Lewis-Resenfeld 不变量

吴梦之

2020 年 3 月 27 日

这篇 note 旨在梳理 Lewis-Resenfeld 不变量的主要思想。本文主要参考。

1 Lewis-Resenfeld 不变量的引入

我们的目标是求解一个含时 Schrodinger 方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle = \hat{H}(t)|\Psi\rangle \tag{1}$$

在这个系统中，我们假定存在一个厄米算符 $\hat{I}(t)$，满足

$$i\hbar\frac{\partial \hat{I}}{\partial t} + [\hat{I}, \hat{H}] = 0 \tag{2}$$

我们称之是一个不变量。不难验证，$\hat{I}$ 的一个性质是：若 $|\Psi\rangle$ 是 Schrodinger 方程的解，那么 $\hat{I}|\Psi\rangle$ 也是 Schrodinger 方程的解，即

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\hat{I}|\Psi\rangle) = \hat{H}(\hat{I}|\Psi\rangle) \tag{3}$$

由于我们假定，每个时刻 $\hat{I}(t)$ 都是一个厄米算符，因此可以认为 $\hat{I}(t)$ 每个时刻的瞬时本征态集合 $\{|\lambda(t), \kappa(t)\rangle\}$ 都构成 Hilbert 空间的一组完备正交基，其中 $\lambda(t)$ 是 $\hat{I}(t)$ 的瞬时本征值，$\kappa(t)$ 是简并自由度。方便起见，不妨只考虑无简并的情形，因此 κ 自由度就没有必要存在了，因此之后我用 $|\phi_n(t)\rangle$ 来表示 $\hat{I}(t)$ 的瞬时本征态。我们还应指出，$|\phi_n(t)\rangle$ 并不一定满足 Schrodinger 方程，它具有一个全局相位的自由度，只有特定相位的态才满足 Schrodinger 方程，记作

$$|\Psi_n(t)\rangle = e^{i\alpha_n(t)}|\phi_n(t)\rangle \tag{4}$$

在对态做展开时应当用 $|\Psi_n(t)\rangle$ 而不是 $|\phi_n(t)\rangle$，这就好比 Gauss 波包本身并不是含时 Schrodinger 方程的解，Gauss 波包乘上随时间演化的相位以后才是 Schrodinger 方程的解 (尽管这个相位并没有可观测效应)。

Lewis 和 Resenfeld 证明了两件很重要的事情，第一个是 $\hat{I}(t)$ 的本征值 $\lambda(t)$ 并不随时间变化，即

$$\frac{\partial \lambda_n}{\partial t} = 0 \tag{5}$$

第二个重要的事情是相位 $\alpha(t)$ 的演化方程是

$$\hbar\frac{d\alpha_n}{dt} = \langle\phi_n| i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}|\phi_n\rangle \tag{6}$$

事实上，因子 $e^{i\alpha_n(t)}$ 代表了时域上的一个规范场。最终的解为

$$|\Psi(t)\rangle = \Sigma c_n e^{i\alpha(t)} |\phi_n(t)\rangle \tag{7}$$

2 Lewis-Resenfeld 不变量

文献利用 Lewis-Resenfeld 不变量反解出了 $\hat{H}(t)$，思路如下：
首先利用 $\hat{I}(t)$ 的瞬时本征态的演化写出时间演化算符 $\hat{U}(t)$ 为

$$\hat{U}(t) = \sum e^{i\alpha_n(t)} |\phi_n(t)\rangle \langle\phi_n(0)| \tag{8}$$

它满足时间演化方程

$$i\hbar\frac{\partial\hat{U}}{\partial t} = \hat{H}\hat{U} \tag{9}$$

于是我们就可以得到 $\hat{H}$ 的表达式为

$$\begin{aligned} \hat{H}(t) &= i\hbar\frac{\partial\hat{U}}{\partial t}\hat{U}^\dagger \\ &= -\hbar\sum\frac{d\alpha_n}{dt}e^{i\alpha_n(t)}|\phi_n(t)\rangle\langle\phi_n(t)| + i\hbar\sum|\partial_t\phi_n(t)\rangle\langle\phi_n(t)| \end{aligned} \tag{10}$$

在 Lie 群理论中，$i\hbar\frac{\partial\hat{U}}{\partial t}\hat{U}^\dagger$ 称作 Maurer-Cartan 形式。所以从 Lie 群和微分几何的观点来看，体系的 Hamilton 量实际上就是 U(1) 群作用在量子态空间上后的 Maurer-Cartan 形式的群表示。

3 微分几何观点下的 Lewis-Resenfeld 不变量

从微分几何的观点下来看，量子力学中一个量子态的演化实际上可以视为量子态空间中的一条曲线。Lewis-Resenfeld 不变量真正重要的是它给出了一组完备正交基 $|\phi_n(t)\rangle$，微分几何的角度来看，这组完备正交基实际上是一组活动标架。而 Hamilton 量之所以能够表示为一个 Maurer-Cartan 形式，正是因为它所刻画的是活动标架的运动，这也正是 Maurer-Cartan 形式的几何意义——刻画活动标架和固定标架的变换。

物理的量子态空间并不是 Hilbert 空间，而是复射影空间 $\mathbb{CP}^n = \mathbb{C}^{n+1}/\mathbb{C}^*$。但是 Schrodinger 方程却定义在 $\mathbb{CP}^n \times U(1)$ 上，它需要一个全局相位才能够成立。$\mathbb{CP}^n \times U(1) \to \mathbb{CP}^n$ 会给出一个 Hopf 映射，进而有 Hopf 纤维化，因而 U(1) 是 $\mathbb{CP}^n \times U(1)$ 的纤维。

Hopf 纤维化就给出了这上面的 Berry 相位。