Лабораторна робота 7

Тема:Елементарна задача варіаційного числення

Мета:Отримати практичні навички знаходження екстремумів функціоналів, використовуючи рівняння Ейлера.

Завдання для самостійної роботи

Для свого варианта функционалів 1 та 2 знайти екстремалі, побудувати їх графіки та дослідити на виконання достатніх умов екстремуму. Порівняти знайдене значення з лінійною функцією, що задовольняє граничні умови, надані в завданні. d, m – відповідно день та місяць народження студента.

$$J(y) = \int_{-1}^{1}\left((y')^2 + 4y^2 + 4x^2 y + x\cos(x)\right)dx, \quad y(-1) = m; \quad y(1) = d.$$

Вводимо підінтегральну функцію і граничні умови. Друкуємо їх.

```
clear all % очистили пам’ять
disp('Розв’язуємо  завдання 1') % виводимо заголовок задачі
syms  x y Dy D2y % описали символічні змінні
F=(Dy^2)+4*y^2+4*x^2*y+x*cos(x);  % підінтегральна функція
x1=0; % граничні умови
y1=6;
x2=2;
y2=-30;
disp('Вихідні  дані:')
fprintf(['Підінтегральна  функція  '...
  'F(x,y,y'')=%s\n'],char(F))
fprintf('Гранична  умова зліва:  y(%d)=%d\n',x1,y1)
 fprintf('Гранична  умова справа: y(%d)=%d\n',x2,y2)
```

Результат:

>> mat_7_1

Розв’язуємо завдання 1

Вихідні дані:

*Підінтегральна функція F(x,y,y')=Dy^2 + 4*x^2*y + x*cos(x) + 4*y^2*

Гранична умова зліва: y(0)=6

Гранична умова справа: y(2)=-30

2.Починаємо введення диференціального рівняння Ейлера. Знайдемо часткові похідні Fx і Fy'. Надрукуємо їх.

```
dFdy=diff(F,y); % обчислили Fy
dFdy1=diff(F,Dy); % обчислили Fy'
```

```
fprintf('Fy=%s\n',char(dFdy))
fprintf('Fy''=%s\n',char(dFdy1))
```

Результат

*Fy=8*y + 4*x^2*

*Fy'=2*Dy*

3. У рівняння Ейлера (7.1) входить повна похідна dy'/dx. Надрукуємо її. *Надрукуємо* також величину $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$, необхідну для перевірки достатніх умов екстремуму за ознакою Лежандра. Обчислимо її за звичайною формулою диференціювання складної функції:

$$\frac{dF_{y'}}{dx} = \frac{\partial F_{y'}}{\partial x} + \frac{\partial F_{y'}}{\partial y} y' + \frac{\partial F_{y'}}{\partial y'} y''.$$

Результат:

Умова Лежандра:

Fy'y'=2

4. Складемо ліву частину диференціального рівняння Ейлера (7.1) і спростимо її. Перетворимо символічну змінну Euler в рядок.

```
Euler=simple(dFdy-dFy1dx); % рівняння Ейлера
deqEuler=[char(Euler) '=0']; % в рядок додали =0
fprintf('Рівняння Ейлера:\n%s\n',deqEuler)
```

Результат:

Рівняння Ейлера:

*8*y - 2*D2y + 4*x^2=0*

5. Команда ***dsolve*** дозволяє знаходити як загальне розв'язання диференціального рівняння, так і часткове його розв'язання, що задовольняє задані початкові або граничні умови. Знайдемо розв'язання загального рівняння Ейлера.

```
 Sol=dsolve(deqEuler,'x'); % розв'язуємо рівняння Ейлера
 if length(Sol)~=1 % розв'язання немає або більш одного
   error('Немає розв'язання або більш одного одного розв'язання!');
 else
   disp('Загальне розв'язання рівняння Ейлера:')
   fprintf('y(x)=%s\n',char(Sol))
end
```

Результат:

Загальне розв'язання рівняння Ейлера:

*y(x)=C2*exp(-2*x) - x^2/2 + C3*exp(2*x) - 1/4*

6. Сформуємо тепер рівняння для граничних умов, підставивши знайдене аналітичне розв'язання *Sol* в граничні точки x_1 і x_2 і дорівнявши їх відповідно до y_1 і y_2.

```
SolLeft=subs(Sol,x,x1); % підставили x1
SolRight=subs(Sol,x,x2); % підставили x2
EqLeft=[char(SolLeft) '=' char(sym(y1))]; % =y1
EqRight=[char(SolRight) '=' char(sym(y2))]; % =y2
disp('Рівняння для граничних умов:')
fprintf('%s\n',EqLeft,EqRight)
```

Результат:

```
Рівняння для граничних умов:
C2 + C3 - 1/4=6
C2*exp(-4) + C3*exp(4) - 9/4=-30
```

7. Тепер обчислюємо аналітичне розв'язання *Sol*21. Таке обчислення зводиться до того, що в нього будуть підставлені знайдені значення констант C_2 і C_3. Друкуємо знайдене рівняння екстремалі.

Результат

```
Рівняння екстремалі:
y(x)=6.7605268832766*exp(-2.0*x) - 0.51052688327664*exp(2.0*x) - 0.5*x^2 - 0.25
>>
```

8. Обчислимо значення функціонала на знайденій екстремалі і на прямій, що з'єднує точки M_1 і M_2. Підставимо в підінтегральну функцію F аналітичні вирази для цих ліній та їх похідних, а потім проінтегруємо. Надрукуємо результати.

```
Fextr=subs(F,{y,Dy},{Sol21,diff(Sol21,x)});
Jextr=eval(int(Fextr,x,x1,x2))
ylin=(x-x1)*(y2-y1)/(x2-x1)+y1;
Flin=subs(F,{y,Dy},{ylin,diff(ylin,x)});
Jlin=eval(int(Flin,x,x1,x2))
```

Результат

```
Jextr = 1.7529e+03
Jlin = 2.4404e+03
```

9.Задаємо масив аргументів для рисування графіка функції і обчислюємо значення функції. Рисуємо графік, підписуємо заголовок і координатні осі встановленим шрифтом.

```
xpl=linspace(x1,x2); % задаємо масив абсцис
y21=subs(Sol21,x,xpl); % обчислили ординати
figure % фігура
plot(xpl,y21,'-r') % рисуємо графік червоною лінією
set(get(gcf,'CurrentAxes'),...
  'FontName','Times New Roman Cyr','FontSize',12)
title('\bfЗавданя 1') % заголовок
```

```
xlabel('\itx') % мітка осі OX
ylabel('\ity\rm(\itx\rm)') % мітка вісі OY
```

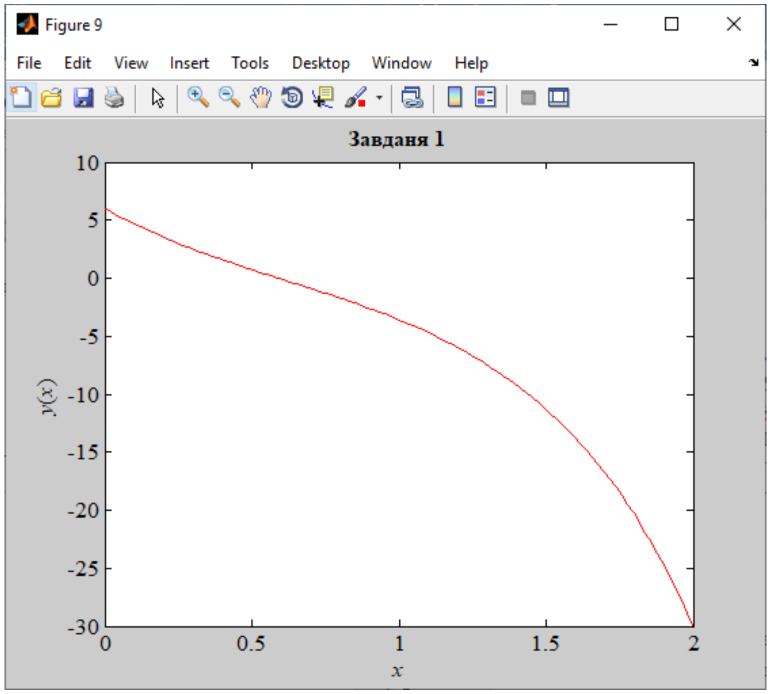

Рисунок 1 - Графік екстремалі

2. $J(y)=\int_0^2\left((y')^2-4y'\cos(2x)+5\sin(3x)\right)dx,\quad y(0)=m;\quad y(2)=-d.$

1.У нас буде перший інтеграл рівняння Ейлера, тому ні сама функція y, ні її друга похідна y'' нам не потрібні, і ми їх не описуємо.

```
clear all % видалили все
disp('Розв'язуємо завдання 2') % заголовок задачі
syms x Dy % описали символічні змінні
F=Dy^2-4*Dy*cos(2.*x)+5*sin(3.*x); % підінтегральна функція
x1=0; % граничні умови
y1=6;
x2=2;
y2=-30;
disp('Вихідні дані:')
fprintf(['Підінтегральна функція '...
  'F(x,y'')=%s\n'],char(F))
fprintf('Гранична умова зліва: y(%d)=%d\n',x1,y1)
fprintf('Гранична умова справа: y(%d)=%d\n',x2,y2)
```

Результат:

>> mat_7_2
Розв'язуємо завдання 2
Вихідні дані:
*Підінтегральна функція F(x,y')=5*sin(3*x) + Dy^2 - 4*Dy*cos(2*x)*
Гранична умова зліва: y(0)=6
Гранична умова справа: y(2)=-30

2.Будуємо перший інтеграл і розв'язуємо отримане диференціальне рівняння. Назви констант C_1 і C_2 використовуються в команді *dsolve*.

```
Sol=dsolve(deqEuler,'x'); % розв'язуємо рівняння Ейлера
if length(Sol)~=1 % розв'язання немає або більш одного
  error('Немає розв'язання або більш одного одного розв'язання!');
else
  disp('Загальне розв'язання рівняння Ейлера:')
  fprintf('y(x)=%s\n',char(Sol))
end
```

Результат:

Рівняння Ейлера:
- 2*D2y - 8*sin(2*x)=0
Загальне розв'язання рівняння Ейлера:
y(x)=C5 + sin(2*x) + C4*x

Сформуємо тепер рівняння для граничних умов, підставивши знайдене аналітичне розв'язання *Sol* в граничні точки x_1 і x_2 і дорівнявши їх відповідно до y_1 і y_2.

```
SolLeft=subs(Sol,x,sym(x1)); % підставили x1
SolRight=subs(Sol,x,sym(x2)); % підставили x2
EqLeft=[char(SolLeft) '=' char(sym(y1))]; % =y1
EqRight=[char(SolRight) '=' char(sym(y2))]; % =y2
disp('Рівняння для граничних умов:')
fprintf('%s\n',EqLeft,EqRight)
```

Результат:

Рівняння для граничних умов:

C5=6

*2*C4 + C5 + sin(4)=-30*

4. Розв'яжемо отриману систему - знайдемо довільні постійні C і C_2. Підставимо їх у розв'зок *Sol*.

```
Con=solve(EqLeft,EqRight,'C,C2'); % розв'язуємо
C=Con.C; % прирівнюємо отримані розв'язки
C2=Con.C2; % символічним змінним C та C2
Sol22=vpa(eval(Sol),12); % підставили C2, C
disp('Рівняння екстремалі:')
fprintf('y(x)=%s\n',char(Sol22))
```

Результат:

Рівняння екстремалі:

y(x)=sin(2.0*x) - 17.6215987523*x + 6.0

Надрукуємо також величину $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$, необхідну для перевірки достатніх умов екстремуму за ознакою Лежандра.

```
d_dFdy1_dx=diff(dFdy1,x); % Fxy'x
d_dFdy1_dy=diff(dFdy1,y); % Fyy'
d_dFdy1_dy1=diff(dFdy1,Dy); % Fy'y'-умова Лежандра
dFy1dx=d_dFdy1_dx+d_dFdy1_dy*Dy+d_dFdy1_dy1*D2y;
fprintf('dFy''/dx=%s\n',char(dFy1dx))
disp('Умова Лежандра:')
fprintf('Fy''y''=%s\n',char(d_dFdy1_dy1))
```

Результат:

Достатня умова Лежандра:

Fy'y'=2

Складемо ліву частину диференціального рівняння Ейлера і спростимо її. Перетворимо символічну змінну Euler в рядок.

```
Euler=simple(dFdy-dFy1dx); % рівняння Ейлера
deqEuler=[char(Euler) '=0']; % в рядок додали =0
fprintf('Рівняння Ейлера:\n%s\n',deqEuler)
```

Результат

Рівняння Ейлера:

*- 2*D2y - 8*sin(2*x)=0*

9.Обчислимо значення функціонала на знайденій екстремалі і на прямій, що з'єднує точки M_1 і M_2. Підставимо в підінтегральну функцію F аналітичні вирази для цих ліній та їх похідних, а потім проінтегруємо. Надрукуємо результати.

```
Fextr=subs(F,{y,Dy},{Sol22,diff(Sol22,x)});
Jextr=eval(int(Fextr,x,x1,x2))
ylin=(x-x1)*(y2-y1)/(x2-x1)+y1;
Flin=subs(F,{y,Dy},{ylin,diff(ylin,x)});
Jlin=eval(int(Flin,x,x1,x2))
```

Результат

Jextr = 616.6132

Jlin = 620.8215

Рисуємо графік, підписуємо заголовок і координатні осі встановленим шрифтом.

```
xpl=linspace(x1,x2); % задаємо масив абсцис
y21=subs(Sol22,x,xpl); % обчислили ординати
figure % фігура
plot(xpl,y21,'-r') % рисуємо графік червоною лінією
set(get(gcf,'CurrentAxes'),...
  'FontName','Times New Roman Cyr','FontSize',12)
title('\bfЗавданя 1') % заголовок
xlabel('\itx') % мітка осі OX
```

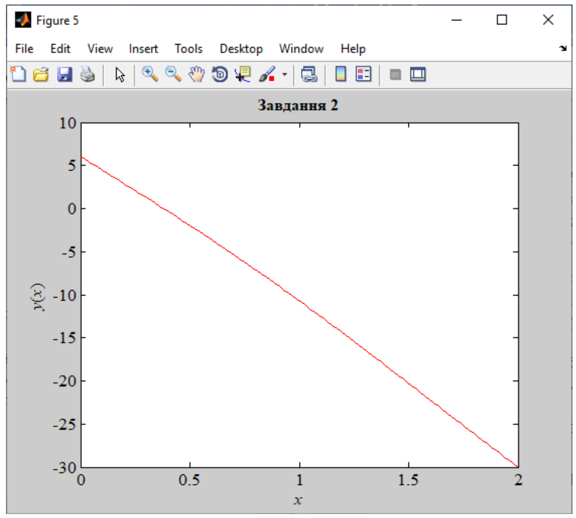

Рисунок 1 – Графік екстремалі

Якщо на екстремали виконується умова $\dfrac{\partial^2 F}{\partial f'^2} > 0$, то досягається сильний мінімум. У нашому випадку це виконується: $\dfrac{\partial^2 F}{\partial f'^2} = 2 > 0$, отже, на нашій екстремалі досягається сильний мінімум.

Висновок

Для свого функціонала знайшли екстремалі, побудували їх графіки та дослідили на виконання достатніх умов екстремуму. Порівняли знайдене значення з лінійною функцією, що задовольняє граничні умови.