平动参考系变换下的谐振子

吴梦之

2020 年 5 月 3 日

摘　要

本文研究了量子力学中的经典平动参考系变换及其在谐振子系统中的应用。本文首先论证了平动参考系变换下量子态的变换由 Weyl 平移算子刻画，它是经典相空间作为一个加法群在 Hilbert 空间上的群表示。之后本文研究了参考系变换下 Hamilton 量的变换法则，指出了此时的绝热规范势代表了惯性力，本文然后简单讨论了量子版本的达朗贝尔原理和等效原理。本文接下来根据量子态和 Hamilton 量的变换法则，研究了平动参考系变换下的谐振子，着重讨论了其基态的变换和 Hamilton 量的变换，论证了匀速参考系变换下基态仍为基态，而非匀速参考系变换下由于惯性力的作用，基态将变为相干态。本文最后简单讨论了此结论在量子调控领域的潜在应用。

关键词　经典平动参考系变换　Weyl 平移算子　量子达朗贝尔原理　谐振子相干态

1　引言

参考系变换在物理学中是一个基本性问题，它刻画着时空的对称性。最初 balabala 可追溯到 Galileo 的思想实验：在一艘平稳航行的大船上，物理世界看起来与地面上没有说明区别，也就是说，人们无法通过力学实验来判断自己是处于“运动”的船上，还是处于“静止”的地面上。这个思想实验可以提炼为力学的 Galileo 相对性原理：力学规律在惯性系中保持形式不变。从群论的观点来看，这个原理意味着力学的时空对称性可以由 Galileo 群来刻画。对于电磁力和引力，Galileo 相对性原理则无法适用，为了解决它们之间的矛盾，Einstein 构建了狭义相对论和广义相对论，前者将 Galileo 对称性扩充为 Poincare 群以融合电磁学与相对性原理，后者利用等效原理将引力与惯性力局域地等同起来。在 Einstein 以及后世的物理学家的努力下，相对性原理在物理学中成为了一个根基性原理，它告诉人们，不管我们处于什么样的参考系，我们观测到的物理规律总是具有某种协变性，尽管物理状态会有很大的区别。这为实验上提供了很大的方便，它意味着我们做实验时不需要提前知道我们的实验室参考系相对于某个绝对参考系的运动状态，就可以直接使用力学、电磁学、引力理论的原理。

然而当我们考虑量子效应时，情况变得微妙起来。首先是惯性力与等效原理的问题：经典层面，我们知道相比于惯性系，非惯性系中的物理状态的演化需要考虑惯性力的效应，而根据等效原理，它可以与引力等效起来；然而在量子层面，这样的惯性力应当如何如何刻画，等效原理又应当如何表述，等效出来的“量子引力”应当如何理解，都是一些有趣的问题。另一个微妙的事情在于弯曲时空场论中的一些效应，例如 Hawking 辐射、Unruh 效应等，特别是 Unruh 效应，它告诉我们平直的 Minkovski 时空中标量场的基态，在匀加速观者看来，将会变成一个热平衡态，其温度正比于观察者的加速度。我们不禁思考，同样作为平直时空的 Galileo 时空，是否也存在着类似于 Unruh 效应的现象。另外，在量子层面还有一个热门的研究课题，那就是如果参考系本身是量子的，会有什么样有趣的现象？近两年这方面代表性的工作可参考 []。

应用层面来看，研究量子力学 (尤其是非相对论情形) 中的参考系变换也是颇有意义的。在量子调控领域，人们常常需要把一个量子态从空间一点输运到另一点，这个问题中天然地存在实验室参考系和量子态随动参考系两个参考系。在实验室参考系中，Hamilton 量的形式往往是高度含时的，常见的求解技术是借助 Lewis-Resenfeld 不变量得到一组态的演化，进而得到时间演化算子，但这种求解方法中 L-R 不变量的构造往往非常困难。但是，如果我们在量子态的随动参考系中考虑问题，Hamilton 量的形式可以人为地进行一些简化，在随动参考系中求解之后，转换到实验室参考系中，将会使问题大大简化。

本文的主要结构安排和结论如下。本文第二章首先回顾了平动参考系变换下量子态的一般性变换法则，讨论幺正变换矩阵每一项的物理意义。然后借助 Weyl 平移算子和 Weyl-Heisenberg 群，本文证明了在群表示论的观点下，平动参考系变换是经典相空间作为一个加法群作用于量子态空间上，即为经典相空间的群表示。本文第三章则考虑参考系变换对 Schrodinger 方程和 Hamilton 量的影响，回顾绝热规范势的物理意义，指出参考系变换算子所诱导的绝热规范势的经典物理意义是惯性力，由此构建了量子力学版本的达朗贝尔原理，并简单讨论量子力学中的等效原理。本文第四章则基于以上两章的结论，考察平动参考系变换下的谐振子，特别是谐振子基态。本文将 Weyl 平移算子表示为产生湮灭算符的形式，证明了参考系变换后的基态将变成一个中心位置随参考系运动的 Gauss 波包，并通过计算这个 Gauss 波包的 Wigner 函数及其空间分布和动量分布，来进一步验证这个结论。本文接下来在变换后的 Hamilton 表象下研究这个 Gauss 波包，证明了匀速参考系变换情形下，运动的 Gauss 波包是新 Hamilton 量的瞬时基态；而在非匀速情形下，由于惯性力的作用，Gauss 波包变成了新 Hamilton 量的相干态。

2 参考系变换下量子态的变换

我们假设有两个观察者 S 和 S' 观测同一个量子态，不妨假定 S 是静止观察者，S' 是运动观察者。一般来讲，S 和 S' 之间参考系变换可以分解平动和转动两个部分。平动变换的刻画是简单的，我们只需要知道运动参考系 S' 原点的运动情况，即可知道所有点的参考系变换关系，因此对于平动参考系变换，我们只需要刻画原点的运动即可完全确定参考系变换法则。而转动变换则比较难于刻画，困难至少包括两个个方面：

- 转动参考系变换中存在一个不动点，那么在这个不动点附近，转动变换某种程度上变成了一种内部自由度。例如原点处的一个自旋，在转动参考系变换下，只有自旋发生改变，而自旋是这个系统的内部自由度。
- 用 Euler 角来刻画转动时，同一个三维转动变换可以有多种表达式。这意味着我们要对全体 Euler 转动进行分类，每一个分类中只取一个表达式作为真实的转动变换。而这种分类所导致的等价关系，很可能会诱导出新的规范场。

正是由于转动问题的复杂性，本文将主要关注平动参考系变换。这一节我们分析量子态的变换，下一节我们将分析 Schrodinger 方程的变换，并引出绝热规范势。

2.1 参考系变换的幺正算符

在非相对论时空，即 S' 和 S 的时间 t 是一致的。设 S' 的原点 O' 相对于 S 的原点 O 的运动为 $\xi(t)$，即 S' 中原点在 S 中的坐标为 $\xi(t)$。则一个经典物体 P 在 S' 中的坐标为 $x' = x - \xi(t)$，动量为 $p' = p - m\frac{d\xi}{dt}$。那么在量子力学中，我们应当要求其期望值满足此性质，即

$$\begin{aligned} &< x' > =< x - \xi(t) > \\ &< p' > =< p - m\frac{d\xi}{dt} > \end{aligned} \tag{1}$$

设 S 观测到的态为 $|\Psi\rangle$, S' 中观测到的态为 $|\Psi'\rangle$。我们认为 S 和 S' 中 Hilbert 空间的整体结构 (如能谱等性质) 是不发生变化的，变化的仅仅是态矢量，因此存在一个算符 $\hat{U}$ 联系 $|\Psi\rangle$ 和 $|\Psi'\rangle$，即 $|\Psi'\rangle = \hat{U}|\Psi\rangle$。简单起见，我们考虑一维情形。由于坐标算符和动量算符的全体本征态分别构成态空间的一组基，因此我们只需要考虑坐标算符和动量算符的本征态在参考系变换下的变换关系，即可知道任意态在参考系变换下的变换关系，即得到 $\hat{U}$ 的表达式。根据经典参考系变换的结果，我们可以要求

$$\hat{U}|x\rangle = e^{i\phi(x,t)}|x-\xi(t)\rangle \tag{2}$$

其中，含时待定相位 ϕ 允许坐标算符的 e 指数 $e^{ik\hat{x}}$ 给出一个贡献。由于 $|x-\xi\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{p}\xi(t)}|x\rangle$，因此参考系变换算符 $\hat{U}$ 应当包含一个空间平移算子 $e^{\frac{i}{\hbar}\hat{p}\xi(t)}$。而对于待定相位 $e^{ik\hat{x}}$ 部分，我们可以通过考虑 $\hat{U}$ 作用在动量本征态 $|p\rangle$ 上来推导。

$$\hat{U}|p\rangle = e^{i\phi(p,t)}|p-m\frac{d\xi}{dt}\rangle \tag{3}$$

此时，含时待定相位 ϕ 有一部分来自于空间平移算子 $e^{\frac{i}{\hbar}\hat{p}\xi(t)}$。由于 $|p-m\frac{d\xi}{dt}\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}m\frac{d\xi}{dt}\hat{x}}|p\rangle$，因此 $\hat{U}$ 还应当包含一个动量平移算子 $e^{-\frac{i}{\hbar}m\frac{d\xi}{dt}\hat{x}}$。因此参考系变换算符的表达式应该为

$$\hat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}m\frac{d\xi}{dt}\hat{x}}e^{\frac{i}{\hbar}\hat{p}\xi(t)}e^{i\phi(t)} \tag{4}$$

应当注意，$e^{\frac{i}{\hbar}\hat{p}\xi(t)}$ 和 $e^{-\frac{i}{\hbar}m\frac{d\xi}{dt}\hat{x}}$ 的次序是重要的，交换次序时会相差一个 Weyl 相位。在 (4) 中，我们允许一个额外的相位 $\phi(t)$，根据文献 [?]，这个相位为 $i\phi(t) = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t \frac{1}{2}m(\frac{d\xi}{d\tau})^2 d\tau$。因此用于描述参考系变换的算符的完整表达式是

$$\hat{U}(t) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}m\frac{d\xi}{dt}\hat{x}\right]\exp\left[\frac{i}{\hbar}\hat{p}\xi(t)\right]\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_0^t \frac{1}{2}m(\frac{d\xi}{d\tau})^2 d\tau\right] \tag{5}$$

(5) 的物理意义是明确的，$\hat{U}$ 的作用是将坐标本征态平移一段距离 $-\xi(t)$，将动量本征态增加动量 $-m\frac{d\xi}{dt}$，这是符合参考系变换的经典物理图像 (1) 的。

2.2 Weyl 平移算子与经典相空间

注意到当 $[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] = [\hat{B},[\hat{A},\hat{B}]] = 0$ 时，$\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 算符满足 Baker-Hausdorff 公式: $\exp(\hat{A}+\hat{B}) = \exp\hat{A}\exp\hat{B}\exp(-\frac{[\hat{A},\hat{B}]}{2})$, 因此我们可以将 (5) 改写成 Weyl 平移算子的形式:

$$\hat{U} = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\hat{p}\xi(t) - m\frac{d\xi}{dt}\hat{x}\right)\right]\ \exp\left(\frac{i}{\hbar}\frac{1}{2}m\xi\frac{d\xi}{dt}\right)\ \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t \frac{1}{2}m(\frac{d\xi}{d\tau})^2 d\tau\right) \tag{6}$$

其中，$\hat{W}(a,b) := \exp[\frac{i}{\hbar}(a\hat{x} - b\hat{p})]$ 称为 Weyl 平移算子。第二项来自于 $\hat{p}\xi(t)$ 和 $m\frac{d\xi}{dt}\hat{x}$ 的对易关系，我们将其与第三项合并起来考虑，一并给出其物理意义。第三项的指数因子 $-\frac{i}{\hbar}\int_0^t \frac{1}{2}m(\frac{d\xi}{d\tau})^2 d\tau = -\frac{i}{\hbar}\int_{\xi(0)\equiv 0}^{\xi(t)} \frac{1}{2}m\frac{d\xi}{d\tau}d\xi = -\frac{i}{\hbar}\left(\frac{1}{2}m\xi(t)\frac{d\xi}{d\tau} - \int_0^t \frac{1}{2}m\xi\frac{d^2\xi}{d\tau^2}d\tau\right)$，不难看出分部积分后的第一项恰好可以与 $\hat{U}$ 的第二项相消。于是 $\hat{U}$ 可以进一步写成更紧凑的形式:

$$\hat{U} = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\hat{p}\xi(t) - m\frac{d\xi}{dt}\hat{x}\right)\right]\ \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t -\frac{1}{2}m\xi\frac{d^2\xi}{d\tau^2}d\tau\right) \tag{7}$$

(7) 可以简写为 $\hat{U} = \hat{W}(-m\frac{d\xi}{dt}, -\xi)e^{i\phi}$。注意到 $-m\frac{d^2\xi}{dt^2}$ 代表了参考系变换时带来的经典惯性力，因此 (7) 第二项的相位可以认为是惯性力做功所给出的。特别地，对于匀速和匀加速两种类型的参考系变换，幺正算符的形式分别为 $\hat{U} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(\hat{p}vt - mv\hat{x})\right)$ 和 $\hat{U} = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(\frac{1}{2}at^2\hat{p} - mat\hat{x}\right)\right)\ \exp\left(\frac{1}{12}\frac{i}{\hbar}ma^2t^3\right)$。

文献 [?] 利用路径积分方法研究了弱场近似下的引力场中的自由下落粒子，他们指出，引力的效应可以用一个 Weyl 平移算子以及一个额外的相位因子 $\exp(i\frac{1}{12}mg^2t^3)\hat{W}(-mgt,-\frac{1}{2}gt^2)$ 描述，进而引力场中的自由下落粒子和自由粒子的概率幅分布是相同的，于是他们给出了量子力学等效原理的一个表述：引力场中自由下落的粒子和自由粒子的概率分布相同，与其质量无关。不难注意到，他们的 Weyl 平移算子和额外的相位严格地等于 $\hat{U}$，因此他们的等效原理其实也可以加强为，不仅仅概率幅相同，其量子态也是完全相同的，与质量无关。

应当指出，$\hat{W}(a_1,b_1)\hat{W}(a_2,b_2)=\hat{W}(a_1+a_2,b_1+b_2)e^{i\phi}$，其中相角 $\phi=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{\hbar}$ 来自于 Baker-Hausdorff 公式。因此全体 Weyl 平移算符在模掉一个全局相位的意义下构成一个群 $\mathcal{W}$，即 $\hat{W}(a_1,b_1)\hat{W}(a_2,b_2)\sim\hat{W}(a_1+a_2,b_1+b_2)$。由于参数 a, b 取值为全体实数 $\mathbb{R}$，因此这个群事实上同构于 $(\mathbb{R}^2,+)$ 群，因此我们可以认为 Weyl 平移算符实际上是 $(\mathbb{R}^2,+)$ 群对于量子态空间的群作用。物理上来看，$\hat{W}(-m\frac{d\xi}{dt},-\xi)$ 的两个参数 $-m\frac{d\xi}{dt}$ 和 $-\xi(t)$ 代表了参考系变换所导致的经典相空间的平移。所以我们就得到了本节最重要的结论：

结论. *量子力学中平动参考系变换的作用是，经典相空间作为一个加法群对量子态空间的群作用，其中相空间的群运算是参考系变换所导致的坐标和动量的平移。*

最后我们指出，这个群实际上是 Weyl-Heisenberg 群 [???] 相对于 U(1) 群的商群。Weyl-Heisenberg 群对应的 Lie 代数可以给出广义相干态 [???]，即对于一般的量子系统，Weyl-Heisenberg 代数可以定义相应的广义相干态。作为最简单的例子，在第四章我们将会看到，对于谐振子系统，Weyl 平移算子可以把其基态变成一个相干态，即参考系变换下，谐振子基态变成激发态。

3 参考系变换下 Schrodinger 方程的变换

以上我们讨论了参考系变换下量子态的变换法则 $|\Psi\rangle\to|\Psi'\rangle=\hat{U}|\Psi\rangle$，我们指出了变换算符 $\hat{U}$ 的形式是一个 Weyl 平移算子乘一个全局相位 (7)，并且可以认为是作为加法群的经典相空间在量子态空间上的群表示。接下来我们来研究 Schrodinger 方程在参考系变换下的变化。

Schrodinger 方程是量子力学中的运动方程，我们应当要求它在参考系变换下具有某种意义上的不变性，正如我们要求经典力学的 Newton 第二定律 Galileo 对称性，量子场论的各种场和单粒子态必须满足 Poincare 或 Lorentz 对称性一样。然而接下来我们将看到，由于参考系变换 $\hat{U}(t)$ 含时，Schrodinger 方程中的 ∂_t 作用其上将会带来额外效应，这正是绝热规范势 [?] 的物理意义。

3.1 绝热规范势与量子达朗贝尔原理

简单起见，我们首先考虑不含时的参考系变换 $x\to x'=x-\xi$，其中 ξ 为常数。这个参考系变换的意义就是将空间原点平移了一段距离 ξ，此时参考系变换算符 $\hat{U}=\exp\left(\frac{i}{\hbar}\xi\hat{p}\right)$，正是空间平移算子，而 Hamilton 量的变换法则是 $\hat{H}\to\hat{H}'=\hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger$。于是在 S' 参考系中，$\hat{H}'|\Psi'\rangle=\hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger\hat{U}|\Psi\rangle=\hat{U}\hat{H}|\Psi\rangle=\hat{U}i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle$，由于此处 $\hat{U}$ 不含时，因此可以与 $\frac{\partial}{\partial t}$ 交换次序，从而得到 $\hat{H}'|\Psi'\rangle=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}|\Psi\rangle=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi'\rangle$。也就是说，在这样的参考系变换下，Schrodinger 方程的形式保持不变。从对称性的角度来看，这表明了 Schrodinger 方程具有空间平移对称性。顺便一提，这意味着 Schrongdinger 方程满足动量守恒。

场论中，给定一个全局对称性，我们往往可以考虑相应的局域对称性 (规范对称性)，这里我们也可以考虑定域对称性。应当注意的是，定域对称性在场论层面理解为变换算符 $\hat{U}$ 是时空坐标 x^μ 的函数，而在量子力学层面则应理解为 $\hat{U}$ 是时间 t 的函数，这某种程度上反映了量子力学是 0+1 维场论。这时我们考察经过算符 $\hat{U}$ 变换后的 Schrodinger 方程：

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi'\rangle &= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\big(\hat{U}|\Psi\rangle\big) = i\hbar\frac{\partial\hat{U}}{\partial t}|\Psi\rangle + i\hbar\hat{U}\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle \\
&= i\hbar\frac{\partial\hat{U}}{\partial t}|\Psi\rangle + \hat{U}\hat{H}|\Psi\rangle = i\hbar\frac{\partial\hat{U}}{\partial t}|\Psi\rangle + \hat{H}'|\Psi'\rangle \\
&= i\hbar\frac{\partial\hat{U}}{\partial t}\hat{U}^\dagger|\Psi'\rangle + \hat{H}'|\Psi'\rangle
\end{aligned} \tag{8}
$$

我们会发现 Schrodinger 方程经过 $\hat{U}$ 变换后不再成立，存在多出来的一项

$$
i\hbar\frac{\partial\hat{U}}{\partial t}\hat{U}^\dagger \sim i\hbar\partial_t(\log\hat{U})|\Psi'\rangle \tag{9}
$$

也就是说，对于 S' 参考系中的观察者来说，原始的 Schrodinger 方程并不成立。它意味着存在一个特殊的参考系，只有在这个特殊参考系中 Schrodinger 方程才成立，其它参考系中的运动方程具有其它形式。这并不是一个好的结论，我们可以有两种思路来规避这个问题。第一种方法是改造 Schrodinger 方程，第二种方法是修改 Hamilton 量的变换法则。

1 改造 Schrodinger 方程

我们可以参照规范场论来理解这一项。我们要求系统的运动方程具有 $\hat{U}$ 所刻画的时域上的定域对称性 (规范对称性)，那么时域偏导数 $\frac{\partial}{\partial t}$ 会破坏这种规范对称性。仿照规范场论，我们应当引入规范场 (如电磁场、胶子场) 来抵消额外的项，将偏导数改写为协变导数 $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}+$ 联络项，并要求其与 $\hat{U}$ 对易，即 $\frac{D}{Dt}\big(\hat{U}|\Psi\rangle\big) = \hat{U}\frac{D}{Dt}|\Psi\rangle$。我们根据这一限制条件，不难得到协变导数的联络项应当为 $-i\hbar\frac{\partial\hat{U}}{\partial t}\hat{U}^\dagger$，这正是我们定域幺正变换在 Schrodinger 方程中带来的额外的一项。将普通导数改为协变导数之后，Schrodinger 方程在 S 系和 S' 系中的形式都是

$$
i\hbar\frac{D}{Dt}|\Psi\rangle = \hat{H}|\Psi\rangle \tag{10}
$$

其中 $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} - i\hbar\frac{\partial\hat{U}}{\partial t}\hat{U}^\dagger$。这个 Schrodinger 方程在 $\hat{U}$ 变换下保持不变，即具有 $\hat{U}$ 定域不变性。从这一角度来看，我们可以将这一项理解为规范对称性所带来的规范场，这也是为什么很多文献将其称为绝热规范势的原因。数学上来看，这一项代表了主纤维丛上的联络，称为 Maurer-Cartan 形式，它是一个几何上的量，因此将会贡献几何相位 (Berry 相位)。

2 修改 Hamilton 量的变换法则

我们可以重新剖析一下我们所遇到的问题。我们对系统的量子态和 Hamilton 量做了一个含时的幺正变换后，时域偏导数作用在这个幺正变换算符上会给出额外的一项，多出来的这一项破坏了运动方程——Schrodinger 方程。类似的问题其实在经典物理层面也存在。在惯性系中，物体的经典运动方程是 Newton 第二定律 $m\frac{d^2x}{dt^2} = F[x(t), \frac{dx}{dt}]$，其中 $F[x(t), \frac{dx}{dt}]$ 是 x(t) 和 $\frac{dx}{dt}$ 的泛函。但是在非惯性系中，物体的运动方程中存在一个惯性力，这个惯性力破坏了物体的运动方程——Newton 第二定律。

经典物理层面，我们采用达朗贝尔原理来处理惯性力，即重新定义 $F[x(t), \frac{dx}{dt}]$，将惯性力吸收进去，这样我们就可以保持运动方程不变。量子力学层面我们也可以重新定义 Hamilton 量:

$$
\hat{H}' = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger + i\hbar\frac{\partial\hat{U}}{\partial t}\hat{U}^\dagger \tag{11}
$$

这样在参考系变换下，Schrodinger 方程的形式不发生改变。我们将重新定义 Hamilton 量来保证 Schrodinger 方程不变的这一想法称作

量子达朗贝尔原理. *对量子系统做参考系变换后，系统会受到一个惯性力，体现为 Schrodinger 方程会多出一个绝热规范势，S' 参考系中的观测者所感受到的 Hamilton 量必须包含惯性力的部分。*

回顾以上讨论，我们所遇到的问题是当我们对系统做含时幺正变换时，系统会产生额外的效应，从而破坏运动方程——Schrodinger 方程。我们希望系统具有这样的对称性，因此不希望运动方程遭到破坏，我们可以有两种方法来解决这个问题。第一种方法是改造运动方程，引入规范势，使新的运动方程在幺正变换下保持不变。第二种方法是我们将新的效应吸收到 Hamilton 量中，从而保持运动方程不变，称为量子达朗贝尔原理。

应当指出的是，以上讨论原则上针对任意幺正变换，并不局限于参考系变换，可以是其它方式带来的幺正变换，例如态矢量的相位变换。由于参考系变换具有很强的特殊性，它所带来的绝热规范势具有经典对应，即惯性势（事实上，我们将会看到，绝热规范势中将有三个部分，其中一个部分对应于惯性势）。而考虑到经典的等效原理，惯性力局部地可以等效为引力，因此量子达朗贝尔原理为我们架起了连接规范理论和引力理论的一个桥梁，这将为我们理解引力的量子本性提供一个有趣的思路。正是由于刻画参考系变换的幺正变换的特殊性，我们将量子达朗贝尔原理区分为狭义和广义两种版本，其中狭义版本专指参考系变换的量子达朗贝尔原理，而广义版本则针对任意幺正变换。

3.2 S' 参考系中的 Hamilton 量

以上我们陈述了量子达朗贝尔原理的基本思想，接下来我们将计算 S' 参考系中的 Hamilton 量 $\hat{H}' = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger + i\hbar\frac{\partial\hat{U}}{\partial t}\hat{U}^\dagger$。根据公式 (5)，可得 $\hat{H}'$ 的第一部分为

$$\hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger = e^{-\frac{i}{\hbar}m\frac{d\xi}{dt}\hat{x}}\frac{\hat{p}^2}{2m}e^{\frac{i}{\hbar}m\frac{d\xi}{dt}\hat{x}} + e^{\frac{i}{\hbar}\xi\hat{p}}\hat{V}(\hat{x})e^{-\frac{i}{\hbar}\xi\hat{p}} \tag{12}$$

根据对易关系 $[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar$，我们用归纳法不难知道 $[\hat{x}^n,\hat{p}] = i\hbar n\hat{x}^{n-1}$，进而对于任意能够 Taylor 展开的算符函数 $f(\hat{x},\hat{p})$, 都有 $[\hat{f},\hat{p}] = i\hbar\frac{\partial\hat{f}}{\partial\hat{x}}$ 以及 $[\hat{f},\hat{x}] = -i\hbar\frac{\partial\hat{f}}{\partial\hat{p}}$。于是我们可以分别计算 $\hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger$ 的两部分:

$$\begin{aligned} e^{\lambda\hat{x}}\hat{p}^2e^{-\lambda\hat{x}} &= \hat{p}^2 + \lambda[\hat{x},\hat{p}^2] + \frac{\lambda^2}{2!}[\hat{x},[\hat{x},\hat{p}^2]] \\ &= \hat{p}^2 + 2i\hbar\lambda\hat{p} + \frac{1}{2!}2(i\hbar\lambda)^2 \\ &= (\hat{p} + i\hbar\lambda)^2 \end{aligned} \tag{13}$$

将 $\lambda = -\frac{i}{\hbar}m\frac{d\xi}{dt}$ 代入，可得

$$e^{-\frac{i}{\hbar}m\frac{d\xi}{dt}\hat{x}}\frac{\hat{p}^2}{2m}e^{\frac{i}{\hbar}m\frac{d\xi}{dt}\hat{x}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{d\xi}{dt}\hat{p} + \frac{1}{2}m(\frac{d\xi}{dt})^2 \tag{14}$$

对于 $\hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger$ 的第二部分，我们认为 $\hat{V}(\hat{x})$ 可以 Taylor 展开，因此只需要考虑 $\hat{x}^n$ 在 $\hat{U}$ 作用下的变换即可:

$$\begin{aligned} e^{\lambda\hat{p}}\hat{x}^ne^{-\lambda\hat{p}} &= \hat{x}^n + \lambda[\hat{p},\hat{x}^n] + \frac{\lambda^2}{2!}[\hat{p},[\hat{p},\hat{x}^n]] + \frac{\lambda^3}{3!}[\hat{p},[\hat{p},[\hat{p},\hat{x}^n]]] + \cdots \\ &= \hat{x}^n + n\lambda(-i\hbar)\hat{x}^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}\lambda^2(-i\hbar)^2\hat{x}^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\lambda^3(-i\hbar)^3\hat{x}^{n-3} + \cdots + \lambda^n(-i\hbar)^n \\ &= [\hat{x} + (-i\hbar\lambda)]^n \end{aligned} \tag{15}$$

将 $\lambda = \frac{i}{\hbar}\xi$ 代入，可得 $e^{\frac{i}{\hbar}\xi\hat{p}}\hat{x}^ne^{-\frac{i}{\hbar}\xi\hat{p}} = (\hat{x}+\xi)^n$，于是 S' 系观察到的势能为 $\hat{U}\hat{V}(\hat{x})\hat{U}^\dagger = \hat{V}(\hat{x}+\xi)$。所以 $\hat{H}'$ 的第一部分为

$$\hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger = \frac{(\hat{p}+m\frac{d\xi}{dt})^2}{2m} + \hat{V}(\hat{x}+\xi) \tag{16}$$

接下来我们来计算绝热规范势 $i\hbar\frac{\partial\hat{U}}{\partial t}\hat{U}^\dagger$。由公式 (5)，我们可以得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{U} = \big(-\frac{i}{\hbar}m\frac{d^2\xi}{dt^2}\hat{x}\big)\hat{U} + \hat{U}\big(\frac{i}{\hbar}\frac{d\xi}{dt}\hat{p} - \frac{i}{\hbar}\frac{1}{2}m(\frac{d\xi}{dt})^2\big) \tag{17}$$

由于绝热规范势的第二个因子 $\hat{U}^\dagger$ 与 $\hat{U}$ 相乘等于 1，因此我们希望将 $\hat{p}$ 与 $\hat{U}$ 交换次序。因为 $[\hat{f},\hat{p}] = i\hbar\frac{\partial\hat{f}}{\partial\hat{x}}$，所以 $[\hat{U},\hat{p}] = i\hbar\frac{\partial\hat{U}}{\partial\hat{x}} = i\hbar\big(-\frac{i}{\hbar}m\frac{d\xi}{dt}\big)\hat{U} = m\frac{d\xi}{dt}\hat{U}$。于是 $\hat{U}\hat{p} = \hat{p}\hat{U} + [\hat{U},\hat{p}] = \big(\hat{p}+m\frac{d\xi}{dt}\big)\hat{U}$。这样，我们就得到了一般形式的绝热规范势如下：

$$\hat{V}_{gauge} := i\hbar\frac{\partial\hat{U}}{\partial t}\hat{U}^\dagger = m\frac{d^2\xi}{dt^2}\hat{x} - \frac{d\xi}{dt}\hat{p} - \frac{1}{2}m\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 \tag{18}$$

后两项恰好与 $\frac{(\hat{p}+m\frac{d\xi}{dt})^2}{2m}$ 展开式的两项相消，说明 $\hat{V}_{gauge}$ 中真正有物理效应的只有第一项 $m\frac{d^2\xi}{dt^2}\hat{x}$，我们将其记作 $\hat{V}_{iner}$。之后我们将会看到，它对应于经典惯性力。综上，S' 系观察到的总 Hamilton 量是

$$\begin{aligned}\hat{H}' &= \hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger + i\hbar\frac{\partial\hat{U}}{\partial t}\hat{U}^\dagger \\ &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(\hat{x}+\xi) + m\frac{d^2\xi}{dt^2}\hat{x}\end{aligned} \tag{19}$$

因此，S' 系中的 Schrodinger 方程的形式为：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi'\rangle = \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(\hat{x}+\xi) + m\frac{d^2\xi}{dt^2}\hat{x}\right)|\Psi'\rangle \tag{20}$$

3.3 量子达朗贝尔原理的经典对应

以上，我们讨论了 Schrodinger 方程、Hamilton 量和量子态在参考系变换下的变换法则。为了更好地理解量子达朗贝尔原理，我们将通过 Ehrenfest 定理，来研究该原理的物理意义与经典对应。

量子力学中的 Ehrenfest 定理告诉我们 $\frac{d}{dt} < \hat{p} >= - < \frac{\partial\hat{V}}{\partial\hat{x}} >$，即力学量的期望值服从 Newton 运动方程。那么经过参考系变换后，势能项增加了一个惯性势，于是 Ehrenfest 定理将会给出

$$- < \frac{\partial\hat{V}_{iner}}{\partial\hat{x}} >= -m\frac{d^2\xi}{dt^2} \tag{21}$$

这正是经典惯性力。这也说明，对于描述参考系变换的幺正算符，我们将它所带来的绝热规范势称为惯性势或者达朗贝尔势是合适的。如果量子力学中等效原理成立，那么这一项将与引力产生联系。

特别地，我们可以考虑惯性系的 boost 变换 $x \to x' = x + vt$，此时它所带来的惯性力等于 0。这说明经典 Newton 运动方程在 boost 变换下具有不变性，从对称性的角度来看就是 Newton 方程满足 Galileo 对称性。此时 S' 参考系中的 Hamilton 量变为 $\frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(\hat{x}+vt)$，说明 Schrodinger 方程也具有 Galileo 对称性，只要外加势能 V(x) 具有平移对称性。

4 参考系变换下的谐振子

以上我们对一般的参考系变换进行了讨论，接下来我们研究谐振子系统 $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$。谐振子系统中，$\hat{x}$ 和 $\hat{p}$ 可以用产生湮灭算符表示 $\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}^\dagger + \hat{a})$，$\hat{p} = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(\hat{a}^\dagger - \hat{a})$。此时，Weyl 平移算子 $\hat{W}(a,b) = \exp[\frac{i}{\hbar}(a\hat{x} - b\hat{p})]$ 将会变成 $\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})$ 的形式，其中 $\alpha = b\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} + i\frac{a}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$。$\hat{D}(\alpha)$

算符称为谐振子的平移算符，其物理意义是将谐振子基态变换为本征值等于 α 的相干态，即 $\hat{a}\hat{D}(\alpha)\left|0\right\rangle = \alpha\hat{D}(\alpha)\left|0\right\rangle$。

我们已经知道全体 Weyl 平移算子在模掉一个全局相位的意义下构成一个群 $\mathcal{W} \simeq (\mathbb{R}^2, +)$，即 Weyl-Heisenberg 群模掉 U(1) 群的商群。相应地，全体 $\hat{D}(\alpha)$ 模掉一个全局相位后构成一个群 $\{\hat{D}(\alpha) : \mathcal{H} \to \mathcal{H} | \alpha \in \mathbb{C}\}/\sim$，其中 $\mathcal{H}$ 是量子态空间，等价关系 $\sim$ 定义为 $\hat{D}(\alpha) \sim \hat{D}(\beta) \Leftrightarrow \hat{D}(\alpha) = \hat{D}(\beta)\exp(i\phi)$，$\phi \in \mathbb{R}$。这个群满足 $\hat{D}(\alpha+\beta) = \hat{D}(\alpha)\hat{D}(\beta)$，其中 “=” 指模掉全局相位意义下的相等，进而它与 $(\mathbb{C}, +)$ 同构，因此可以说 $\hat{D}(\alpha)$ 是 $(\mathbb{C}, +)$ 群在谐振子 Hilbert 空间上的群表示，进而相干态可以认为是复平面上的点作用在基态上，从而相干态与复平面上的点是一一对应的。由于基态变换的特殊性，我们接下来将着重研究 S 系中的基态在 S' 系中的变化。

4.1 参考系变换下的谐振子基态

尽管 Weyl 平移算子作用在谐振子基态上得到一个相干态，但这个相干态与通常意义下的相干态的演化是不同的，这主要是由于 Weyl 平移算子也会作用于 Hamilton 量，导致时间演化算符不同。对于一个普通的相干态 $\hat{\alpha}$，它随时间演化的规律是 $\left|\alpha;t\right\rangle = e^{-i\frac{1}{2}\omega t}\left|\alpha e^{-i\omega t}\right\rangle$。但是这里，$\left|0';t\right\rangle$ 的演化来自于两个方面，一个是基态 $\left|0\right\rangle$ 自身随时间的演化，另一个是 S' 参考系随时间有变化，因此参考系变换算符 $\hat{U}$ 随时间有变化。综合两个方面的影响，S' 系中观察到的 S 系谐振子基态为

$$\left|0';t\right\rangle = e^{-i\frac{1}{2}\omega t}\left|\alpha_t\right\rangle, \quad \alpha_t = -\xi\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} - im\frac{d\xi}{dt}\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} \tag{22}$$

波函数则等于:

$$\begin{aligned}\Psi_0'(x,t) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\exp\left[i\Im(\alpha_t)\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}x\right]\exp\left[-i\Im(\alpha_t)\Re(\alpha_t)\right]\exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x-\Re(\alpha_t)\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\right)^2\right]\exp(-i\frac{1}{2}\omega t)\\ &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x+\xi\right)^2 - \frac{i}{\hbar}m\frac{d\xi}{dt}x\right]\exp\left(-\frac{i}{2\hbar}m\frac{d\xi}{dt}\cdot\xi - i\frac{1}{2}\omega t\right)\end{aligned} \tag{23}$$

其中 $\Re(\alpha_t) = -\xi\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}$ 和 $\Im(\alpha_t) = -m\frac{d\xi}{dt}\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}$ 分别代表 α_t 的实部和虚部。根据波函数的表达式，我们来计算 S' 系观察者看到的谐振子基态的 Wigner 函数

$$\begin{aligned}W(x,p) &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{2\pi}\left\langle x+\frac{1}{2}\xi\right|\hat{\rho}\left|x-\frac{1}{2}\xi\right\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}p\xi}\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{2\pi}\Psi(x+\frac{1}{2}\xi)\Psi^*(x-\frac{1}{2}\xi)e^{-\frac{i}{\hbar}p\xi}\end{aligned} \tag{24}$$

这里，$\hat{\rho} = \left|\alpha\right\rangle\left\langle\alpha\right|$ 是 S' 系观察者看到的谐振子基态的密度矩阵。我们将波函数 $\Psi_0'(x,t)$ 的表达式代入 Wigner 函数的定义式，计算积分后可以得到

$$\begin{aligned}W_{S'}(x,p) &= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\sqrt{\frac{\hbar}{2\pi m\omega}}\exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}\left(x-\Re(\alpha)\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\right)^2\right)\exp\left(-\frac{1}{2m\hbar\omega}\left(p-\Im(\alpha)\sqrt{2m\hbar\omega}\right)^2\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}\left(x+\xi\right)^2\right)\exp\left(-\frac{1}{2m\hbar\omega}\left(p+m\frac{d\xi}{dt}\right)^2\right)\end{aligned} \tag{25}$$

我们知道，对 Wigner 函数的一个变量求积分可以得到另一个变量的概率分布，即 Wigner 函数的边缘分布性质：$\left\langle x\right|\hat{\rho}\left|x\right\rangle = \int dpW(x,p)$ 以及 $\left\langle p\right|\hat{\rho}\left|p\right\rangle = \int dxW(x,p)$。我们对 (25) 积分，即可得到 S' 参考系中观察者看到的坐标和动量的概率分布：

$$|\Psi_0'(x,t)|^2 = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \exp\left(\frac{m\omega}{\hbar}(x+\xi)^2\right) \tag{26}$$

$$|\Psi_0'(p,t)|^2 = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{\pi}} \exp\Big(-\frac{1}{2m\hbar\omega}\big(p+m\frac{d\xi}{dt}\big)^2\Big) \tag{27}$$

说明在 S' 系观察者看来，谐振子基态是一个运动的 Gauss 波包，其中心位置 $-\xi(t)$ 正是平动参考系的原点的位置，动量的中心值 $-m\frac{d\xi}{dt}$ 也正是平动参考系带来的额外的动量。但由于参考系变换后，Hamilton 量也发生了变化，因而我们不能武断地讲这个 Gauss 波包在 S' 系观察者看来，处于基态还是相干态。接下来我们将在 S' 观者的 Hamilton 表象下来研究这个问题。

4.2 S' 观者的 Hamilton 表象

以上我们已经说明了在 S' 系中看来，S 系中谐振子的基态会变成一个运动的 Gauss 波包，相对于 S 系的 Hamilton 量 $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$ 而言，这是一个相干态。然而，对于 S' 系的观察者，这个 Gauss 波包应当在 $\hat{H}' = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger + i\hbar\frac{\partial\hat{U}}{\partial t}\hat{U}^\dagger$ 表象下展开，才能判断是一个什么样的量子态。由 $\hat{H}'$ 的一般表达式 (19)，可以得到 S' 观者的 Hamilton 量为

$$\hat{H}' = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(\hat{x}+\xi)^2 + m\frac{d^2\xi}{dt^2}\hat{x} \tag{28}$$

我们将这个 Hamilton 量中的 $\hat{x}$ 配平方，可得

$$\hat{H}' = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(\hat{x}+x_0(t))^2 + V_0 \tag{29}$$

其中 $x_0(t) = \xi(t) + \frac{1}{\omega^2}\frac{d^2\xi}{dt^2}$，$V_0 = \frac{1}{2}m\omega^2\big(\xi^2 - (\xi + \frac{1}{\omega^2}\frac{d^2\xi}{dt^2})^2\big)$ 是一个无观测效应的势能零点。引入瞬时算符 $\hat{q} = \hat{x} + x_0(t)$，则有对易关系 $[\hat{q},\hat{p}] = i\hbar$，于是 $\hat{H}' = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2$ 仍为一个瞬时谐振子。引入瞬时产生湮灭算符

$$\hat{b}^\pm = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega\hat{q} \mp i\hat{p}) = \hat{a}^\pm + \frac{m\omega x_0(t)}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \tag{30}$$

其中 $\hat{a}^\pm$ 是 S 系观察者的 Hamilton 量 $\hat{H}$ 对应的产生湮灭算符。

5 总结与讨论

参考文献

[1]