匀加速参考系变换下的谐振子

吴梦之

2020 年 3 月 13 日

1 引言

Unruh 效应是弯曲时空场论的一个有趣的结论。考虑闵氏时空中处于真空态的一个标量场，在任何惯性系中，它都处于真空态。然而，如果我们以匀加速观者的视角 (Rindler 时空) 来考察它，我们将会发现这个场处于热平衡态，并且温度正比于加速度。Unruh 效应有趣之处在于，我们所考虑的背景时空闵氏时空是平直的，这暗示我们另一种平直时空——伽利略时空可能也会有类似的效应，即匀加速观者观测伽利略时空中的物理现象，可能存在不平凡的物理效应。

仿照色动力学中的技巧，我们可以将时空格点化，这时我们所考虑的自由标量场就会退化为由无穷多个谐振子所构成的多体系统。最典型的由谐振子组成的多体系统是晶格振动系统 (在正则量子化之后，可以称作声子系统)，这启发我们可以思考晶格中是否也存在 Unruh 效应，即考虑零温声子场，匀加速观者是否能够观察到一个热能谱。

为了研究无穷多谐振子的系统，我们可以从单体谐振子入手，即考虑一个一维谐振子在匀加速观者看到的效应。这本身也是一个很有趣的课题，近些年，一些课题组 [2] 做了一些有关量子力学中的参考系变换问题，得到了很多有趣的结论。文献 [3] 还讨论了匀加速观者对自由粒子的观测结果，并讨论了两种量子力学版本的等效原理。所以对于单个简谐振子，我们也可以考虑量子力学版本的等效原理，考察引力场中的谐振子和匀加速观者看到的无外场谐振子。

因此本工作将主要研究匀加速观者观测到的单个谐振子，主要研究以下几个问题：

- 考虑一般的参考系变换，提出量子达朗贝尔原理
- 利用量子达朗贝尔原理研究匀速运动和匀加速运动观察者所观测到的谐振子
- 研究谐振子的 Unruh 效应

2 参考系变换的一般性分析

关于量子力学中的参考系变换以及伽利略对称性，文献 [1] 做了很多讨论。不过由于 [1] 历史较为久远，在薛定谔绘景下研究问题，很多问题不能看得很透彻，甚至有一些错误。文献 [2] 对其则进行了更为深刻但较为简略的回顾。在此，本文将从他们工作的基础上入手。

2.1 态的变换

考虑实验室参考系 S 中的一个态 $|\Psi\rangle$，设 S’ 参考系与 S 的坐标变换为 $x' = x + \zeta(t), t' = t$。则 S’ 对这个态的观测的观测由一个幺正算符 $\hat{U}_a$ 来刻画，即 S’ 中观测到的态为 $\hat{U}_a |\Psi\rangle$。根据文献 [2]，这个幺正

算符的一般表达式为：

$$\hat{U}_a = \exp\Big(-\frac{i}{\hbar} m \frac{d\zeta}{dt}\hat{x}\Big) \exp\Big(\frac{i}{\hbar}\zeta(t)\hat{p}\Big) \exp\Big(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t \frac{1}{2} m (\frac{d\zeta}{d\tau})^2 d\tau\Big) \tag{1}$$

应注意，这三项中的前两项是算符，不能随意交换次序，第三项是数，因此可以随意摆放次序。$\hat{U}_a$ 的第三项的物理意义是，参考系变换所带来的额外动能 $E_k = \frac{1}{2}m(\frac{d\zeta}{d\tau})^2$ 所给出的态随时间演化的积分相位。为了更好地看清前两项的物理意义，我们分别考虑该算符作用在坐标算符和动量算符的本征态上，即考虑参考系变换对坐标本征态和动量本征态的影响。

$$\hat{U}_a \left|x\right\rangle = \exp\Big(-\frac{i}{\hbar} m \frac{d\zeta}{dt}\ (x+\zeta)\Big)\ \exp\Big(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t \frac{1}{2} m (\frac{d\zeta}{d\tau})^2 d\tau\Big)\ \left|x+\zeta\right\rangle \tag{2}$$

$$\hat{U}_a \left|p\right\rangle = \exp\Big(\frac{i}{\hbar}\zeta p\Big)\ \exp\Big(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t \frac{1}{2} m (\frac{d\zeta}{d\tau})^2 d\tau\Big)\ \left|p + m\frac{d\zeta}{dt}\right\rangle \tag{3}$$

这里应当注意，由于 $\hat{x}$ 和 $\hat{p}$ 不对易，因此 $\hat{U}_a$ 的两部分要保持次序。由以上两式可以知道，$\hat{U}_a$ 的作用是将坐标本征态平移一段距离 $\zeta(t)$，将动量本征态增加动量 $m\frac{d\zeta}{dt}$。这也符合我们对伽利略变换的经典物理图像，参考系变换之后，物理系统动能、动量和坐标零点会发生变化，而这三方面变化分别由以上三个相位来刻画。

注意到当 $[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] = [\hat{B},[\hat{A},\hat{B}]] = 0$ 时，$\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 算符满足 Baker-Hausdorff 公式：$\exp(\hat{A}+\hat{B}) = \exp\hat{A}\exp\hat{B}\exp(-\frac{[\hat{A},\hat{B}]}{2})$, 因此我们可以将 $\hat{U}_a$ 写成更紧凑的形式：

$$\hat{U}_a = \exp\Big(\frac{i}{\hbar}\Big(\hat{p}\zeta(t) - m\frac{d\zeta}{dt}\hat{x}\Big)\Big)\ \exp\Big(\frac{i}{\hbar}\frac{1}{2} m\zeta\frac{d\zeta}{dt}\Big)\ \exp\Big(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t \frac{1}{2} m (\frac{d\zeta}{d\tau})^2 d\tau\Big) \tag{4}$$

此时，第一项是一个 Weyl 平移算子，第二项来自于 $\hat{p}\zeta(t)$ 和 $m\frac{d\zeta}{dt}\hat{x}$ 的对易关系，它所贡献的相位可以理解为位力定理给出的相位。

特别地，对于匀速和匀加速两种类型的参考系变换，幺正算符的形式分别为 $\hat{U}_a = \exp\big(-\frac{i}{\hbar}(\hat{p}vt - mv\hat{x})\big)$ 和 $\hat{U}_a = \exp\big(\frac{i}{\hbar}\big(\frac{1}{2}at^2\hat{p} - mat\hat{x}\big)\big)\ \exp\big(\frac{1}{12}\frac{i}{\hbar}ma^2t^3\big)$。文献 [3] 计算了引力弱场近似下自由粒子的传播子，与无引力情形相比，相差了一个 Weyl 平移算子以及一个额外的相位，总的效应恰好等于这里的 $\hat{U}_a$。这一定程度反映了等效原理的量子版本，即引力场局部等效于加速参考系所带来的惯性力。

2.2 哈密顿量和薛定谔方程的变换与量子达朗贝尔原理

在参考系变换 S→S' 下，除了态会发生变化，哈密顿量和薛定谔方程也会有变化，在接下来的研究中，我们将会看到量子达朗贝尔原理 [4] 的物理意义。

我们首先考虑不含时的参考系变换 $x \to x' = x+\zeta$, 其中 ζ 为常数。这个参考系变换的意义就是将空间原点平移了一段距离 ζ, 此时参考系变换算符 $\hat{U}_a = \exp\big(\frac{i}{\hbar}\zeta\hat{p}\big)$, 正是空间平移算子。这时哈密顿量的变换法则为 $\hat{H} \to \hat{H}' = \hat{U}_a\hat{H}\hat{U}_a^+$。我们不难计算 S' 参考系中的，$\hat{H}'\left|\Psi'\right\rangle = \hat{U}_a\hat{H}\hat{U}_a^+\hat{U}_a\left|\Psi\right\rangle = \hat{U}_a\hat{H}\left|\Psi\right\rangle = \hat{U}_a i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\Psi\right\rangle$, 由于此处 $\hat{U}_a$ 不含时，因此可以与 $\frac{\partial}{\partial t}$ 交换次序，从而得到 $\hat{H}'\left|\Psi'\right\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}_a\left|\Psi\right\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\Psi'\right\rangle$。也就是说，在这样的参考系变换下，薛定谔方程的形式保持不变。

当然，这一点在量子力学中其实是一个众所周知的结论。我们可以从对称性的角度重新理解这个结论，即薛定谔方程具有空间平移对称性。而在量子力学中这个对称性根据诺特定理，将会给出一个守恒量——动量。从场论的角度来看，这里的对称性是一种全局对称性。我们也可以考虑定域对称性 (规范对称性)，场论层面理解为 $\hat{U}_a$ 是时空坐标 x^μ 的函数，而量子力学层面应理解为 $\hat{U}_a$ 是时间 t 的函数，我们某种程度上可以说量子力学是 0+1 维场论。这时我们重新考察薛定谔方程：$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\Psi'\right\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\big(\hat{U}_a\left|\Psi\right\rangle\big) = i\hbar\frac{\partial\hat{U}_a}{\partial t}\left|\Psi\right\rangle + i\hbar\hat{U}_a\frac{\partial}{\partial t}\left|\Psi\right\rangle = i\hbar\frac{\partial\hat{U}_a}{\partial t}\left|\Psi\right\rangle + \hat{U}_a\hat{H}\left|\Psi\right\rangle = i\hbar\frac{\partial\hat{U}_a}{\partial t}\left|\Psi\right\rangle + \hat{H}'\left|\Psi'\right\rangle$。我们会发现薛定谔方程经过 $\hat{U}_a$ 变

换后不再成立，会有多出来的一项 $i\hbar\frac{\partial \hat{U}_a}{\partial t}|\Psi\rangle = i\hbar\frac{\partial \hat{U}_a}{\partial t}\hat{U}_a^+|\Psi'\rangle$。关于这一项，我们可以有两种思想来理解它。

1. 我们可以从规范场的角度来理解额外的这一项。也就是说我们要求系统具有 $\hat{U}_a$ 所刻画的定域对称性 (规范对称性)，其中这里的" 定域" 是指时域上的定域，那么时域偏导数 $\frac{\partial}{\partial t}$ 会破坏这种规范对称性，因此应当将偏导数改写为协变导数 $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + connection\ term$，并要求其与 $\hat{U}_a$ 对易，即 $\frac{D}{Dt}(\hat{U}_a|\Psi\rangle) = \hat{U}_a\frac{D}{Dt}|\Psi\rangle$。我们根据这一限制条件，不难得到联络项应当为 $-i\hbar\frac{\partial \hat{U}_a}{\partial t}\hat{U}_a^+$，正是我们定域幺正变换在薛定谔方程中带来的额外的一项。此时，薛定谔方程将变为:

$$i\hbar\frac{D}{Dt}|\Psi\rangle = \hat{H}\,|\,Psi\rangle \tag{5}$$

这个薛定谔方程在 $\hat{U}_a$ 变换下保持不变，即具有 $\hat{U}_a$ 定域不变性。从这一角度来看，我们可以将这一项理解为规范对称性所带来的联络项，这也是为什么很多文献将其称为绝热规范势的原因，这一项代表了主纤维丛上的几何结构，因此将会贡献几何相位 (Berry 相位)。此外，我们也可以看到，绝热规范势的引入方式与规范场论中电磁场、胶子场的方法是一致的。

2. 我们可以将绝热规范势移项，放到等号右边，并重新定义哈密顿量 $\hat{H}' = \hat{U}_a\hat{H}\hat{U}_a^+ + i\hbar\frac{\partial \hat{U}_a}{\partial t}\hat{U}_a^+$。经过这样的重新定义，我们发现经过 $\hat{U}_a$ 变换之后，薛定谔方程保持不变。

事实上，类似的操作方法在经典力学中也存在。在惯性系中，物体的运动方程是牛顿第二定律 $m\frac{d^2x}{dt^2} = F[x(t), \frac{dx}{dt}]$。但是在非惯性系中，物体的运动方程中必须要加上一个惯性力，破坏了物体的运动方程 (牛顿第二定律)。而对于这个惯性力，达朗贝尔原理告诉我们，可以将额外的惯性力吸收到 $F[x(t), \frac{dx}{dt}]$ 中去，从而保持运动方程不变。这里我们就是采用这种理解，所以我们将其称为量子达朗贝尔原理。

回顾以上讨论，我们所遇到的问题是当我们对系统做幺正变换时，系统可能会产生额外的效应，从而破坏运动方程——薛定谔方程。我们不希望破坏运动方程，因此我们可以有两种方法来解决这个问题。第一种方法是改造运动方程，引入规范势，使新的运动方程在幺正变换下保持不变。第二种方法是我们将新的效应吸收到哈密顿量中，从而保持运动方程不变，称为量子达朗贝尔原理。

应当指出的是，以上讨论原则上针对任意幺正变换，并不局限于参考系变换，可以是其它方式带来的幺正变换。由于参考系变换具有很强的特殊性，它所带来的绝热规范势具有经典对应，即惯性势。而考虑到等效原理，惯性势局部地可以等效为引力，因此量子达朗贝尔原理为我们架起了连接规范理论和引力理论的一个桥梁，这将为我们理解引力的量子本性提供一个有趣的思路。正由于参考系变换的特殊性，我们称

狭义量子达朗贝尔原理：将参考系变换所带来的绝热规范势吸收到哈密顿量中

相应地，“将一般幺正变换所带来的绝热规范势吸收到哈密顿量中” 称为广义量子达朗贝尔原理。

2.3 力学量的变换与 Ehrenfest 定理

3 惯性系中的谐振子

特别地，我们考虑惯性系变换。此时，其中代表两个参考系之间的相对速度，于是将会具有形式:

注意到当算符满足对易关系时，有公式

我们可以得到的简化形式:

可以看到，这时是一个 Weyl 变换的算符。但意义是什么，暂时不知道。另外，文献 [3] 在引力系统中，对于自由粒子得到了类似的结果，说明了引力与匀加速观测者的局部等价性，即量子等效原理。更特别地，考虑本文所关心的谐振子系统，可以把坐标算符和动量算符用产生湮灭算符来表达:，于是算符将会具有形式:

其中。这个算符正是谐振子系统的平移算符，这意味着，在 S’ 看来，S 系中的谐振子基态将会变成相干态。考虑到相干态的物理图像是一个运动的高斯波包，于是 S’ 所观测到的 S 系基态谐振子就是一个运动的高斯波包，这也是符合我们的经典图像和预期的。

4 谐振子的统计物理与 Unruh 效应

参考文献

1 F. Giacomini, et al. Nature Communications (2019)10:494

2 D. M. Greenberg. Am. J. Phys. 47.1, 35-38 (1979)

3 C. Anastopoulos, et al. arxiv: 1707.04526

4 杨冠卓. 绝热捷径中的若干量子热力学问题研究. 上海：上海大学，2019