \gg 1$ )。对于一个远处的观察者,每一圈中当电子的“前灯”扫过观测者的一段短时间内可观察到辐射。证明每一圈中有  $\sim \rho/c\gamma^3$  一段时间观测到辐射。(考虑电荷在观察者方向的运动,这时它在朝向观察者的方向发出辐射。)应用此结果计算同步加速器辐射的频率分布。(参考: 杰克逊的书<sup>[6]</sup>。)

# 第十章 电磁理论的四维矢量与张量表述

## 10.1 引言

在第八章和第九章中我们证明了，麦克斯韦方程组及势 $\phi$ 和 $A$ 的方程是洛伦兹协变的，即当坐标和时间按洛伦兹变换式变换时其数学形式不变。所用的方法是比较长的。用四维矢量和矩阵方法，可以证明经典电磁学定律是洛伦兹协变的，并且可以快得多也巧妙得多地导出电磁量的变换式。在附录四中给出有关的矩阵理论的复习，附录五中给出笛卡儿张量的介绍。在这些附录中也说明了所用符号的意义。

## 10.2 洛伦兹变换，作为 $X_1, X_2, X_3, X_4$ 空间中线性正交变换

如在 6.4 节中一样。我们引进变量  $X_1 = x$ ;  $X_2 = y$ ;  $X_3 = z$ ;  $X_4 = i c t$ 。于是洛伦兹变换就是方程 (6.21) 给出的形式，即

$$\begin{aligned}X'_1 &= \gamma \left( X_1 + i \frac{v}{c} X_4 \right); \\X'_2 &= X_2; \\X'_3 &= X_3; \\X'_4 &= \gamma \left( X_4 - i \frac{v}{c} X_1 \right).\end{aligned}\tag{10.1}$$

这些变换式可用矩阵方程表达如下，

$$\begin{bmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ X'_3 \\ X'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\frac{v}{c}\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} \quad (10.2)$$

或  
其中

$$\begin{aligned} A = & \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\frac{v}{c}\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & 0 & \cos\phi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10.3)$$

作为练习，读者应用矩阵乘法规则证明方程(10.2)与方程(10.1)给出的四个变换式等价。矩阵  $A$  可用三角函数作为矩阵元表示，象方程(10.4)那样，采用

$$\tan\phi = i v/c. \quad (10.5)$$

如果只考虑分量  $X'_1$  和  $X'_4$ ，则方程(10.3)变为

$$\begin{bmatrix} X'_1 \\ X'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_4 \end{bmatrix} \quad (10.6)$$

方程(10.6)中的变换矩阵的数学形式与二维平面中直角坐标轴旋转一角度  $\phi$  时变量变化的矩阵完全相同(参看附录四)。

方程(10.6)也和6.4节阐述的想法一致。当坐标轴旋转时，矢

量长度应不变。如果这一点对于  $X_1 X_2 X_3 X_4$  空间的四维矢量是对的，那么  $\Lambda$  必定是正交矩阵。如果  $\Lambda$  为正交矩阵，则正如附录四中证明的那样， $\Lambda \tilde{\Lambda}$  必然等于单位矩阵  $I$ 。由矩阵乘法规则，有

$$\begin{aligned} \Lambda \tilde{\Lambda} &= \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i \frac{\nu}{c} \gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i \frac{\nu}{c} \gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i \frac{\nu}{c} \gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i \frac{\nu}{c} \gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad (10.7) \end{aligned}$$

这就证实了  $\Lambda$  为正交矩阵。现在

$$X' = \Lambda X, \quad (10.8)$$

用  $\Lambda^{-1}$  左乘，得到

$$\Lambda^{-1} X' = \Lambda^{-1} \Lambda X = IX = X$$

但

$$\Lambda \tilde{\Lambda} = I, \text{ 或 } \Lambda^{-1} = \tilde{\Lambda},$$

因此

$$\mathbf{X} = \Lambda^{-1} \mathbf{X}' = \tilde{\Lambda} X' \quad (10.9)$$

其中

$$\Lambda^{-1} - \tilde{\Lambda} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\frac{v}{c}\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \quad (10.10)$$

方程(10.9)代表洛伦兹变换的逆变换。

现在我们考虑在同一方向上的两个相继的洛伦兹变换。如在3.4节中一样，考虑一惯性系 $\Sigma''$ 相对 $\Sigma'$ 以速度 $w$ 沿公共 $x$ 轴运动，而设 $\Sigma'$ 相对 $\Sigma$ 以匀速 $v$ 沿公共 $x$ 轴运动。令

$$\tan \phi_1 = iv/c, \quad (10.11)$$

$$\tan \phi_2 = iw/c. \quad (10.12)$$

在下一页中给出了两次运用洛伦兹变换的结果。可以看出，除了 $(\phi_1 + \phi_2)$ 代替了 $\phi$ 之外，最后一个变换矩阵与 $\Lambda$ 相同，因此同方向的两次相继的洛伦兹变换等价于单独一次洛伦兹变换。可以证明，同一方向上的对应于 $\Sigma$ 和 $\Sigma'$ 间各种相对速度的所有可能的洛伦兹变换构成一个数学群。

现在

$$\tan(\phi_1 + \phi_2) = \frac{\tan \phi_1 \tan \phi_2}{(1 - \tan \phi_1 \tan \phi_2)}$$

由方程(10.11)和(10.12)替换掉 $\tan \phi_1$ 和 $\tan \phi_2$ ，得

$$\tan(\phi_1 + \phi_2) = \frac{\left(\frac{iv}{c} + \frac{iw}{c}\right)}{\left(1 - \frac{i^2vw}{c^2}\right)} = \frac{i(w+v)}{c\left(1 + \frac{vw}{c^2}\right)} = \frac{iV}{c}$$

其中

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} X_1'' \\ X_2'' \\ X_3'' \\ X_4'' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \phi_2 & 0 & 0 & \sin \phi_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi_2 & 0 & 0 & \cos \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \\ X_3' \\ X_4' \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \phi_2 & 0 & 0 & \sin \phi_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi_2 & 0 & 0 & \cos \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & 0 & 0 & \sin \phi_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi_1 & 0 & 0 & \cos \phi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \phi_2 \cos \phi_1 - \sin \phi_2 \sin \phi_1 & 0 & 0 & \cos \phi_2 \sin \phi_1 + \sin \phi_2 \cos \phi_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi_2 \cos \phi_1 - \cos \phi_2 \sin \phi_1 & 0 & 0 & -\sin \phi_2 \sin \phi_1 + \cos \phi_2 \cos \phi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\phi_1 + \phi_2) & 0 & 0 & \sin(\phi_1 + \phi_2) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\phi_1 + \phi_2) & 0 & 0 & \cos(\phi_1 + \phi_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$V = \frac{(w + v)}{\left(1 + \frac{vw}{c^2}\right)}$$

这与方程(3.62)一致。

在 6.4 节中引入的所有四维矢量都可表示为列矩阵，例如四维速度  $\mathbf{U}$  可表示为

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dX_1}{d\tau} \\ \frac{dX_2}{d\tau} \\ \frac{dX_3}{d\tau} \\ \frac{dX_4}{d\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{u_x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ \frac{u_y}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ \frac{u_z}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ \frac{ic}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \end{bmatrix} \quad (10.13)$$

其中  $u_x$ ,  $u_y$  和  $u_z$  为三维速度  $\mathbf{u}$  的分量。质点的四维动量可表示为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ \frac{icE}{c} \end{bmatrix} \quad (10.14)$$

其中  $p_x$ ,  $p_y$  和  $p_z$  为三维动量  $\mathbf{p}$  的分量，而  $E$  是质点的总能量。作用于质点上的四维力可表示为

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ \frac{i}{c} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \end{bmatrix} \quad (10.15)$$

其中  $f_x, f_y, f_z$  为三维力的分量, 定义为  $\mathbf{f} = d\mathbf{p}/dt$ .

由 8.2 节导出的方程(8.21), (8.22), (8.23)和(8.24)的逆方程, 得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x'} &= \gamma \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right); \\ \frac{\partial}{\partial y'} &= \frac{\partial}{\partial y}; \quad \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial t'} &= \gamma \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad (10.16)$$

用  $x' = X'_1; y' = X'_2; z' = X'_3; ict' = X'_4$  等代入, 得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial X'_1} &= \gamma \left( \frac{\partial}{\partial X_1} + i \frac{v}{c} \frac{\partial}{\partial X_4} \right); \\ \frac{\partial}{\partial X'_2} &= \frac{\partial}{\partial X_2}; \\ \frac{\partial}{\partial X'_3} &= \frac{\partial}{\partial X_3}; \\ \frac{\partial}{\partial X'_4} &= \gamma \left( \frac{\partial}{\partial X_4} - i \frac{v}{c} \frac{\partial}{\partial X_1} \right).\end{aligned}\quad (10.17)$$

比较方程(10.17)和方程(10.1), 可见  $\partial/\partial X_1; \partial/\partial X_2; \partial/\partial X_3; \partial/\partial X_4$  和四维矢量的变换方式相同. 用符号  $\square$  表示具有分量  $\partial/\partial X_1, \partial/\partial X_2, \partial/\partial X_3, \partial/\partial X_4$  的四维矢量, 我们有

$$\square' = A \square, \quad (10.18)$$

或

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X'_1} \\ \frac{\partial}{\partial X'_2} \\ \frac{\partial}{\partial X'_3} \\ \frac{\partial}{\partial X'_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i \frac{v}{c} \gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i \frac{v}{c} \gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} \\ \frac{\partial}{\partial X_2} \\ \frac{\partial}{\partial X_3} \\ \frac{\partial}{\partial X_4} \end{bmatrix}. \quad (10.19)$$

对于  $X_1 X_2 X_3 X_4$  空间中的任意两个四维矢量  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$ , 当标积被定义为

$$\tilde{\mathbf{AB}} = [A_1, A_2, A_3, A_4] \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 + A_4 B_4 \quad (10.20)$$

时, 标积为洛伦兹不变量, 这是因为

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{AB}}' &= \text{tr}(\Lambda \mathbf{A}) \Lambda \mathbf{B} \\ &= \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\Lambda} \Lambda \mathbf{B} = \tilde{\mathbf{AB}}.\end{aligned}$$

因此, 当坐标和时间按洛伦兹变换式变换时,  $\square$  变换成  $\square'$ ,  $\square'$ , 从而达朗贝尔算符  $\square^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$  变换成  $\square'^2 = \nabla'^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2}$ . 这与方程(9.22)一致.

### 10.3 势 $\phi$ 和 $\mathbf{A}$ 的方程的相对论变换

#### 10.3.1 电荷密度和电流密度的变换

考虑以匀速  $\mathbf{u}$  相对惯性系  $\Sigma$  运动的均匀连续电荷分布  $\rho$ , 该电荷分布的四维速度由方程(10.13)给出, 等于

$$\mathbf{U} = \text{tr} \left[ \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{(1 - u^2/c^2)}}, \frac{ic}{\sqrt{(1 - u^2/c^2)}} \right],$$

将四维速度  $\mathbf{U}$  乘以  $\rho_0$ , 其中  $\rho_0$  为在坐标系  $\Sigma^0$  (电荷分布在其中静止) 中的电荷密度. 由于  $\rho_0$  为常数,  $\rho_0 \mathbf{U}$  为四维矢量, 于是  $\text{tr} [\rho_0 \mathbf{u} / (1 - u^2/c^2)^{1/2}, i c \rho_0 / (1 - u^2/c^2)^{1/2}]$  为四维矢量. 一个物体在  $\Sigma^0$  中静止时具有体积  $V_0$ , 在相对  $\Sigma^0$  以三维速度  $\mathbf{u}$  运动的坐标系  $\Sigma$  中测量时它的体积减小为

$V_0(1 - u^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$ . 若把总电荷不变原理当作公理, 则  $\rho_0/(1 - u^2/c^2)^{1/2}$  便等于坐标系  $\Sigma$  (电荷分布以匀速  $u$  相对它运动) 中的电荷密度  $\rho$ . 与此类似  $\rho_0 \mathbf{u}/(1 - u^2/c^2)^{1/2}$  等于  $\Sigma$  中的运载电流密度. 因此

$$\rho_0 \mathbf{U} = \text{tr} [\mathbf{J}, i\epsilon\rho] = \text{tr} [J_x, J_y, J_z, i\epsilon\rho]$$

为四维矢量.

当推导  $\mathbf{J}$  和  $\rho$  的变换时, 有时采用另一方法. 它是根据连续性方程, 即

$$\text{div } \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (10.21)$$

在 3.3 节中我们证明了连续性方程可由麦克斯韦方程组导出. 如果用  $X_1, X_2, X_3, X_4$  表示方程(10.21), 便得到

$$\frac{\partial J_1}{\partial X_1} + \frac{\partial J_2}{\partial X_2} + \frac{\partial J_3}{\partial X_3} + \frac{\partial i\epsilon\rho}{\partial X_4} = 0, \quad (10.22)$$

或

$$\square \mathbf{J} = 0, \quad (10.23)$$

其中

$$\mathbf{J} = \text{tr} [J_1, J_2, J_3, J_4] = \text{tr} [J_x, J_y, J_z, i\epsilon\rho]. \quad (10.24)$$

由于  $\square$  像四维矢量一样变换,

$$\square = A^{-1} \square' = \tilde{A} \square',$$

因此

$$\square = \text{tr} (\tilde{A} \square') = \square' \text{tr} (\tilde{A}) = \square' A. \quad (10.25)$$

代入方程(10.23),

$$\square \mathbf{J} = \square' A \mathbf{J} = 0. \quad (10.26)$$

如果电磁定律服从相对性原理, 则连续性方程在  $\Sigma'$  中成立, 于是在  $\Sigma'$  中有

$$\square' \mathbf{J}' = 0, \quad (10.27)$$

方程(10.26)和(10.27)具有相同数学形式, 并且如果

$$\mathbf{J}' = \Lambda \mathbf{J}, \quad (10.28)$$

即如果  $\mathbf{J} = \text{tr}[J_x, J_y, J_z, i c \rho]$  是四维矢量，则此二方程相同。如果  $\mathbf{J}$  是四维矢量，则

$$\begin{aligned} J'_1 &= \gamma \left( J_1 + i \frac{v}{c} J_4 \right) \quad \text{或} \quad J'_x = \gamma (J_x - v \rho), \\ J'_2 &= J_2 \quad \text{或} \quad J'_y = J_y, \\ J'_3 &= J_3 \quad \text{或} \quad J'_z = J_z, \\ J'_4 &= \gamma \left( J_4 - i \frac{v}{c} J_1 \right) \quad \text{或} \quad \rho' = \gamma \left( \rho - \frac{v J_x}{c^2} \right). \end{aligned}$$

这些变换式与在 8.4 节导出的变换式相同。

### 10.3.2 洛伦兹条件

对于真空情形，在  $\Sigma$  中洛伦兹条件变为

$$\text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad (10.29)$$

或者，用变量  $X_1, X_2, X_3, X_4$ ，

$$\frac{\partial A_x}{\partial X_1} + \frac{\partial A_y}{\partial X_2} + \frac{\partial A_z}{\partial X_3} + \frac{\partial \left( i \frac{\phi}{c} \right)}{\partial X_4} = 0, \quad (10.30)$$

即

$$\square \mathbf{A} = 0; \quad (10.31)$$

其中  $\mathbf{A}$  是矩阵  $\text{tr} [A_x, A_y, A_z, i \frac{\phi}{c}]$ 。

由方程(10.25)， $\square = \square' \Lambda$ ，于是方程(10.31)变为

$$\square' \Lambda \mathbf{A} = 0. \quad (10.32)$$

如果电磁定律是洛伦兹协变的，则在  $\Sigma'$  中应有

$$\square' \Lambda' \mathbf{A}' = 0. \quad (10.33)$$

方程(10.32)和(10.33)具有相同的数学形式，并且如果

$$\mathbf{A}' = \Lambda \mathbf{A}, \quad (10.34)$$

即如果  $\mathbf{A} = \text{tr}[A_x, A_y, A_z, i \phi / c]$  是四维矢量，则此二方

程相同。方程(10.31)左边是四维矢量的四维散度。如果  $\mathbf{A}$  为四维矢量，则有

$$A'_1 = \gamma \left( A_1 + i \frac{v}{c} A_4 \right), \quad A'_x = \gamma \left( A_x - \frac{v}{c^2} \phi \right),$$

$$A'_2 = A_2, \quad A'_y = A_y,$$

$$A'_3 = A_3, \quad A'_z = A_z,$$

$$A'_4 = \gamma \left( A_4 - i \frac{v}{c} A_1 \right), \quad \phi' = \gamma(\phi - v A_x).$$

这些方程与 9.2 节导出的方程一致。

### 10.3.3 势的微分方程的变换

在 9.1 节中我们曾证明，在  $\Sigma$  中

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}, \quad (10.35)$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\rho/\epsilon_0. \quad (10.36)$$

这两个方程可以合写为一个矩阵方程

$$\square \square \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad (10.37)$$

由于  $\square \square = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ , 方程(10.37)等同于

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \\ i \frac{\phi}{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla^2 A_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} \\ \nabla^2 A_y - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} \\ \nabla^2 A_z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} \\ \frac{i}{c} \left( \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu_0 J_x \\ -\mu_0 J_y \\ -\mu_0 J_z \\ -i \mu_0 c \rho \end{bmatrix}.$$

如果两个矩阵相等，则一矩阵的每个矩阵元必等于另一矩阵的对应矩阵元，因此有

$$\nabla^2 A_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = -\mu_0 J_x, \text{ 等等.} \quad (10.38)$$

这与方程(10.35)和(10.36)一致。

如果电磁定律是洛伦兹协变的，则在  $\Sigma'$  中有

$$\tilde{\square}' \square' \mathbf{A}' = -\mu_0 \mathbf{J}'. \quad (10.39)$$

由于  $\square' = \Lambda \square$ ,  $\tilde{\square}' = \tilde{\Lambda} \tilde{\square}$ , 以及如果  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{J}$  为四维矢量，就有  $\mathbf{A}' = \Lambda \mathbf{A}$  和  $\mathbf{J}' = \Lambda \mathbf{J}$ . 因此方程(10.39)变成

$$\tilde{\square} \tilde{\Lambda} \Lambda \square \Lambda \mathbf{A} = -\mu_0 \Lambda \mathbf{J},$$

或者, 由于  $\tilde{\Lambda} \Lambda = \mathbf{I}$ , 有

$$\tilde{\square} \square \Lambda \mathbf{A} = -\mu_0 \Lambda \mathbf{J}. \quad (10.40)$$

由于惯性系  $\Sigma'$  相对  $\Sigma$  作匀速运动,  $v$  和  $\gamma$  都是常数, 于是  $\Lambda$  中所有的项都是常数, 因此方程(10.40)可改写为

$$\Lambda \tilde{\square} \square \mathbf{A} = -\Lambda \mu_0 \mathbf{J}. \quad (10.41)$$

用  $\Lambda^{-1}$  左乘方程(10.41)的两边, 得到

$$\tilde{\square} \square \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}.$$

这与方程(10.37)相同, 因而证实了关于势  $\phi$  和  $\mathbf{A}$  的微分方程是洛伦兹协变的。

正如在 9.3 节中所述,  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$  的变换可从  $\mathbf{A}$  和  $\phi$  的变换式得出。

#### 10.4 麦克斯韦方程组的矩阵表示

为了方便起见, 我们在坐标系  $\Sigma$  中引进三个反对称笛卡儿张量  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{f}^*$  和  $\mathbf{g}$ . 把它们表示成矩阵形式, 就是

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 & B_x & -B_y & -iE_z/c \\ -B_x & 0 & B_z & -iE_y/c \\ B_y & -B_z & 0 & -iE_x/c \\ iE_x/c & iE_y/c & iE_z/c & 0 \end{bmatrix} \quad (10.42)$$

$$\mathbf{f}^* = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{i}{c}E_z & \frac{i}{c}E_y & B_x \\ \frac{i}{c}E_z & 0 & -\frac{i}{c}E_x & B_y \\ -\frac{i}{c}E_y & \frac{i}{c}E_x & 0 & B_z \\ -B_x & -B_y & -B_z & 0 \end{bmatrix}, \quad (10.43)$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 & H_z & -H_y & -icD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -icD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -icD_z \\ icD_x & icD_y & icD_z & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.44)$$

在  $\Sigma'$  中可以定义类似的张量。在第五、六、七章中，我们曾用符号  $\mathbf{f}$  表示三维力。本节中是不会发生混淆的，因为符号  $\mathbf{f}$  所指的是什么量，从课文中总是很显然的。

在附录五中阐明，如果  $\mathbf{f}$  为二阶笛卡儿张量，它应当按照方程

$$\mathbf{f}' = \Lambda \mathbf{f} \tilde{\Lambda} \quad (10.45)$$

来变换，其中  $\Lambda$  为由方程 (10.4) 定义的变换矩阵。 $\Lambda \mathbf{f} \tilde{\Lambda}$  等于

$$\begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & i \frac{v}{c} \gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i \frac{v}{c} \gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \times \begin{bmatrix} 0 & B_x & B_y & -iE_x/c \\ -B_x & 0 & B_z & -iE_y/c \\ B_y & -B_z & 0 & -iE_z/c \\ i\frac{E_x}{c} & i\frac{E_y}{c} & i\frac{E_z}{c} & 0 \end{bmatrix} \\
& \times \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -i\frac{v}{c}\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} 0 & \gamma \left( B_x - \frac{v}{c^2} E_y \right) & & \\ -\gamma \left( B_x - \frac{v}{c^2} E_y \right) & 0 & & \\ \gamma \left( B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right) & -B_x & & \\ i\frac{E_x}{c} & \frac{i}{c} \gamma (E_y - vB_x) & & \\ & & & \\ -\gamma \left( B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right) & -\frac{iE_x}{c} & & \\ B_x & -\frac{i}{c} \gamma (E_y - vB_x) & & \\ 0 & -\frac{i}{c} \gamma (E_z + vB_y) & & \\ & & & \\ \frac{i}{c} \gamma (E_z + vB_y) & 0 & & \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

如果承认分别由方程(8.40)和(8.41)给出的关于  $\mathbf{E}'$  和  $\mathbf{B}'$

的变换式(它们也在 9.3 节导出过), 则最后的矩阵等于

$$\begin{bmatrix} 0 & B'_z & -B'_y & -iE'_z/c \\ -B'_z & 0 & B'_x & -iE'_y/c \\ B'_y & -B'_x & 0 & -iE'_z/c \\ iE'_z/c & iE'_y/c & iE'_z/c & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{f}'.$$

因此, 如果承认在 9.3 节和第八章中(或者如 10.3.3 节中指出的那样)导出的关于  $\mathbf{E}'$  和  $\mathbf{B}'$  的变换式, 就可推出  $\mathbf{f}$  为二阶张量。用同样方法可以证明  $\mathbf{f}^*$  为二阶张量, 并且如果也承认 8.5 节中导出的关于  $\mathbf{D}$  和  $\mathbf{H}$  的变换式, 就可推出  $\mathbf{g}$  也是二阶张量。

考虑方程

$$\square \mathbf{f}^* = \mathbf{O}, \quad (10.46)$$

其中

$$\mathbf{O} = [0 \ 0 \ 0 \ 0].$$

把方程(10.46)写成分量,

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right] \\ & \times \begin{bmatrix} 0 & -iE_z & \frac{i}{c} E_y & B_x \\ \frac{i}{c} E_z & 0 & -\frac{i}{c} E_x & B_y \\ -\frac{i}{c} E_y & \frac{i}{c} E_x & 0 & B_z \\ -B_x & -B_y & -B_z & 0 \end{bmatrix} \\ & = [0 \ 0 \ 0 \ 0], \end{aligned}$$

应用矩阵代数法则, 得到

$$\text{tr} \begin{bmatrix} 0 & +\frac{i}{c} \frac{\partial E_z}{\partial y} & -\frac{i}{c} \frac{\partial E_y}{\partial z} & +\frac{i}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t} \\ -\frac{i}{c} \frac{\partial E_z}{\partial x} & 0 & +\frac{i}{c} \frac{\partial E_x}{\partial z} & +\frac{i}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{i}{c} \frac{\partial E_y}{\partial x} & -\frac{i}{c} \frac{\partial E_x}{\partial y} & 0 & +\frac{i}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t} \\ \left( \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) & & & 0 \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]. \quad (10.47)$$

方程 (10.47) 左边行矩阵的每个元素都必定等于零。用  $c/i$  乘前三个元素，并令它们等于零，得到

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{array} \right\} \text{curl } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

令方程(10.47)左边矩阵的最后一元素等于零，便给出

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \text{div } \mathbf{B} = 0.$$

于是两个方程  $\text{curl } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$  和  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  均可由一个矩阵方程  $\tilde{\Delta} f^* = \tilde{\mathbf{O}}$  来表示。

如果  $f^*$  为张量，则  $f^{**} = A f^* \tilde{A}$ ,  $f^* = \tilde{A} f^{**} A$ . 由方程(10.25), 有.  $\tilde{\Delta} = \tilde{\Delta}' A$ . 类似地,  $\tilde{\mathbf{O}} = \tilde{\mathbf{O}}' A$ . 代入方程

$$\tilde{\Delta} f^* = \tilde{\mathbf{O}}, \quad (10.46)$$

得到  $\tilde{\Delta}' A \tilde{A} f^* A = \tilde{\mathbf{O}}' A$ ,

或  $\tilde{\Delta}' f^{**} A = \tilde{\mathbf{O}}' A$ .

两端用  $A^{-1}$  右乘, 得

$$\tilde{\Delta}' f^{**} = \tilde{\mathbf{O}}'. \quad (10.48)$$

因此,如果  $\mathbf{f}^*$  为张量,矩阵方程  $\square \mathbf{f}^* = \tilde{\mathbf{O}}$  便是洛伦兹协变的。在证明  $\mathbf{f}^*$  为张量时,我们假定了第八章中导出的  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$  的变换式是正确的。换个办法,如果开始时先不假定  $\mathbf{f}^*$  是张量,而假定它只是一个矩阵形式的符号阵列,则由  $\square = \tilde{\mathbf{O}}' \Lambda$  和  $\tilde{\mathbf{O}} = \tilde{\mathbf{O}}' \Lambda$ , 方程  $\square \mathbf{f}^* = \tilde{\mathbf{O}}$  变为

$$\tilde{\mathbf{O}}' \Lambda \mathbf{f}^* = \tilde{\mathbf{O}}' \Lambda,$$

两边用  $\tilde{\Lambda}$  右乘,并记住  $\Lambda \tilde{\Lambda} = \mathbf{I}$ , 得到

$$\tilde{\mathbf{O}}' \Lambda \mathbf{f}^* \tilde{\Lambda} = \tilde{\mathbf{O}}', \quad (10.49)$$

这与方程

$$\square' \mathbf{f}^* = \tilde{\mathbf{O}}' \quad (10.50)$$

具有相同的数学形式,如果麦克斯韦方程组服从相对性原理(10.50)式便会成立。如果  $\mathbf{f}'^* = \Lambda \mathbf{f}^* \tilde{\Lambda}$ , 方程(10.49)便与(10.50)相同。因此,如果麦克斯韦方程组服从相对性原理,则  $\mathbf{f}^*$  必定是二阶张量。于是,把10.4节开头假定了  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$  的变换式而证明  $\mathbf{f}^*$  为张量的那段论证倒过来,便可得出  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{B}$  的变换式。

现在考虑方程

$$\square \mathbf{g} = -\tilde{\mathbf{J}}, \quad (10.52)$$

或

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right] \\ & \times \begin{bmatrix} 0 & H_z & -H_y & -icD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -icD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -icD_z \\ icD_x & icD_y & icD_z & 0 \end{bmatrix} \\ & = [-J_x - J_y, -J_z - i\rho]. \end{aligned}$$

应用矩阵乘法规则可证明矩阵方程(10.52)等价于两个方程

$$\operatorname{curl} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho.$$

在 10.3.1 节我们曾证明  $\mathbf{J}' = \Lambda \mathbf{J}$ , 或者  $\mathbf{J} = \tilde{\Lambda} \mathbf{J}'$ , 因此  $\tilde{\mathbf{J}} = \tilde{\mathbf{J}}' \Lambda$ ; 类似地  $\tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\mathbf{D}}' \Lambda$ . 如果  $\mathbf{g}$  为二阶张量, 则  $\mathbf{g}' = \tilde{\Lambda} \mathbf{g}' \Lambda$ . 代入方程(10.52), 便得到

$$\tilde{\mathbf{D}}' \Lambda \tilde{\Lambda} \mathbf{g}' \Lambda = -\tilde{\mathbf{J}}' \Lambda,$$

用  $\Lambda^{-1}$  右乘, 得

$$\tilde{\mathbf{D}}' \mathbf{g}' = -\tilde{\mathbf{J}}' \quad (10.53)$$

因此, 如果  $\mathbf{g}$  为二阶张量, 则矩阵方程 (10.52) 就是洛伦兹协变的. 我们曾用  $\mathbf{H}$  和  $\mathbf{D}$  的变换式证明  $\mathbf{g}$  为张量. 换个办法, 也可先证明如果麦克斯韦方程组在一切惯性系中具有相同数学形式则  $\mathbf{g}$  必为张量, 从而得出  $\mathbf{H}$  和  $\mathbf{D}$  的变换式.

麦克斯韦方程组可以归纳为两个矩阵方程

$$\tilde{\mathbf{D}} \mathbf{f}^* = \tilde{\mathbf{O}}, \quad (10.54)$$

$$\tilde{\mathbf{D}} \mathbf{g} = -\tilde{\mathbf{J}}. \quad (10.55)$$

我们证明了这两个方程是洛伦兹协变的, 并指出有基于不同初始假设的两种可能的途径; 选择哪一种初始假设在很大程度上是个人爱好的问题. 重要的是要认识到, 麦克斯韦方程组以及关于势  $\phi$  和  $\mathbf{A}$  的方程构成了一个洛伦兹协变的自相协调的理论.

带电粒子在电场  $\mathbf{E}$  和磁场  $\mathbf{B}$  中的运动方程也可写成矩阵形式, 即

$$\mathbf{F} = \left( m_0 \frac{d^2 \mathbf{X}}{d\tau^2} \right) = q \mathbf{f} \mathbf{U}, \quad (10.56)$$

其中  $\mathbf{F}$  为作用在电荷上的四维力. 由方程(10.15)给出;  $\mathbf{U}$  为由方程(10.13)定义的电荷四维速度,  $q$  为电量, 而  $\mathbf{f}$  为由方程(10.42)定义的张量. 把方程(10.56)右边完整写出, 有

$$q\mathbf{f}\mathbf{U} = q \begin{bmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\frac{iE_x}{c} \\ -B_z & 0 & B_x & \frac{-iE_y}{c} \\ B_y & -B_x & 0 & -\frac{iE_z}{c} \\ \frac{iE_x}{c} & \frac{iE_y}{c} & \frac{iE_z}{c} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{u_x}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} \\ \frac{u_y}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} \\ \frac{u_z}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} \\ \frac{ic}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} \begin{bmatrix} qE_x + q(\mathbf{u} \times \mathbf{B})_x \\ qE_y + q(\mathbf{u} \times \mathbf{B})_y \\ qE_z + q(\mathbf{u} \times \mathbf{B})_z \\ \frac{iq\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}}{c} \end{bmatrix}. \quad (10.57)$$

现在

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{(1-u^2/c^2)}} \text{tr} \left[ f_x, f_y, f_z, \frac{i}{c} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \right] \quad (10.15a)$$

在方程(10.15a)中,  $\mathbf{f}$  为作用在以三维速度  $\mathbf{u}$  运动的粒子上的三维力。对于一个在电场  $\mathbf{E}$  和磁场  $\mathbf{B}$  中运动的粒子三维力  $\mathbf{f}$  就是洛伦兹力, 即,

$$\mathbf{f} = q\mathbf{E} + q\mathbf{u} \times \mathbf{B},$$

以及

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{u} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{u} + q(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}.$$

因此方程(10.57)和(10.15a)的右端是相同的, 于是

$$\mathbf{F} = q\mathbf{f}\mathbf{U} \quad (10.56)$$

便是在电场与磁场中运动的带电粒子的相对论运动方程。

## 10.5 麦克斯韦方程组的张量表示

在 10.4 节中, 我们用矩阵表示二阶笛卡儿张量, 把麦克斯韦方程组表示为矩阵形式. 狹义相对论的高级教程多数采用普遍张量分析. 如果三维空间矢量的变换具有形式

$$A'_i = \sum_{k=1}^3 c_{ik} A_k, \quad (10.58)$$

则二阶张量定义为按如下方程变换的量:

$$T'_{ik} = \sum_{j=1}^3 \sum_{m=1}^3 c_{ij} c_{km} T_{jm}. \quad (10.59)$$

在附录五中证明了方程(10.59)与矩阵方程  $\mathbf{T}' = \mathbf{A}\mathbf{T}\tilde{\mathbf{A}}$  相同. 上述定义可推广到  $X_1, X_2, X_3, X_4$  空间中的四维矢量和二阶笛卡儿张量. 为了简化张量方程, 一般引进求和约定. 按此约定, 在张量方程中, 在一项中出现两次的任何指标都是求和指标, 并理解为该表达式对这个求和指标的一切可能值求和. 例如, 用求和约定, 方程(10.58)和(10.59)可写成

$$A'_i = c_{ik} A_k, \quad (10.60)$$

和

$$T'_{ik} = c_{ij} c_{km} T_{jm}. \quad (10.61)$$

在方程(10.60)中指标  $k$  出现两次, 这意味着右边的表达式对  $k$  的所有可能值求和. 在方程(10.61)中指标  $j$  和  $m$  重复两次, 因此意味着对  $j$  和  $m$  的所有可能值求和, 这便与方程(10.59)一致. 为避免混淆, 在一给定项中出现的同一指标不应多于两次. 通常用罗马字母表示从 1 到 3 的求和指标, 而用希腊字母表示从 1 到 4 的求和指标. 如果在张量方程的一项中, 某一指标只出现一次, 这一指标便称为自由指标. 我们假定对于自由指标的一切可能值该方程都是对的. 把 10.3

节和 10.4 节中讲过的矩阵方程写成张量形式，便可作为例证以说明这一约定。

连续性方程  $\square \mathbf{J} = 0$  可写为

$$\sum_{\alpha=1}^4 \frac{\partial J_\alpha}{\partial X_\alpha} = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial J_\alpha}{\partial X_\alpha} = 0; \quad (10.62)$$

洛伦兹条件可写成如下形式

$$\sum_{\alpha=1}^4 \frac{\partial A_\alpha}{\partial X_\alpha} = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial A_\alpha}{\partial X_\alpha} = 0, \quad (10.63)$$

在方程(10.62)和(10.63)中  $\alpha$  为求和指标，因为它出现两次。方程  $\square \square \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$  可改写为

$$\sum_v \frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial X_\nu \partial X_\nu} = -\mu_0 J_\alpha \quad \text{或} \quad \frac{\partial^2 A_\alpha}{\partial X_\nu \partial X_\alpha} = -\mu_0 J_\alpha. \quad (10.64)$$

在方程(10.64)中  $v$  为求和指标，因为它在左边出现两次，而  $\alpha$  为自由指标，它在方程(10.64)的每一项中只出现一次。对于  $\alpha$  的一切可能值，即  $\alpha = 1, 2, 3$  和 4，方程(10.64)均成立。

如果电磁势的各个方程是洛伦兹协变的，则  $\mathbf{A}$  必为一四维矢量。方程(10.42)给出的张量  $\mathbf{f}$  通常用关系式

$$f_{\lambda\mu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial X_\lambda} - \frac{\partial A_\lambda}{\partial X_\mu} \quad (10.65)$$

来定义，在  $\Sigma'$  中有类似的关系，即

$$f'_{\lambda\mu} = \frac{\partial A'_\mu}{\partial X'_\lambda} - \frac{\partial A'_\lambda}{\partial X'_\mu}, \quad (10.66)$$

上述张量可写为矩阵形式，

$$\mathbf{f}' = \square' \tilde{\mathbf{A}}' - \text{tr}(\square' \tilde{\mathbf{A}}').$$

但  $\square' = \Lambda \square$ ；并且，如果  $\mathbf{A}$  为四维矢量，便有  $\mathbf{A}' = \Lambda \mathbf{A}$  或者  $\mathbf{A}' = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\Lambda}$ 。因此

$$\begin{aligned} \mathbf{f}' &= \Lambda \square \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\Lambda} - \text{tr}(\Lambda \square \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\Lambda}) \\ &= \Lambda \square \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\Lambda} - \mathbf{A} \text{tr}(\square \tilde{\mathbf{A}}) \tilde{\Lambda} \end{aligned}$$

$$= A[\square \tilde{\mathbf{A}} - \text{tr}(\square \tilde{\mathbf{A}})]\tilde{\mathbf{A}} \\ = A\mathbf{f}\tilde{\mathbf{A}}.$$

因此,如果  $A$  为四维矢量,则  $\mathbf{f}$  为二阶笛卡儿张量.用  $\mathbf{B} = \text{curl } \mathbf{A}$  和  $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi - \partial \mathbf{A} / \partial t$  可以证明,由方程(10.65)定义的张量可写成如下形式:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & B_z & -B_y & -i \frac{E_x}{c} \\ -B_z & 0 & B_x & -i \frac{E_y}{c} \\ B_y & -B_x & 0 & -i \frac{E_z}{c} \\ \frac{iE_x}{c} & \frac{iE_y}{c} & \frac{iE_z}{c} & 0 \end{bmatrix} \quad (10.67)$$

例如

$$f_{24} = \frac{\partial A_4}{\partial X_2} - \frac{\partial A_2}{\partial X_4} \\ = \frac{\partial(i\phi/c)}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial(ict)} = \frac{i}{c} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{1}{ic} \frac{\partial A_y}{\partial t} \\ = -\frac{i}{c} \left( -\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t} \right) = -\frac{i}{c} E_y,$$

和

$$f_{12} = \frac{\partial A_2}{\partial X_1} - \frac{\partial A_1}{\partial X_2} \\ = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_z.$$

方程(10.67)中的其它项可同样得到.两个方程

$$\text{curl } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (10.68)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (10.69)$$

可用一个张量方程

$$\frac{\partial f_{\nu\sigma}}{\partial X_\alpha} + \frac{\partial f_{\sigma\alpha}}{\partial X_\nu} + \frac{\partial f_{\alpha\nu}}{\partial X_\sigma} = 0 \quad (10.70)$$

来表示, 其中  $\nu, \sigma, \alpha$  可取 1、2、3、4 中的任何值.乍一看来似乎有 64 个不同的方程, 因为对于  $\nu, \sigma$  和  $\alpha$  取数值 1、2、3、4, 有 64 种组合方法. 然而, 量  $\nu, \sigma, \alpha$  之中任何两个如果相等, 则方程(10.70)便是无意义的, 例如, 如果  $\nu = \alpha$ , 便有

$$\frac{\partial f_{\alpha\sigma}}{\partial X_\alpha} + \frac{\partial f_{\sigma\alpha}}{\partial X_\alpha} + \frac{\partial f_{\alpha\alpha}}{\partial X_\sigma} = 0 \quad (10.71)$$

但由于  $f$  为反对称张量  $f_{\alpha\alpha} = 0$ , 并且  $f_{\alpha\sigma} = -f_{\sigma\alpha}$ , 因此方程(10.71)左边自动为零. 于是, 为得到具有物理意义的方程,  $\nu, \sigma$  和  $\alpha$  必须全不一样. 这样还剩下 24 种组合; 但若变换方程(10.70)中的任意两个符号, 比如说  $\alpha$  和  $\sigma$ , 便得到

$$\frac{\partial f_{\nu\alpha}}{\partial X_\sigma} + \frac{\partial f_{\alpha\sigma}}{\partial X_\nu} + \frac{\partial f_{\sigma\nu}}{\partial X_\alpha} = 0 \quad (10.72)$$

但由于  $f$  为反对称张量,  $f_{\nu\alpha} = -f_{\alpha\nu}$  等等, 因此方程(10.72)变为

$$-\frac{\partial f_{\alpha\nu}}{\partial X_\sigma} - \frac{\partial f_{\sigma\alpha}}{\partial X_\nu} - \frac{\partial f_{\nu\sigma}}{\partial X_\alpha} = 0.$$

这与方程(10.70)相同. 三个不同的数可写成 6 种不同的次序, 因此方程(10.70)所表示的 64 个可能方程最后减少为四个独立方程, 典型的一组方程,  $\nu, \sigma, \alpha$  分别取值为 1, 2, 3; 4, 2, 3; 4, 3, 1 和 4, 1, 2. 如果  $\nu = 1, \sigma = 2, \alpha = 3$ , 方程(10.70)变为

$$\frac{\partial f_{12}}{\partial X_3} + \frac{\partial f_{23}}{\partial X_1} + \frac{\partial f_{31}}{\partial X_2} = 0,$$

或

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0,$$

或

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (10.73)$$

这与方程(10.69)相同。

如果  $\nu = 4, \sigma = 2, \alpha = 3$ , 则

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}; \quad (10.74)$$

如果  $\nu = 4, \sigma = 3, \alpha = 1$ , 则

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}; \quad (10.75)$$

如果  $\nu = 4, \sigma = 1, \alpha = 2$ , 则

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}. \quad (10.76)$$

方程(10.74), (10.75), (10.76)分别为方程(10.68)的  $x, y$  和  $z$  分量。

麦克斯韦方程组的另外两个方程可用张量方程

$$\sum_{\sigma=1}^4 \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial X_\sigma} = J_\nu \quad \text{或} \quad \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial X_\sigma} = J_\nu \quad (10.77)$$

来表示, 其中

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & +H_z & -H_y & -icD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -icD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -icD_z \\ icD_x & icD_y & icD_z & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (10.78)$$

在方程(10.77)中,  $\nu$  为自由指标, 因此方程(10.77)对于  $\nu=1, 2, 3, 4$  均成立. 如果在方程(10.77)中令  $\nu=1$ , 便得到

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial X_1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial X_2} + \frac{\partial g_{13}}{\partial X_3} + \frac{\partial g_{14}}{\partial X_4} = J_1,$$

$$0 + \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{ic}{c} \frac{\partial D_x}{\partial t} = J_z,$$

或

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_z + \frac{\partial D_x}{\partial t};$$

这是方程

$$\operatorname{curl} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (10.79)$$

的  $z$  分量. 用  $\nu=2$  和  $\nu=3$  代入方程(10.77), 便得到方程(10.79)的  $y$  和  $x$  分量. 用  $\nu=4$  代入方程(10.77), 得到

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho. \quad (10.80)$$

这样一来, 麦克斯韦方程组可写成张量形式, 四个方程就表示为两个张量方程, 即方程(10.70)和方程(10.77).

在电场  $\mathbf{E}$  和磁场  $\mathbf{B}$  中具有电量  $q$ , 四维速度  $\mathbf{U}$  和静止质量  $m_0$  的粒子的运动方程可写为

$$m_0 \frac{d^2 X_\mu}{d\tau^2} = q f_{\mu\nu} U_\nu, \quad (10.81)$$

与方程(10.56)相对应. 方程(10.81) (它与洛伦兹力相同) 只有在电荷  $q$  不辐射的情况下成立. 如果电荷辐射, 必须考虑辐射的反作用力.

进一步讲述张量方法将超出本书范围, 因为所需的张量分析基础要比附录五中所给出的更为完备. 本节只能看作是谬勒, 泡利, 巴诺夫斯基和菲利浦, 托尔曼, 福克 (Fock), 林德勒 (Rindler) 等人的更全面的著作的导言. 在这些著作中阐

述了张量分析理论，因此讲电磁理论也比本章更深入，引入了能量-动量场张量，并把理论全面推广。类似方法也被应用于连续介质力学。

## 参 考 文 献

- [1] Rohlich, F. 'The equations of motion of classical charges'. *Ann. Phys.* 13(1961) 93
- [2] Stratton, J. A. *Electromagnetic Theory*. p. 82. McGraw-Hill, New York and London, 1941

## 补 充 读 物

关于矩阵理论及其对电磁学与狭义相对论的应用，读者可参考海丁(Heading)著《矩阵论——物理工作者用》(《*Matrix Theory for Physicists*》)。关于电磁学的四维矢量方法，读者可参考斯恰顿(Stratton)著《电磁理论》(《*Electromagnetic Theory*》)以及谬勒著《相对论》。

关于更进一步的说明，读者可参考巴诺夫斯基和菲利浦著《经典电学与磁学》，泡利著《相对论》，托尔曼著《相对论，热力学与宇宙学》，福克著《空间，时间与引力理论》，林德勒著《狭义相对论》，阿霍洛尼著《狭义相对论》。

## 习 题

### 10.1 证明对于洛伦兹变换，算符

$$\square^2 = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

的数学形式不变。由此，利用电流密度与电荷密度构成四维矢量这一结果，证明，通过把  $(A, i\phi/c)$  作为四维矢量，可得出电磁场方程

$$\square^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}, \quad \square^2 \phi = -\rho/\epsilon_0,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

的不变性。

10.2 一团粒子云(其中所有粒子均以相同速度运动)在某惯性系  $\Sigma$  中具有数密度  $n$  和速度  $\mathbf{v}$ , 求出在相对  $\Sigma$  具有匀速  $\mathbf{V}$  的系中  $n$  和  $n\mathbf{v}$  的变换方程。

把一变化电荷分布作为这样一些云(包括各种  $\mathbf{v}$  值)的叠加, 其中所有粒子均具有相同的不变电量  $e$ , 从而证明电荷密度  $\rho$  和电流密度  $\mathbf{J}$  构成四维矢量  $(\mathbf{J}, ie\rho)$ . 由此证明, 只要假设  $(A_\mu, ie\phi/c)$  为四维矢量, 便保证了电磁方程

$$\square^2 \phi = -\rho/\epsilon_0, \quad \square^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

对于所有惯性系数学形式不变。

证明在  $\Sigma$  中具有速度  $\mathbf{v}$  的运动点电荷  $e$  的势可表为

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{[r + \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}/c]}, \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0 e \mathbf{v}}{4\pi[r + \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}/c]},$$

其中  $[f]$  表示  $f$  在时刻  $t - r/c$  的值, 而  $\mathbf{r}$  为电荷相对于场点的位置矢量。

10.3 证明两个四维矢量的标积为不变量。由此证明下述量为不变量: (a)  $A^2 - \phi^2/c^2$ ; (b)  $J^2 - c^2\rho^2$ ; (c)  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{J} - \rho\phi$ .

10.4 证明关于势  $\mathbf{A}$  和  $\phi$  的微分方程可写为

$$\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial X_\nu \partial \dot{X}_\nu} = -\mu_0 J_\mu,$$

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial X_\mu} = 0 \quad (\text{洛伦兹条件})$$

其中  $A_\mu = (A_x, A_y, A_z, ie\phi/c)$ ,  $J_\mu = (J_x, J_y, J_z, ie\rho)$ ,  $X_\mu = (x, y, z, ict)$ .

证明连续性方程可写为

$$\frac{\partial J_a}{\partial X_a} = 0.$$

10.5 证明麦克斯韦方程组可写为如下形式

$$\frac{\partial f_{\nu\sigma}}{\partial X_a} + \frac{\partial f_{\sigma\alpha}}{\partial X_\nu} + \frac{\partial f_{\alpha\nu}}{\partial X_\sigma} = 0,$$

$$\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial X_\sigma} = J_\nu.$$

其中  $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z, ic\rho)$ ,  $\mathbf{X} = (x, y, z, ict)$ . 定义张量  $\mathbf{f}$  和  $\mathbf{g}$ , 并把它们写成明显形式.

10.6 证明在电场  $\mathbf{E}$  和磁场  $\mathbf{B}$  中静止质量为  $m_0$  的电荷  $q$ , 只要不辐射, 其运动方程为

$$m_0 \frac{d^2 X_\mu}{d\tau^2} = q f_{\mu\nu} U_\nu.$$

讨论当电荷辐射时, 如果方程要仍保持为洛伦兹协变, 必须怎样修改这一方程.[关于后一部分可参考罗里契 (Rohlich<sup>[1]</sup>).]

10.7 证明如果  $\mathbf{S}$  和  $\mathbf{T}$  为  $X_1, X_2, X_3, X_4$  空间中的两个

二阶笛卡儿张量, 则  $\sum_{\nu=1}^4 \sum_{\sigma=1}^4 S_{\nu\sigma} T_{\nu\sigma} = \text{不变量}.$

由此证明下列诸量为不变量:

$$(a) \sum_{\nu=1}^4 \sum_{\sigma=1}^4 f_{\nu\sigma}^2 = 2 \left( B^2 - \frac{1}{c^2} E^2 \right)$$

$$(b) \sum_{\nu=1}^4 \sum_{\sigma=1}^4 f_{\nu\sigma} f_{\nu\sigma}^* = -4 \frac{i}{c} \mathbf{B} \cdot \mathbf{E}$$

$$(c) \sum_{\nu=1}^4 \sum_{\sigma=1}^4 g_{\nu\sigma}^2 = 2(H^2 - c^2 D^2)$$

$$(d) \sum_{\nu=1}^4 \sum_{\sigma=1}^4 g_{\nu\sigma} g_{\nu\sigma}^* = -4ic \mathbf{H} \cdot \mathbf{D}$$

$$(e) \sum_{\nu=1}^4 \sum_{\sigma=1}^4 f_{\nu\sigma}^* g_{\nu\sigma} = -2i \left( c \mathbf{B} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} \right)$$

$$(f) \sum_{\nu=1}^4 \sum_{\sigma=1}^4 f_{\nu\sigma} g_{\nu\sigma} = 2(\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D})$$

[上述方程中，张量  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{f}^*$  和  $\mathbf{g}$  分别由方程 (10.42), (10.43) 和 (10.44) 给出； $\mathbf{g}^*$  与  $\mathbf{f}^*$  类似，只要用  $\mathbf{H}$  代替  $\mathbf{B}$ , 用  $c^2 \mathbf{D}$  代替  $\mathbf{E}$ . 参考斯恰顿<sup>[2]</sup>.]

# 第十一章 狹义相对论评述与时钟佯謬

## 11.1 狹义相对论评述

从第三章起，我们阐述狭义相对论是从两个主要假设，即相对性原理和光速不变原理出发的。从第七章起当考虑电磁学时，又补充了一个电荷不变原理。我们阐明了，基于这些假设而发展的理论与实验结果符合得很好。在所有速度远小于光速的限度内，狭义相对论方程密切近似于牛顿力学方程，因而在这些情况下使用狭义相对论方程是不必要的。必须强调，狭义相对论不是对牛顿力学的一系列修补，而是一个全新的理论，牛顿力学只是它在某些条件下的近似。狭义相对论使我们必须放弃绝对时间概念，这个概念是作为假设而引入牛顿力学的。狭义相对论也使我们必须重新解释长度和质量。在3.6节曾指出，当引入与狭义相对论符合的异地事件同时性的新定义并使它与实际能做的实验相联系时，狭义相对论的预断看来是合情理的，并证明与已有的实验结果一致。

爱因斯坦选用光信号来定义异地钟的同步（见3.6节）。这使许多人以为狭义相对论中的时间概念依赖于光速传播定律。爱因斯坦本人的观点可由以下引语<sup>[1]</sup>来概括：

“相对论常遭指责，说它未加论证就把光的传播放在中心理论的地位，以光的传播定律作为时间概念的基础。然而情形大致如下。为了赋予时间概念以物理意义，需要某种过程，使能在不同地点之间建立起关系。对于时间的这样一种定义，选择何种过程是无关紧要的。可是理论只选用那些我们对之已有某些肯定了解的过程。”

程是有好处的。由于麦克斯韦与 H. A. 洛伦兹的研究，光在真空中的传播，是比任何其它可以考虑的过程，更符合这一要求的”。

光信号以外的任何过程，例如弹性联接器或者沿导线传送的电信号，均可用于异地钟的同步。如果同步化是以符合狭义相对论的方式进行的，那末，只要狭义相对论是正确的，便不会出现与光信号方法的矛盾。

在 1.4 节曾证明，当坐标和时间按伽利略变换来转换时，牛顿力学方程服从相对性原理。关于这一点，我们曾用船上与岸上的观察者对匀速航海的船的甲板上网球赛的解释来加以说明。两个观察者都能用牛顿力学解释所发生的情况，但他们对所有物理量的测量结果却不尽相同。例如，关于比赛过程中某一特定瞬时的网球速度，他们就不会记录下同一数值。如果船的速度可以同光速相比，就必须不用牛顿力学而用狭义相对论来解释船上的网球赛。在这种情况下，船上和岸上的观察者，不仅对于球速，而且对于球场在运动方向的长度，都会分别测得不同的数值。所测得的各个事件的时间也将不同，但两位观察者对于球落在场内或场外的看法将是一致的。他们对于各个事件发生的次序以及对比赛各阶段的比分，看法都是一致的。

以上例子是用船上观察者和岸上观察者所测量出的结果来进行讨论的。在全书中广泛地应用了这一阐述方法。在 3.11 节曾讨论了在狭义相对论中观察者的作用，那里就已指出在狭义相对论和牛顿力学中观察者的作用是完全相同的，因此不能说哪一个理论比另一个更“唯心主义”。按照两种理论，测量均可用仪器进行，信息被传送到基地而后输入计算机，在建造并装好仪器之后，观察者只需在必要时读出结果并解释结果就行了。两种理论对于具体实验会得到的结果将作出不同的预断。在课文中时常引进观察者只是试图使解释容

易理解一些，不应认为观察者有深刻的形而上学的意义。

狭义相对论变换式把一个惯性系中某个量的测量值与同一量在相对第一个惯性系作匀速运动的惯性系中的测量值联系起来。在经典物理学范围内是可以从两个惯性系来同时测量同一体系的。例如，火车上的乘客和坐在路轨附近的火车监视人均可测量火车汽笛的频率并比较他们的结果。粒子速度必须可同光速相比才有必要应用狭义相对论变换。具有这样高速度的粒子只有原子粒子束。原子跃迁一般只产生一个光子，而这个光子只能被探测一次，或者被静止在  $\Sigma$  中的仪器探测，或者被静止在  $\Sigma'$  中的仪器探测。实验通常是在实验室中进行的。当光源在实验室中静止时便可测出原子跃迁的频率。设此频率为  $\nu'$ ，并且在此例中用  $\Sigma'$  表示实验室参考系。于是，应用狭义相对论变换，便可计算以匀速  $-v$  相对  $\Sigma'$  运动的惯性系  $\Sigma$  中光的频率  $\nu$ 。在  $\Sigma$  中光源以匀速  $+v$  运动。在实验室中可对以速度  $+v$  运动的原子进行实验，并将所测得的频率值与狭义相对论的预言进行比较。一般认为，如果在辐射原子、静止的参考系中，即在以匀速  $+v$  相对实验室运动的惯性系中同时进行测量，那么测得的光频率仍会是  $\nu'$ 。对频率的两次测量并不是对同一个光子在两个惯性系  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中同时进行的，而是在实验室中对不同实验条件下的不同光子相继进行的。如果已知在实验室中某种条件下得到的实验结果，那末就可以用狭义相对论变换来计算，当在实验室中用不同的实验条件下进行类似实验时会得到什么样的结果。

现在我们将比 3.7 节略为详细地考虑长度“缩短”现象。考虑一个“经典”物体，例如静止在实验室中的一根杆。设其原长为  $l_0$ 。现在考虑一个以匀速  $+v$  相对实验室 ( $\Sigma$ ) 运动的惯性系  $\Sigma'$ 。设在  $\Sigma'$  中静止的观察者用在  $\Sigma'$  中静止的材料建造了仪器并用该仪器来测量在实验室 ( $\Sigma$ ) 中静止的杆的长

度。按照狭义相对论，所测得的长度将小于  $l_0$ 。常常有人提出该缩短是否“真实”这一问题。当然这取决于提问者对真实一词如何理解。在  $\Sigma'$  中与  $\Sigma$  中相比，各种事件的描述是不同的。例如按照经典物理学，网球速度相对于运动的船也与相对于岸不同。当一个人改变他的任意的静止标准时，网球是否经受了“真实”的速度变化呢？期望球相对于船的速度测量值与同一球相对于岸的速度测量值不同是合理的。在第三章我们曾指出，按照相对论，同时性不是绝对的。而这一点如 3.6 节解释的那样旋转而导致长度的不同测量值。不仅长度的测量值在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中不同，而且还有一些其它的量，例如杆中电子和原子核电荷间的电力与磁力的测量值在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中也不同。当杆相对实验室 ( $\Sigma$ ) 静止时，相对于  $\Sigma$ ，在杆中离子之间将没有磁力而只有静电力（在离子的零点能可以略去的情况下）。相对于  $\Sigma'$  杆在运动，因而杆中离子之间的力将被解释为运动离子之间的电力与磁力的合力，因此在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中，杆内离子之间合力的大小将具有不同的数值。由于这些不同的数值，人们会认为离子的平衡位置和间隔相对  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  可能具有不同的数值；事实上在  $\Sigma'$  中原子间力的值将使得离子相对  $\Sigma'$  的平衡位置与杆在运动方向的“缩短”相一致。因此，尽管杆的各种性质的数值在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中都不一样，但在  $\Sigma$  或  $\Sigma'$  中，问题均能完全表达出，并且两种情形下所用定律完全相同；只是实验条件在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中不同而已。另一方面，如果杆相对于实验室运动，那末在这种情况下，实验室中的观察者将会测得杆的长度在其运动方向缩短。关于杆内离子之间的电力和磁力，他也会测得与相对杆静止的观察者不同的数值，这些不同数值与杆在其运动方向的缩短是一致的。长度缩短现象是互逆的。任何一个惯性系都不比别的惯性系优越；物理学定律在所有惯性系中都相同，但是在做实验时，在不同惯性系中实验

条件是不同的，因此包括长度和时间间隔的一些量的测量值在不同惯性系中将是不同的。

设相对实验室运动的观察者被加速到以不同的匀速相对于在实验室中静止的杆运动。设观察者是在不以任何方式干扰杆的情况下被加速的。如果他建立新的仪器来测量杆的长度并用氪 86 的橙红谱线波长进行校准，那么对于杆的长度他将记录下与他先前所测的不同的值。在这种情况下，被测体系（即杆）是“物理上没变化的”，其意义是：尽管相对杆的速度有变动的观察者得出的结果将变化，但相对杆静止的观察者得出的结果是不变的。

在整个讨论过程中我们强调了两个惯性系  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  一直以匀速相对运动。在这些条件下两个惯性系是完全等价的，因此长度缩短和时间膨胀是互逆的。关于当坐标系相对固定恒星加速时会不会发生什么情况，或者当测量仪器相对固定恒星加速时会不会发生什么情况的讨论将推迟到 11.2 节和第十二章。

狭义相对论的两个主要假设之一是相对性原理，按照这一原理，在所有惯性系中物理定律数学表达式的数学形式应当相同。现在从匀速航海的船的桅杆下落的球的轨道相对于船是直线，但相对于地球该轨道是抛物线。抛物线方程和直线方程不完全相同（尽管可以说直线是抛物线的极限情形）。有人论证道，由于相对于船和陆地，该球下落轨道的数学方程不精确相同，因此相对性原理不再成立了。也有人用类似的论点来反对狭义相对论中相对性原理的正确性，例如引用奥拉赫里的话[他用  $\beta$  代表  $(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ ]：

“按照爱因斯坦的看法，协变性这一事实（我们在电磁学的某些情形证明过）具有不容争辩的宇宙意义。但是让我们举一个初等的例子：

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - u^2 t'^2 = 0,$$

比如说是声波，对于给定的  $t'$  它代表一个球面。应用沃依格特 (Voigt) 变换(即洛伦兹变换)，我们发现它变为

$$\begin{aligned} & x^2 \beta^2 (1 - u^2 v^2/c^4) + y^2 + z^2 - 2x\beta^2 vt(1 - u^2/c^2) \\ & = t^2 \beta^2 (u^2 - v^2), \end{aligned}$$

只要  $u \neq c$ ，对于给定的  $t$  值它就代表一个椭球面。这两个方程不是协变的，它们不具有相同的形式。这是一个非常浅显的例子；但是我们没有看到有任何相对论的教科书，把它与协变原理协调起来。我们得出结论，除了协变性是自动的数学事实(即有关的各个量都以速度  $c$  传播时)的情况外，协变性是不成立的。因此我们不得不拒绝爱因斯坦的夸大的论断：‘普遍的自然界定律对于洛伦兹变换都是协变的。这是相对论对自然界定律所要求的一个明确的数学条件。由于这一点，这个理论成为有助于探索普遍的自然界的律而具有宝贵的启发作用的工具。’”

奥拉赫里的例子可以完全同样地用于球面光波以速度  $u' = c/n$  在静止于惯性系  $\Sigma'$  的水中的传播。相对于  $\Sigma$  波前将是椭球面。这个例子我们曾在 8.6.4 节中考虑过。奥拉赫里是从介质静止的特殊情形推出介质匀速运动的更一般情形的。将此论证过程逆转，可以说球面是椭球面的一个特殊简化情形。奥拉赫里的论据和那些因为从匀速运动的船桅杆下落的球相对于船按直线下落而相对于地球按抛物线下落就说牛顿力学不服从相对性原理的人们所用的论据是类似的。在球下落的例子中，不论  $\Sigma$  还是  $\Sigma'$  中球的加速度及其在运动中的变化均可由牛顿运动定律算出，并且在 1.4 节中我们证明了，当坐标和时间按伽利略变换式变换时，牛顿运动定律确实服从相对性原理。在 8.6.4 节中我们证明了运动介质中的光速可由麦克斯韦方程组和本构方程算出。在第八章较前部分我们证明了，麦克斯韦方程组和本构方程，当它们是指同一空间点和同一时刻的情况，是洛伦兹协变的。因此，虽然有奥拉赫里的

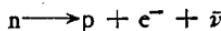
夸张的论断，描述光在运动介质中传播的定律，即麦克斯韦方程组和本构方程是洛伦兹协变的。类似地，对于运动介质中的声波，描述介质中的压力和密度如何随着介质中任一点的距离和时间而变化的方程也可表示为洛伦兹协变的形式（参看托尔曼<sup>[4]</sup>）。

在上面给出的引自奥拉赫里的一段话中，奥拉赫里引用了爱因斯坦的如下一句话：“这一理论成为有助于探索普遍的自然界定律而具有宝贵的启发作用的工具”。

在第五章所建立的相对论力学方程不是从洛伦兹变换导出的。第五章中所用的方法是修改牛顿力学的方程，使之当坐标和时间按洛伦兹变换式变换时服从相对性原理。然后新方程被用于带电粒子相对实验室的运动，并发现新方程的预言与实验结果很好地一致。现已证明，第五章所建立的相对论力学理论，准确到足以用于设计可将质子加速到超过  $10^{10}$  电子伏特能量的加速器。相对论力学便是狭义相对论作为“有助于探索普遍的自然界定律”的“具有宝贵的启发作用的工具”的一个例子。

有人曾说过，狭义相对论的方法与热力学中所用方法相类似。例如，引用爱因斯坦的话<sup>[5]</sup>：“从方法的观点看来，狭义相对性原理可以同关于第二类永动机不可能的卡诺原理相比；因为和后者一样，它也向我们提供了一切自然定律必须满足的条件。”

狭义相对论并不总是说什么事情将要发生，而常常是说，要想使理论符合狭义相对论什么事情就不能发生。在  $\beta$  衰变理论中可找到关于这一点的例子。在最初引进  $\beta$  衰变理论时，关于产生  $\beta$  衰变的各粒子间的相互作用知道得很少。 $\beta$  衰变的一个例子是中子衰变为质子加电子和反中微子：



按照量子力学， $\beta$  衰变的跃迁几率由  $\frac{2\pi}{\hbar} |H'_{fi}|^2 \rho(E)$  给出，其中  $\rho(E)$  是每单位能量间隔中系统的终态数；矩阵元  $H'_{fi}$  等于  $\int \psi_i^* H' \psi_f dV$ ，其中  $\psi_i$  是系统初态的波函数，而  $\psi_f$  是系统终态的波函数。在  $\beta$  衰变理论最初建立时，相互作用项  $H'$  的确切形式是不知道的。可以合理地假定  $H'$  以某种方式依赖于衰变核内中子、质子、电子和反中微子的波函数，因为这些波函数将是在空间同一点和同一瞬时发现粒子的几率的度量。（一度曾把波函数的导数也引进相互作用项，但用这些理论计算出的  $\beta$  衰变谱的形状被证明为与实验结果不符。）每个这样的波函数是一个具有四个分量的旋量，由这些波函数和狄拉克矩阵来组成二次线性组合共有 256 种独立的方式。泡利证明了在这些可能的组合中只有五种是洛伦兹协变的。这五种协变量的性质分别与标量、矢量、张量、轴矢量和赝标量相同，而五种“可能的”相互作用就采用这些名称。 $\beta$  衰变理论是建立在依赖于所有五种协变量的相互作用项的基础上的。于是就让实验决定在五种可能的相互作用形式中，究竟哪一种是存在的，以及它们的贡献大小如何。近来的实验表明，最大的贡献来自于矢量相互作用和轴矢量相互作用。

如果理论是洛伦兹协变的，那末每当坐标和时间出现在理论中，它们必须按照洛伦兹变换式来变换。类似地；所有速度必须按照相对论速度变换式变换。有时一个理论必需是洛伦兹协变的这一要求，便足以使我们能算出某些结果，例如在 4.4 节中，无需讨论光在运动介质中传播的实际机构，便从相对论速度变换式计算出运动介质中的光速。在 8.6.4 节中我们证明了洛伦兹协变的更完全的理论事实上的确给出了运动介质中光速的相同值。

我们并没有声称过狭义相对论是绝对正确的。在将来任

何时刻，它很可能又被某一个与实验结果符合得更好的新理论所代替。狭义相对论能够满意地解释现有的实验结果。应当记住，狭义相对论只对于描述惯性系中的现象成立。为了解释在加速的参考系中的现象以及存在强引力场时的现象，必须用广义相对论。然而，狭义相对论对于描述相对惯性系加速的粒子，例如电荷在电场中的运动是令人满意的。

一般说来，本书中没有考虑量子力学问题。建议读者在具有非相对论量子力学的全面基础之后，再学习相对论量子力学。在 6.5 节我们曾证明，德布洛意关系  $\lambda = h/p$  和狭义相对论是一致的。薛定谔方程是非相对论性的方程，并且可以证明，如果在代表粒子的波脉冲宽度内，势的变化可以忽略，那么薛定谔方程便密切近似于牛顿运动定律。为了得到在相对论性能量之下成立的方程，必须从方程 (9.69) 给出的哈密顿函数出发。这些方程中最著名的是狄拉克方程，它已被证明为适用于电子（具有自旋  $\frac{1}{2}$ ）。有兴趣的读者可参考曼德尔的书<sup>[6]</sup>。

对狭义相对论的全面逻辑分析感兴趣的读者可参考雷素伯 (Reichenbach<sup>[7]</sup>) 和格兰堡 (Grünbaum<sup>[30]</sup>) 的著作。

## 11.2 时钟佯谬简介

考虑两个钟 A 和 B。设钟 B 在地球上的实验室中静止，并设它处于惯性系  $\Sigma$  的原点。我们将忽略地球自转引起的效果。设另一个钟(钟 A)静止在以匀速  $v$  相对地球运动的火箭中。我们将假定在旅途的这一阶段火箭静止在惯性系  $\Sigma'$  的原点。设钟 B 相对于地球与钟 A 相对于火箭具有同样的性质。两个钟均可用某种原子频率校准。设火箭在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  的原点重合的时刻  $t = t' = 0$  离开地球，并设钟 A 和 B 是在这

一时刻校准的。设火箭在到达位于外层空间的钟 C 之前以匀速  $v$  行进，钟 C 相对于地球静止，如图 11.1(a) 所示。设用爱因斯坦所规定的光信号（见 3.6 节）使钟 C 与静止在地球上的钟 B 同步。设当火箭与钟 C 重合时，钟 B 和 C 的读数为  $(t_L)_{BC}$ ，而火箭上钟 A 的读数为  $(t'_R)_{BC}$ 。按照洛伦兹变换，对于  $\Sigma'$  的原点有

$$t = \gamma \left( t' + \frac{vx'}{c^2} \right) = \gamma t',$$

或

$$(t'_R)_{BC} = (t_L)_{BC} \sqrt{\left(1 - v^2/c^2\right)} - (t_L)_{BC} \left(1 - \frac{1}{2} v^2/c^2\right) \quad (11.1)$$

$$(t_L)_{BC} - (t'_R)_{BC} \Delta \frac{1}{2} (v^2/c^2) (t_L)_{BC}. \quad (11.2)$$

因此按照洛伦兹变换，火箭上钟 A 的读数将小于相对地球静止的钟 C 的读数。火箭上的钟所测的时间间隔  $(t'_R)_{BC}$  是原时间间隔，而相对地球静止的钟 B 和 C 的读数之差不是原时间间隔；方程 (11.1) 是时间膨胀的表达式。

现在我们来考虑，如果火箭在钟 C 的位置转向回来并以匀速  $v$  返回地球，会发生什么情况。为了转回来，火箭必须经受加速度。我们将假定火箭很快地转回来，然后以匀速  $v$  返回地球。在返回的旅途中，火箭是静止在一个与它飞出的前一半旅途中惯性系  $\Sigma'$  不同的惯性系，比如说  $\Sigma''$ 。惯性系  $\Sigma''$  以匀速  $v$  沿负  $Ox$  轴相对  $\Sigma$  运动，如图 11.1(c) 所示。一旦加速停止，狭义相对论的变换便又可以应用。在加速停止以后，关于火箭由 C 到 B 这段时间，火箭上的钟 A 所读的时间间隔  $(t'_R)_{CB}$  又是原时间间隔，而当火箭经过钟 C 和钟 B 时它们的读数差（即  $(t_L)_{CB}$ ）是非原时间间隔，因此我们将有

$$(t_L)_{CB} = \frac{(t'_R)_{CB}}{\sqrt{\left(1 - v^2/c^2\right)}} \quad (11.3)$$

或

$$(t'_R)_{CB} = (t_L)_{CB} \sqrt{(1 - v^2/c^2)} \Delta (t_L)_{CB} \left(1 - \frac{1}{2} v^2/c^2\right)$$

(11.4)

当钟 B 和钟 A 在旅行终点相遇时，它们的读数将是什么？在

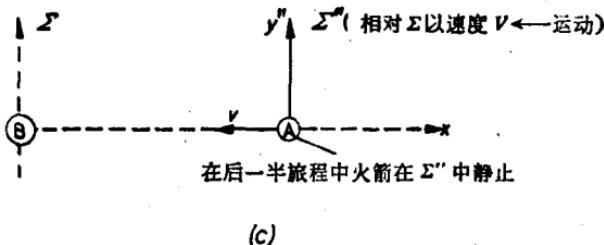
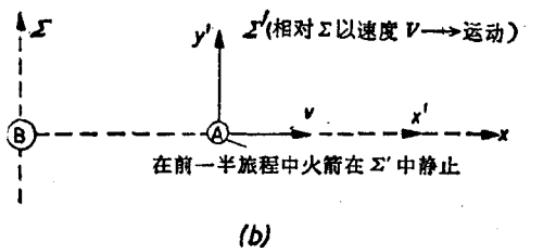
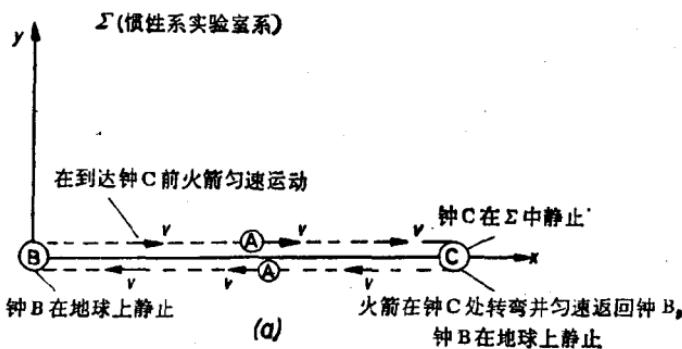


图 11.1 火箭上的钟 A 飞往外层空间。在到达钟 C (它相对地球静止) 前火箭以匀速  $v$  前进；然后火箭转向并以匀速  $v$  返回地球。

爱因斯坦 1905 年的文章中，他写道：

“由此得出以下的奇异结果。如果在 K 系的 A 点和 B 点置有静止的钟，它们在静止系统看来是同步的；如果 A 点的钟以速度  $v$  沿直线 AB 向 B 运动，那么当它到达 B 点时两个钟不再同步了，而是从 A 运动到 B 的钟比停在 B 的另一个钟落后了  $\frac{1}{2} tv^2/c^2$ （略去四阶和更高阶量）， $t$  是从 A 到 B 的旅程所占用的时间。”

立即可见，如果钟沿一条多角折线从 A 运动到 B，这一结论仍然成立，并且当 A 点与 B 点重合时也成立。

如果我们假定这个对多角形折线已证明为正确的结论对于连续弯曲的线也成立，我们就得到下述结果。如果在 A 点的两个同步钟之一沿闭曲线以常速度运动直到返回 A 点，旅行持续了  $t$  秒，则由保持静止的钟看来，旅行的钟在到达 A 时将慢了  $\frac{1}{2} tv^2/c^2$  秒。

因此我们得出结论，在其它条件均相同的情况下，位于赤道的平衡钟将比位于两极的完全类似的钟慢一个很小的数量”。

爱因斯坦的建议一般称为时钟假设。按照爱因斯坦的作法，可将方程 (11.1) 和 (11.4) 相加来得到由静止在地球上的钟 B 所测量的旅行总时间即  $(t_L)_{BCB} = t_L$ ，以及由静止在火箭上的钟 A 所测量的旅行总时间  $(t'_R)_{BCB} = t'_R$ 。我们得到

$$(t'_R)_{BCB} = (t_L)_{BCB} \sqrt{(1 - v^2/c^2)} \Delta (t_L)_{BCB} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right), \quad (11.5)$$

或

$$t'_R = t_L \sqrt{(1 - v^2/c^2)} \Delta t_L \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right). \quad (11.6)$$

这样，如果爱因斯坦的建议是正确的，那么在旅行的终点，火箭上钟的读数将小于留在地球上钟的读数；这是时钟佯谬的

一个例子。

在上述讨论中直接应用了洛伦兹变换。有时用 6.2 节所阐述的概念来进行这一计算。为利于那些已熟悉 6.2 节的读者，现在我们将给出这一途径的简短说明。在图 11.2 中用图象表示出火箭相对于地球的运动。用直角坐标系画出火箭相对地球的位移（即  $x$ ）对  $m = ct_L$  的图象。在飞出的一半旅途中，火箭上的钟 A 以匀速  $v$  相对  $\Sigma$  运动，因此它的“世界线”由一条与  $m$  轴成角度  $\phi = \tan^{-1} v/c$  而与  $x$  轴成角度  $(\pi/2 - \phi)$  的线  $OP$  来表示，如图 11.2 所示。在“世界点”  $P$  火箭与钟 C 重合。在地球上保持静止的钟 B 的世界线由图 11.2 的  $m$  轴表示，因此在时刻  $t_L/2$ （相对于地球），钟 B 位于“世界点”  $Q$ ，这时钟 A 与钟 C 在“世界点”  $P$  重合。距离  $QP$ （它等于  $vt_L/2$ ）

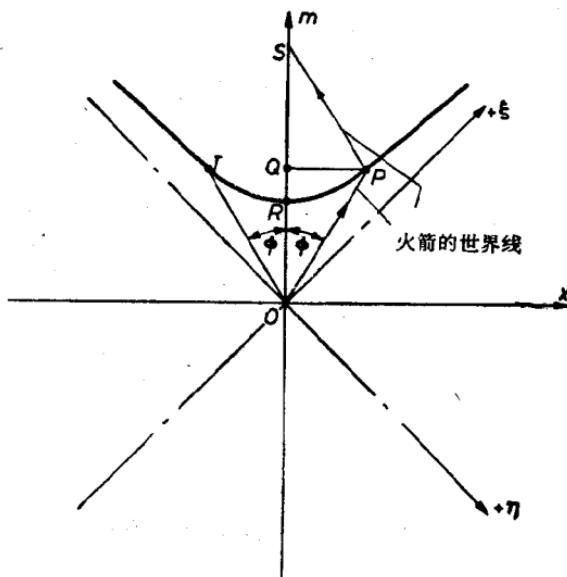


图 11.2 前图 11.1(a) 中所示火箭旅行的几何表示；火箭的“世界线”由线  $OP$  和  $PS$  表示。

代表火箭在时刻  $t_L/2$  (相对地球的时间) 的位移。过  $P$  点作一条平行于对应  $G = -1$  的标准双曲线的双曲线。在飞出的一半旅途中火箭于其中静止的坐标系  $\Sigma'$  的时间单位正比于  $OP$ , 而实验室系统  $\Sigma$  的时间单位正比于  $OR$ 。如果长度  $OP$  代表在火箭上的  $K$  个时间单位, 则  $OR$  代表实验室中的  $K$  个时间单位。因为  $OQ > OR$ ,  $OQ$  在实验室系统  $\Sigma$  中比  $OP$  在惯性系  $\Sigma'$  (在飞出的一半旅途中火箭于其中静止) 中代表着更长的时间, 因此当火箭位于世界点  $P$  时, 静止在实验室系统的钟  $C$  的读数将大于火箭上钟  $A$  的读数。转向后, 在返回的一半旅程中(这时它静止在惯性系  $\Sigma''$  中)火箭相对地球位移的“世界线”由线  $PS$  表示。火箭在后一半旅程中静止的坐标系  $\Sigma''$  中, 它的时间单位正比于  $OT$ , 它等于  $PS$ 。实验室系统中的时间单位仍然正比于  $OR$ 。因为  $SQ = OQ > OR$ , 在加速停止以后, 由火箭上的钟所测的返回一半旅途的时间间隔小于由相对地球静止的钟所测的该时间间隔。按照爱因斯坦 (1905), 火箭上钟的读数为  $OP$  (在  $\Sigma'$  中) 所代表的时间加上  $PS$  (在  $\Sigma''$  中) 所代表的时间, 它小于  $OS$  在  $\Sigma$  中所代表的时间, 这与方程(11.6)是一致的。

至此我们只考虑了除了转回来那一时刻外火箭始终以匀速运动的情况。爱因斯坦的理论可以推广到一般情形, 这时火箭经受一系列的加速度或者经受连续的加速度。在惯性系  $\Sigma$  (实验室系统) 中, 对于火箭在  $(x, y, z, t)$  和  $(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t + \delta t)$  这两个相继位置, 我们有

$$\left. \begin{aligned} \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 - c^2 \delta t^2 &= \delta s^2 = -c^2 \delta \tau^2 \\ \text{或 } \delta \tau &= \delta t \sqrt{(1 - u^2/c^2)} \end{aligned} \right\} \quad (11.7)$$

在方程(11.7)中,  $\delta s$  是与火箭相继二位置相对应的两个事件间的间距,  $u$  是火箭相对地球的速度, 而  $\delta \tau$  是两事件间的原时间隔, 因此  $\delta \tau$  等于由火箭上的钟所测量的此二事件之间

的时间间隔\*。按照爱因斯坦更早的文章，如果火箭在弯曲轨道上运动，可将方程(11.7)积分，便给出在一般情形下

$$\frac{1}{c} \int ds = \int d\tau = \int dt \sqrt{(1 - u^2/c^2)}, \quad (11.8)$$

其中  $u$  是火箭相对地球的瞬时速度值。在实验室系统中的旅行时间等于  $\int dt$ ，而火箭上的钟所测量的该时间应等于  $\int d\tau$ 。方程(11.8)是时钟假设的数学表达式。对于图 11.1 中所示的特殊情形，这时除了火箭转向的短时间外  $u = v$ ，我们有

$$\int d\tau = \sqrt{(1 - v^2/c^2)} \int dt, \text{ 或者 } t'_R = \sqrt{(1 - v^2/c^2)} t_L. \quad (11.9)$$

这与方程(11.6)一致。

方程(11.8)可用几何表出； $\int dt$  由图 11.2 中的长度  $OS$  给出，用的是适合于  $\Sigma$  的时间尺度，而对于代表一般情形下火箭运动的弯曲“世界线”， $\int d\tau$  沿弯曲的“世界线”计算，在每一阶段用适合于火箭在其中瞬时静止的惯性系的时间尺度。 $\int d\tau$  和  $\int ds$  均依赖于代表钟运动的实际“世界线”。两个积分均依赖于路径，因此  $d\tau$  和  $ds$  都不是全微分。

$t'_R$  一般不等于  $t_L$  这一结论叫作时钟佯谬。自从狭义相对论问世以来，时钟佯谬引起了大量的讨论，现在仍有为数众多的科学家不同意爱因斯坦的结论并提出如果实际进行实验，将会发现  $t'_R$  等于  $t_L$ 。时钟佯谬常常用同样的一对孪生子来表述，其中一个到外层空间去旅行然后返回地球，而另一个则在地球上保持静止。旅行者将比他留在家的孪生兄弟年轻，即衰老得少些吗？按照方程(11.5)他应该衰老得少些。由于很可能在不太遥远的未来，空间旅行会成为可行的事情，近来这场辩论又提出来了。尽管由于时钟佯谬引起的效应即使存

\* 注意，原时间隔  $\delta\tau$  与作一般运动的火箭上钟的实际行为一致这一点仍然是个假设，并不是上文的逻辑推论——译者注。

在也是很小的(因为  $t_L - t'_R \Delta \frac{1}{2} (\nu^2/c^2) t_L$ )，而且把火箭加速到可与光速比较的速度将是不可能的，因为这将需要太多的燃料。近来的争论在很大程度上是由丁勒 (Dingle<sup>[8]</sup>) 和麦克利 (McCrea<sup>[9]</sup>) 挑起的。丁勒力排众议，坚持如果进行实验的话，同样一对孪生子之间将不会有相对的年龄差，而  $t'_R$  将等于  $t_L$ 。

用人的生命来叙述时钟佯谬，可能引起感情上的影响，为避开这种影响我们将用放射性钟的读数来讨论时钟佯谬，并且为了简化讨论，我们开始讨论时钟佯谬时，将用图 11.1 中所示的旅行，其中除了转向时外，火箭以匀速  $\nu$  运动。争论双方都同意，在同样条件下，不论静止在火箭里还是实验室里，钟的读数都相同，例如引用邦迪 (Bondi<sup>[10]</sup>) 的话：

“如果一个惯性观察者为他自己造了一个用发条带动的钟，一秒钟滴嗒两次，那么，严格地复制这一钟设计的观察者将具有以同样方式(一秒钟滴嗒两次)测量他自己的时间的装置。这不是定理而是定义，是对任何观察者的秒的定义。也可以用记录时间的任何其它装置来代替发条带动的钟，例如原子的谱线，特定的酸腐蚀透一层特定厚度的钢所用的时间，养兔场一代兔子的寿命，放射性元素的衰变，人的衰老，等等。”

我们将用放射性元素的衰变速度来讨论时钟佯谬。如果在火箭离开地球的瞬间，开始有  $N_0$  个放射性原子静止在地球上，并有  $N_0$  个同样的原子静止在火箭上，那末当火箭返回地球时，按照放射性衰变的规律，实验室中所剩下的放射性原子数目(记作  $N_{\text{实验室}}$ ) 将由下式给出

$$N_{\text{实验室}} = N_0 e^{-t_L/T_0}, \quad (11.10)$$

其中  $t_L$  是在实验室中静止的钟所测的时间间隔。类似地，当返回地球时火箭上所剩下的放射性原子数目(记作  $N_{\text{火箭}}$ ) 由下

式给出

$$N_{\text{火箭}} = N_0 e^{-t'_R/T_0}, \quad (11.11)$$

其中  $t'_R$  是在火箭上静止的钟所测的时间间隔。假定不论放射性物质在实验室还是在火箭中静止，放射性物质均具有同样的平均寿命  $T_0$ 。如果按爱因斯坦的建议， $t'_R$  小于  $t_L$ ，那么就会在实验上发现  $N_{\text{火箭}}$  大于  $N_{\text{实验室}}$ ，而如果丁勒的观点被证明正确，就会发现  $N_{\text{火箭}}$  等于  $N_{\text{实验室}}$ 。应当注意到，如果爱因斯坦的观点被证明正确，那末，留在地球上的这箱放射性原子与在火箭中去旅行的那箱放射性原子之间相比较，便有了物理上的差别，因为实验室的这箱当中比起火箭的那箱当中有较高比例的放射性原子衰变了。当火箭转向时，它必须经受加速度并由一个惯性系转移到另一个惯性系，因此时钟佯谬涉及到要有一个钟有时相对于恒星加速的坐标系静止，这会不会发生什么情况呢？截至本节（11.2 节）以前，我们总是仔细地强调说，假定两个惯性系  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  过去一直相互以匀速运动，并在未来将继续相互以匀速运动。我们也处处假定了，在  $\Sigma$  和  $\Sigma'$  中静止的观察者用在他们附近找到的材料建造了他们的测量仪器，因此测量仪器没有被从一个惯性系加速到另一个惯性系。在 3.5 节我们证明了，在这些条件下时间膨胀是互逆的。时钟佯谬超出了先前对狭义相对论变换的适用性所加的一些限制。引用麦克利（McCrea<sup>[11]</sup>）的话：“与狭义相对论有关的一切佯谬均以某种方式涉及非匀速运动情形，而对于非匀速运动，该理论事实上不能严格适用。”

时钟佯谬应被看作是狭义相对论的一个推广。这一推广是否正确，最终必须通过实验决定。

现在我们力图尽可能客观地表述争论双方的支持者们捍卫他们的观点而提出的一些论据。声称如果实际进行实验  $t_L$  将等于  $t'_R$  的那些人的主要论据大体如下。按照相对论，匀速

相对运动的两个坐标系是等价的，于是火箭上的钟 A 可以看成是静止的，而地球上的钟 B 相对它运动。如果火箭上的加速度对火箭上的钟没有影响，那么地球上的钟 B 相对于火箭上的钟 A 的运动，将与以前考虑的火箭上的钟 A 相对地球的运动完全相同，除了“运动”钟的速度在两种情形下处于相反方向之外。如果假定地球上的钟 B 相对火箭运动，那末地球上的钟 B 测量相应于地球相对火箭一系列位置的诸事件之间的原时间隔，而在火箭于其中静止的坐标系中“固定”的一系列钟测量非原时间隔。如果以前所用的论证适用，就和以前完全一样，将得出结论

$$t_L = \sqrt{(1 - v^2/c^2)} t'_R. \quad (11.12)$$

在这种情况下  $t_L$  将小于  $t'_R$ ，而以前曾得出  $t_L$  应大于  $t'_R$  的结论。这两个结论不可能都正确。丁勒和他的支持者们提出，只要与火箭的加速度相联系的效应可以忽略，那末时钟佯谬的出路是作出结论：如果进行实验，将发现  $t_L$  实际上等于  $t'_R$ 。因此在两个同样的孪生子之间将没有相对的年龄差。我们提出，通过增加火箭匀速行进的那部分旅程的长度，可以使来自火箭加速过程中对钟的任何效应的贡献变为可忽略地小。在丁勒及其支持者们的建议背后的心理是基于 11.1 节中所阐述的某些想法。在那里我们曾指出，当一根杆相对实验室静止而观察者相对该杆运动时，杆在物理上是没有变化的，就是说，它的性质由相对杆静止的观察者测量是不变的，尽管当运动的观察者加速到以不同速度相对实验室运动的另一惯性系时，由运动观察者决定的杆长等等将改变。在某种程度上，长度的不同测量可追溯到不同惯性系中异地事件同时性的不同测量。当火箭中的运动观察者改变他相对地球的速度时，由在实验室中静止的观察者所测量的、静置于实验室内一箱放射性原子的衰变速度是不会变化的，尽管运动的观察者在他改

变了相对地球的速度之后，将对在地球上静止的放射性原子观察到不同的衰变速度。因此，在地球上静止的这箱放射性原子是不因火箭加速而变化的，于是如果火箭加速对于火箭上的那箱放射性原子也没有物理效应，那末当火箭返回地球时，两个“放射性钟”将含有同样数目的未衰变的放射性原子，因此将读出火箭出发时间与返回时间之间的同样的时间间隔。

持有另一种观点（即如果进行实验，将发现  $t'_R$  小于  $t_L$ ）的人们，指出火箭上的钟受到加速，而在地球上静止的钟不受加速，并从这一点出发。（忽略由地球自转而引起的效应。）当一个人在火车里或汽车里时，他知道什么时候他受到突然加速或减速。受到加速度的人的体验与没受到加速度的人的体验是不同的。火箭上的钟和地球上的钟的“体验”也并非一样，而是不同的，因为两个钟之中的一个（即火箭上的钟）受到加速度。他们提出，火箭上的钟在加速过程中（或者说由于加速）可能在物理上变化了。他们提出，由于两个钟的不同体验，当火箭返回地球时，发现用未衰变的放射性原子所占分數来测量的、放射性钟的读数在地球上与在火箭上不同，将并非是不合理的。他们主张，在本节前一部分由地球上的钟  $B$  静止的惯性系  $\Sigma$  的观点（如图 11.1 所示）出发所建立的理论是正确的，因为火箭的运动自始至终是相对于一个惯性系。然而，当考虑地球相对于火箭静止的坐标系的运动时，运动不是自始至终相对于惯性系，因此在这一情况下  $t_L$  等于  $t'_R(1 - v^2/c^2)^{1/2}$  的结论是不正确的。

总而言之，我们可以说时钟佯谬超出了以前对于洛伦兹变换适用性所加的限制。与其试图证明爱因斯坦的推广是否是相对性原理和光速不变原理的逻辑推论，不如用实验来验证由狭义相对论到时钟佯谬的这一推广。在 11.3 节我们描述了一个设想的实验，它表明  $t'_R$  可能小于  $t_L$  这一结论，尽管

超出了洛伦兹变换的适用范围，但仍与相对性原理一致。在 11.4 节讨论用  $\pi$  介子对时钟佯谬的可能的实验检验。在 11.6 节描述用穆斯堡尔 (Mössbauer) 效应的某些实验。有些人声称后面这些实验是时钟佯谬的正确检验并已证明爱因斯坦的观点是正确的。在第十二章中从广义相对论观点讨论了时钟佯谬。

### 11.3 利用多普勒效应检验时钟佯谬的假想实验

下面将讨论的例子是由达尔文 (Darwin<sup>[12]</sup>) 给出而由邦迪<sup>[10]</sup>、斯克特 (Scott<sup>[13]</sup>)、白尔德 (Builder<sup>[14]</sup>) 及其它人加以扩展的。再次假定一火箭以匀速  $v$  从地球出发到外层空间去旅行，接着火箭很快地转向并以匀速  $v$  返回地球，如图 11.1 所示。设旅行的时间在地球静止的惯性系中测量得  $t_L$ ，在火箭静止的坐标系中测量为  $t'_R$ 。在相对地球和火箭分别为  $t_L/2$  和  $t'_R/2$  的时刻火箭转向。假定从火箭中以间隔  $1/\nu'$  发出光信号，其中  $\nu'$  为相对火箭测量的信号频率。(可以想象，由火箭中静止的光源发出单色光波，每个相继的极大值作为一个信号。) 这些信号在真空中将以速度  $c$  行进并在稍后时刻到达地球。按照在 3.8 节和 4.4 节所讲的多普勒效应理论，当火箭离地球而去时，地球上收到的光频率将等于  $\nu'[(c - v)/(c + v)]^{1/2} = K\nu'$ ，其中  $K$  小于 1。当在相对地球的时间  $t_L/2$  (即在相对火箭的时间  $t'_R/2$ ) 火箭转向时，在地球于其中静止的坐标系测量，它离开地球的距离为  $vt_L/2$ 。当飞向地球时，火箭所发出的光相对地球将具有频率  $\nu'[(c + v)/(c - v)]^{1/2} = \nu'/K$ 。在火箭转向之后，直到这种新的较高频率从火箭到达地球之前，需要  $vt_L/2c$  的时间。在时刻  $t_L/2 + vt_L/2c$  (由在地球上静止的钟所测) 将在地球上观察到频率的变化。因

因为在转向之前火箭走了  $t'_R/2$  的时间(相对于火箭),而在这一时间间隔内以频率  $\nu'$  (相对于火箭)从火箭上发出光信号,因此在离开地球时刻与转向时刻之间,离开火箭的信号数等于  $\nu' t'_R/2$ . 相继信号到达地球的时间间隔(在地球静止的坐标系中测量)等于  $1/K\nu'$ . 这样,在火箭离开地球的时刻和较高频信号开始到达地球的时刻  $t_L/2 + \nu t_L/2c$  之间,地球上的观察者将收到  $\nu' t'_R/2$  个信号,时间间隔为  $1/K\nu'$  秒,因此

$$\frac{t_L}{2} \left(1 + \frac{\nu}{c}\right) = \frac{\nu' t'_R}{2} \times \frac{1}{K\nu'} \\ \text{或者} \quad t_L \left(1 + \frac{\nu}{c}\right) = \frac{t'_R}{K}. \quad (11.13)$$

从时刻  $(t_L/2)(1 + \nu/c)$  直到火箭回到地球的时刻  $t_L$  这一段长为  $(t_L/2)(1 - \nu/c)$  的时间内,在地球上静止的观察者将收到频率为  $\nu'[(c + \nu)/(c - \nu)]^{1/2} = \nu'/K$  的信号。这些信号将在火箭转向时刻与火箭回到地球时刻之间由火箭发出。在这一时间间隔(相对火箭为  $t'_R/2$ )中,火箭上的光源将发出  $\nu' t'_R/2$  个信号。因为相继信号到达地球的时间间隔现在等于  $K/\nu'$  (相对地球测量),我们有

$$\frac{t_L}{2} \left(1 - \frac{\nu}{c}\right) = \frac{\nu' t'_R}{2} \frac{K}{\nu'} \\ \text{或} \quad t_L \left(1 - \frac{\nu}{c}\right) = K t'_R. \quad (11.14)$$

将方程(11.13)和(11.14)相乘并取两边的平方根,我们得到

$$t'_R = t_L \sqrt{(1 - \nu^2/c^2)}. \quad (11.15)$$

这与方程(11.6)一致。从假定多普勒效应的相对论公式出发并不是必要的。设从地球发出频率为  $\nu_0$  的信号,并设如图 11.1(b) 所示当火箭离开地球飞往钟 C (它相对于地球静止)时,这些信号到达火箭时相对于火箭所测得的频率为  $\nu' =$

$K\nu_0$ . 地球上的光源的运动方向是离开此刻在火箭上的观察者的。设火箭每次收到来自地球的信号时，毫不耽搁地再发出信号。这些二次信号相对它们的源(火箭)具有频率  $\nu'$ 。如果光速与光源速度无关，那末在钟 C 处(相对地球静止的)观察者所记录的由火箭发出的二次信号的频率一定是  $\nu_0 = \nu'/K$ ，恰如没有中间阶段一样。在此情形火箭上的光源是朝向钟 C 附近的观察者运动的。这表明，如果从离开观察者运动的光源收到的光频率改变了一个因子  $K$ ，那末，如果所有方向上光速相同，从朝向观察者运动的光源收到的光频率一定改变一个因子  $1/K$  (见 Bondi<sup>[10]</sup>)。将方程 (11.14) 除以方程 (11.13)，得到  $K$  等于  $[(c - v)/(c + v)]^{1/2}$ ，这与多普勒效应的相对论理论一致。

现在我们 also 假定从地球上以频率  $\nu_0$  (在地球静止的坐标系中测量) 向火箭发出光信号。当火箭径直离开地球时，按照狭义相对论，火箭收到的光信号频率等于  $\nu_0[(c - v)/(c + v)]^{1/2} = K\nu_0$ 。这是直到火箭转向的时刻以前，火箭上观察者所收到的光信号频率。一旦火箭转向回来，频率便增加到  $\nu_0[(c + v)/(c - v)]^{1/2} = \nu_0/K$ 。于是，直到在时刻  $t_L/2$  (相对于地球)，在离地球  $v t_L/2$  距离处(该距离是在地球于其中静止的坐标系中测量的)火箭转向之前，火箭上的观察者一直收到频率为  $K\nu_0$  的信号。在火箭转向瞬间到达火箭的光必然是在时刻  $t_L/2 - vt_L/2c$  (相对于地球测量) 离开地球的。在时间  $t_L/2(1 - v/c)$  (相对于地球测量) 之内由地球发出的信号数目等于

$$(\nu_0 t_L/2)(1 - v/c).$$

这就是火箭在时刻  $t_R'/2$  (相对于火箭) 转向之前所收到的信号数目。因为在飞出的一半旅程中火箭上收到每次信号之间的时间间隔等于  $1/K\nu_0$ ，我们有

$$\frac{t'_R}{2} = \frac{\nu_0 t_L}{2} \left(1 - \frac{\nu}{c}\right) \times \frac{1}{K\nu_0}$$

或

$$t'_R = \frac{t_L}{K} \left(1 - \frac{\nu}{c}\right). \quad (11.16)$$

在时刻

$$(t_L/2)(1 - \nu/c)$$

之后，直到时刻  $t_L$  之前，即在长为  $(t_L/2)(1 + \nu/c)$  这样一段时间间隔内，从地球发出的光信号在火箭上以频率  $\nu_0[(c + \nu)/(c - \nu)]^{1/2} = \nu_0/K$  被收到，因此每个信号之间的时间间隔为  $K/\nu_0$  (相对于火箭)。因为在返回的一半旅程中到达火箭的信号数等于  $\nu_0(t_L/2)(1 + \nu/c)$ ，因此

$$\frac{t'_R}{2} = \nu_0 \frac{t_L}{2} \left(1 + \frac{\nu}{c}\right) \times \frac{K}{\nu_0}$$

或

$$t'_R = K t_L \left(1 + \frac{\nu}{c}\right). \quad (11.17)$$

将方程(11.16)和(11.17)相乘并取两边的平方根，我们得到

$$t'_R = t_L \sqrt{(1 - \nu^2/c^2)}. \quad (11.18)$$

这与以前[参看方程(11.15)]完全相同。因此，按照这个假想的实验，无论地球上的观察者还是火箭上的观察者都会同意  $t'_R$  小于  $t_L$ 。我们可以确切看到，就接收光信号而言，地球上和火箭上观察者的体验是如何地不同。火箭上的观察者在火箭转向的瞬间，也就是旅程的中点，就观察到来自地球的光的频率变化。另一方面，地球上的观察者直到一半时间以后还没有观察到来自火箭的光的频率变化，而必须等到火箭转向后由火箭发出的光来得及到达地球，他才测量到频率变化。一般都承认，一旦构成光的光子离开了光源，它们就以光速行进，并且它们相对于任何惯性系的频率和能量不受光源后来的运动的任何变化的影响。一般也都承认，如果观察者改变他的运动状态，他立即会观察到光子的能量和频率的变化(见

5.8.3 节). 如果作了这些假设, 则在这个假想实验的上述解释中就很难找到漏洞. 如果进行实验就会发现

$$t'_R = t_L \sqrt{(1 - v^2/c^2)}.$$

这样一个结论, 肯定是与相对性原理一致的.

为要在这个假想的实验中得到答案为  $t'_R = t_L$ , 可应用多普勒效应的经典以太公式, 但在 3.8 节中我们证明了这些公式与依弗斯 (Ives) 和 斯蒂耳威尔 (Stillwell) (1938) 的实验不符合. 如果承认多普勒效应的相对论公式, 那末要得到答案  $t'_R = t_L$ , 就必须作一些其它的假设. 例如丁勒<sup>[15]</sup>提出过, 在火箭转向的瞬间, 从火箭到达地球的光的频率可能变化. 然而, 光频率的这一变化将意味着光子能量的变化, 而这将意味着瞬时的超距作用, 这与狭义相对论不一致, 因为按照相对论力学, 能量变化不能以超过光速的速度传递.

## 11.4 时钟佯谬的一种可能的实验检验

### 11.4.1 引言

在 11.2 节中曾指出, 如果从图 11.1 所示的旅行中火箭离开地球的瞬间, 有  $N_0$  个放射性原子在地球上静止并有  $N_0$  个放射性原子在火箭上静止这一情况出发, 则按照放射性衰变的规律, 有

$$N_{\text{实验室}} = N_0 e^{-t_L/T_0}, \quad (11.19)$$

$$N_{\text{火箭}} = N_0 e^{-t'_R/T_0}, \quad (11.20)$$

其中  $N_{\text{实验室}}$  和  $N_{\text{火箭}}$  分别是在火箭返回地球的瞬间地球上与火箭上所剩的未衰变放射性原子的数目;  $t_L$  和  $t'_R$  分别是地球上和火箭上的钟所测量的全部旅行的时间, 而  $T_0$  是在放射性原子于其中静止的坐标系中测量的放射性原子的平均寿命. 如果  $t'_R$  小于  $t_L$ , 就会从实验上发现  $N_{\text{火箭}}$  大于  $N_{\text{实验室}}$ .

一种可能的放射性钟是一盒 $\pi$ 介子，无论它们在火箭上静止还是在实验室中静止，它们都将以 $2.54 \times 10^{-8}$ 秒的平均寿命衰变。现在我们建议，不把 $\pi$ 介子放在火箭上，而是在实验室中将 $\pi$ 介子（在真空中）送入一个封闭的轨道。现在已可能得到 $\sim 100$ 兆电子伏特或更高动能的相当单能的 $\pi$ 介子束。利用产生 $\pi$ 介子的加速器来检验时钟佯谬的可能性是由马丁诺里和巴诺夫斯基<sup>[16]</sup>，柯契兰<sup>[17]</sup>以及其他人所提出的。我们所建议的实验与柯契兰所建议的类似。

我们所建议的实验与火箭实验不完全相同，因为 $N_{\text{实验室}}$ 和 $N_{\text{火箭}}$ 将不在同一时刻测量。然而通过与火箭实验的比较，我们所建议的实验将得到解释，因此我们希望人们将承认它与火箭实验等价。

#### 11.4.2 决定 $N_{\text{火箭}}$

所建议的实验安排如图11.3(a)所示。建议使定向的 $\pi$ 介子束通过闪烁计数器 $C_1$ ，并在磁场中偏转后通过放在 $C_1$ 附近的第二个闪烁计数器 $C_2$ ，探测 $C_1$ 与 $C_2$ 的符合。如果必要，可使 $\pi$ 介子穿回同一个晶体 $C_1$ 。如果 $\pi$ 介子束强度足够低，则一般说来 $\pi$ 介子将一次来一个，因而偶然性的符合的数

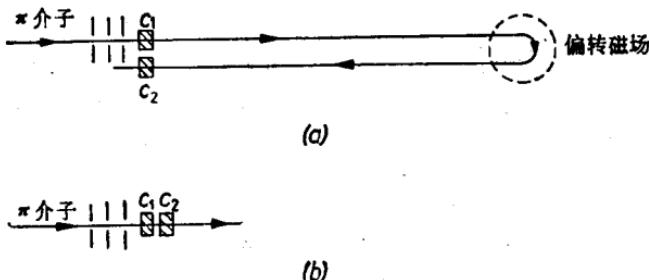


图11.3 (a) 检验时钟佯谬的一种可能的实验安排。(b)关于把“电钟”调到零时间推迟的安排

目将是很小的。从  $\pi-\mu$  衰变中产生的  $\mu$  介子，一般将不会被射向与生成它的  $\pi$  介子相同的方向，因而  $\pi$  介子在到达  $C_2$  之前经历了  $\pi-\mu$  衰变，它们不会引起计数器  $C_1$  和  $C_2$  之间的符合，除非所发出的  $\mu$  介子碰巧在  $C_2$  所张的立体角内。（对于这些零散的符合，可以作一种修正。）开始旅行的  $\pi$  介子数目将由计数器  $C_1$  单独的计数（记为  $N_0$ ）给出，而完成旅行的  $\pi$  介子数目（记为  $N_{\text{火箭}}$ ）将由  $C_1$  与  $C_2$  之间的符合数（对于任何聚焦损失，零散的符合，等等均作了修正之后）给出。我们建议不用  $N_0$  个  $\pi$  介子沿图 11.3(a) 所示轨道出发而观察当它们到达  $C_2$  时剩下多少这样一种作法，（这种作法直接等价于把它们放在火箭中送出去，）而是用观察  $N_0$  个相继的  $\pi$  介子一次一个地绕图 11.3(a) 所示的轨道行进，而观察到达  $C_2$  的数目。如果用“单能的” $\pi$  介子，则每次用一个  $\pi$  介子作  $N_0$  次相继的实验，加在一起将等价于用  $N_0$  个  $\pi$  介子出发而只作一次实验。

#### 11.4.3 决定 $N_{\text{实验室}}$ （第一部分）

该实验分两部分进行。在第一部分中，我们建议应当在实验室中测量  $\pi$  介子在  $C_1$  和  $C_2$  中所引起的光脉冲之间的时间推迟，这些  $\pi$  介子走完了图 11(a) 所示的轨道，通过了这两个闪烁计数器。这样一个时间间隔可用格林和贝尔<sup>[18]</sup> (Green and Bell, 1958) 型的时间-脉冲高度转换器来准确地测量，它能够量出短至  $10^{-10}$  秒的时间间隔。对于横跨 4 米的轨道全长，在  $2 \times 10^8$  米/秒的速度之下，时间间隔将是  $2 \times 10^{-8}$  秒。这样一个时间间隔也可以用一个现在已有的快速示波器测量，该示波器具有超过 10 毫微秒/厘米的扫描速度。让来自  $C_1$  的脉冲触发扫描，而将来自  $C_2$  的脉冲加到偏转板上。可用以下方法将示波器调到零时间推迟：将二计数器如图

11.3(b) 那样放置，并调整联接光电倍增管和示波器的电缆长度，使得来自计数器  $C_1$  和  $C_2$  的脉冲看起来同时到达示波器屏幕。于是，用如图 11.3(a) 那样放置的晶体，两个脉冲之间的时间推迟便可由屏幕上第二个脉冲的位置来决定，如图 11.4(a) 所示。如果想知道时间间隔的值，可用石英晶体振荡器的振荡来校准示波器的扫描。我们将把这一用来测量时间间隔的电设备称为“电子钟”。设由电子钟所测量的从  $C_1$  到  $C_2$  的飞行时间记为  $(t_L)_e$ 。因为在解释有关时钟佯谬的实验中钟的行为起着这样一种重要作用，所建议的实验将从示波器方法的观点来讨论，因为用这一方法较容易解释“电子钟”在每一阶段所起的精确作用。对于这一方法只需记下代表

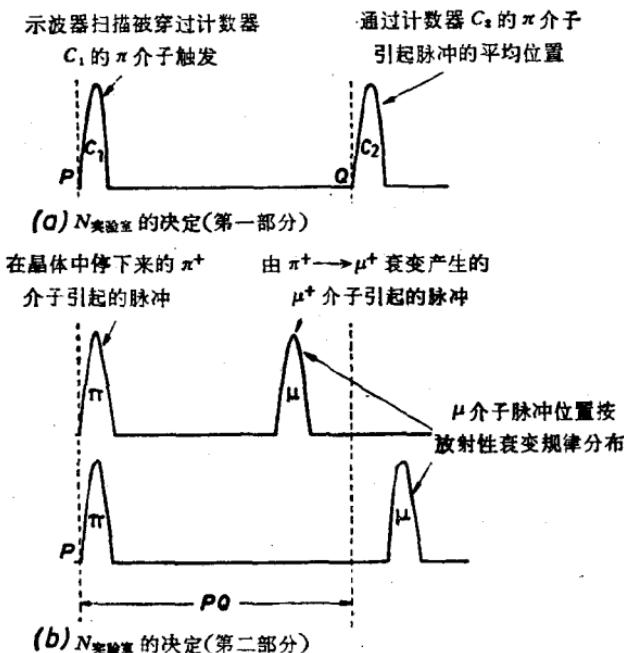


图 11.4 决定  $N_{\text{实验室}}$

$(t_L)_{\pi}$  的距离  $PQ$  的平均值,如图 11.4(a) 所示. 对于一束单能量的  $\pi$  介子, 距离  $PQ$  将不变, 这对应着从  $C_1$  到  $C_2$  飞行时间的不变值.

#### 11.4.4 决定 $N_{\text{实验室}}$ (第二部分)

在决定  $N_{\text{实验室}}$  的第二部分实验中, 将缓慢的  $\pi^+$  介子通入一个大得足以吸收  $\pi^+$  介子的晶体. 建议用决定  $N_{\text{实验室}}$  的第一部分实验中所用的同一“电子钟”来测量在  $\pi^+$  介子进入晶体与其后由  $\pi^+$  介子发射  $\mu^+$  介子之间的(当它们静止时的)时间间隔. 在这种情况下, 示波器的扫描将由在晶体中静止下来的  $\pi^+$  介子产生的电离引起的脉冲所触发, 而由  $\pi \rightarrow \mu$  衰变产生的  $\mu^+$  介子引起的脉冲在示波器扫描痕迹上的位置将被记录下来.  $\pi^+$  介子在晶体中达到静止所需的时间比  $\pi^+$  介子的寿命小得多, 因而可以忽略. 如果从在实验室中静止的  $N_0$  个  $\pi^+$  介子出发, 则  $N_{\text{实验室}}$  就等于在时间  $(t_L)_{\pi}$  (它等于在实验室系统中  $\pi^+$  介子沿图 11.3(a) 所示轨道的飞行时间)当中未衰变的静止  $\pi^+$  介子数. 如果  $N_0$  个  $\pi^+$  介子同时进入晶体, 则  $N_{\text{实验室}}$  就等于在时间  $(t_L)_{\pi}$  之后(也就是说, 在如图 11.4(a) 和 11.4(b) 所示的示波器扫描痕迹上的距离  $PQ$  所代表的时间之后)出现的  $\mu$  介子引起的脉冲数. 不是将所有  $\pi^+$  介子一起通入, 而应是一次观察一个, 并在每一次记录下  $\mu^+$  介子脉冲的位置. 实验上, 两个脉冲之间的时间间隔将不是不变的, 而将按照放射性衰变规律统计分布. (如果示波器扫描已校准, 则由这一部分实验结果便可估算  $\pi^+$  介子静止时的平均寿命  $T_0$ .) 如果对  $N_0$  个单个  $\pi$  介子重复该实验, 则在统计涨落范围内,  $N_{\text{实验室}}$  [即在  $N_0$  总数之中, 在运动  $\pi^+$  介子沿图 11.3(a) 所示轨道从  $C_1$  到  $C_2$  所需时间过程中没有衰变的静止  $\pi^+$  介子数]便是在  $PQ$  代表的时间  $(t_L)_{\pi}$  之后发生的.

$\pi-\mu$  衰变造成的  $\mu$  介子所引起的二次脉冲数。应当注意，示波器扫描并不需要校准，也不需要是线性的，为决定  $N_{\text{实验室}}$  在第一部分实验中唯一需要记下的是点  $Q$  的位置（如 11.4.3 节中所描述的）。“电子钟”只起一种“媒介”的作用。

#### 11.4.5 本实验的讨论

这实验就是对 11.4.2、11.4.3 和 11.4.4 几节中决定的  $N_{\text{火箭}}$  和  $N_{\text{实验室}}$  的值加以比较。实验就是要比较两个数。如果丁勒的观点是正确的，就可期望  $N_{\text{实验室}}$  等于  $N_{\text{火箭}}$ ，相应于在火箭与实验室中静止的两个钟的相等的时间间隔，就象方程 (11.19) 和 (11.20) 所决定的， $t_L = t'_R$ 。另一方面，如果爱因斯坦的观点是正确的， $N_{\text{火箭}}$  将大于  $N_{\text{实验室}}$ ，相应于  $t_L > t'_R$ 。可能有人提出，在  $\pi$  介子在磁场中偏转的过程中，加速度可能会影响结果。对于具有不同直线部分的轨道重复该实验，就可以估计这样一个影响。如果  $t_L$  等于  $\gamma t'_R$  [如方程 (11.6) 所预言的那样]，其中  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ ， $v$  是  $\pi$  介子的速度，则对于动能为 100 兆电子伏特的  $\pi$  介子， $t_L/t'_R$  将等于 1.73，而对于动能为 500 兆电子伏特的  $\pi$  介子，将等于 4.5。按照丁勒的观点，在两种情况下该比值都将等于 1。所建议的实验应当准确到足以在两种理论之中进行判定。

从在实验室中静止的观察者的观点来解释沿图 11.3(a) 所示轨道完成了从  $C_1$  到  $C_2$  的旅行的  $\pi$  介子数是有意义的。目前，例如德宾，洛尔和哈文斯 (Durbin, Loar and Havens<sup>[19]</sup>)，用来说明关于运动  $\pi$  介子寿命的实验的通常解释是，假定相对实验室运动的  $\pi$  介子具有表观寿命  $\gamma T_0$ ，其中  $\gamma$  等于  $1/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ 。 $\pi$  介子相对实验室的速度  $v$ ，是从其动量（例如由它在磁场中的曲率来决定）等于  $m_0 v / (1 - v^2/c^2)^{1/2}$  而算出的， $m_0$  是  $\pi$  介子的静止质量。无论  $\pi$  介子朝向观察者

或是离开观察者而运动，这一寿命增加均假定成立。如果实验室中的观察者确实假定了这一寿命增加是正确的，那末他将用方程

$$N_{\text{火箭}} = N_0 e^{-(t_R)_{\text{电}}/\tau(T_0)_{\text{电}}} \quad (11.21)$$

来估算在图 11.3(a) 所示的实验安排中， $\pi$  介子完成从  $C_1$  到  $C_2$  的轨道所用的时间，其中  $(T_0)_{\text{电}}$  是如 11.4.4 节中所述用电子钟测量的静止  $\pi$  介子平均寿命。在这一方程中， $(t_R)_{\text{电}}$  是在实验室中静止的观察者所估算的火箭飞行时间，在方程 (11.21) 中的时间没有加撇号，因为该时间是相对于实验室系统  $\Sigma$  测量的。如果寿命延长的理论是正确的，那末在实验误差范围内， $(t_R)_{\text{电}}$  就将等于如 11.4.3 节所述那样在实验室中直接测量的  $(t_L)_{\text{电}}$ 。比较方程 (11.21) 和 (11.20)，我们得出结论，如果寿命延长的理论是正确的，则

$$(t_R) = (t_L) = \gamma t'_R. \quad (11.22)$$

这与方程 (11.6) 一致，就是关于同样的孪生子相对年龄的通常公式。

最近，法雷，拜雷和皮凯索 (Farley, Bailey and Picasso) (*Nature*, London, 217, p. 17, 1968) 进行了一次与上述实验等价的实验，但用的是  $\mu$  介子而不是  $\pi$  介子。许多关于  $\mu$  介子的实验已证明，当  $\mu$  介子在实验室中静止时， $\mu$  介子的平均寿命为  $T_0 = 2.20 \times 10^{-6}$  秒。因此，对于  $\mu$  介子，方程 (11.19) 变为

$$N_{\text{实验室}} = N_0 \exp(-t_L/2.2 \times 10^{-6}).$$

法雷等发现，在欧洲核研究中心 (CERN) 的  $\mu$  介子贮存环中以动量  $1.274 \times 10^9$  电子伏特/ $c$  作圆运动的  $\mu$  介子的衰变速度为

$$N_{\text{火箭}} = N_0 \exp(-t_L/(26.15 \pm 0.03) \times 10^{-6}),$$

其中  $t_L$  为  $\mu$  介子相对于实验室的旅行时间。可以看到，“到

外层空间”中去旅行(在此情形下就是在5米直径的圆周上运动)的 $\mu$ 介子,其寿命平均说来要比在实验室中静止的“留在家的” $\mu$ 介子长。这与时钟佯谬是一致的。运动 $\mu$ 介子的动量大小为 $1.274 \times 10^9$ 电子伏特/ $c$ ,对应着 $\gamma = 12.14$ ,因此 $\gamma T_0 = 12.14 \times 2.20 \times 10^{-6} = 26.72 \times 10^{-6}$ 秒,因此按照方程(11.21),本来应当期望

$$N_{\mu} = N_0 \exp(-t_L/26.72 \times 10^{-6}).$$

运动的 $\mu$ 介子的实验平均寿命 $26.15 \times 10^{-6}$ 秒比预计值 $26.72 \times 10^{-6}$ 秒小百分之二。法雷等将这个百分之二解释为由于磁场的不完善而引起的 $\mu$ 介子的损失,法雷等的这些结果是支持时钟佯谬的强有力的实验证据。

## 11.5 时钟佯谬的讨论

时钟佯谬被看作为狭义相对论的一种推广,因为它涉及当测量仪器(例如钟)相对于固定恒星被加速时可能发生什么情况这样一个问题。我们的讨论大体上只限于图11.1所示的简单例子,其中火箭以匀速 $v$ 相对地球旅行,转向后以同样的匀速 $v$ 相对于地球返回。在11.3和11.4节中证明了,如果进行实验,将发现 $t'_R$ 小于 $t_L$ 的观点,并不与相对性原理及用 $\pi$ 介子和 $\mu$ 介子已做过的实验相矛盾。托尔曼<sup>[22]</sup>和谬勒<sup>[23]</sup>证明了, $t'_R = (1 - v^2/c^2)^{1/2} t_L$ 这一结果也与广义相对论一致(见12.5节)。在本章中只考虑了时钟佯谬的两种解释,即 $t'_R = (1 - v^2/c^2)^{1/2} t_L$ 的可能性与 $t'_R = t_L$ 的可能性。时钟佯谬总是引起极大兴趣的,过去不时地有人提出各种其它建议和可能的解释。一种适当流行的看法可用下面柯勒曼(Coleman<sup>[24]</sup>)的话作代表:

“...许多人极其郑重地主张,不断从事空间旅行的人将永远保

持年青。这是不真实的，正如下面对这种表观佯谬所作的解释即将表明的那样。

虽然狭义相对论确实预言，当两个观察者相对运动时，时间过程会慢下来，但它只适用于他们的相对速度不变的情形。它不适用于火箭从地面起飞以及后来着陆的情形，因为在发射和着陆过程中火箭是加速和减速的，就是说它的速度不是常数。在这里广义相对论将适用，并已证明，在火箭起飞后以不变的速度相对地球运动时发生的时间过程的变慢将被在发射与着陆过程中火箭速度变化时所抵消。因此没有永久的效应。当然也就没有佯谬。”

柯勒曼的结论与托尔曼和谬勒从广义相对论的推导结果不同，后面两人都得出  $t'_R$  小于  $t_L$  的结论。

方程

$$\int d\tau = \int \sqrt{(1 - u^2/c^2)} dt \quad (11.8)$$

和广义相对论均适用于计算当火箭运动为非匀速时的  $t'_R$  和  $t_L$ 。关于完整的讨论，读者可参看邦迪<sup>[10]</sup>，柯契兰<sup>[25]</sup>和斯克特<sup>[13]</sup>的著述。并不是在一切情况下都会得出  $t'_R$  永远小于  $t_L$ 。例如柯契兰写道：

“鉴于有关空间旅行者年龄的争论，有趣的是竟然发现在最简单形式的空间旅行中，旅行者衰老最快！因为一个在均匀引力场中向上抛起，沿直线运动，然后在本身重量下返回的钟 Z，将比一个在抛射地点与它同步的静止钟 Y 记录下更长的时间……”

让我们想象一个高耸在大气层以上但牢固地固定在地球上的火箭发射台，两个空间旅行者被同时送出，一个在绕地球的轨道上而另一个铅直向上。给予后者的速度小于逃逸速度，又正好够使他在前者完成第一圈轨道时返回。将会发现，卫星中的旅行者比地勤人员衰老得少，而另一个旅行者比地勤人员衰老得快！”

在 12.6 节中我们将讨论上述例子。

在至今考虑的所有例子中，两个钟都是两次相遇，一次是

在旅行的开头，一次是在旅行的末尾。方程(11.8)也被用于在空间中总是分开的两个加速钟的读数的关系上。有人声称（例如舍文 Sherwin, 1960）这些预言已被有关穆斯堡尔效应的实验所证实。我们现在给出关于某些这种实验的简短说明。

## 11.6 关于穆斯堡尔效应与温度的关系的实验

舍文<sup>[26]</sup>曾提出，<sup>57</sup>Fe 的穆斯堡尔效应与温度的关系的实验是时钟佯谬的一种检验。舍文给出的实验的解释有点类似于 11.3 节中所描述的假想实验。在这个假想实验中，假定到外层空间去旅行然后返回的火箭向地球送回光信号，在地球上记录信号数目和相继信号之间的时间间隔。在附录六中给出了穆斯堡尔效应的简短说明。在某些条件下，如果被激发的核在衰变时为一晶体点阵的组成部分，则  $\gamma$  射线可能在没有核反冲的情况下被发射。类似地，在某些情况下，当核为晶体点阵的组成部分时，它可能吸收适当能量的  $\gamma$  射线而不反冲。无反冲的发射继以无反冲的吸收从而导致核共振荧光的现象被称为穆斯堡尔效应。在附录六中我们阐明了，在某些情况下穆斯堡尔效应的测量如何提供了测量两频率之差的一种非常精确的方法，例如用 <sup>57</sup>Fe 能够测量小于  $10^{12}$  分之一的频率变化。如果在附录六所讨论并如图 A6.4 所示的实验安排之中，源或者吸收器的温度改变了，则探测器的计数率会发生变化，这是由无反冲发射（或吸收）的量的变化所引起，而后者又是由温度变化从而源（或吸收器）的原子速度变化所引起。

晶体中的原子并非静止，而是相对于实验室振动着，因此在发射  $\gamma$  射线时，原子相对实验室在运动。振动的均方速度取决于晶体温度。按照多普勒效应的理论，激发核的振动导致所发射的光子的能量（和频率）的变化。现在，光是以不连

续的光子或量子形式而不是作为连续的波运动而发射的。舍文提出这是一个细节问题。例如他写道：

“代表光子的波服从麦克斯韦方程组，即使它们是用通常的不连续量子事件检测的，它们的传播也精确符合狭义相对性的要求。况且在量子力学中，由电磁波引起的态的激发与退激发的计算方法是与过程是连续时用的方法相类似的，即以本质上与宏观共振结构所用的相同的方式来计算的。只是在对于所计算的态振幅的解释和观测时，特征性的不连续量子效应才起作用。”

代表单个光子的“波”可用与单个粒子的德布洛意波相同的方式来解释。光的波动理论可用来估算对一个光子的测量将给出某一特殊实验结果的几率。仿照舍文，我们将用经典波动理论解释 $\gamma$ 射线的发射，而记住上述的量子力学的解释。按照经典理论，在激发态的寿命中波是连续发射的。在讨论 $^{57}\text{Fe}$ 的14.4千电子伏特能级时，舍文写道：

“由于中心频率 $\nu_0$ 为 $3.46 \times 10^{18}$ 周/秒，又由于该激发态的平均寿命为 $1.4 \times 10^{-7}$ 秒，所以在代表光子的波系列(的较强部分)中，含有大约 $5 \times 10^{11}$ 个完整周。”

对于晶体，离子的振动频率为 $\sim 10^{13}$ 周/秒，因此在 $^{57}\text{Fe}$ 激发态的寿命中，核围绕其平均位置振动了很多次。按照经典的波动理论，在任何瞬时衰变核的运动都会影响到在那一特定瞬时发出的波的频率。为简单起见，将假定激发核只在晶体内作一维振动，即沿着 $x$ 轴。我们将进一步假定， $^{57}\text{Fe}$ 的核以匀速 $v$ 相对实验室运动，转向后以匀速 $v$ 返回，直到再一次转向。考虑如图11.5所示的一次完整的振荡。用经典方法我们可以想象源核连续地发出波，和11.3节中讨论的假想实验完全一样。运动的源相应于火箭。相对于源(火箭)信号以频率 $\nu_0$ 被发出。接收核测量着代表源核所发射光子的波的频率

率，用它本身的特征频率作为比较标准。目前我们假定接受(吸收)核处于静止。如果接受(吸收)核处在图 11.5 中的位置 2，则将完全对应于 11.3 节所讨论而由图 11.1 表示的假想实验。然而，在旅行的开始和末尾源与吸收器并不重合，而是吸收器从位置 2 位移了一段距离  $x_0$ ，如图 11.5 中所示。按照光速不变原理，由源发出的波的速度不依赖于源的速度，因此光走过额外距离  $x_0$  所花的时间总是  $x_0/c$ 。所以，不论吸收器处于位置 2 或者位置 1，收到来自于图 11.5 所示轨道上的火箭的第一个与最后一个信号之间的时间间隔是相同的。按照 11.3 节中所建立的假想实验的理论，有



图 11.5 穆斯堡尔效应与温度的关系的实验简图。假设发射核以匀速  $v$  来回运动；它的轨道有点类似于图 11.1(a) 中所示的火箭轨道。

$$t'_R = t_L \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (11.25)$$

其中  $t'_R$  和  $t_L$  分别是在“火箭”(即源)和地球上静止的钟所测量的、图 11.5 所示旅行所用的时间。方程(11.25)也与用方程(11.8)相一致。如果在激发态的寿命中，激发核在图 11.5 所示旅程上往复多次，则由于整个旅程不过是图 11.5 所示旅程的一系列重复，因而有

$$t'_R = t_L \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (11.26)$$

其中  $t'_R$  和  $t_L$  分别是相对于“火箭”(源)和实验室(吸收器)而测量的激发态寿命。设  $N_0$  为源核发出的波系列的峰值数目。波相对于实验室的平均频率由：

$$\nu_L = \frac{N_0}{t_L} \quad (11.27)$$

给出，而波相对于“火箭”（源核）的平均频率由

$$\nu'_R = \nu_0 = \frac{N_0}{t'_R} \quad (11.28)$$

给出。因此，

$$\nu_L = \nu'_R \sqrt{(1 - v^2/c^2)} = \nu_0 \sqrt{(1 - v^2/c^2)}, \quad (11.29)$$

其中  $\nu_0$  为发射的  $\gamma$  射线在激发核于其中静止的惯性系中的平均频率。如果激发核作三维非匀速振动，则应利用方程 (11.8)，即

$$\int d\tau = \int dt \sqrt{(1 - u^2/c^2)},$$

或

$$\int dt'_R = \int dt_L \sqrt{(1 - u^2/c^2)},$$

其中  $u$  为源核相对实验室速度的瞬时值。

设  $\Delta\nu_s$  是当核处在温度为  $T_s^{\circ}\text{K}$  的晶格中所发出的  $\gamma$  射线的频率移动。我们有

$$\frac{\Delta\nu_s}{\nu_0} = (1 - v^2/c^2)^{1/2} - 1 - v^2/2c^2.$$

对于非匀速的一般情况， $v^2$  将是激发核的均方速度。如果  $M$  为核的质量，按照经典的分子运动论，我们将有

$$\frac{1}{2} M v^2 = 3(kT_s)/2 \text{ 或 } v^2 = \frac{3kT_s}{M},$$

因此，

$$\frac{\Delta\nu_s}{\nu_0} = -\frac{3kT_s}{2Mc^2} = -2.4 \times 10^{-15} T_s, \quad (11.30)$$

其中  $T_s$  表示源的温度。

到此为止我们假定了吸收器中的核处于静止。实际上，它们也在振动着，它们的均方速度取决于吸收器的温度  $T_A$ 。吸收器共振频率的移动由

$$\frac{\Delta\nu_A}{\nu_0} = -2.4 \times 10^{-15} T_A \quad (11.31)$$

给出。因此源共振频率与吸收器共振频率之间的频差  $\Delta\nu$  由

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = -2.4 \times 10^{-15} \Delta T \quad (11.32)$$

给出, 其中  $\Delta T = T_s - T_A$ 。我们再一次引用舍文的话:

“如果源比吸收器温度高, 则  $\Delta\nu$  是负的, 即源比吸收器具有较低的频率。要想使共振吸收发生, 必须给吸收器以一个离开源的小速度。相反, 如果源比吸收器温度低, 则要使共振发生, 我们发现必需使吸收器朝向源运动。”

按照庞德和列布卡 (Pound and Rebka<sup>[27]</sup>), 对于接近室温的铁, 方程 (11.32) 中的数值系数大约为对应于德拜温度  $467^\circ$  的经典值的 0.9 倍。因此方程(11.32)应写为

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = -2.21 \times 10^{-15} \Delta T. \quad (11.33)$$

庞德和列布卡从实验上发现,

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = -(2.09 \pm 0.24) \times 10^{-15} \Delta T, \quad (11.34)$$

如果源和吸收器都接近室温的话。计算与实验结果之间的符合是令人满意的。因此穆斯堡尔效应对温度的关系可用方程 (11.8)或 11.3 节中讨论的假想实验来解释。

海依, 希弗尔, 克兰肖和艾格斯塔夫 (Hay, Schiffer, Cranshaw and Egelstaff<sup>[28]</sup>) 将  $^{57}\text{Co}$  源放在旋转轮中心附近, 将薄铁片  $^{57}\text{Fe}$  吸收器放在轮的边缘。用一个在轮外紧邻处静止的计数器, 探测 14.4 千电子伏特的  $\gamma$  射线, 以测量在各种角速度下该吸收器的透射。发现当角速度增加时, 吸收器的透射便增加, 这表明吸收器特征频率的移动。因为静止吸收器的谱线形状是从实验上已知的, 频率移动的数量可以估算出来, 发现它与在实验室系统中用方程 (11.8)计算的频率移动相一致。如果吸收器的线速度为  $v$ , 则相对实验室的特征频率由

$$v_A = v_0 \sqrt{(1 - v^2/c^2)} \quad (11.35)$$

给出，在此情况下运动的吸收器等价于运动的火箭。该实验也可用旋转系统中的广义相对论来解释（参看伯恰姆（Burcham<sup>[29]</sup>），又见 12.8 节）。

关于穆斯堡尔效应的这些结果是极有意义的，因为如上所述，可用方程(11.8)来解释它们。然而，用这种方法对实验所作的解释是建立在对光子“波”的量子力学统计解释的基础上的。为要证明这些实验结果是时钟佯谬的一种核实，必须假定这种解释是正确的。由于这个缘故，作 11.4 节中描述的  $\pi$  介子实验仍是值得的，因为这些实验更接近于图 11.1 所示的火箭实验。这些实验也比象有人建议的那样把钟放在卫星或火箭内要容易作。

### 参 考 文 献

- [1] Einstein, A. *The Meaning of Relativity*, 3rd Ed., p. 27, Methuen, London, 1946
- [2] O’Rahilly, A. *Electromagnetism*, p. 422, Longmans, London, 1938
- [3] Einstein, A. *Relativity. The Special and the General Theory* 15th Ed., p. 43, Methuen, London, 1954
- [4] Tolman, R. C. *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*. Ch. 3, Oxford University Press, London, 1934
- [5] Einstein, A. *Nature* **106**(1921) 783
- [6] Mandl, F. *Quantum Mechanics*. 2nd Ed. Ch. 10 Butterworths, London, 1957
- [7] Reichenbach, H. *The Philosophy of Space and Time* Dover Publications, New York, 1957
- [8] Dingle, H. *Nature* **177**(1956) 782; **178**(1956) 680
- [9] McCrea, W. H. *Nature* **177**(1956) 784; **178**(1956) 681
- [10] Bondi, H. *Discovery* **18**(1957) 505
- [11] McCrea, W. H. *Sci. Proc. Roy. Dublin Soc.* **26**(1952) 27
- [12] Darwin, C. G. *Nature* **180**(1957) 976
- [13] Scott, G. D. *Amer. J. Phys.* **27**(1959) 580
- [14] Builder, G. *Aust. J. Phys.* **10**(1957) 246
- [15] Dingle, H. *Brit. J. Phil. Sci.* **11**(1960) 1, 22
- [16] Martinelli, E. and Panofsky, W. K. H. *Phys. Rev.* **77**(1950) 468

- [17] Cochran, W. *Proc. Camb. phil. Soc.* **53**(1957) 646
- [18] Green, R. E., and Bell, R. E. *Nucl. Inst.* **3**(1958) 127
- [19] Durbin, R. P., Loar, H. H. and Havens, W. N. *Phys. Rev.* **88**(1952) 179
- [20] Dingle, H. *Bull. Inst. Phys.* **9**(1958) 314
- [21] Chamberlain, O., Segrè, E., Wiegand, C. and Ypsilantis, T. *Phys. Rev.* **100**(1955) 947
- [22] Tolman, R. C. *Relativity Thermodynamics and Cosmology*. p. 194. Oxford University Press, London, 1934
- [23] Møller, C. *The Theory of Relativity*. p. 48 and 258. Oxford University Press, London, 1952
- [24] Coleman, J. A. *Relativity for the Layman*. p. 71. Penguin Books, London, 1959
- [25] Cochran, W. *Vistas in Astronomy*. Vol. 3. p. 78. Pergamon Press, London, 1960
- [26] Sherwin, C. W. *Phys. Rev.* **120**(1960) 17
- [27] Pound, R. V. and Rebka, G. A. *Phys. Rev. Letters* **4**(1960) 274
- [28] Hay, J. J., Schiffer, J. P., Cranshaw, T. E. and Egelstaff, P. A. *Phys. Rev. Letters* **4**(1960) 165
- [29] Burcham, W. E. *Sci. Progr.* **48**(1960) 630
- [30] Grünbaum, A. *Philosophy of Science*. Ed. by Danto, A. and Morgenbesser, S. p. 399. Meridian Books, Cleveland and New York, 1960
- [31] Schwartz, H. M. *Amer. J. Phys.* **30**(1962) 697

## 习 题

**提示：**在回答以下数值题时，读者要假定时钟假设

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(1 - u^2/c^2)} dt$$

是正确的； $\tau$  是由以速度  $u$  相对一个惯性系运动的钟测量的时间间隔，同样的时间间隔在该惯性系中测量为  $t_2 - t_1$ .

11.1 爱因斯坦曾写道：“… 相对论有助于探索普遍的自然界定律，是具有宝贵的启发作用的工具”。

讨论爱因斯坦关于相对论的这一说法的含义。给出应用这种方法的例子。

11.2 讨论光速在狭义相对论中作为信号传播极限速度

的作用。[参考文献：格兰堡<sup>[30]</sup>和史瓦兹<sup>[31]</sup>]。

11.3 复习支持与反对如下观点的论据，该观点是：如果两个同样的孪生兄弟之一到外层空间去旅行并返回地球，他将与他留在家里的孪生兄弟年龄不同。

11.4 一火箭很快地加速，然后相对于太阳系匀速运动，一直到达 8 光年远的一个恒星。火箭上的钟记录旅行时间为 6 年。计算 (a) 火箭相对地球的速度和 (b) 相对于地球的旅行时间。 (c) 如果火箭迅速转向并以和向外飞时同样的速度返回地球，比较相对于地球和相对于火箭的旅行总时间。

11.5 一位女物理学家在她 29 岁生日时决定，她想至少十年中保持为 29 岁。她决定到外层空间去匀速旅行。要想使她在十年之后(相对于实验室)返回时仍然十分真实地说她只有 29 岁，那末她相对实验室运动所必需的最低速度是多少？

11.6 一位宇宙航行员在环绕地球的圆形轨道上的卫星中作了 24 小时的旅行。如果卫星相对地球的速度是  $10^4$  米/秒，试求这位宇宙航行员的年龄将比留在地面的人小多少。可以忽略与卫星高度上引力势变化相联系的效应。

11.7 在一个惯性系的原点产生了 2000 个带电的  $\pi$  介子。一半  $\pi$  介子在原点保持静止，另一半以  $0.995c$  的均匀速度去旅行。在 15 米的路程之后，行进的  $\pi$  介子在磁场中被偏转，使得它们返回原点。 (a) 经历了整个旅程后还有多少  $\pi$  介子？ (b) 当旅行的  $\pi$  介子返回时，在原点剩有多少静止的  $\pi$  介子？带电  $\pi$  介子静止时的平均寿命可取为  $2.5 \times 10^{-8}$  秒。

将上述实验与孪生子旅行实验相比较，并证明二者是等价的。

11.8 空间飞行的最舒适的方式是乘坐以原加速度  $g$  运动的火箭，即相对于火箭在其中瞬时静止的惯性系以加速度

$g$  运动的火箭。于是宇宙航行员将感到完全象在家里一样。这是在 5.4.1 节及习题 4.10 中讨论过的双曲运动的一个例子。相对于地球，如果火箭在  $t = \tau = 0$  从静止出发，则和以前一样，关于火箭速度  $u$ ， $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$  以及火箭相对于地球的旅程  $x$ ，我们有

$$u = gt \left\{ 1 + \frac{g^2 t^2}{c^2} \right\}^{-\frac{1}{2}}; \quad \gamma = \left\{ 1 + \frac{g^2 t^2}{c^2} \right\}^{+\frac{1}{2}}$$

和

$$x = \frac{c^2}{g} \left[ \left\{ 1 + \frac{g^2 t^2}{c^2} \right\}^{\frac{1}{2}} - 1 \right],$$

其中  $t$  是相对于地球的旅行时间。假定火箭上的时间  $\tau$  由

$$\tau = \int \sqrt{(1 - u^2/c^2)} dt = \int dt/\gamma$$

给出，证明

$$t = (c/g) \sinh \left\{ \frac{gt}{c} \right\}$$

或  $\tau = \frac{c}{g} \ln \left\{ \frac{gt}{c} + \left( \frac{g^2 t^2}{c^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}.$

由此证明

$$u = c \tanh(gt/c); \quad \gamma = \cosh(gt/c),$$

$$x = \frac{c^2}{g} \left[ \cosh \left( \frac{gt}{c} \right) - 1 \right].$$

这些方程使我们能够将火箭的速度，以及火箭相对于地球走过的距离用  $t$  或者  $\tau$  表示，也使我们能将  $t$  与  $\tau$  联系起来。

如果火箭以原加速度  $g$  相对于地球走了 (a) 一年，(b) 10 年，(c) 100 年，问它走了多远以及相对于火箭的时间为多少？ $g$  可取为 32 英尺/秒<sup>2</sup>。

11.9 宇宙飞船离开地球并以不变的原加速度  $g = 32$  英尺/秒<sup>2</sup> 相对于它在其中瞬时静止的惯性系运动，直到火箭位于通往一个恒星的旅途的中点为止。然后它以原减速度  $g$

减速，直至它到达该恒星为止。它转回头，前一半归途以原加速度  $g$  返回，后一半归途以原减速度  $g$  减速。如果旅行总时间为(a) 40 年和(b) 4000 年(相对于地球)，那么，该恒星离地球多远？相对于火箭全部旅行的时间为多少？(注：此问题与前一个问题均取自邦迪<sup>[10]</sup>的文章，其中给出了此问题的全面讨论。)

11.10 给出穆斯堡尔效应的简短说明。描述该效应如何依赖于源和吸收器的温度。阐明穆斯堡尔效应对温度的关系这一观察到的现象是如何用时钟假设  $\tau = \int \sqrt{1 - u^2/c^2} dt$  来解释的。

11.11 用几何方法证明，用火箭上的钟所测量的、由图 11.2 的“世界线” $OPS$  代表的火箭旅行的时间  $t'_R$  等于  $t_L \sqrt{1 - v^2/c^2}$ ，其中  $v$  是火箭速度，而  $t_L$  是用地球上的钟测量的旅行时间。(提示： $t'_{OP} = OQ \sec \phi / g'_2$ ,  $t''_{PS} = QS \sec \phi / g''_2$ ，其中  $\tan \phi = v/c$ ,  $g'_2 = g''_2 = \gamma \sqrt{1 + (v^2/c^2)}$ 。)

## 第十二章 广义相对论

### 12.1 引言

狭义相对论限于讨论相对于惯性系的物理现象。在非惯性参考系中它是不适用的。在1.5节中曾证明，如果想在一个相对惯性系加速或旋转的坐标系中应用牛顿运动定律，就必须引进“虚构的”惯性力。一个人在封闭的实验室里能作出实验来测出他相对于固定恒星的旋转。牛顿相信绝对旋转是可以测量出的。在建立了狭义相对论之后，爱因斯坦花了十年的努力来发展一种广义的相对论。

爱因斯坦认为，将物理定律表示为对所有参考系协变的形式应当是可能的，就是说，在所有参考系中（不论它们被加速的与否），物理定律的数学形式都应当是相同的。这就是协变原理。这些普遍的数学方程如在惯性参考系中，就可化为比较简单的数学形式，并且应当与在惯性系中的狭义相对论一致。

为了建立完整的理论，爱因斯坦发现必需应用普遍张量分析。在第十章中我们只考虑了笛卡儿张量。全面讨论广义相对论将超出本书的范围。因此，我们的讨论将仅限于阐述等效原理及它的一些应用。这将给予读者关于广义相对论的少许知识，并阐明狭义相对论的某些局限性。读者不要期望从以下讨论中会得到爱因斯坦广义相对论的全面阐述，以下讨论不过是一个通俗的说明，旨在帮助读者去攻读爱丁顿、托尔曼、谬勒、福克等所著的内容更为丰富的书籍。

## 12.2 等效原理

设一位宇宙航行员处在宇宙飞船之中，该飞船静止于一个在外层空间没有引力场的区域的惯性系  $\Sigma$  中，如图 12.1(a) 所示。宇宙飞船没有窗户，因此宇宙航行员不能向外看，并且它是隔音的，于是他不能听到从外面来的任何声音。宇宙飞船内每件东西都处于失重状态。现在设来自地球的信号点燃了一些小火箭，该宇宙飞船开始以均匀加速度  $a$  相对  $\Sigma$  运动。考虑从参考系  $K'$  (如图 12.1(b) 所示，宇宙飞船永远在其中静止) 的观点看来将发生什么事情。宇宙航行员不再处于失重状态。如果他拿起一个苹果然后放开它，相对于惯性系  $\Sigma$  苹果将以匀速运动，但相对于宇宙飞船它以匀加速下落。因为所有不受任何力作用的自由物体均以匀速相对  $\Sigma$  运动，因此它们表现为以同样的加速度相对于宇宙飞船下落。如果一个带有砝码的弹簧秤被固定在宇宙飞船的屋顶，砝码将相对于  $\Sigma$  保持静止(或者以匀速运动)，除非弹簧张力足以使砝码相对于  $\Sigma$  具有和宇宙飞船同样的加速度。如果宇宙飞船的加速度等于地球表面的重力加速度  $g$ ，则该宇宙飞船当中的情况将类似于一个在地球表面静止的宇宙飞船当中的情况。如果宇宙航行员不知道有火箭在加速宇宙飞船，那么他将如何解释加速宇宙飞船当中的结果呢？他将断言他是处在一个引力场之中，就像牛顿从对下落苹果的观察而作结论一样是有充分理由的。宇宙航行员可以把弹簧秤的伸张解释为砝码在引力场中被吸引而引起的效果。事实上，宇航员无法区别下面两种情况：第一种情况是宇宙飞船在无引力区域相对于固定恒星被加速，第二种情况是宇宙飞船相对固定恒星静止(或匀速运动)但有巨大物体在飞船以下通过而造成了引力场。

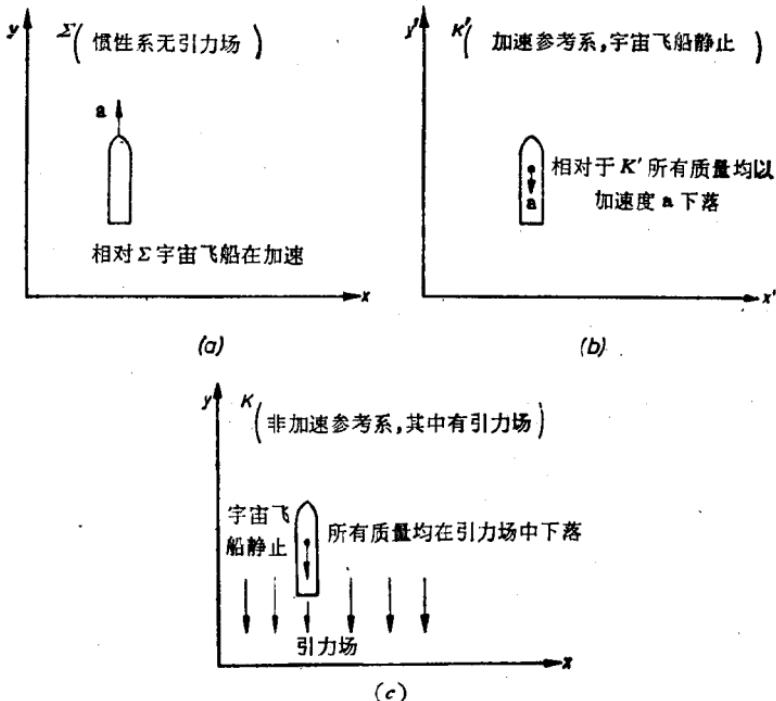


图 12.1 宇宙飞船相对于惯性参考系  $\Sigma$  具有匀加速度  $a$ . 加速参考系  $K'$  是宇宙飞船在其中静止的参考系; 相对于  $\Sigma$ ,  $K'$  具有加速度  $a$ . 在  $K'$  中所有不受任何力的物体均加速下落. 按照等效原理, 在  $K'$  中进行的测量和在图 c 所示具有引力场的非加速参考系  $K$  中进行的实验产生同样的结果, 该引力场方向与  $a$  相反, 其强度恰使得由该引力产生的加速度在数值上等于  $a$ .

爱因斯坦在 1911 年提出, 图 12.1(b) 中所示的以均匀加速度相对于固定恒星加速的坐标系  $K'$ , 与图 12.1(c) 中所示的在均匀引力场中静止的系统  $K$  是完全等效的. 在  $K$  与  $K'$  中在同样条件下所作的实验将给出相同的数值结果. 这就是等效原理. 引用爱因斯坦<sup>[1]</sup>的话:

“但是如果我们假定系统  $K$  与  $K'$  在物理上完全等效, 也就是说, 如果我们假定我们可以同样有效地认为系统  $K$  处于没有引力场的空间, 同时认为系统  $K$  被均匀加速, 我们便得到这一经验规律

的非常令人满意的解释。完全等效性的这一假设，使我们不能说任何参考系有绝对加速度，正如通常的相对论（指狭义相对论——译者）使我们不能说任何系统有绝对速度一样；并且它使一切物体在引力场中等加速下落成为当然的事情。”

因为所有不受任何力作用的物体，不论其惯性质量如何，相对于惯性系均持续作匀速运动，因此相对于一个加速参考系它们都具有相同的加速度。所以，按照等效原理，在均匀引力场中所有物体应当以相同的加速度下落。在 1.3 节中曾证明，如果物体朝向地心的加速度是相同的，则物体的惯性质量与引力质量互成正比。[如果  $M$  是地球的引力质量， $m_g$  与  $m_I$  分别是物体的引力质量和惯性质量，我们有

$$f = \frac{G m_g M}{r^2} = m_I a, \text{ 或 } a = \frac{m_g}{m_I} \left( \frac{GM}{r^2} \right),$$

如果  $m_g/m_I$  为一常数， $a$  就为一常数。]因此，惯性质量与引力质量的相等可由等效原理推出。约特沃斯 (Eötvös) 证明了，物体的惯性质量与引力质量在  $10^9$  分之一的精确度下相等。关于最近的讨论，读者可参考戴克 (Dicke<sup>[2]</sup>)。应当注意，在这些实验中粒子是低速的，因此引力质量与惯性质量相等这一推论尚没有在可与光速相比的高速之下受到检验。

在引力场均匀的区域，用变换到一个加速坐标系的方法我们可将引力场“变换掉”，该坐标系在引力场方向加速，其加速度在数值上等于由引力场引起的加速度。于是新坐标系是一个惯性系。一般说来，引力场不是整个空间到处均匀的，因此我们不能够在整个空间内通过变换到相对前一坐标系加速的一个单独的坐标系而代替引力场。例如，我们不能在整个空间内“变换掉”地球的引力场。

让我们引用福克<sup>[3]</sup>的话：

“等效原理和惯性质量与引力质量相等这一基本定律相联系，

但它并不等同于后一定律。后者是一个具有普遍而不是局部性质的定律，而加速度与引力场的等效性则完全是局部的，即只对空间某一点成立（更精确地说，只对类时世界线上各点的空间邻域成立）。

等效性含义如下。通过引进适当的坐标系（通常把它解释为加速参考系），可对引力场中的质点运动方程进行变换，而使它在这个新坐标系中具有自由质点运动方程的形式。这样一来，引力场就可以说成是被加速场代替了（或者最好是说，模拟了）。由于惯性质量与引力质量相等，这一变换对质量不同的质点都是相同的。然而只有在无限小的空间区域这种变换才能成功地达到目的，也就是说，这种变换具有严格的局部性。”

### 12.3 引力场中的时钟速率

现在我们将用等效原理来计算引力场中的时钟速率。我们将假定所有速度都比光速小得多，并且我们将只计算到  $v/c$  的二级项。

考虑一个长度为  $h$  的火箭以加速度  $a$  相对于惯性系  $\Sigma$  运动，该系中没有引力场，如图 12.2(a) 所示。设在  $t = 0$  时刻，火箭在  $\Sigma$  中瞬时静止。设有两个同样构造的钟（标以 1 和 2）固定在火箭上，钟 1 在火箭尾部而钟 2 在火箭头部，如图 12.2 (a) 所示。作为适当的钟的例子，选取两个光源，当火箭在没有引力场的惯性系中静止时它们具有频率  $\nu_0$ 。考虑在时刻  $t = 0$ （这时火箭在惯性系  $\Sigma$  中瞬时静止）由钟 1 发出的光，该光在一段时间间隔  $t$ （在  $\Sigma$  中测出的）之后到达钟 2，这一间隔  $t$  由  $ct = \left( h + \frac{1}{2} at^2 \right)$  给出，如果  $\frac{1}{2} at \ll c$ ，则简化为  $t = h/c$ 。一段时间  $t$  之后，钟 2 以速度  $v = at \cong ah/c$  相对  $\Sigma$  运动。在钟 2 附近的观察者看来，从钟 1 到达他的光好象

是由一个以速度  $v$  向下运动的光源发出的，因此他将观察到光的多普勒移动，频率的一级近似为  $\nu' = \nu_0(1 - v/c) = \nu_0(1 - ah/c^2)$ 。这一频率比由钟 2 发出的光的频率低。在  $\Sigma$  中的  $t = 0$  瞬时由钟 2 发出的光，当它到达钟 1 时，相对于钟 1 具有频率  $\nu_0(1 + ah/c^2)$ 。在两种情形下，精确到  $v/c$

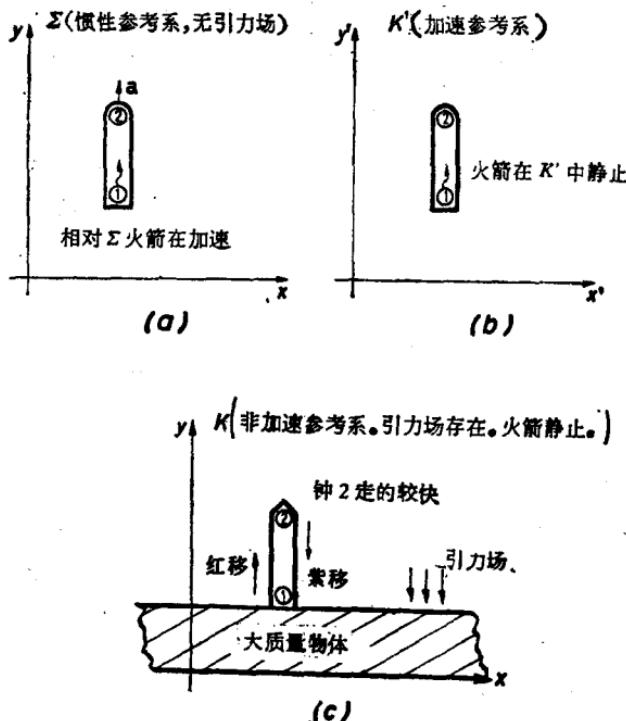


图 12.2 (a) 在惯性参考系  $\Sigma$  中，火箭具有加速度  $a$ 。在  $t = 0$  时刻（这时火箭在  $\Sigma$  中瞬时静止），从两个同样的光源 1 和 2 发出光。从光源 1 发出的光到达光源 2 时，光源 2 相对  $\Sigma$  在运动，因此从光源 1 发出的光对于光源 2 附近的观察者将显出多普勒移动。(b) 在火箭静止的加速参考系  $K'$  中，从光源 1 到达光源 2 的光将比光源 2 具有更低的频率。按照等效原理，在  $K'$  中的测量结果将与在(c) 中所示的具有引力场的非加速参考系  $K$  中的测量结果相同。因此在  $K$  中，图 (c) 的钟 2 将比钟 1 走得更快，于是从光源 1 发出的可见光与完全类似的光源 2 的频率相比，将向光谱的红端移动。

的一阶项，频率差均为  $\nu_0 ah/c^2$ ，如果  $ah/c^2 \ll 1$ 。

按照等效原理，当在图 12.2(c) 所示的非加速坐标系  $K$  中进行相同的实验时，实验结果将会完全相同，在坐标系  $K$  中火箭静止，并存在一个具有这样强度的引力场，使得由该引力场产生的加速度  $g$  与火箭相对  $\Sigma$  的加速度  $a$  大小相等方向相反。由钟 1 到达钟 2 的光，其频率比钟 2 低  $\nu_0 gh/c^2$  这样一个量。反之，由钟 2 到达钟 1 的光，其频率将高于钟 1 的频率。此二光源均在  $K$  中静止。由于光振动在途中不应有损失，因此我们必须得出结论：在引力场存在的情况下，两个静止钟的实际频率相差一个量  $\nu_0 gh/c^2$ 。这是与引力场存在有关的实际物理差别。

现在  $gh$  是两钟之间的引力势差。按照通常的规定，钟 2 在  $K$  中处于较高的引力势 [见图 12.2(c)]，因为在  $K$  的引力场中将物体从钟 1 提高到钟 2 必须作功。到此为止，我们一直假定在两钟之间  $g$  为常数。对于变化的引力场， $gh$  必须用  $\Delta\phi$  代替，其中  $\Delta\phi$  是两钟之间的引力势差，因此频率差  $\Delta\nu$  为  $\nu_0 \Delta\phi/c^2$ 。因此相对频差为

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = -\frac{\Delta\phi}{c^2}. \quad (12.1)$$

如果两个钟在引力场中静止时 [例如图 12.2(c) 所示]， $\nu_1$  为钟 1 的频率， $\nu_2$  为钟 2 的频率，则只要  $\Delta\phi \ll c^2$ ，便有

$$\nu_2 = \nu_1 \left(1 + \frac{\Delta\phi}{c^2}\right), \quad (12.2)$$

$$\nu_1 = \nu_2 \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}\right). \quad (12.3)$$

对于其它过程，例如钟的逐次的滴嗒声，方程 (12.2) 仍然成立。按照方程 (12.2)，在给定的时间间隔内，钟 2 将比钟 1 记录下更多的滴嗒声，因而将记录下更长的时间间隔，如果  $\Delta t_1$  和  $\Delta t_2$  分别为钟 1 和钟 2 所记录的时间间隔，因为每个钟测

量的时间间隔正比于它的频率,由方程(12.2),有

$$\Delta t_2 = \Delta t_1 \left(1 + \frac{\Delta\phi}{c^2}\right), \quad (12.4)$$

或

$$\Delta t_1 = \Delta t_2 \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}\right), \quad (12.5)$$

其中  $\Delta\phi$  为钟 1 和钟 2 之间的引力势差。在解释方程(12.4)时,玻恩<sup>[4]</sup>写道:

“这一公式的物理内容是:给定两个构造相同、最初相互静止的同步钟;如果其中一个有一段时间受到引力场作用,它们将不再同步,曾处于引力场中的那个钟将会被延迟。”

读者应当注意到,在上述引语中,引力场内的钟比无引力区域内的钟处于更低的引力势,因此引力场内的钟对应于方程(12.4)的钟 1,而按照方程(12.4)钟 1 应以较慢的速率运转。一切过程在静止火箭头部 [如图 12.2(c) 所示] 钟 2 附近都比在火箭底部钟 1 附近发生得更快。例如,放射性原子在钟 2 附近将比钟 1 附近衰变得更快。这种变化如图 12.2(c) 所示,在那里假定引力场是由质量巨大的物体所引起。在较高的高度上每件事情都进行得更快,因而到达较低高度的光频率比来自完全类似的位于较低高度的光源发出的光频率要高。对于可见光,来自较高高度(或较高引力势)的光要向光谱紫端移动。从较低高度到较高高度(即从较低引力势到较高引力势)的光将发生红移。

## 12.4 谱线的引力移动

在 12.3 节中我们证明了,由等效原理可推出光源频率受引力场的影响。设在恒星附近频率为  $\nu_1$  的光源对应于钟 1,

而地球上类似的光源具有频率  $\nu_2$ , 并对应于钟 2. 按照方程(12.3),

$$\nu_1 = \nu_2 \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2}\right). \quad (12.3)$$

钟 1 与钟 2 之间的引力势差  $\Delta\phi$  是正的, 因为将物体从质量更大的恒星移至地球必须作净功. 因此  $\nu_1 < \nu_2$ , 于是  $\lambda_1 > \lambda_2$ , 也就是说, 来自恒星的可见光与静止在地球上的完全相似的光源发出的光相比, 将向光谱的红端移动. 如果  $\Delta\lambda$  为波长的增加量, 则

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \cong \frac{\Delta\phi}{c^2}. \quad (12.6)$$

对于从太阳发来的光, 与静止的地面光源的相同谱线波长比较, 其谱线相对移动为  $\Delta\lambda/\lambda \sim 2.12 \times 10^{-6}$ . 这是一个可以测量的效应, 但它只相当于以 0.63 公里/秒速度运动的光源的多普勒效应. 因此来自太阳的光的引力红移可能被其它效应所掩盖. 根据戴克<sup>[2]</sup>, 布拉特 (Brault) 已测量了太阳钠 D<sub>1</sub> 谱线的红移. 引用他们的话, “对于非对称性作了修正之后, 发现该红移与期望的结果相符, 精确度为百分之五 (噪音所限).” 白矮星比太阳更重, 因此  $\Delta\phi$  增大, 从而  $\Delta\lambda$  也将相应地更大. 用来自白矮星的光得到的结果与方程(12.6)相符, 虽然不很明确.

一度人们曾认为不可能借助于地面实验来检验谱线的引力移动. 例如, 在海平面与珠穆朗玛峰顶之间的频率变化只约为  $10^{12}$  分之一. 然而, 原子钟正在开始接近于所要求的精度. 由于穆司保尔效应的发现, 就有可能测量极微小的频率变化. 所需要的只是在海平面上将源与吸收器一个置于另一个的铅直上方. 源与吸收器将对应于图 12.2(c) 的钟 1 和钟 2. 源与吸收器之间特征频率的任何移动将改变无反冲吸收

的比例,因而导致探测器计数率的变化(参看图 A6.4).在庞德和列布卡<sup>[5]</sup>所作的实验中,使金属铁中 0.4 居里的  $^{70}\text{Co}$  源与吸收器相隔 22 米的一段竖直高度.庞德和列布卡非常精确地控制温度,因为源与吸收器之间  $1^\circ\text{K}$  的温差就会产生可与 14.4 仟电子伏特谱线的引力移动相比的效应.(在 11.6 节中讨论了穆斯堡尔效应与温度的关系).庞德和列布卡预料的移动约为  $2.4 \times 10^{-15}$ .他们证实了引力移动的存在,并证明它为预料值的  $0.97 \pm 0.04$  倍.

可以看出,并不需要用完整的广义相对论来计算谱线的引力移动.只用等效原理就可以充分精确地计算引力移动.

## 12.5 用等效原理解释时钟佯谬

现在再次考虑 11.2 节中给出的由图 11.1 所表示的例子.在此例中,火箭以匀速  $v$  离开地球,迅速转向后又以匀速  $v$  返回地球.如果  $t_L$  是在地球上静止的钟所测量的全部旅行的时间,而  $t'_R$  是在火箭上静止的钟所测量的全部旅行的时间,那末,若假定时钟假设[方程(11.8)]是正确的,并将它用于地球在其中静止的惯性系,则发现如果  $v \ll c$ ,便有

$$t'_R = t_L \sqrt{(1 - v^2/c^2)} \cong t_L \left(1 - \frac{1}{2} v^2/c^2\right). \quad (11.6)$$

现在从火箭在其中瞬时静止的参考系来考虑这一运动.我们将按照托尔曼<sup>[22]</sup>所提出的方法.对于旅行的第一部分(这时火箭以匀速  $v$  相对地球运动),火箭在一个记作  $K_1$  的惯性系中静止,如图 12.3(a)所示.在  $K_1$  中地球以匀速  $v$  向左运动.设地球离开火箭与地球相对于火箭开始转向这一事件之间的时间间隔,由相对于火箭静止的钟测量为  $t'_1$ ,而由在地球上静止的钟测量为  $t_1$ .在  $K_1$  中,  $t'_1$  为原时间间隔,因此按照狭义相

对论,如果  $v \ll c$ , 有

$$t'_1 = \frac{t_1}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}},$$
$$t_1 \cong t'_1 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right). \quad (12.7)$$

当地球相对于火箭转向时, 它相对于火箭具有加速度  $a = 2v/t'_2$ , 其中  $t'_2$  为地球转向并在相反方向重新获得速度  $v$  所需要的时间(相对于火箭的时间)。火箭此刻在其中静止的参考系是加速参考系。按照等效原理, 这一加速参考系中的结果应与图 12.3(b)所示的“静止的”坐标系  $K_2$  中所进行的测量一致, 在  $K_1$  中火箭静止并存在引力场, 引力加速度为  $g = 2v/t'_2$ 。在参考系  $K_2$  中, 地球的运动等效于在重力作用下作“竖直”运动。在  $K_2$  中, 地球处于具有比火箭较高的引力势的区域。相对于  $K_2$ , 地球上的所有钟都应比火箭上的类似钟走得快。在地球相对火箭开始转向的事件到地球停止向火箭加速的事件之间的时间间隔, 火箭上的钟测量为  $t'_2$ , 如果与此相应, 地球上的钟所测量的该时间间隔为  $t_2$ , 则由方程(12.4), 有

$$t_2 = t'_2 \left(1 + \frac{gh}{c^2}\right), \quad (12.8)$$

其中  $h = vt'_1$  是相对火箭所测量的地球离开火箭的距离, 而  $g = 2v/t'_2$ 。代换方程(12.8)中的  $g$  和  $h$ , 得到

$$t_2 = t'_2 \left[1 + \frac{2vvt'_1}{t'_2 c^2}\right],$$

或

$$t_2 = t'_2 + \frac{2v^2}{c^2} t'_1. \quad (12.9)$$

如果在旅行开始时火箭由静止加速, 地球与火箭的引力势差几乎为零, 因此加速时间相对地球与火箭是相同的(精确到二

阶量), 并且与  $t_1$  和  $t_2$  相比可以忽略。类似的论断可适用于在旅行末尾火箭达到静止的情形。

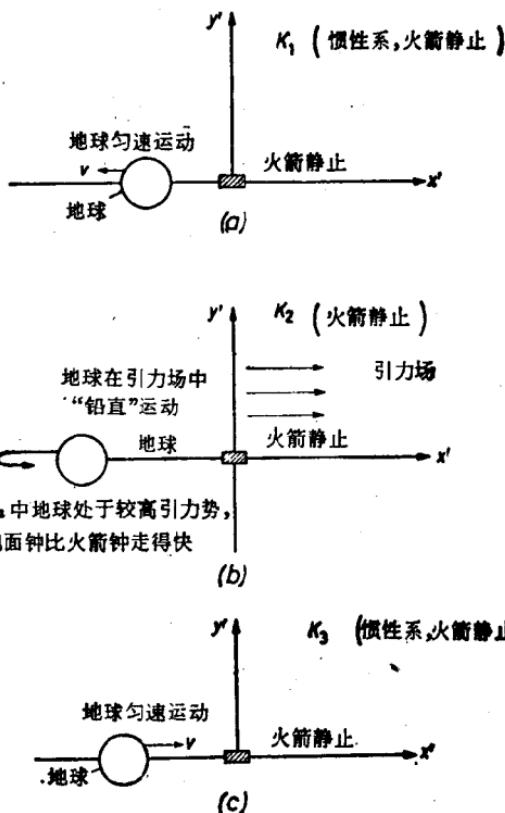


图 12.3 时钟佯谬的一个例子。运动是从火箭恒为静止的坐标系中考虑的。整个旅行分为三个部分。在第一部分中, 如(a)所示, 地球以匀速离开火箭, 而火箭在旅行的这一阶段在惯性系  $K_1$  中静止。在旅行的第二部分中, 如(b)所示, 地球相对于火箭加速, 而相对于火箭来说, 地球显得是在引力场中运动。在旅行的最后一阶段(c), 地球向火箭匀速运动, 而火箭在惯性参考系  $K_3$  中静止。

一旦火箭停止了相对于地球的加速, 而又以匀速运动之后, 火箭就在惯性系  $K_3$  中静止, 如图 12.3(c) 所示。狭义相对

论又适用了,因此,如果  $t_3$  和  $t'_3$  分别为地球上的钟与相对火箭静止的钟所测量的、火箭返回地球所用的时间,则由于相对  $K_3$ ,  $t_3$  为原时间隔,于是若  $v \ll c$ , 便有

$$t'_3 = t_3(1 - v^2/c^2)^{-1/2},$$

$$t_3 \cong t'_3 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right). \quad (12.10)$$

将方程(12.7),(12.9)和(12.10)相加,得到

$$t_1 + t_2 + t_3 = t'_1 + t'_2 + t'_3 + t'_4 \left[ (2v^2/c^2) - \left(\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right)\right] - t'_3 \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}.$$

由于对称,  $t'_1 = t'_3$ , 又因为  $t'_2 \ll t'_1$ , 得到

$$t_L = t'_R \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right). \quad (12.11)$$

精确到二阶量  $v^2/c^2$ , 方程(12.11)与以前在 11.2 节中得到的结果相同[参看方程(11.6)],而在那里,运动总是与地球静止的惯性系相联系的。

应当强调, 我们不能声称已经解决了时钟佯谬。我们所作的只是, 在与 11.2 节所用坐标系不同的坐标系中求解了该问题并得到了相同答案。这很类似于旋转圆盘上物体运动的情形,这时,如果我们用旋转坐标系或取实验室参考系将会得到相同的答案(参看 1.5 节)。

## 12.6 卫星内时钟的速率

随着人造地球卫星的出现,最近再一次激起了对于时钟佯谬的兴趣。当卫星处在地球上空的轨道中时,如要比较地球上与卫星内的钟的速率,有两种效应应当考虑。第一,如果承认时钟假设[方程(11.8)],则有一种由卫星相对地球运动

而产生的效应。设  $\nu_0$  为地球上测量的某过程的频率，而  $\nu_0 + \Delta\nu_1$  为以匀速  $v$  运动的卫星中所测量的同一过程的频率。由方程(11.8)，

$$t'_R = t_L \sqrt{(1 - v^2/c^2)} \cong t_L \left(1 - \frac{1}{2} v^2/c^2\right).$$

因为  $\nu_0$  正比于  $t_L$ ， $\nu_0 + \Delta\nu_1$  正比于  $t'_R$ ，于是精确到二阶量，卫星内钟频率的增加量由下式给出

$$\frac{\Delta\nu_1}{\nu_0} = -\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}, \quad (12.12)$$

也就是说，卫星内的钟比静止在地球上的类似的钟走得慢。如果  $m$  为卫星质量， $M$  为地球质量， $G$  为万有引力常数， $r_0$  为地球半径， $r$  为卫星轨道（假定它是以地球为圆心的圆）的半径，我们有

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{mGM}{r^2},$$

或

$$v^2 = \frac{GM}{r} = \frac{GM}{r_0} \left\{ \frac{r_0}{r} \right\} = gr_0 \left\{ \frac{r_0}{r} \right\}. \quad (12.13)$$

在方程(12.13)中， $g$ （它等于  $GM/r_0^2$ ）为地球表面的重力加速度。代入方程(12.12)，得

$$\frac{\Delta\nu_1}{\nu_0} = -\frac{1}{2} \frac{gr_0}{c^2} \left( \frac{r_0}{r} \right). \quad (12.14)$$

第二，卫星内的钟比地球上类似的钟处于较高的引力势，因此应当走得快些。按照方程(12.1)，卫星内的钟由于引力势差而引起的频率增加  $\Delta\nu_2$  由下式给出

$$\frac{\Delta\nu_2}{\nu_0} = \frac{\Delta\phi}{c^2}.$$

但

$$\Delta\phi = \int_{r_0}^r \frac{GM}{r^2} dr = -GM \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

$$= \frac{GM}{r_0} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) = gr_0 \left(1 - \frac{r_0}{r}\right),$$

因此

$$\frac{\Delta\nu_2}{\nu_0} = \frac{gr_0}{c^2} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right). \quad (12.15)$$

将方程(12.14)与(12.15)相加, 则关于卫星内钟频率的总增加量  $\Delta\nu$ , 我们得到

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{gr_0}{c^2} \left\{1 - \frac{3r_0}{2r}\right\}. \quad (12.16)$$

如果  $\frac{3r_0}{2r} < 1$ , 或  $r > \frac{3}{2}r_0$ , 也就是说, 如果卫星高度  $> \frac{r_0}{2}$  ( $\cong$  海平面以上 3200 公里), 则  $\Delta\nu$  为正, 这是因为由引力势变化而引起的效应占优势, 于是卫星内钟的读数将比静止在地球上的类似钟的读数大(或者, 卫星内的宇宙航行员将比静止在地球上的类似的宇宙航行员老得快). 对于  $r < 3r_0/2$  的情形, 也就是说, 如果卫星高度低于海平面以上  $\frac{r_0}{2} \cong 3200$  公里, 则方程(12.14)给出的效应占优势, 因此卫星内钟的读数将比地球上的钟小, 而宇宙航行员将比地球上的人老得慢.

现在我们能够理解在 11.5 节中所引用的柯契兰<sup>[6]</sup>的话了. 竖直发射的钟比静止在发射台上的钟处于引力势更高的区域, 因而走得快些. 在低高度卫星内的钟, 当它相对于静止在发射台上的钟在引力势与发射台相同的区域运动时, 将比静止在发射台上的钟走得慢.

## 12.7 光线在引力场中的弯曲

在牛顿力学中, 我们原则上可用刚体作为参考物体和测量事件坐标的尺. 在狭义相对论中必须改进刚体的经典概

念，但原则上仍然可用真空中的光信号来定义直线并测量事件的时间与坐标，因为按照狭义相对论，相对于惯性系，光在真空中应沿直线匀速行进。

考虑一个相对于惯性系  $\Sigma$  作匀加速运动的宇宙飞船。如果光通过飞船上的一个小孔射进来，相对于  $\Sigma$  它将沿直线行进。相对于加速的宇宙飞船，光一定是沿弯曲轨道行进的。按照等效原理，在加速宇宙飞船上的观测结果应与在具有一定强度的均匀引力场中静止的观察者所作的观测相同，这一引力场的引力加速度与宇宙飞船加速度大小相等方向相反。因此，光线应在引力场中弯曲，并弯向引力加速度的方向。

例如，爱因斯坦考虑过来自远方恒星的光线，当其经过太阳边缘附近时会有偏转。利用由等效原理算出的时钟周期的差别（由方程(12.1)给出），爱因斯坦证明了，在离太阳中心  $R$  距离处经过的光线被偏转的角度  $\alpha$  为

$$\alpha = \frac{2GM}{c^2R}, \quad (12.17)$$

其中  $G$  为引力常数， $M$  为太阳质量。将  $G$ ， $M$  及太阳半径  $R$  的值代入，由方程(12.17)得  $\alpha = 0.87''$ 。

还有另一种方法是以惯性质量与引力质量相等为根据的。在 5.8.3 节曾证明，具有能量  $h\nu$  的光子联系着一个惯性质量  $h\nu/c^2$ ，因此光子应联系着一个引力质量  $h\nu/c^2$ ，从而会被吸向太阳。如果考虑光予以碰撞参数  $R$  入射，则直接应用碰撞理论可证明光子的偏转也应由方程(12.17)给出（参看弗兰契<sup>[7]</sup>）。

爱因斯坦在阐述了他的完整理论之后，利用完整的广义相对论重新计算了光经过太阳附近的偏转，并发现由太阳引起的光偏转应为方程(12.17)所给值的两倍，即  $1.75''$ 。希夫(Schiff)<sup>[8]</sup> 证明了，如果既考虑时钟速率的变化，又考虑杆长

的变化，则由等效原理便可得出完整广义相对论所预言的值。

除了日蚀期间外，从太阳附近经过的恒星光线一般是不可见的。在 1919 年 5 月 29 日日全蚀期间，两个英国考察队考察了光线被太阳的偏转。一个小队去往西非几内亚湾普林西比岛，另一小队去往巴西北部的索布腊尔。对系统误差作了修正之后，在索布腊尔和普林西比所得到的带有“可能偶然误差”的结果（化到太阳边缘）为

索布腊尔  $1''.98 \pm 0''.12$

普林西比  $1''.61 \pm 0''.30$

它们与根据完整的广义相对论计算的值相符，该计算值为方程(12.17)所给出的值的两倍。爱丁顿<sup>[9]</sup>给出了关于这些观测的更完整的说明。这些结果已被以后日蚀期间进行的历次实验所证实。

在本节中我们证明了在严格的欧几里德几何意义下，光在引力场中不沿直线行进，因此不能用光线来标划出欧几里德几何学所适用的直角笛卡儿坐标系。我们已证明时钟的速度取决于引力势。杆长也与引力场强度有关。因此，在完整的广义相对论中发现光速数值取决于引力场强度是并不令人惊讶的。所以，当强引力场存在时，光速不变原理必须修改。让我们引用爱因斯坦<sup>[10]</sup>的话：

“……我们的结果表明，按照广义相对论，我们时常提到的作用为狭义相对论中两个基本假定之一的真空中光速恒定定律，就不能具有无限的有效性。光线的弯曲只有在光的传播速度随位置而改变时才能发生。我们或许会想，由于这种情况，狭义相对论以及随之整个相对论，就要化为灰烬了。但实际上并不是这样。我们只能作这样的结论，即不能宣称狭义相对论的有效范围是无限制的；只有在我们能够不考虑引力场对现象的影响（例如它对光的作用）

时，狭义相对论的结果才能成立。”

地球附近的引力场如此微弱，以至对所有实际目的而言，光线对直线的偏离程度均可忽略，虽然读者应记住光速不变原理是有局限性的。

## 12.8 旋转参考系

在 1.5 节我们曾指出，如果想在一个以匀角速度  $\omega$  相对惯性系旋转的参考系中应用牛顿运动定律，就必须引进离心力  $-m\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$  以及科里奥利力  $-2m\omega \times \mathbf{u}'$ 。在 1.5 节中这些力被称为虚拟力，因为它们不产生相对于惯性系的加速度。值得注意，作用在物体上的离心力与科里奥利力均正比于物体质量。牛顿认为，用 1.5 节中所描述的方法可以测量出绝对旋转。例如牛顿提出，如有两个球绕其公共重心旋转，则由连结这两个球的弦上的张力便可决定它们旋转的量。牛顿以此作为绝对空间存在的证据。大约廿年后，这种观点受到贝克莱（Berkeley）的批评，他写道：

“如果每个位置都是相对的，则每个运动便都是相对的，因为若不决定运动方向便无法理解运动，而除非相对于我们身体或其它物体，也便无法理解运动方向。上、下、左、右，一切方向与位置都是基于某种关系的，因而必须假定有远离运动物体的另一个物体……所以运动就其本性而言是相对的，只有给定运动的参考物体才能理解运动，或者一般说来，如果没有所联系的对象，也就不会有任何联系。

因此，如果我们假定除了一个球之外一切东西都消失了，我们便无法想象该球的任何运动。

让我们想象两个球，并且除它们之外，任何其它物质皆不存在，于是便无法想象这两个球绕其公共中心的圆周运动。但假定

含有固定恒星的天空突然出现，那末我们将能够凭借两个球相对于天空不同部分的位置而想象它们的运动。”

在十九世纪后半叶，牛顿的观点也受到马赫的批评；例如，马赫写道：

“我们究竟是认为地球绕其轴转动，或者是认为地球静止而所有固定恒星绕地球转动，这显然是没有关系的。它们在几何上代表着完全相同的情况，即地球与固定恒星相互间的相对转动。但如果我们认为地球静止而固定恒星绕它转动，则不会有地球变扁、傅科实验等效应——至少按照我们对惯性定律的通常概念是不会有些效应的。现在我们可以用两种方法解决这一困难。或则一切运动都是绝对的，或则我们的惯性定律表达得不正确。我宁取第二种方法。必须这样来构思惯性定律，使得由第二个假设能得出与第一个假设相同的结果。由此显然，在惯性定律的表达式中必须注意到宇宙中的众多物质。”

贝克莱和马赫的这两段话引自赛厄马（Sciama<sup>[11]</sup>）的书。马赫指出，不能由地球绕轴旋转时变扁而断定绝对空间存在。我们所能断定的只是，该效应与地球相对宇宙其余物质的旋转相联系着。马赫认为，如果理论被适当表述，则无论是地球相对于宇宙其余物质旋转，还是宇宙其余物质绕静止的地球旋转，所得出的结果应当相同。如果如协变原理所要求的那样，在所有参考系中物理定律应当相同，则应该由广义相对论自然地得出离心力与科里奥利力。

马赫对于旋转参考系中的现象所提出的解释可用一个简单例子来说明。设有一个圆盘在与之同心的圆形屋子里旋转。旋转圆盘上的观察者将倾向于保持在相对固定恒星的直线上，于是如果他坐在圆盘上，他将感到自己倾向于要飞出去。如果圆盘停止旋转，而圆形的墙壁开始在相反的方向旋转，当观察者看墙壁时，他将在圆形墙壁上看见同样的事情，即圆形

墙壁按以前相同的方向旋转。但是他将不再感到要把他向外推的力。他可以作实验来“证明”在第一种情况下圆盘在旋转，而在第二种情况下圆盘不旋转。例如，他可用弹簧秤将一重物与圆盘轴连结。如果重物在圆盘上静止，则在第一种情况下弹簧秤将指示出受到了力，而在第二种情况下将指示为不受力。可是，上述两个系统并不是真正等价的。在第一种情况下，圆盘不仅相对于屋子的墙壁在旋转，而且相对于宇宙其余物质在旋转。要作到完全等价，在第二种情况下宇宙中所有其它质量都必须绕静止圆盘旋转。如果真是这样的话，那末“静止的”观察者会感到一种要把他从静止圆盘的中心向外拉的力吗？目前公认的观点是，他会感到这样的力。一般认为这种力的起源是宇宙中遥远物质的运动所造成的引力场。

按照牛顿的引力理论，不论物体是否在运动，两个质量为 $m_1$ 和 $m_2$ 的物体之间的引力均等于 $G(m_1m_2)/r^2$ 。按照狭义相对论，力不是绝对的[参看方程(5.95)，(5.96)和(5.97)]。因此，如果两个物体相对观察者在运动，则所测量的它们之间的引力将与当它们相对观察者静止时得到的值不同。作为类比，让我们考虑两个电荷。当电荷相对于惯性系静止时，它们之间的电力由库仑定律给出。如果电荷在运动，则除了电力之外，在电荷之间还有与速度有关的磁力。如果电荷加速，则电磁场中将有一部分取决于电荷的加速度[参看方程(9.49)和(9.50)]。这就是辐射项，它们按 $1/r$ 变化。除了速度为零的极限情形外，辐射项在电荷加速度方向与其相反方向上是不对称的。类似地，如果物体相对于观察者在加速，那末，两个物体之间的引力取决于物体相对于所选参考系的加速度是很有可能的。这样一来，绕静止圆盘旋转的宇宙物质引起倾向于把观察者从圆盘中心拉开的力也是有可能的。在静止

圆盘的情形，离心力将被解释为宇宙其余物质绕静止圆盘旋转所引起的引力。众所周知，地球旋转引起的离心力与地球质量引起的引力在实验上是不能分开的，由于这个缘故，地球表面不同地点的重力加速度的值通常包括了地球旋转引起的离心力的贡献。（当然，我们可以估算出离心力的贡献，但我们不能从实验上将它与地球引力分开。）

由于远方恒星离地球十分遥远，乍一看来，它们似乎不可能影响到地球上的现象。静止物体的引力场正比于  $1/r^2$ ，而物体的加速度对引力场的贡献很可能正比于  $1/r$ （如电磁场情况一样）。对于不在圆盘轴上的各点，这些场不一定抵消到零。在  $r$  与  $r + dr$  之间的恒星数目正比于  $r^2 dr$ ，因此对于  $1/r$  的规律而言，对静止圆盘中心附近的场的贡献将正比于  $r dr$ 。因此，如果从 0 积分到  $\infty$ ，总力将是发散的。对于  $1/r^2$  的规律，总力也将发散。当然，实际的总引力将取决于边界条件，例如宇宙的大小，远方星云的后退，等等。然而，远方恒星对地球上的现象有某些影响的可能性是存在的。按照协变原理，我们应该不能通过实验来说出究竟是圆盘相对于宇宙中其余物质在旋转，还是宇宙中的其余物质相对于圆盘在旋转；在两种情形下物理定律应是相同的。

现在我们将考虑一个固定在相对惯性系  $\Sigma$  以角速度  $\omega$  旋转的圆盘上的钟的速率。设该钟位于离圆盘旋转轴  $r$  距离处。在惯性系  $\Sigma$  中狭义相对论是适用的。钟以线速度  $r\omega$  相对于  $\Sigma$  运动。如果  $\nu$  是在  $\Sigma$  中静止的钟（或者在圆盘旋转轴上的钟）的频率，而  $\nu_0$  是圆盘上的钟的频率，则用时钟假设 [方程(11.8)] 及狭义相对论，便得到

$$\nu_0 = \nu \sqrt{(1 - v^2/c^2)} \cong \nu \left(1 - \frac{1}{2} r^2 \frac{\omega^2}{c^2}\right). \quad (12.18)$$

现在我们将从圆盘静止、而宇宙中其余物质在旋转的参

考系中来考虑钟的速率。一种相当普遍的看法是，在这一参考系中存在一个引力场（一般认为它是由于恒星的旋转），该引力场给出正确的离心力与科里奥利力。让我们引用谬勒<sup>[12]</sup>的话：

“然而有一个这种效应，它虽然很小，却具有理论上的重要性，因为它对于出现在旋转坐标系  $S$  中的离心力与科里奥利力的起源和本性给予了新的解释。按照爱因斯坦提出的广义相对性原理的基本想法（参看 82 节），这些力是遥远的天体质量相对  $S$  旋转所产生的引力，这种“非永久的”引力场与永久引力场满足同样的广义场方程组。我们不能直接应用弱场近似解（34）以处理遥远天体物质的问题，但我们可以期望，具有均匀质量密度的旋转球壳在壳内将产生类似于遥远天体物质旋转的效应……”

对于旋转的物质壳，塞令（Thirring）[Phys. Z. 19, (1918) 33; 22 (1921) 29] 发现了一个有趣的结果，即由方程(30)所决定的壳内的场类似于旋转坐标系中的场，于是便导出与通常离心力和科里奥利力相类似的引力。”

关于完整的讨论，读者可参考谬勒<sup>[12]</sup>及塞令的著述。为了说明关于旋转圆盘的现象，我们将考虑一个简化的模型。在离旋转圆盘的轴  $r$  距离处静止的质量为  $m$  的物体所受的离心力为  $mr\omega^2$ 。其作用方向由转轴向外。以可忽略的速率将一单位质量由轴移到径向距离  $r$  处所作的功为  $-\int_0^r r\omega^2 dr = -\frac{1}{2} r^2 \omega^2$ 。如果离心力是相对于圆盘的一种引力，那末离心引力场引起的标量引力势差等于

$$\Delta\phi = -\frac{1}{2} r^2 \omega^2. \quad (12.19)$$

在计算上述标量引力势差时，没有考虑与速度有关的科里奥利力相联系的效应。这类似于忽略了作用在从一点移动到另

一点的电荷上的磁力. 我们将假定圆盘轴上的钟(它相对于实验室参考系的线速度为零)与所有在 $\Sigma$ 中静止的钟同步. 圆盘轴上频率为 $\nu$ 的钟与在径向距离 $r$ 处频率为 $\nu_0$ 的钟之间的引力势差由方程(12.19)给出, 于是按照方程(12.2), 轴上的钟应当走得快些, 因为它处于较高的引力势. 由方程(12.2) [参看图 12.2(c)],

$$\nu_0 = \nu \left( 1 + \frac{\Delta\phi}{c^2} \right) = \nu \left( 1 - \frac{r^2 \omega^2}{2c^2} \right). \quad (12.20)$$

这与方程(12.18)一致. 海依, 希弗尔, 克兰肖和艾格斯塔夫<sup>[13]</sup>用穆司包尔效应作过这一类型的实验. 在 11.6 节中概略地叙述了这一实验. 他们的结果与方程(12.18)和(12.20)相符.

方程(12.18)与(12.20)的一致表明, 不论在惯性系中应用狭义相对论, 还是在旋转参考系中引进离心引力场而应用非惯性的旋转参考系, 我们都会得到相同的答案. 让我们引用玻恩<sup>[14]</sup>的话:

“这样, 从爱因斯坦的观点看来, 托勒密和哥白尼是同样正确的. 选择哪一种观点是个手段问题. 对于行星系的力学, 哥白尼的观点肯定是更方便的. 但若把邻近物体产生的场看成是“真实”场, 而把选择不同参考系时发生的引力场称为“虚构的”, 这将是没有意义的: 这正如狭义相对论中讨论杆的“真实”长度问题一样地没有意义. 引力场就其本身而言既不是“真实的”, 也不是“虚构的”. 正如杆长的情形一样, 它根本没有不依赖于坐标选择的意义. 也不能把场区分为, 一些是直接由物体产生的, 而另一些则不是; 在一种情况下它是特定的邻近物体产生的效应, 另一种情况下则是宇宙的遥远物体产生的效应.”

除了钟的速率之外, 杆的长度也受旋转的影响. 设图 12.4 中所示的旋转圆盘以角速度 $\omega$ 相对于 $\Sigma$ 旋转. 设观察者 $O'$  在旋转圆盘上静止. 又设观察者 $O'$  有一根量杆, 该量杆在惯性系中静止时, 其固有长度为 $l_0$ . 观察者 $O'$  着手测量旋

转圆盘的直径和圆周。我们从旋转圆盘在其中旋转的惯性系  $\Sigma$  来考虑他的操作。狭义相对论在  $\Sigma$  中是适用的。当观察者  $O'$  把他的量杆沿图 12.4 的圆盘直径放置时，量杆的长度垂直于它的运动方向，于是量杆在其长度方向上相对于  $\Sigma$  将不发生洛伦兹缩短。设  $O'$  测量圆盘直径的长度为  $X$  个单位。当  $O'$  将量杆沿圆盘边缘放置而测量圆盘的圆周时，如图 12.4 所示，量杆在平行于其长度的方向上运动，因此相对于  $\Sigma$ ，量杆长度由于洛伦兹缩短而成为

$$l_0 \sqrt{(1 - v^2/c^2)} = l_0 \sqrt{(1 - r^2\omega^2/c^2)} \cong l_0 \left(1 - \frac{1}{2} r^2\omega^2/c^2\right).$$

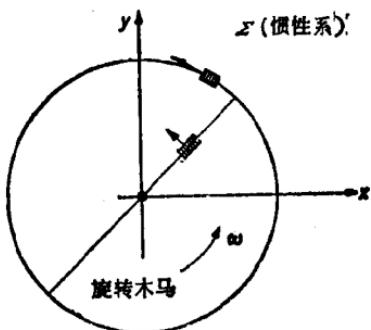


图 12.4 圆盘相对于惯性参考系  $\Sigma$  旋转。圆盘上的观察者着手测量旋转圆盘的直径和圆周。当量杆沿圆盘直径放置时，运动方向与长度垂直，因而其长度相对于  $\Sigma$  不发生洛伦兹缩短。当量杆沿旋转圆盘的圆周放置时，运动方向平行于长度，因而相对于  $\Sigma$  将发生洛伦兹缩短。

因此，相对于  $\Sigma$ ， $O'$  所测量的圆周必大于  $\pi X$  ( $= 3.142X$ ) 个单位。然而，当  $O'$  沿圆盘边缘移动时，他的量杆两端位置的测量是一系列的事件。这些事件是与任何特殊的坐标系无关的。因此，相对于圆盘在其中静止的参考系，所测量的圆周必然也比  $\pi X$  大一个因子  $\sim (1 - r^2\omega^2/2c^2)^{-1}$ 。

由于在圆盘所静止的参考系中，圆的周长不等于直径的

$\pi$  倍，所以欧几里德几何学在旋转圆盘上是不适用的。由于量杆长度随着径向位置而变化，所以圆周与直径之比也随着径向位置而变化。而且，固定在旋转圆盘上的钟的速率取决于它们的位置，因此不可能使固定在旋转圆盘上的不同位置的钟同步。在狭义相对论中我们对整个空间使用一个坐标系，并且利用光速不变原理，在原则上我们可用光信号使静止在该坐标系中的一切钟同步。这在旋转坐标系中是不可能的。在存在离心引力场的情况下，我们必须改变空间与时间的概念，人们不能对整个空间使用一个单独的坐标系，而必须使用许多无限小的局部坐标系，并使度规随不同地点而变化。

相对于静止的圆盘，远方的恒星将具有速度  $r\omega$ ，因此对于充分大的  $r$  值，恒星将以超过  $3 \times 10^8$  米/秒（地球上的光速值）的线速度相对于  $O'$  运动。乍一看来，这似乎与 5.3.2 节中导出的结论（一切物质实体的速度必须小于  $c$ ）相矛盾。然而， $u < c = 3 \times 10^8$  米/秒这一限制只是在狭义相对论中成立的。按照广义相对论，选择在有限空间体积内没有引力场的局部参考系是可能的，相对于这样一个参考系，光速等于  $c$ 。然而，当引力场存在时这是不对的。除了杆的长度与钟的时率以外，光速也受引力场的影响（参看 12.7 节）。如果引力场存在，物体速度或者光速均可取与引力场强度有关的任何数值。若将圆盘考虑为静止，则在很大距离处离心引力场将取很大的值，在这些情况下远方物体的速度超过  $3 \times 10^8$  米/秒是不与广义相对论矛盾的。

## 12.9 相对固定恒星加速的参考系

在 1.5 节中曾指出，当一个人处在火车内时，他可以说出什么时候火车在加速。如果想在一个相对惯性系  $\Sigma$  具有加速

度的参考系中应用牛顿定律，就必须引入惯性力。在 1.5 节中惯性力被假定为虚构力。如果在所有参考系中物理定律是相同的，那末这些惯性力必须从完整的广义相对论自然地得出。在 12.2 节中我们说明了，如果宇宙飞船中的宇宙航行员不看宇宙飞船外面的事物，他不可能说出，究竟是宇宙飞船由于断断续续地点燃火箭而经受一种突然加速的运动，还是在宇宙飞船附近有质量巨大的物体引起了引力场。这样，人们不能将加速引起的效应与引力场引起的效应分开来。读者可能已经注意到，当他处于电梯中时，他携带的包裹依电梯的加速度而变得较重或较轻。

相对于惯性系，‘固定’恒星处于静止或者以匀速运动。然而，相对于相对惯性系加速的参考系，恒星在加速。加速的物体与匀速运动的同样物体完全可能给出不同的引力（参考 9.5 节中讨论的电磁情形）。这样一来，加速参考系中的条件便与惯性系中的条件不同，因为相对于加速参考系恒星在加速。似乎有理由尝试把惯性力解释为恒星相对于所选参考系的加速度引起的引力。在加速参考系中适用的规律将是普遍规律，因而也能用于惯性系，但在后一情形，这些规律可能取更简单的形式。[例如，在电磁情形，如果相对于一个惯性系  $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{u}} = 0$ ，则方程(9.49)和(9.50)简化为  $\mathbf{E} = qr/4\pi\epsilon_0 r^3$  和  $\mathbf{B} = 0$ .] 被观察的事件是与任何特殊参考系无关的，但物理量的实际测量却依赖于所任意选择的静止标准。

由于钟的速率与杆的长度均受引力场的影响，因此在引力场存在的情况下，我们不能用一个在整个空间分布着同步钟的单独的参考系。我们只能用许多无穷小的局部坐标系，并且必须允许钟（例如原子钟）的时率在不同地点依引力场而变化，而引力场又转而依赖于物质的分布。

应当注意，通过提出惯性力是由远方恒星引力场引起的

这样一种看法，比起在 12.2 到 12.7 节中使用等效原理，我们走得更远了。在那里我们只假设了，在加速参考系中的测量将与具有适当强度引力场的静止参考系中所作的类似实验给出相同的数值结果。在 12.8 和 12.9 节中我们提出，相对于非惯性参考系，惯性力可以被解释为遥远宇宙物质相对于所选参考系的加速度所引起的实际引力场，也就是说，惯性力就是引力。

## 12.10 广义相对论

我们已经说明，当引力场存在时不能应用欧几里德几何学。爱因斯坦<sup>[15]</sup>假定：“所有高斯坐标系对于建立普遍自然定律而言，本质上都是等效的”。

按照协变原理，在所有这些高斯坐标系中，自然定律应具有相同的数学形式。为了发展一种协变的理论，爱因斯坦不得不使用普遍张量分析。这一点超出了本书的范围。对于完整的广义相对论感兴趣的读者，为得到该理论的一般说明，可参考爱因斯坦<sup>[15]</sup>和玻恩<sup>[16]</sup>的书。为得到较全面的一般说明，读者可参考爱丁顿<sup>[9]</sup>的书。为得到该理论的完整的数学说明，读者可参考爱丁顿<sup>[17]</sup>的书以及前面引过的谬勒，托尔曼和福克的书。

爱因斯坦假定，由于引力场对标准杆和钟的影响，物质的分布决定特殊的高斯坐标系中的局部空时几何。在没有引力场时，空时几何便是狭义相对论的闵可夫斯基空时几何。按照爱因斯坦的观点，在非欧几里德空时几何中，光线的路径是最短程线。爱因斯坦利用他的完整的广义相对论，能够计算谱线的引力移动和光在太阳附近的偏转[偏转量为方程 (12.17) 所给出的两倍]。我们已证明，不用完整的广义相对论，只由

等效原理，便可得到这些结果（精确到二阶项  $v^2/c^2$ ）。爱因斯坦完整理论在一级近似，便得出牛顿的引力理论，但两种理论之间仍有微小的差别。爱因斯坦预言，水星的轨道不是一个“静止的”椭圆，轨道的近日点应以每世纪 43" 进动。实验上发现，水星轨道近日点的总进动约为每世纪 5600"。其中除了大约每世纪 40" 以外，全都可解释为其它行星的引力所引起的摄动。爱因斯坦的理论解释了这额外的每世纪 40" 的进动。

在广义相对论中，物质的分布决定所选取的高斯坐标系的度规。广义相对论的方程被表示为微分方程的形式。这些方程的解依赖于边界条件。至于远方的恒星对地球上的现象究竟有多大影响，这仍然是个有些争论的问题。在 12.8 节中曾提出，在旋转参考系中，惯性力可以被解释为远方恒星的旋转所引起的引力。要决定物体运动如何影响它的引力场，最好的方法是进行实验室实验。然而，引力场非常弱，而所期望的引力场变化只具有  $v^2/c^2$  的量级，于是，用实验室测量来解决这一问题是没有多大希望的。因此便为大胆想象留下了余地。有些人竟然宣称，物质的一切惯性性质都可以认为是由于远方恒星的引力而来的。关于这种观点的一般说明，读者可参考赛厄马<sup>[11]</sup>的书。赛厄马受到布里吉曼（Bridgman）<sup>[12]</sup>的批评。关于引力理论的另一种观点，读者可参考福克<sup>[13]</sup>的书。

要弄清楚图 11 中旅行的钟 A 究竟发生了什么，使得钟 A 的读数比在惯性系（地球）中保持静止的钟 B 小，是不容易的，一般认为两个钟的读数差是由于钟 A 相对于惯性系的加速度。可是，两个钟读数差的实际大小却取决于钟 A 相对地球走了多长，以及以多大的匀速行进。在本章中我们已说明，远方的宇宙物质如何可能影响地球上物体的惯性性质。按照马赫原理，不应当撇开宇宙中其余物质来孤立地处理物体的旋转。类似地，我们或许不应当完全孤立地考虑这两个钟，而应当认

识到，即使当火箭相对于地球匀速运动时，它们相对于宇宙中其余物质也具有不同的运动。因而，两个钟可能经受着宇宙中其余物质所产生的不同的引力场，从而导致了不同的钟读数。关于考虑了宇宙中其余物质的时钟佯谬的一个例子的讨论，读者可参考惠绰（Whitrow）<sup>[20]</sup> 的书。

按照赛厄马的观点，物质的惯性来源于远方的宇宙物质产生的引力。在用旅行的孪生子来讨论时钟佯谬时，赛厄马写道<sup>[11]</sup>：

“两个人中任何一个都可以被看作是静止的；它们之间的差别来源于它们与远方物质的不同关系。这样一来，时钟佯谬便与牛顿的旋转水桶实验具有完全相同的情况。某些人声称，两个人事实上是对称的，因而在旅行中应当衰老相等。他们显然忽略了远方物质的关联。若没有远方物质，两个人将确实是对称的，并将衰老相等，可是在这种情况下，诸如惯性系或者惯性这类事情将不存在，因而也就不需要火箭来加速钟A了。在这样的宇宙中生命将全然不同。”

于是，按照赛厄马的纯理论的观点，在不存在宇宙中的其余物质时，也就是说宇宙只由两个钟组成的情况下，丁勒的观点有可能是正确的。然而，我们主要关心的应是本来面目的实际宇宙。在最后两章中我们已提出大量证据来支持另一种观点，即在我们所生活的实际宇宙中，对于图11.1所示的情形，旅行的孪生子将比留在地球上的孪生子衰老得少。只要争论继续存在，最令人满意的解决便是做尽可能多的实验。

### 参 考 文 献

- [1] Einstein, A. *Ann. Phys., Lpz.* 35(1911) 898 (Reprinted in *The Principle of Relativity*, p. 100. Dover Publications, New York)
- [2] Dicke, R. H. *The Theoretical Significance of Experimental Relativity*, Blackie, London and Glasgow, 1964
- [3] Fock, V. L. *The Theory of Space, Time and Gravitation*. p. 206.

- Pergamon Press, London, 1959
- [4] Born, M. *Einstein's Theory of Special Relativity*. 2nd Ed. p. 353. Dover Publications, New York, 1962
- [5] Pound, R. V. and Rebka, G. A. *Phys. Rev. Letters* 4(1960) 337
- [6] Cochran, W. *Vistas in Astronomy*. Vol 3. p. 78. Pergamon Press, London, 1960
- [7] French, A. P. *Principles of Modern Physics*, p. 169. Wiley, New York, 1958
- [8] Schiff, L. I. *Amer. J. Phys.* 28(1960) 340
- [9] Eddington, A. *Space, Time and Gravitation*. Cambridge University Press, London, 1920
- [10] Einstein, A. *Relativity, The Special and the General Theory*, p. 76. Methuen, London, 1920
- [11] Sciama, D. W. *The Unity of the Universe*. Anchor Books, New York, 1959
- [12] Møller, C. *The Theory of Relativity*. p. 317. Clarendon Press, Oxford, 1952
- [13] Hay, H. J., Schiffer, J. P., Cranshaw, T. E. and Egelstaff, P. A. *Phys. Rev. Letters* 4(1960) 165
- [14] Born, M. *Einstein's Theory of Relativity*. 2nd Ed. p. 344. Dover Publications New York, 1962
- [15] Einstein, A. *Relativity, The Special and the General Theory*. (a) p. 97. Methuen, London, 1920
- [16] Born, M. *Einstein's Theory of Relativity*. 2nd Ed. Dover Publications, New York, 1962
- [17] Eddington, A. *The Mathematical Theory of Relativity*. Cambridge University Press, 1923
- [18] Bridgman, P. W. *Amer. J. Phys.* 29(1961) 32
- [19] Fock, V. L. *The Theory of Space, Time and Gravitation*. Pergamon Press, London, 1959
- [20] Whitrow, G. J. *The Natural Philosophy of Time*. p. 220, Nelson, Edinburgh, 1961
- [21] Frisch, O. R. *Contemporary Physics* 3(1962) 194
- [22] Tolman, R. C. *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*. p. 194, Oxford University Press, 1934

### 补充读物

关于广义相对论的科普性的说明，读者可参考爱因斯坦

著的《狭义与广义相对论浅说》，玻恩著的《爱因斯坦的相对论》以及爱丁顿著的《空间、时间和引力》。

关于爱因斯坦原始文章的英译本，读者可见《相对性原理》。关于数学理论的简介，可见黎伯和黎伯著的《爱因斯坦相对论》。关于广义相对论的数学说明，可见爱因斯坦的《相对论的意义》，爱丁顿的《相对论的数学理论》，谬勒的《相对论》，泡利的《相对论》，福克的《空间、时间和引力理论》，托尔曼的《相对论、热力学与宇宙学》以及柏格曼的《相对论引论》。

在内依 (E. P. Ney) 所著《电磁学与相对论》中给出了引力红移、光线在恒星引力场中的偏转及水星近日点进动的近似推导。关于实验工作的说明，可参考戴克<sup>[2]</sup>的书。

## 习 题

12.1 试述如何用等效原理来解释谱线的引力移动及引力场中光的偏转。

12.2 计算索耳兹伯里大教堂尖顶(高为 404 英尺或 124 米) 上一原子过程的频率与地面同样过程的频率之间的相对频差(取  $g$  为 9.81 米/秒<sup>2</sup>)。

12.3 计算分别位于海平面与珠穆朗玛峰顶(高度为 29000 英尺或 8842 米) 的两个钟在一年以后的读数差。取重力加速度为等于 9.81 米/秒<sup>2</sup>。

12.4 一卫星处于地球上空 4500 公里高度的圆形轨道上。计算卫星中原子过程的频率与地球表面相同原子过程的频率之间的相对差。地球半径等于 6367 公里。

12.5 试述广义相对论中如何解释惯性力。

12.6 两个相同的原子用一根无重量的线吊在滑轮的两边。起初，一个原子(标以 1) 比另一原子(标以 2) 的高度低。较低的原子(1 号) 处于激发态，具有激发能  $E_0$ 。按照狭义相

对论，原子 1 的质量比处于基态的原子 2 大  $E_0/c^2$ . 因而较重的原子(1号)将铅直向下运动，而将原子 2 向上拉起。当原子 1 向下运动时，它发出具有能量  $E_0$  的光子，接着光子便被原子 2 吸收。现在原子 2 比原子 1 重，于是原子 2 铅直向下运动，而将原子 1 向上拉起。过了一段时间之后，原子 2 越过了原子 1 的高度，原子 2 发射具有能量  $E_0$  的光子，接着光子便被原子 1 吸收，然后原子 1 又铅直向下运动。如果该过程无限重复，便不断地作功。因此这便是永动机的一个例子。上述论证错在何处？[提示：考虑谱线的引力移动。参考弗里希(Frisch)<sup>[21]</sup>的文章。]

## 附录一 矢量分析公式提要

我们将用符号 **A**, **B** 或者 **C** 表示矢量, 用符号  $\phi$  表示标量. 矢量 **A** 的大小用  $A$  表示.

二矢量 **A** 与 **B** 的标积将记为  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ; 标积的大小等于 **A** 和 **B** 的大小与它们之间夹角余弦之积, 即

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z.$$

二矢量 **A** 与 **B** 的矢积将用  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$  表示. 它是这样一个矢量, 大小等于  $AB \sin(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ , 方向与 **A** 和 **B** 垂直, 使得 **A**, **B** 和 **C** 成右手系. 如果 **i**, **j** 和 **k** 分别为正  $x$ ,  $y$  和  $z$  方向的单位矢量, 则

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \mathbf{i}(A_y B_z - A_z B_y) \\ &+ \mathbf{j}(A_z B_x - A_x B_z) + \mathbf{k}(A_x B_y - A_y B_x).\end{aligned}$$

标量场  $\phi$  的梯度可定义为具有分量  $\partial\phi/\partial x$ ,  $\partial\phi/\partial y$ ,  $\partial\phi/\partial z$  的矢量, 即

$$\text{grad } \phi = \mathbf{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

有些作者愿意用矢量算符  $\nabla$ , 它通常称为劈形或倒三角形算符, 并定义如下

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

利用算符  $\nabla$ ,  $\text{grad } \phi$  可写为

$$\text{grad } \phi = \nabla \phi = \mathbf{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

矢量场 **A** 的散度定义为

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

矢量场的散度为标量。

矢量场  $\mathbf{A}$  的旋度定义为

$$\begin{aligned}\operatorname{curl} \mathbf{A} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ &= \mathbf{i} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \\ &\quad + \mathbf{k} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right).\end{aligned}$$

矢量场的旋度为矢量。

如果  $\phi$  是标量场,  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  是矢量场, 则以下关系式成立:

$$\operatorname{curl} (\operatorname{grad} \phi) = \nabla \times (\nabla \phi) = 0,$$

$$\operatorname{div} (\operatorname{curl} \mathbf{A}) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0,$$

或 
$$\begin{aligned}\operatorname{div} (\phi \mathbf{A}) &= \phi \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \operatorname{grad} \phi \\ \nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) &= \phi (\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla \phi)\end{aligned}\Bigg\},$$

或 
$$\begin{aligned}\operatorname{curl} (\phi \mathbf{A}) &= \phi \operatorname{curl} \mathbf{A} + (\operatorname{grad} \phi) \times \mathbf{A} \\ \nabla \times (\phi \mathbf{A}) &= \phi (\nabla \times \mathbf{A}) + (\nabla \phi) \times \mathbf{A}\end{aligned}\Bigg\},$$

或 
$$\begin{aligned}\operatorname{div} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{B} \cdot (\operatorname{curl} \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\operatorname{curl} \mathbf{B}) \\ \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})\end{aligned}\Bigg\},$$

或 
$$\begin{aligned}\operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{A} &= \operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}\end{aligned}\Bigg\},$$

其中  $\nabla^2$  为拉普拉斯算符, 等于

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

### 斯托克斯定理

按照斯托克斯定理, 矢量场  $\mathbf{A}$  的旋度在任何曲面上的面

积分等于  $\mathbf{A}$  绕该曲面边界的线积分, 即

$$\int (\operatorname{curl} \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

或

$$\int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l},$$

其中  $\mathbf{n}$  为曲面面元  $dS$  上的单位法向量.

### 高斯定理

按照高斯定理, 矢量场  $\mathbf{A}$  的散度在任何体积内的体积分, 等于  $\mathbf{A}$  在包围面上的面积分, 即

$$\int \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS,$$

或

$$\int (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS.$$

## 附录二 静止物质中 **P**, **D**, **M** 和 **H** 的定义

在麦克斯韦建立他的电磁理论时，还没有原子结构理论。麦克斯韦就大块物质发展了他的理论。洛伦兹进行他的理论研究之时，阴极射线的性质为人所共知，也已经引进正负离子的概念来解释电解导电，当时汤姆森正在测量电子的  $e/m$  值。尽管如此，原子核概念仍未出现。从洛伦兹那时以来，已经有了关于原子与核结构的更详细的理论，现在，试图从原子理论来建立电介质的理论看起来是很自然的事情。然而在洛伦兹那时，这种想法却是新颖而奇妙的。

在微观理论中，每个核和电子都当作分离的真实电荷来处理，因而不必引入矢量 **P**, **M**, **H** 和 **D**。原则上按照经典理论，根据作用在以匀速 **u** 运动的  $q$  库仑试验电荷上的洛伦兹力：

$$\mathbf{f} = q\mathbf{E} + q\mathbf{u} \times \mathbf{B}, \quad (\text{A2.1})$$

就可测量基本粒子外面的任何一处的场。在静电学中我们是从库仑定律出发的。离“点”电荷  $q$  距离  $\mathbf{r}$  处的电场 **E** 由表达式

$$\mathbf{E} = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (\text{A2.2})$$

给出。利用关系式

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \phi, \quad (\text{A2.3})$$

可由标势  $\phi$  算出静电场，对于点电荷有

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (\text{A2.4})$$

考虑电量为  $+q$  和  $-q$  的两个点电荷，分开一个很小的距离，如图 A2.1(a) 所示。设电荷  $-q$  位于原点，而电荷  $+q$  位于  $z$  轴上。在点  $S$  的势由

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right] \quad (\text{A2.5})$$

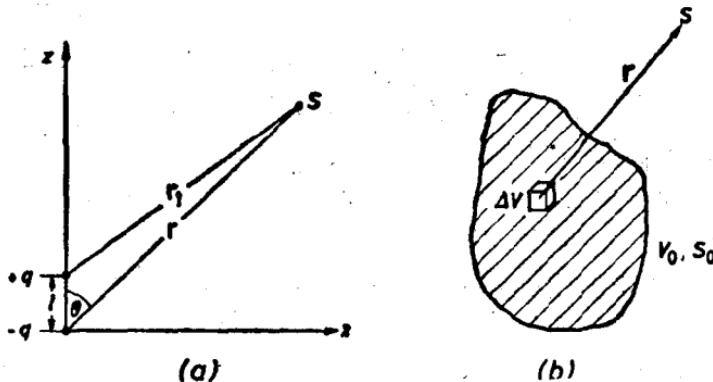


图 A2.1 (a) 相距  $l$  的“点”电荷  $+q$  和  $-q$  组成的电偶极子。在点  $S$  处计算电场。(b) 极化介质。介质体积为  $V_0$ ，表面积为  $S_0$ 。在点  $S$  处计算电场。

给出，其中  $r_1$  和  $r$  分别为从电荷  $+q$  和电荷  $-q$  到观测点  $S$  的距离。于是有  $r_1^2 = r^2 + l^2 - 2rl \cos \theta$ ，或者

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} \left[ 1 + \frac{l^2}{r^2} - \frac{2l}{r} \cos \theta \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

现在假定  $r \gg l$ 。用二项式定理展开，忽略  $l^2/r^2$  量级的量，我们有

$$\frac{1}{r_1} \cong \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{l}{r} \cos \theta \right).$$

代入方程 (A2.5)，得到

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{l}{r} \cos \theta \right) - \frac{1}{r} \right],$$

或者

$$\phi = \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

偶极矩  $\mathbf{p}$  被定义为大小等于  $ql$  并指向正  $z$  方向的矢量。因此

$$\phi = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (\text{A2.6})$$

这只要  $r \gg l$  成立。方程 (A2.6) 给出了离具有偶极矩  $\mathbf{p}$  的电偶极子距离  $\mathbf{r}$  处的静电势。

考虑在外加电场影响下被极化的静止电介质。外加电场倾向于将介质内部分子中的正负电荷分开，于是每个分子便有了合偶极矩。对于原子电偶极子给出明确的经典模型将超出测不准原理所加的限制。简单一点我们可以说，每个电荷可用一波函数描述，它可用来计算在空间任何特殊点找到该电荷的几率。对于无极分子，在没有电场存在的情况下，原子内正“电荷中心”与负“电荷中心”重合。在电场影响下，两个“电荷中心”发生位移，便引起了偶极矩，我们将它定义为  $\mathbf{p}_i$ 。任何极性分子将倾向于按照外加电场方向排列整齐化，而晶体中的任何离子将倾向于在外场方向上位移。这样，由于外加电场的影响，大量的原子偶极矩被感生出来，或者（对于各向同性介质）在外场方向上排列整齐化。考虑一个小体积元  $\Delta V$ 。设

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i = \mathbf{P} \Delta V, \quad \text{或者} \quad \mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i, \quad (\text{A2.7})$$

其中矢量求和是对体积元  $\Delta V$  内的所有原子电偶极子进行的。方程 (A2.7) 是用微观的原子偶极矩对极化矢量  $\mathbf{P}$  下的定义。我们可以使体积元  $\Delta V$  相对于实验室尺度是很小的（比如说  $10^{-5}$  厘米<sup>3</sup>），而又包含很多的分子（例如，在  $10^{-5}$  厘米<sup>3</sup> 内，含有  $10^9$  个分子）。这样一来，在宏观理论中， $\mathbf{P}$  可作

为位置的连续函数，而被定义为每单位体积的偶极矩。

### 极化介质产生的外电场

我们将计算图 A2.1(b) 所示的极化介质在点  $S$  处所产生的电场。考虑介质内的体积元  $\Delta V$ ，设该处的极化矢量为  $\mathbf{P}$ 。设从  $\Delta V$  到  $S$  的距离为  $\mathbf{r}$ ，如图 A2.1(b) 所示。考虑体积元  $\Delta V$  内具有偶极矩  $\mathbf{p}_i$  的一个原子电偶极子。它对点  $S$  处静电势的贡献等于  $\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r} / 4\pi\epsilon_0 r^3$ 。 $\Delta V$  内所有的原子偶极子（它们离  $S$  的距离均为  $r$ ）在  $S$  产生的静电势等于

$$\Delta\phi = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

求和是对  $\Delta V$  内所有原子偶极子进行的。对于任意三个矢量，我们有

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C},$$

因此

$$\begin{aligned} &(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r} + \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r} + \cdots + \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{r}) \\ &= (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \cdots + \mathbf{p}_n) \cdot \mathbf{r}. \end{aligned}$$

但由方程 (A2.7)，

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i = \mathbf{P} \Delta V.$$

所以

$$\Delta\phi = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{r} \Delta V}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

因此

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dV. \quad (A2.8)$$

但当点  $S$  固定，而  $\Delta V$  位置变化时，

$$\frac{\mathbf{r}}{r^3} = \text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) = \nabla \left( \frac{1}{r} \right),$$

因此方程(A2.8)变为

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0} \mathbf{P} \cdot \operatorname{grad} \left( \frac{1}{r} \right) dV. \quad (\text{A2.9})$$

对任何标量  $\phi$  与矢量  $\mathbf{A}$ , (参考附录一)有:

$$\operatorname{div} \phi \mathbf{A} = \phi \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \operatorname{grad} \phi.$$

将  $\mathbf{A} = \mathbf{P}$  和  $\phi = \frac{1}{r}$  代入, 我们得到

$$\mathbf{P} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r} = \operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{P}}{r} \right) - \frac{1}{r} \operatorname{div} \mathbf{P}.$$

代入方程 (A2.9),

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0} \operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{P}}{r} \right) dV + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0} \frac{(-\operatorname{div} \mathbf{P})}{r} dV. \quad (\text{A2.10})$$

由高斯定理(见附录一), 对于任何矢量  $\mathbf{A}$ ,

$$\int_{V_0} \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \int_{S_0} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS.$$

所以, 方程(A2.10)可改写为

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S_0} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}}{r} dS + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0} \frac{(-\operatorname{div} \mathbf{P})}{r} dV. \quad (\text{A2.11})$$

现在, 如果在真空中有面电荷分布  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$  与体电荷分布  $(-\operatorname{div} \mathbf{P})$ , 该面分布与体分布的几何构形与介质完全相同, 则在点  $S$  的势将也由方程(A2.11)给出. 这样一来, 为了计算电场, 我们可用面电荷分布

$$\sigma' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{A2.12})$$

及体电荷分布

$$\rho' = -\operatorname{div} \mathbf{P} \quad (\text{A2.13})$$

来代替介质. 于是, 为了计算电场, 极化介质问题便可用由方程(A2.12)和(A2.13)所给出的、位于真空中的虚构电荷分布

来代替。库仑定律，以及由它导出的方程，可以用于这些虚构的电荷分布，来计算电场和势。只要对于介质内所有偶极子而言，偶极子近似都正确，这一方法便是正确的。因此对于介质外部的点，或者对于介质内部切出的空腔（它相对于原子尺度是很大的）中间的点，该方法都是正确的。如果想计算介质中一分子近旁或内部的场，必须用基于特殊原子模型的微观理论。例如，如果想计算作用在晶体内一离子上的力，就必须用考虑到晶体结构的微观理论。用方程 (A2.11) 算出的电场也等于介质内微观电场的空间时间平均。由高斯定律，

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{真}}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_{\text{真实}} + \rho'), \quad (\text{A2.14})$$

其中  $\rho_{\text{真}}$  为由我们放在介质上的电荷（例如由实际地摩擦它）所产生的真实电荷密度； $\rho'$  为由方程 (A2.13) 所给出的极化电荷密度。将  $\rho' = -\operatorname{div} \mathbf{P}$  代入方程 (A2.14)，

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_{\text{真实}} - \operatorname{div} \mathbf{P}),$$

或

$$\operatorname{div} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_{\text{真实}}. \quad (\text{A2.15})$$

量  $\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$  在电磁理论中出现得非常频繁，为简便起见，给它一个特殊的名称（即电位移）及一个特殊的符号（即  $\mathbf{D}$ ）是方便的，因此我们定义电位移如下：

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (\text{A2.16})$$

方程 (A2.15) 可以改写为如下形式

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_{\text{真实}}.$$

这便是麦克斯韦方程组中的一个方程。人们本来也可以同样有效地使用方程 (A2.15) 本身，而不在电磁理论中引进  $\mathbf{D}$ 。

在上述介质理论中，不必对原子电偶极子采用明确的模型。我们只需假定，在外加电场存在的情况下，介质原子具有

合电偶极矩。在初等的论述中常用一种简化模型。常常假定，原子偶极子由分开距离  $l$  的两个经典“点”电荷组成。人们于是说，在电场存在情况下，偶极子指向  $\mathbf{E}$  的方向。并说当  $\mathbf{P}$  均匀时，除了在表面以外，介质内正负电荷所产生的效应均互相抵消，如图 2.13 (2.4 节) 所示。在第八章中，我们曾用这一简单经典模型来解释  $\mathbf{P}$  的相对论变换。请读者记住这一经典模型的局限性。

如果在极化介质内切出具有各种几何形状的空腔，在空腔内放入静止的试验电荷，则通过应用理论来计算作用在试验电荷上的力，便将至今发展的理论与可能的实验联系起来。考虑在各向同性介质内平行于电场的一个针形空腔。可以使空腔直径相对于宏观尺度是很小的，但仍然为原子直径的很多倍。应用上述理论，多数有关电学的教科书中都证明了，作用在位于空腔中心的静止试验电荷  $q'$  上的力等于  $q'\mathbf{E}$ ，其中  $\mathbf{E}$  等于空腔被切出以前在介质中存在的理论上的电场 [用方程(A2.11)算出]。可以证明，作用于在圆盘形空腔(其轴平行于电场)中心静止的试验电荷  $q'$  上的力等于  $q'\mathbf{D}/\epsilon_0$ ，其中  $\mathbf{D}$  为空腔被切出以前，在各向同性介质内的理论上的电位移。

### 磁化物体产生的磁场

当物体在外加磁场中被磁化时，原子磁偶极子沿外加磁场方向排列整齐化(对于各向同性磁性物质而言)。电子磁偶极矩一部分来自其轨道运动，一部分来自它的自旋。现代知识还无法对于原子磁偶极子给出明确的经典模型。按照狄拉克方程，我们所能观测到的事实是电子具有磁矩。在初等教程中，通常采用如下两种经典模型之一。按照安培的模型，可将原子磁偶极子描绘为很小的环形电流，有点类似于玻尔的氢原子理论中所假设的电子轨道。按照磁极模型，磁偶极子被

描绘为小的磁棒，每个磁棒由虚构的北极和虚构的南极组成。本书所用的是前一模型。本书中将平面环形电流的磁矩定义为电流与环面积之积 [见 8.4 节, 方程 (8.80)]。可以证明 [例如, 瑞兹与密尔福特所著《电磁理论基础》(Reitz and Milford, *Foundations of Electromagnetic Theory*), 第八章], 在真空中离偶极子距离  $r$  处 ( $r$  与偶极子的尺度相比是很大的), 由这样一个具有磁矩  $\mathbf{m}$  的磁偶极子所产生的矢势为

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (\text{A2.17})$$

可以证明, 一个虚构的北极和一个虚构的南极在其距离比  $r$  小很多时所产生的矢势也由方程(A2.17)给出, 其中  $\mathbf{m}$  这时为虚构磁极的空间分离所产生的磁偶极矩。这样一来, 只要在两种情形中偶极子近似都成立, 则关于磁矩  $\mathbf{m}$  产生的矢势, 两种经典模型给出相同的表达式。

磁化矢量  $\mathbf{M}$  被定义为每单位体积的磁偶极矩。如果  $\mathbf{m}_i$  为体积元  $\Delta V$  中一个偶极子的磁偶极矩, 则磁化矢量  $\mathbf{M}$  被定义为

$$\mathbf{M} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i}{\Delta V}, \quad (\text{A2.18})$$

其中矢量求和是对体积元  $\Delta V$  内所有磁偶极子进行的。可以使体积元  $\Delta V$  相对实验室尺度是很小的(比如说  $10^{-5}$  厘米 $^3$ ), 而包含很多的原子(对于  $10^{-5}$  厘米 $^3$  来说, 为  $\sim 10^9$ )。这样, 在宏观理论中,  $\mathbf{M}$  便可作为位置的连续函数。

考虑磁化物体内一点处的体积元  $\Delta V$ 。我们将计算离体积元  $\Delta V$  距离为  $r$  的一点  $S$  处的矢势。[与图 A2.1(b) 比较。] 和刚才计算极化介质产生的电场的作法相同, 而用方程 (A2.17) 代替 (A2.6), 我们便得到  $S$  处的矢势为

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{r}}{r^3} dV.$$

这一方程(见瑞兹和密尔福特著《电磁理论基础》, 第 186 页)  
可变换为如下表达式

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_0} \frac{\operatorname{curl} \mathbf{M}}{r} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_0} \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{n}}{r} dS. \quad (\text{A2.19})$$

因为离电流元  $i d\mathbf{l}$  距离  $\mathbf{r}$  处的矢势为

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\mathbf{l}}{r}, \quad (\text{A2.20})$$

因此,为了计算磁场,磁化物体可用  $\mathbf{M} \times \mathbf{n}$  安培/米的面电流,以及体电流密度  $\operatorname{curl} \mathbf{M}$  来代替,只要对所有的微观磁偶极子,偶极子近似均正确即可.

按照安培环路定理,

$$\operatorname{curl} \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \mathbf{J}'),$$

其中  $\mathbf{J}$  为外加电流密度,而  $\mathbf{J}'$  为磁化电流密度(它等于  $\operatorname{curl} \mathbf{M}$ ). 因此,

$$\operatorname{curl} \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J}. \quad (\text{A2.21})$$

量  $(\mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M})$  在电磁理论中出现得非常频繁,值得给它一个特殊名称和特殊符号. 它叫作磁化力,并记为  $\mathbf{H}$ ,于是,作为定义,

$$\mathbf{H} = \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right). \quad (\text{A2.22})$$

这样,方程(A2.21)便有更简单的形式

$$\operatorname{curl} \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (\text{A2.23})$$

虽然我们当然总可以只用方程(A2.21). 方程(A2.23)是麦克斯韦方程组的一个方程. 多数电学教科书中证明了,磁化物体内的场矢量  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{H}$  可以和作用于在磁化物体内切出的圆盘形和针形空腔内运动的电荷上的磁力相联系. 在上面概述

的理论中，我们不必对磁原子偶极子假设明确的经典模型。我们所需要假定的只是存在磁偶极子，具有未知的结构，在很远距离处，其矢势由方程(A2.17)给出。

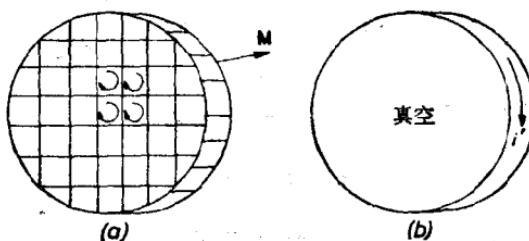


图 A2.2 (a) 均匀磁化物体的一个截面。原子磁偶极子用环形电流表示。每个环中的电流方向如图所示。除了边缘以外，相邻环中的电流产生的磁场均抵消。合磁场与图(b)所示的置于真空中、而具有与磁化物体表面相同几何形状的载流面的磁场相同。

我们可用经典的安培模型来解释方程(A2.19)。考虑垂直于  $\mathbf{M}$  而切出的一薄片均匀磁化物体。我们将假定原子磁偶极子为具有图 A2.2 所示几何形状的环形电流。除了在这片磁化物质的边缘以外，相邻环中的电流所产生的效应均互相抵消，因此，为了计算磁场，均匀磁化物体可用面电流分布来代替。在第八章中，我们曾用这一简化经典模型来解释  $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{M}$  的变换。请读者记住这一模型的局限性。

### 附录三 运动物体的质量(另一种推导)

设两个完全一样的粒子以速度  $+u'$  和  $-u'$  平行于惯性系  $\Sigma'$  的  $x'$  轴运动, 如图 A3.1(b) 所示。设二粒子迎头碰撞。我们将假定二粒子是完全弹性的。二粒子将相对于  $\Sigma'$  瞬时静止, 然后将在增长起来的弹性力影响下被弹回, 于是相对于  $\Sigma'$ , 它们分别以速度  $-u'$  和  $+u'$  沿原轨道反向运动。

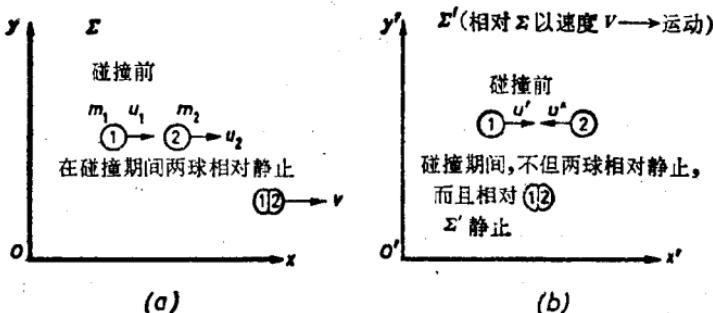


图 A3.1 两个相同粒子的弹性碰撞。(b) 在  $\Sigma'$  中二粒子以速度  $+u'$  和  $-u'$  互相接近。在它们以  $\Sigma'$  中的大小相等方向相反的速度被弹回以前, 它们互相相对静止, 并且相对  $\Sigma'$  静止。(a) 相对于惯性系  $\Sigma$  所表示的同一碰撞。

现在我们从惯性系  $\Sigma$  来考虑这同一个碰撞,  $\Sigma$  以速度  $-v$  相对  $\Sigma'$  沿公共  $x$  轴运动, 如图 A3.1(a) 所示。设  $u_1$  和  $u_2$  为两个粒子碰撞前相对于  $\Sigma$  的速度, 并设  $m_1$  和  $m_2$  为它们碰撞前相对于  $\Sigma$  所测得的质量。设  $M$  为碰撞过程中, 当二碰撞粒子达到互相相对静止的那一瞬间, 在  $\Sigma$  中所测量的二粒子质量之和。在这一瞬间, 二碰撞粒子相对  $\Sigma'$  静止, 而以速度  $+v$

相对  $\Sigma$  运动。我们将假定，在惯性系  $\Sigma$  中，二粒子的总动量与总质量在碰撞过程中都守恒，于是有

$$m_1 + m_2 = M, \quad (\text{A3.1})$$

和

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = M v. \quad (\text{A3.2})$$

既然相对论力学方程应与狭义相对论一致，于是出现在方程 (A3.2) 中的所有速度都必须按照狭义相对论的速度变换式来变换。因此，将方程

$$u_x = \frac{u'_x + v}{(1 + vu'_x/c^2)} \quad (4.9)$$

用于粒子 1 和 2，我们得到

$$u_1 = \frac{u' + v}{(1 + vu'/c^2)} \quad (\text{A3.3})$$

和

$$u_2 = \frac{-u' + v}{(1 - vu'/c^2)}. \quad (\text{A3.4})$$

$u_2$  的实际方向取决于  $u'$  是否大于  $v$ 。在图 A3.1 中我们假设了  $v > u'$ ，于是在碰撞前两个粒子相对  $\Sigma$  在同一方向上运动。用方程 (A3.3) 和 (A3.4) 分别代换  $u_1$  和  $u_2$ ，并将方程 (A3.1) 代入方程 (A3.2) 而消去  $M$ ，我们得到

$$m_1 \left\{ \frac{u' + v}{1 + vu'/c^2} \right\} + m_2 \left\{ \frac{-u' + v}{1 - vu'/c^2} \right\} = (m_1 + m_2)v,$$

即

$$m_1 \left\{ \frac{(u' + v)}{(1 + vu'/c^2)} - v \right\} = m_2 \left\{ v + \frac{(u' - v)}{(1 - vu'/c^2)} \right\}.$$

因此，

$$\begin{aligned} & \frac{m_1}{(1 + vu'/c^2)} \left\{ u' + v - v - \frac{v^2 u'}{c^2} \right\} \\ &= \frac{m_2}{(1 - vu'/c^2)} \left\{ v - \frac{v^2 u'}{c^2} + u' - v \right\}, \end{aligned}$$

或

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\left(1 + \frac{vu'}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{vu'}{c^2}\right)}, \quad (\text{A3.5})$$

由方程(4.15),

$$\left(1 + \frac{vu'_x}{c^2}\right) = \sqrt{\frac{(1 - v^2/c^2)(1 - u'^2/c^2)}{(1 - u^2/c^2)}}. \quad (4.15)$$

对于粒子 1, 在  $\Sigma'$  中有  $u'_x = u'$  和  $u' = u'$ , 在  $\Sigma$  中有  $u = u_1$ . 代入方程(4.15), 得

$$\left(1 + \frac{vu'}{c^2}\right) = \sqrt{\frac{(1 - v^2/c^2)(1 - u'^2/c^2)}{(1 - u_1^2/c^2)}}. \quad (\text{A3.6})$$

对于粒子 2, 在  $\Sigma'$  中有:  $u'_x = -u'$ ,  $u' = u'$ , 在  $\Sigma$  中有  $u = u_2$ . 代入方程(4.15), 得

$$\left(1 - \frac{vu'}{c^2}\right) = \sqrt{\frac{(1 - v^2/c^2)(1 - u'^2/c^2)}{(1 - u_2^2/c^2)}}. \quad (\text{A3.7})$$

将方程(A3.6)除以方程(A3.7),

$$\frac{\left(1 + \frac{vu'}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{vu'}{c^2}\right)} = \frac{\sqrt{(1 - u_2^2/c^2)}}{\sqrt{(1 - u_1^2/c^2)}}. \quad (\text{A3.8})$$

代入方程(A3.5),

$$m_1 \sqrt{(1 - u_1^2/c^2)} = m_2 \sqrt{(1 - u_2^2/c^2)}. \quad (\text{A3.9})$$

因此, 为使碰撞过程中  $\Sigma$  中质量和动量都守恒, 方程(A3.9)必须满足. 这与方程(5.26)是同一方程. 如果当  $u_1$  为零时  $m_1 = m_0$ , 当  $u_2$  为零时  $m_2 = m_0$ , 则只要

$$m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{(1 - u_1^2/c^2)}}, \quad m_2 = \frac{m_0}{\sqrt{(1 - u_2^2/c^2)}},$$

方程(A3.9)便可以满足. 因此, 为使碰撞过程中  $\Sigma$  中质量和

动量都守恒，粒子的质量必须重新定义，使得当它以速度  $u$  相对  $\Sigma$  运动时，其质量等于

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (5.27)$$

其中  $m_0$  为粒子在静止时的质量值； $m_0$  叫作粒子的原质量。

## 附录四 矩阵理论概要<sup>1)</sup>

我们假定读者已熟知行列式的性质，以及行列式用余子式的展开。

矩阵是实数或复数的阵列，例如

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{A4.1})$$

就是一个由  $m$  个行和  $n$  个列组成的矩阵。当  $m = n$  时，该矩阵叫作  $n$  阶方阵。必须强调， $m$  并不一定等于  $n$ 。事实上我们将发现，用只由一列组成的矩阵来表示矢量是方便的。在矩阵的写法上，用一个字母，例如  $\mathbf{A}$ ，来表示矩阵常常是方便的。我们将总是用方括号表示矩阵，以避免与行列式混淆，行列式有时用两侧各有一直线的数阵来表示。在行列式中，阵列中的数必须以确定的组合乘在一起，然后再加到一起，而给出一个单一的数。在矩阵中并不含有这样的意思。矩阵只是数（或元素）的一个阵列，它服从一定的加、减、乘、除的法则。

行数相同列数也相同的两个矩阵  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  是关于加法相适的。矩阵  $\mathbf{A}$ （其第  $i$  行第  $k$  列元素为  $a_{ik}$ ）与矩阵  $\mathbf{B}$ （其第  $i$  行第  $k$  列元素为  $b_{ik}$ ），只当它们关于加法相适时，其和才有定义，这时便定义这个和为以  $a_{ik} + b_{ik}$  作为其第  $i$  行第  $k$  列元素的矩阵，例如

1) 所用各种定义均取自费拉 (Ferrari<sup>11</sup>) 所著《代数学》。

$$\begin{aligned}\mathbf{A} + \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

矩阵  $-\mathbf{A}$  是这样一个矩阵，其元素为  $\mathbf{A}$  的元素乘以  $-1$ 。矩阵  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$  等于矩阵  $\mathbf{A} + (-\mathbf{B})$ 。它被称为两个矩阵  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  的差。

每个元素皆为零的矩阵叫作零矩阵，并记为  $\mathbf{O}$ ，例如

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

当两个矩阵关于加法相适，并且  $\mathbf{A}$  的每个元素等于  $\mathbf{B}$  的对应元素，即  $a_{ik} = b_{ik}$  时，我们便说矩阵  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  相等，并记为  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ 。当  $r$  为一实数或复数， $\mathbf{A}$  为一矩阵时， $r\mathbf{A}$  便被定义为这样一个矩阵，它的每一元素为  $r$  乘以  $\mathbf{A}$  的相应元素。可以证明，矩阵服从加法的结合律、交换律和分配律。

两个矩阵  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$ ，当  $\mathbf{A}$  的列数等于  $\mathbf{B}$  的行数时，则它们是为关于乘积  $\mathbf{AB}$  相适的，这时，便将  $\mathbf{AB}$  定义为以  $\sum_j a_{ij}b_{jk}$  为第  $i$  行第  $k$  列元素的矩阵，其中  $a_{ij}$  为矩阵  $\mathbf{A}$  的第  $i$  行第  $j$  列元素， $b_{jk}$  为矩阵  $\mathbf{B}$  的第  $j$  行第  $k$  列元素。考虑乘积

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{C}$  的第二行第二列元素为

$$c_{22} = \sum_{j=1}^3 a_{2j}b_{j2}.$$

在计算  $c_{22}$  时，如下作法是有益的：过  $\mathbf{A}$  的第二行与  $\mathbf{B}$  的第

二列各画一箭头, 该行的第一项乘以该列的第一项, 该行的第二项乘以该列的第二项, 等等, 然后加在一起. 这与将行与列中的一串元素视为矢量的分量, 即把  $\mathbf{A}$  的第  $i$  行的数作为一个矢量, 把  $\mathbf{B}$  的第  $k$  列中的数作为一个矢量, 取这两矢量的标积(或内积)是一样的.

一般说来, 矩阵  $\mathbf{AB}$  与矩阵  $\mathbf{BA}$  是不同的. 因此, 只有先弄清是指  $\mathbf{AB}$  还是指  $\mathbf{BA}$ , “用  $\mathbf{B}$  乘  $\mathbf{A}$ ”这一说法才有明确的意义. 用  $\mathbf{B}$  右乘矩阵  $\mathbf{A}$  为矩阵  $\mathbf{AB}$ , 而用  $\mathbf{B}$  左乘矩阵  $\mathbf{A}$  为矩阵  $\mathbf{BA}$ . 可以证明, 矩阵乘法满足分配律和结合律, 但因  $\mathbf{BA}$  一般不等于  $\mathbf{AB}$ , 矩阵乘法不满足交换律.

主对角线元素为 1 其余元素为零的  $n$  阶方阵叫作  $n$  阶单位矩阵. 它被记作  $\mathbf{I}$ , 例如,

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

用矩阵乘法可以证明

$$\mathbf{IA} = \mathbf{AI} = \mathbf{A}. \quad (\text{A4.2})$$

矢量可用其沿任一坐标系的各个轴的分量表示. 二维矢量具有两个分量, 三维矢量具有三个分量, 等等. 这些分量可以写为单行或者单列矩阵的形式. 我们将按惯例用列矩阵表达矢量. 考虑一个二维矢量  $\mathbf{A}$ . 选择直角坐标轴  $x_1$  和  $x_2$ . 设  $\mathbf{A}$  平行于  $x_1$  和  $x_2$  轴的分量分别为  $A_1$  和  $A_2$ . 矢量  $\mathbf{A}$  可以表为矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A4.3})$$

现在考虑相对  $x_1, x_2$  轴转过了角度  $\phi$  的直角坐标轴  $x'_1, x'_2$ . 用以下三角关系式, 可将矢量  $\mathbf{A}$  相对新轴  $x'_1, x'_2$  的分量用  $\mathbf{A}$  相对旧轴  $x_1, x_2$  的分量表出:

$$A'_1 = A_1 \cos(x'_1, x_1) + A_2 \cos(x'_1, x_2), \quad (\text{A4.4})$$

$$A'_2 = A_1 \cos(x'_2, x_1) + A_2 \cos(x'_2, x_2), \quad (\text{A4.5})$$

其中  $\cos(x'_1, x_1)$  等等为方向余弦, 即  $\cos(x'_1, x_1)$  为  $x'_1$  轴与  $x_1$  轴之间夹角的余弦. 如令  $\cos(x'_1, x_1) = \cos\phi$ , 方程(A4.4) 和(A4.5)可以改写为

$$A'_1 = A_1 \cos\phi + A_2 \sin\phi,$$

$$A'_2 = -A_1 \sin\phi + A_2 \cos\phi,$$

或

$$\begin{bmatrix} A'_1 \\ A'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{A4.6})$$

或

$$\mathbf{A}' = \mathbf{AA}, \quad (\text{A4.7})$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}. \quad (\text{A4.8})$$

用这种方法, 矢量在新坐标系  $x'_1, x'_2$  中的分量可用该矢量相对旧坐标系  $x_1, x_2$  的分量表出.

转置矩阵为把原来的矩阵的行列互换所得的矩阵, 于是原来的矩阵的第  $i$  行第  $k$  列元素出现在其转置矩阵的第  $k$  行第  $i$  列. 例如,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ 的转置为 } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

转置矩阵的符号非常不统一. 这里, 我们用符号  $\tilde{\mathbf{A}}$  来表示矩阵  $\mathbf{A}$  的转置, 尽管有时(尤其当我们要表示乘积矩阵的转置时)用  $\text{tr}(\mathbf{A})$  来表示它. 如果  $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ , 则可以证明

$$\tilde{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{A}},$$

或

$$\text{tr}(\mathbf{AB}) = \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{A}}. \quad (\text{A4.9})$$

还有

$$\text{tr}(\tilde{\mathbf{A}}) = \mathbf{A}. \quad (\text{A4.10})$$

如果有两个矢量  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{v}$ , 它们的标积可以表为

$$\tilde{\mathbf{u}}\mathbf{v} = (u_1 u_2 u_3) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

为了省地方, 列矩阵(例如  $\mathbf{v}$ )常常写成

$$\text{tr}[v_1 v_2 v_3].$$

如果方阵  $\mathbf{A}$  的行列式(即用矩阵  $\mathbf{A}$  的元素作为行列式的元素所得到的行列式)为零, 则方阵  $\mathbf{A}$  为奇异矩阵. 如果矩阵的行列式不为零, 则为非奇异矩阵. 当方阵  $\mathbf{A}$  (其第  $i$  行第  $k$  列元素为  $a_{ik}$ ) 为非奇异矩阵时, 可得其逆矩阵  $\mathbf{A}^{-1}$ , 它以  $A_{ki}/\Delta$  为第  $i$  行第  $k$  列元素, 其中  $\Delta$  为该矩阵的行列式之值,  $A_{ki}$  为从矩阵  $\mathbf{A}$  的行列式删去第  $k$  行第  $i$  列所得行列式并乘以  $(-1)^{k+i}$  而得到的余子式. 可以证明

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}, \quad (\text{A4.11})$$

及

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}. \quad (\text{A4.12})$$

由方程(A4.7),

$$\mathbf{A}' = \mathbf{AA},$$

两端用  $\mathbf{A}^{-1}$  左乘, 得到

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}'. \quad (\text{A4.13})$$

方程(A4.13)用  $\mathbf{A}'$  相对  $x'_1, x'_2$  的分量表示了矢量  $\mathbf{A}$  相对旧坐标系  $x_1, x_2$  的分量.

我们将关心那种保持矢量长度不变的变换, 就是说, 我们有时将要求

$$x'^2_1 + x'^2_2 = x^2_1 + x^2_2, \quad (\text{A4.14})$$

或

$$\tilde{\mathbf{x}}'\mathbf{x}' = \tilde{\mathbf{x}}\mathbf{x}, \quad (\text{A4.15})$$

但  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ , 于是  $\tilde{\mathbf{x}}' = \tilde{\mathbf{x}}\tilde{A}$ . 所以

$$\tilde{\mathbf{x}}'\mathbf{x}' = \tilde{\mathbf{x}}\tilde{A}A\mathbf{x}, \quad (\text{A4.16})$$

如果

$$\tilde{A}A = I, \quad (\text{A4.17})$$

或

$$\tilde{A} = A^{-1}, \quad (\text{A4.18})$$

或

$$A\tilde{A} = I, \quad (\text{A4.19})$$

则方程(A4.16)右端等于  $\tilde{\mathbf{x}}\mathbf{x}$ . 保持矢量长度不变的变换叫作正交变换. 满足方程(A4.17)和(A4.18)的矩阵叫作正交矩阵. 由方程(A4.8)定义的矩阵  $A$  为正交矩阵, 因为

$$\begin{aligned} A\tilde{A} &= \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2\phi + \sin^2\phi & -\cos\phi\sin\phi + \sin\phi\cos\phi \\ -\sin\phi\cos\phi + \cos\phi\sin\phi & \sin^2\phi + \cos^2\phi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I. \end{aligned}$$

关于矩阵理论的更详细说明, 读者可参考费拉<sup>[1]</sup> 和海丁<sup>[2]</sup> 的书.

### 参 考 文 献

- [1] Ferrar, W. L. *Algebra*. 2nd Ed. Oxford University Press, London, 1957
- [2] Heading, J. *Matrix Theory for Physicists*. Longmans, London, 1958

## 附录五 二阶笛卡儿张量概述

在整个讨论过程中,我们将只考虑直角笛卡儿坐标系。

若对单晶体加上电场,如果晶体是导体,便有电流流过。电流开始流的方向不一定与外加电场方向相同。对于欧姆导体有  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ , 电流密度  $\mathbf{J}$  与外加电场平行,而电导率  $\sigma$  为常数。对于单晶体,在一定方向所加的具有一定值的电场将引起在某一方向(不一定平行于  $\mathbf{E}$ )上具有一定值的电流。在  $\mathbf{J}$  与  $\mathbf{E}$  之间又有了一种物理关系,即使  $\mathbf{J}$  与  $\mathbf{E}$  不平行。我们可以写为

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (\text{A5.1})$$

或

$$\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}, \quad (\text{A5.2})$$

其中  $\sigma$  具有九个分量,在方程(A5.1)和(A5.2)中,它被写成矩阵的形式。类似地,对于单晶体,  $\mathbf{B}$  与  $\mathbf{H}$  及  $\mathbf{D}$  与  $\mathbf{E}$  也不一定平行,但在  $\mathbf{B}$  与  $\mathbf{H}$  及  $\mathbf{D}$  与  $\mathbf{E}$  之间也存在着确定的物理关系。若改变直角坐标轴的方向,电场  $\mathbf{E}$  与电流密度  $\mathbf{J}$  在空间的方向必然是不变的。在 6.4 节中,我们曾方便地用变换性质来定义矢量。设矢量  $\mathbf{A}$  按照方程

$$\mathbf{A}' = \mathbf{AA} \quad (\text{A5.3})$$

或

$$\begin{bmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A5.4})$$

从旧坐标系变换到新坐标系，其中正交矩阵  $\Lambda$  的元素为适当的方向余弦。如果  $\mathbf{E}$  和  $\mathbf{J}$  为矢量，则有  $\mathbf{J}' = \Lambda \mathbf{J}$  和  $\mathbf{E}' = \Lambda \mathbf{E}$ ，以及逆关系  $\mathbf{J} = \Lambda^{-1} \mathbf{J}' = \tilde{\Lambda} \mathbf{J}'$  和  $\mathbf{E} = \Lambda^{-1} \mathbf{E}' = \tilde{\Lambda} \mathbf{E}'$ 。在旧坐标系中，关系式

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (\text{A5.5})$$

成立，它联系着  $\mathbf{J}$  与  $\mathbf{E}$  在空间中的大小和方向。替换  $\mathbf{J}$  与  $\mathbf{E}$ ，得

$$\tilde{\Lambda} \mathbf{J}' = \sigma \tilde{\Lambda} \mathbf{E}'$$

用  $\Lambda$  左乘两端，并记住如果  $\Lambda$  为正交矩阵，则  $\Lambda \tilde{\Lambda} = \mathbf{I}$ ，于是有

$$\mathbf{J}' = \Lambda \sigma \tilde{\Lambda} \mathbf{E}' \quad (\text{A5.6})$$

如令

$$\sigma' = \Lambda \sigma \tilde{\Lambda}, \quad (\text{A5.8})$$

则方程(A5.6)可写为如下形式

$$\mathbf{J}' = \sigma' \mathbf{E}. \quad (\text{A5.7})$$

坐标轴的变化并不改变电流密度和电场在空间的方向。如果  $\sigma$  按方程(A5.8)变换，则当直角坐标轴旋转时，电流密度与外加电场之间的夹角以及它们的大小之间的关系均保持不变。用变换性质来定义矢量是方便的。类似地，可用变换性质来定义二阶张量。例如，当坐标轴变化时，如果  $\mathbf{T}$  按照方程

$$\mathbf{T}' = \Lambda \mathbf{T} \tilde{\Lambda} \quad (\text{A5.9})$$

来变换，则被定义为二阶笛卡儿张量。用  $\tilde{\Lambda}$  左乘方程(A5.9)两端，再用  $\Lambda$  右乘两端，并记住  $\Lambda \tilde{\Lambda} = \mathbf{I}$ ，便得到逆关系

$$\mathbf{T} = \tilde{\Lambda} \mathbf{T}' \Lambda. \quad (\text{A5.10})$$

矢量有时被看作一阶张量，标量有时被看作零阶张量。在 10.4 节我们曾用矩阵方法表示麦克斯韦方程组，对此，二阶张量的上述定义已足够。多数相对论教科书采用普遍张量分析的符号。在这些书中，三维矢量被定义为按照方程

$$A'_i = \sum_{k=1}^3 c_{ik} A_k \quad (\text{A5.11})$$

变换的量。这和方程(A5.3)是一致的。三维中的二阶张量按定义具有九个分量，这些分量按照方程

$$T'_{ik} = \sum_{j=1}^3 \sum_{m=1}^3 c_{ij} c_{km} T_{jm} \quad (\text{A5.12})$$

来变换。上述定义与用矩阵方程

$$\mathbf{T}' = \mathbf{AT}\tilde{\mathbf{A}} \quad (\text{A5.13})$$

对二阶张量所下的定义是相同的。由方程(A5.9)，

$$\begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} & T'_{13} \\ T'_{21} & T'_{22} & T'_{23} \\ T'_{31} & T'_{32} & T'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}.$$

乘积矩阵  $\mathbf{AT}$  第  $i$  行第  $m$  列的项为  $\sum_{j=1}^3 c_{ij} T_{jm}$ 。 $(\mathbf{AT})\tilde{\mathbf{A}}$  的第

$i$  行第  $k$  列的项为  $\sum_{m=1}^3 \left( \sum_{j=1}^3 c_{ij} T_{jm} \right) c_{km}$ 。[应记住， $\tilde{\mathbf{A}}$  中指标次序是相反的，于是元素  $c_{km}$  出现在  $\tilde{\mathbf{A}}$  的第  $m$  行第  $k$  列。]因此，由方程(A5.13)得到

$$T'_{ik} = \sum_m \sum_j c_{ij} c_{km} T_{jm}.$$

这与方程(A5.12)一致。

因为  $\mathbf{A}$  是正交矩阵， $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{I}$ 。

因此，

$$\left. \begin{aligned} \sum c_{ji} c_{ik} &= \sum c_{ij} c_{ki} = 0 & \text{若 } i \neq k \\ &= 1 & \text{若 } i = k. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A5.14})$$

在普通三维空间中的矢量和张量定义可以推广到  
 $X_1X_2X_3X_4$  四维空间中。这时，四维矢量用四个分量来表示，  
而二阶张量可用  $4 \times 4$  矩阵的 16 个元素来表示。

## 附录六 穆斯堡尔效应

### 自由核发射 $\gamma$ 射线

首先考虑自由核发射 $\gamma$ 射线。通过发射 $\gamma$ 射线，这个自由核从具有激发能 $E_0$ 的激发态衰变到基态，如图A6.1(a)所示。如果在衰变中动量守恒，则核必然以和发射出的光子相同的动量反冲，如图A6.1(b)所示。因此，并非全部激发能都可以转变成发射出的光子的能量。如果 $E_\gamma$ 是被发射光子的能量，则其动量为 $E_\gamma/c$ ，因此核的反冲动量由

$$p_r = E_\gamma/c \quad (\text{A6.1})$$

给出。因为核很重，从而其反冲速度一般比光速小得多，因此对于它的动能可以用非相对论公式，即

$$T_r = p_r^2/2M = \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2}, \quad (\text{A6.2})$$

其中 $M$ 是反冲核的质量， $T_r$ 是其动能。由能量守恒定律，有

$$E_0 = T_r + E_\gamma, \quad (\text{A6.3})$$

或者

$$E_\gamma = E_0 - \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2}. \quad (\text{A6.4})$$

由于 $E_\gamma \ll 2Mc^2$ ， $E_\gamma$ 近似等于 $E_0$ ，因此方程(A6.4)可改写如下而达到很好的近似：

$$E_\gamma = E_0 \left(1 - \frac{E_0}{2Mc^2}\right). \quad (\text{A6.5})$$

相对论公式可用方程(5.154)(参看问题5.40)算出。光子能量 $E_\gamma$ 比 $E_0$ 小一个量 $T_r$ ，如图A6.3(a)所示。对于以后将考

虑的两种典型情况(它们的衰变方式分别在图 A6.2(a) 和 (b) 中表出), 即  $^{191}\text{Ir}$  的 129 千电子伏的谱线和  $^{57}\text{Fe}$  的 14.4 千电子伏的谱线,  $T_r$  分别等于 0.045 电子伏和 0.002 电子伏.

### 自由核吸收 $\gamma$ 射线

设当图 A6.1(a) 类型的核处于基态时,  $\gamma$  射线入射到它上面, 并设该  $\gamma$  射线所具能量恰可将该核激发到能量超过基

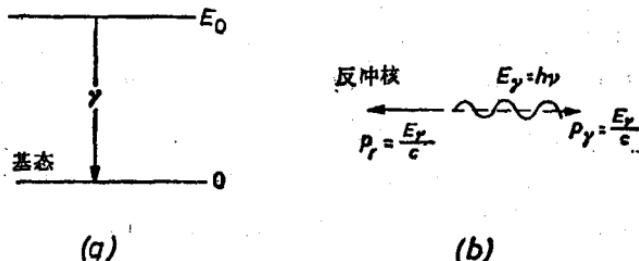


图 A6.1 自由核通过发射  $\gamma$  射线引起的衰变

态  $E_0$  的激发态. 如果在吸收过程中动量守恒, 则在吸收之后, 反冲核的动量将等于入射光子的动量. 反冲核的动能也近似等于  $E_0^2/2M c^2 = T_r$ , 因此, 为使被吸收的几率大, 入射的  $\gamma$  射线必须具有能量  $E_0 + T_r \approx E_0(1 + E_0/2Mc^2)$ , 如图 A6.3(a) 所示. 这样, 自由的激发核发射的光子能量通常太低了(低了  $2T_r$  这样一个量), 以致于不能将一个类似的核从基态再激发到该激发态.

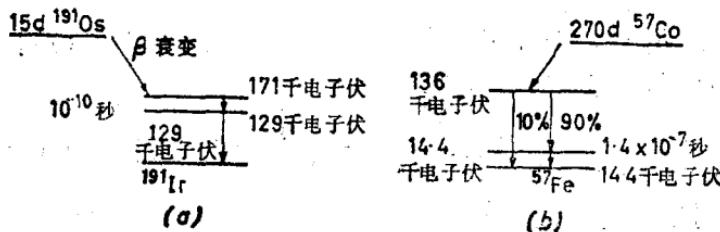


图 A6.2  $^{191}\text{Ir}$  和  $^{57}\text{Fe}$  的激发态

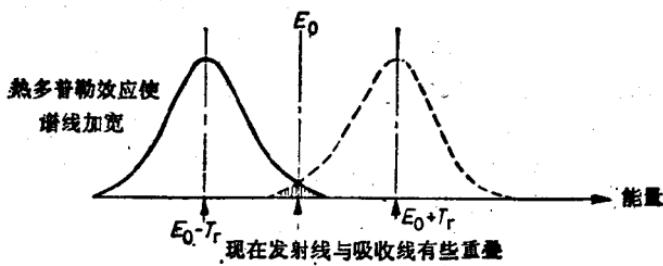
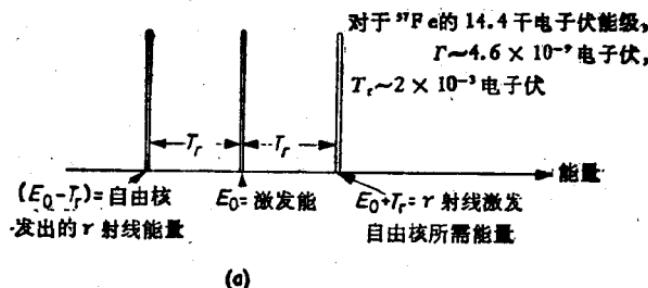
## 共振荧光

至今为止我们都假定了基态以上的激发能级  $E_i$  总是具有同一的能量。按照测不准原理有  $\Delta E \Delta t \sim \hbar$ ，因此，如果激发态的寿命不是无限大，它就一定具有有限的能量宽度。按照量子力学，能量的分散（或者不确定性）由

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau} \quad (\text{A6.6})$$

给出，其中  $\tau$  是该激发态的平均寿命， $\hbar$  等于  $h/2\pi$ ， $h$  是普朗克常数。例如，对于  $^{191}\text{Ir}$  的 129 千电子伏特的能级和  $^{57}\text{Fe}$  的 14.4 千电子伏特的能级， $\Gamma$  分别等于  $4.7 \times 10^{-6}$  电子伏特和  $4.57 \times 10^{-9}$  电子伏特；必须把这些值与  $^{191}\text{Ir}$  和  $^{57}\text{Fe}$  的同一能级的  $2T_1$  值 0.090 电子伏特和 0.004 电子伏特进行比较。自然线宽不足以补偿亏损值  $2T_1$ ，因此乍一看来似乎一般将不可能从自由原子中观察到核共振荧光，除非可能用某种方法补偿  $\gamma$  射线能量中的亏损  $2T_1$ 。在 5.8.3 节中我们证明了，当光源（或者  $\gamma$  射线）相对实验室运动时，光子在实验室中的动量和能量按照狭义相对论的动量和能量变换式来变化。（这就是多普勒效应。）如果发射  $\gamma$  射线的核，在它衰变时正相对于实验室运动着，则光子相对于实验室的能量就改变了，如果光子是在与衰变核运动方向相同的方向上被发射，则其能量便会增加。这就使得被发射的  $\gamma$  射线的能量变得更为分散（多普勒加宽），如图 A6.3(b) 所示。同样地，如果吸收核在运动，则吸收谱线也有多普勒加宽效应，致使发射谱与吸收谱有时可能重叠，如图 A6.3(b) 所示。穆恩和他的合作者<sup>[1]</sup>曾将放射源放在旋转体的顶部。他们发现，如果旋转体以很高的速度旋转，则有时多普勒移动足以补偿  $2T_1$  的能量空隙，他们并对  $^{195}\text{Hg}$  的 412 千电子伏特能级观察到核共振荧光。从那时以

来，关于核共振荧光的研究已发展了一些别的技术。如果放射源被足够地加热，则热多普勒加宽可能足以使核共振荧光在某些情况下被观察到；这种办法有时甚至在室温下也会有效。另一种曾经使用的方法是观察在 $\beta$ 衰变后发射 $\gamma$ 射线的情形。发射 $\beta$ 射线之后，核要反冲，如果核尚在反冲时发射了 $\gamma$ 射线，则 $\gamma$ 射线能量有时会多普勒加宽到足以引起核共振荧光。如果吸收核静止，核共振荧光的几率依赖于吸收核的自然线宽，后者通过方程 (A6.6) 与平均寿命相联系。核共振荧光技术已被广泛用于测量核激发态的寿命。（关于所用方



(b)

图 A6.3. 在 (a) 中表出了自由核发射的 $\gamma$ 射线能量以及 $\gamma$ 射线要被自由核吸收所必须具有的能量。(b) 热多普勒加宽效应的图示；在有些情况下发射线与吸收线可能重合，使得核共振荧光成为可能。

法与所得结果的评论，读者可参考梅兹格（Metzger）<sup>[2]</sup> 的文章。）

### 穆斯堡尔效应

如果激发核当其衰变时是固体晶体点阵的组成部分，则在某些条件下，有时可能被发射  $\gamma$  射线而并没有动量和动能转移给衰变后的核。（关于适当条件的讨论，读者可参考伯恰姆<sup>[3]</sup> 和拉斯蒂格（Lustig<sup>[4]</sup>）的文章。对于我们的目的而言，承认这种现象可能发生就够了。）

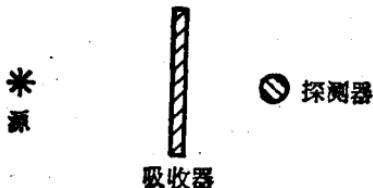


图 A6.4 观察穆斯堡尔效应的实验安排。对于  $^{57}\text{Co}$  的源，采用了铁吸收器（一般增加了  $^{57}\text{Fe}$  的含量）

在这些无反冲发射的情形，整个晶体有效地补偿了反冲动量，使得在这些情况下全部激发能几乎都进入发射出的  $\gamma$  射线之中。对于大多数实际目的而言， $\gamma$  射线的能量就等于激发能  $E_0$ ，而  $\gamma$  射线能量的分散几乎完全是由激发态有限寿命所造成的自然线宽引起的。对于  $^{191}\text{Ir}$  的 129 千电子伏特能级，该线宽等于  $4.7 \times 10^{-6}$  电子伏特，而对于  $^{57}\text{Fe}$  的 14.4 千电子伏特能级，该线宽等于  $4.57 \times 10^{-9}$  电子伏特。并非所有衰变都是无反冲的，而是对于  $^{191}\text{Ir}$  和  $^{57}\text{Fe}$ ，无反冲衰变数占百分之几或更多些。

如果  $\gamma$  射线通过一个吸收器，该吸收器含有与造成无反冲发射的  $\gamma$  射线同样类型而处于基态的核，如图 A6.4 所示，

则可能发生  $\gamma$  射线的无反冲吸收。无反冲吸收线也是非常窄的。它的宽度近似等于自然线宽。这比为被自由原子吸收所需的热多普勒宽度窄得多，对于 300°K 的  $^{57}\text{Fe}$ ，这是  $4.57 \times 10^{-9}$  电子伏特与 0.02 电子伏特的比较。如果无反冲发射线与无反冲吸收线显著地重叠，则当被无反冲发射的那些  $\gamma$  射线通过图 A6.4 所示实验安排中的吸收器时，它们将以很大的几率被无反冲地吸收。在发射和吸收均无反冲的条件下的核共振荧光被称为穆斯堡尔效应以纪念它的发现者。如果图 A6.4 中的源（或吸收器）被移动，则由于多普勒效应，无反冲发射线（或者无反冲吸收线）的能量将移动，如果源（或吸收器）的速度足够高，则无反冲发射线与吸收线将不再显著重叠，于是由于穆斯堡尔效应不再出现，对于由源发出的  $\gamma$  射线的吸收便减少了，因而图 A6.4 中的探测器将记录下更高的计数率。穆斯堡尔发现对于  $^{191}\text{Ir}$  的 129 千电子伏特线，为使无反冲发射线移动达到一个它的自然线宽，只需以 1.5 厘米/秒的速度移动源。这可与有反冲的自由核发射  $\gamma$  射线的情形中为补偿  $2T$ ，所需的巨大速度相对照。穆斯堡尔效应的吸收截面敏感地取决于无反冲发射线与无反冲吸收线的重叠量，如图 A6.5 所示。

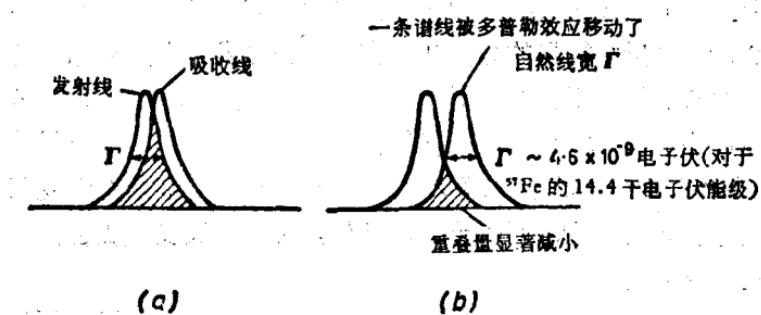


图 A6.5 无反冲发射线和吸收线的多普勒移动减小了穆斯堡尔效应

可以看到，无反冲发射线或者吸收线的能量（或频率）的微小移动将会显著改变穆斯堡尔效应的几率而产生可测量的效果。测量穆斯堡尔效应是测量频差或频率变化的一种精确方法。例如对于<sup>57</sup>Fe的14.4千电子伏特线，自然线宽为 $4.57 \times 10^{-9}$ 电子伏特，并且测量比自然线宽小的能量（或频率）差是可能的，因此可以探测到 $10^{12}$ 分之一量级的能量（或频率）变化。14.4千电子伏特 $\gamma$ 射线的能量对应着 $3.46 \times 10^{18}$ 周/秒的频率。已证明该方法准确到足以用来研究谱线的引力移动。

穆斯堡尔在他最初的实验中，用的是<sup>191</sup>Ir的129千电子伏特 $\gamma$ 射线。在液氮温度下，无反冲共振吸收近似等于总吸收截面的百分之一，大多数发射是有反冲的。在穆斯堡尔的发现之后，人们寻找其它的可用物质，并且自那时以来已发现很多种。最广泛应用的物质是<sup>57</sup>Fe。用氘核轰击含有<sup>56</sup>Fe的条形铁靶而制成一个<sup>57</sup>Co源，该反应是



<sup>57</sup>Co在铁条表面附近产生。<sup>57</sup>Co通过俘获电子而衰变到<sup>57</sup>Fe的激发态，并且在<sup>57</sup>Fe中衰变的主要部分要经过14.4千电子伏特的能级，它具有 $1.4 \times 10^{-7}$ 秒的平均寿命，如图A6.2(b)所示。14.4千电子伏特的态的寿命足够长，使得被激发的<sup>57</sup>Fe离子在衰变前能够在铁的晶体点阵中占据适当的位置。于是它们就有可能无反冲地衰变。可将14.4千电子伏特的 $\gamma$ 射线通过一个铁吸收器，可增加该吸收器中<sup>57</sup>Fe的含量以便增加无反冲吸收的几率。 $\gamma$ 射线可用比例计数器或闪烁计数器探测。用这种方法增加了无反冲共振荧光的几率，比<sup>191</sup>Ir的情况高得多，在有利条件下这个几率可等于总吸收的百分之十或更多。对于<sup>57</sup>Fe，源和吸收器也可在室温下应用，这是一个很大的便利。

关于穆斯堡尔效应的更完整的评论，读者可参考伯恰姆<sup>[3]</sup>和拉斯蒂格<sup>[4]</sup>的文章。

### 参 考 文 献

- [1] Moon, P. B. *Proc. Phys. Soc.* **64**(1951) 76  
Moon, P. B. and Storruste, A. *Proc. Phys. Soc.* **66**(1953) 585  
Davey, W. G. and Moon, P. B. *Proc. Phys. Soc.* **66**(1953) 959
- [2] Metzger, F. R. *Progress in Nuclear Physics* **7**(1959) 53
- [3] Burcham, W. E. *Sci. Progr.* **48**(1960) 630
- [4] Lustig, H. *Amer. J. Phys.* **29**(1961) 1

## 习 题 答 案

2.4 (a) 0.435; (b)  $\frac{c}{1.33} \pm 8.7$  米/秒.

3.5 在  $\Sigma$  中,  $L = L_0 \left\{ \frac{\cos^2 \theta}{r^2} + \sin^2 \theta' \right\}^{\frac{1}{2}}$ ;  $\tan \theta = \gamma \tan \theta'$ .

3.6 其直径的  $1/(2 \times 10^8)$  或  $\sim 6.37$  厘米.

3.7  $0.866c$

3.12 (a) 发射后 100 秒光到达火箭尾部, 这时它距离地球为  $3 \times 10^{10}$  米. (b)  $0.9c$ .

3.14 (a) 1.36 公里; (b) 4.6 公里; (c) 14.5 公里.

3.15 68.

3.17  $v = (1 - 5 \times 10^{-9})c$ .

3.18  $v = 0.98c$ .

3.20 (a)  $\lambda = \sim 573$  埃; (b)  $\sim 2536$  埃.

3.21 (a)  $0.8c$ ; (b)  $0.89c$ ; (c)  $0.65c$ .

3.22 (a)  $v = 0.8c$ ; (b) 3 秒.

3.23  $\Sigma'$  相对  $\Sigma$  的速度为  $Tc^2/X$ .

3.25  $v = c \left\{ 1 + \frac{X^2}{c^2 T^2} \right\}^{-\frac{1}{2}}$

4.1 (a)  $u_x = 45(1 - 5 \times 10^{-15})$  米/秒; (b)  $u_x = 30$  米/秒,  $u_y = 15(1 - 5 \times 10^{-15})$  米/秒.

4.2 (a)  $u_x = 0.83c$ ,  $u_y = 0$ ; (b)  $u_x = 0.1c$ ,  $u_y = 0.796c$ ;  
 (c)  $u_x = 0$ ,  $u_y = 0.798c$ ; (d) 与运动方向成  $97^\circ 11'$ .

4.3  $u_{||} = 0.82c$ ,  $u_{\perp} = 0.395c$ .

#### 4.5 对第一种情形:

$$u^2 = \frac{u'^2 + v^2 + 2u'v \cos \alpha' - (u'v \sin \alpha')^2/c^2}{[1 + (u'v/c^2) \cos \alpha']^2}$$

而  $\tan \alpha = \frac{\sqrt{(1 - v^2/c^2)u' \sin \alpha'}}{u' \cos \alpha' + v}$

$u$  的表达式关于  $v$  和  $u'$  对称,  $\tan \alpha$  关于  $v$  和  $u'$  不对称。

4.6 (a)  $0.87c$ ; (b) 40 英石; (c) 她将不表现出被收缩, 而只表现为相对实验室被旋转。她的衣服、头发和皮肤的颜色将会变化(参考 4.4.9 节)。

4.7 (a)  $1.6c$ ; (b)  $0.8c$ ; (c)  $0.976c$ .

4.15 0.69.

4.16  $\Delta\lambda = +6.56$  埃。

4.19  $75^\circ 30'$ .

4.21 (a)  $4.24 \times 10^{18}$ ,  $3.76 \times 10^{18}$ ,  $3.39 \times 10^{18}$ ,  $3.08 \times 10^{18}$ ,  $2.73 \times 10^{18}$  周/秒; (b)  $1.0:0.79:0.64:0.53:0.44$ .

4.22 (a)  $\Delta\lambda = 1333$  埃; (b)  $\Delta\lambda = \sim +840$  埃; (c)  $\sim 53 \frac{3}{4}$ .

5.3  $\beta (=v/c)$  为 (a) 0.196; (b) 0.549; (c) 0.94.  
 $m/m_0$  为 (a) 1.02; (b) 1.197; (c) 2.97.

5.4  $\beta (=v/c)$  为 (a) 0.145; (b) 0.42; (c) 0.87.

5.6 (a) 0.0536 厘米; (b) 0.227 厘米; (c) 1.19 厘米;  
(d) 3.80 厘米.

5.7 31.5 厘米.

5.12 (a) 36; (b)  $\sim 2 \times 10^{-18}$ .

5.13 (a) 34 天; (b)  $8 \frac{1}{4}$  小时; (c) 300 秒.

- 5.14 (a) 0.079 兆电子伏; (b) 0.261 兆电子伏、 $m/m_0 =$   
           (a) 1.15; (b) 1.51.
- 5.15 (a)  $2.56 \times 10^5$  伏; (b)  $0.75c$ .
- 5.16  $1.4 \times 10^{-12}$ .
- 5.20 28 兆电子伏.
- 5.21 (a) 17.3 兆电子伏; (b) -1.1 兆电子伏.
- 5.22 (a)  $4.2 \times 10^9$  千克/秒; (b)  $4.5 \times 10^{-6}$  牛顿/米<sup>2</sup>.
- 5.24 144 兆电子伏/ $c^2$  或 282 电子质量.
- 5.26  $m_1 = 277m_e$ ,  $m_2 = 1840m_e$ ; (a)  $\sim 2380m_e$ ; (b)  
        $\sim 500$  兆电子伏/ $c$ ; (c)  $\sim 97$  兆电子伏.
- 5.27  $E_{\text{最大}} = 52.8$  兆电子伏.
- 5.34  $v_{\text{真光}} = 0.138c$ ;  $1.0095\tau$ .
- 5.35 129 兆电子伏/ $c$ ; 228 兆电子伏
- 5.37 0.511 兆电子伏.
- 5.38 (a) 145 兆电子伏; (b) 171 兆电子伏; (c)  $5.6 \times 10^9$  电子伏.
- 5.43  $2.4 \times 10^{-10}$  秒.
- 6.5 (a)  $-c^2$ ; (b)  $-m_0^2c^2$ .
- 6.12  $x = \frac{c^2}{f} \left[ \left\{ 1 + \frac{f^2 t^2}{c^2} \right\}^{\frac{1}{2}} - 1 \right]$ .
- 11.4 (a)  $4c/5$ ; (b) 10 年; (c)  $t_{\text{实验室}} = 20$  年,  $t_{\text{火箭}} = 12$  年.
- 11.5  $v = 0.995c$ .
- 11.6  $4.8 \times 10^{-5}$  秒.
- 11.7 (a) 670; (b) 18.3.
- 11.8 (a)  $x = 0.43$  光年,  $\tau = 0.875$  年; (b)  $x = 9$  光年,  
        $\tau = 2.94$  年; (c)  $x = 99$  光年,  $\tau = 5.2$  年.
- 11.9 (a) 18 光年,  $\tau = 11\frac{3}{4}$  年; (b) 1998 光年,  $\tau =$

$29\frac{7}{12}$  年。

12.2  $\Delta\nu/\nu = 1.35 \times 10^{-14}$ 。

12.3 30.5 微秒

12.4  $\Delta\nu/\nu = 8.4 \times 10^{-11}$ 。

## 物理常数表

以下是解本书习题必需的常数简表。关于更完全的常数表，可参考 E. R. Cohen, J. W. M. DuMond, T. W. Layton 和 J. S. Rollet 的文章 [Rev. Mod. Phys. 27 (1955) 363.]

光速	$c = 2.997930 \times 10^8$ 米/秒
电子电量	$e = 1.60206 \times 10^{-19}$ 库仑
电子静止质量 $m = 9.1083 \times 10^{-31}$ 千克	$= 0.510976$ 兆电子伏/ $c^2$
电子荷质比	$e/m = 1.75890 \times 10^{11}$ 库仑/千克
质子静止质量 $M_p = 1.67239 \times 10^{-27}$ 千克	$= 938.211$ 兆电子伏/ $c^2$
中子静止质量 $M_n = 1.67470 \times 10^{-27}$ 千克	$= 939.505$ 兆电子伏/ $c^2$
中子质量与电子质量之比	$M_p/m = 1836.12$
原子质量单位 ( $^{16}\text{O}$ 尺度)	1 原子质量单位 $= 1.6598 \times 10^{-27}$ 千克
原子质量单位 ( $^{12}\text{C}$ 尺度)	1 原子质量单位 $= 1.6603 \times 10^{-27}$ 千克
阿伏伽德罗数 ( $^{16}\text{O}$ 尺度)	$N = 6.02486 \times 10^{26}$ (千克·摩尔) $^{-1}$
普朗克常数	$h = 6.62517 \times 10^{-34}$ 焦耳·秒
玻耳兹曼常数	$k = 1.38044 \times 10^{-23}$ 焦耳·( $^\circ\text{K}$ ) $^{-1}$
电空间常数	$\epsilon_0 = 8.85434 \times 10^{-12}$ 法拉·米 $^{-1}$
磁空间常数	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ 亨利·米 $^{-1}$
电子伏特	1 电子伏 $= 1.60206 \times 10^{-19}$ 焦耳。

## 参考书

### *Newtonian Mechanics*

Halfman, R. L. *Dynamics, Vol. 1: Particles, Rigid Bodies and Systems*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1962

Joos, G. *Theoretical Physics*. 3rd Ed. Blackie, Glasgow and London, 1958

Slater, J. C. and Frank, N. *Mechanics*. McGraw Hill, New York and London, 1947

Struve, O. *Elementary Astronomy*. Oxford University Press, 1959

Synge, J. L. and Griffith, B. A. *Principles of Mechanics*. 3rd Ed. McGraw-Hill, New York and London, 1959

Taylor, E. F. *Introductory Mechanics*. Wiley, New York and London, 1963

### *Books Containing Useful Historical Material*

Born, M. *Einstein's Theory of Relativity*, 2nd Ed. Dover, New York, 1962

Einstein, A. and others, *The Principle of Relativity—A Collection of Original Papers on the Special and General Theory of Relativity*. Methuen, London, 1923 (Reprinted by Dover)

Holton, G. and Roller, G. H. D. *Foundations of Modern Physics*. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1958

Larmor, J. *Aether and Matter*. Cambridge University Press, 1900

Lorentz, H. A. *Theory of Electrons*, 2nd Ed. Teubner, Leipzig, 1916

Silberstein, L. *The Theory of Relativity*. Macmillan, London, 1914

Whittaker, E. A. *A History of Theories of Aether and Electricity*, Vols. I and II. Nelson, Edinburgh, 1951

### *Electromagnetism (Introductory)*

Corson, D. R. and Lorrain, P. *Introduction to Electromagnetic Fields and Waves*. Freeman, San Francisco and London, 1962

Reitz, J. R. and Milford, F. J. *Foundations of Electromagnetic Theory*. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1960

Sears, F. W. *Principles of Physics. II—Electricity and Magnetism*. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1946

Slater, J. C. and Frank, N. *Electromagnetism*. McGraw-Hill, New York and London, 1947

### *Electromagnetism (Relativistic)*

- Cullwick, E. G. *Electromagnetism and Relativity*. 2nd Ed. Longmans, London, 1959
- Heitler, W. *Quantum Theory of Radiation*, 3rd Ed. Oxford University Press, 1954
- Jackson, J. D. *Classical Electrodynamics*. Wiley, New York and London, 1962
- Landau, L. and Lifshitz, E. *Classical Theory of Fields*. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1951
- O'Rahilly, A. *Electromagnetics*. Longmans, London, 1938
- Panofsky, W. K. H. and Phillips, M. *Classical Electricity and Magnetism*, 2nd Ed. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1962
- Smythe, W. R. *Static and Dynamic Electricity*, 2nd Ed. McGraw-Hill, New York and London, 1950
- Sommerfeld, A. *Electrodynamics; Lectures on Theoretical Physics Volume 3*. Academic Press, New York, 1952
- Stratton, J. A. *Electromagnetic Theory*. McGraw-Hill, New York and London, 1941
- Books Containing Material on the Special Theory of Relativity*
- Ahoroni, J. *The Special Theory of Relativity*. Oxford University Press, 1959
- Bitter, F. *Nuclear Physics*. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1950
- Cesslett, V. E. *Introduction to Electron Optics*. Oxford University Press, 1946
- Dingle, H. *The Special Theory of Relativity*. Methuen, London, 1946
- Ditchburn, R. W. *Light*, 2nd Ed. Blackie, Glasgow and London, 1963
- Eisberg, R. N. *Fundamentals of Modysics. Physics*. Wiley, New York and London, 1961
- French, W. P. *Principles of Modern Physics*. Wiley, New York and London, 1958
- Heading, J. *Matrix Theory for Physicists*. Longmans, London, 1958
- Klemperer, O. *Electron Optics*, 2nd Ed. Cambridge University Press, 1953
- McCREA, W. H. *Relativity Physics*. Methuen, London, 1935
- Rindler, W. *Special Relativity*. Oliver and Boyd, Edinburgh and London, 1960
- Stephenson, G. and Kilmister, C. W. *Relativity Theory for Physicists*. Longmans, London, 1958
- Synge, J. L. *Relativity: The Special Theory*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1955
- Books on the Special and General Theories of Relativity Introductory*

- Durrell, C. V. *Readable Relativity*. Bell, London, 1931
- Eddington, A. S. *Space, Time and Gravitation*. Cambridge University Press, 1920
- Einstein, A. *Relativity The Special and the General Theory*. Methuen, London, 1920
- Lieber, L. R. and Lieber H. G. *The Einstein Theory of Relativity*. Dobson, London, 1949
- Ney, E. P. *Electromagnetism and Relativity*. Harper and Row, New York and Evanston, 1962
- Advanced*
- Bergmann, P. G. *Introduction to the Theory of Relativity*. Prentice-Hall, New York, 1942
- Eddington, A. S. *The Mathematical Theory of Relativity*. Cambridge University Press, 1923
- Einstein, A. *The Meaning of Relativity*, 5th Ed. Methuen, London, 1951
- Fock, V. *Theory of Space, Time and Gravitation*. Pergamon Press, London, 1959
- Möller, C. *The Theory of Relativity*. Oxford University Press, 1952
- Pauli, W. *Theory of Relativity*. Pergamon Press, London, 1958
- Reichenbach, H. *The Philosophy of Space and Time*. Dover, New York, 1957
- Synge, J. L. *Relativity: The General Theory*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1960
- Tolman, R. C. *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*. Oxford University Press, 1934
- Weyl, H. *Space, Time, Matter*. Methuen, London, 1922 (reprinted by Dover)