

Zápočtová úloha č. 3

Řešte následující okrajovou úlohu metodou konečných prvků:

$$\begin{aligned} -u'' &= f \text{ na intervalu } (a, b), \\ u(a) &= 0, u(b) = 0, \end{aligned}$$

kde f opět zadejte tak, aby byl výsledek zajímavý.

Metoda konečných prvků - kvadratická approximace: Dělení (a, b) s krokem h a uzly x_i a "mezi-uzly" $x_{i+1/2}$. Bázové funkce $\varphi_i, \varphi_{i+1/2}$ jsou po částech dány následujícími lagrangeovskými bázovými funkciemi (definovány na referenčním intervalu $[0,1]$):

$$\begin{aligned} f_1(\hat{x}) &= 2x^2 - 3x + 1, \\ f_2(\hat{x}) &= 4x - 4x^2, \\ f_3(\hat{x}) &= 2x^2 - x \end{aligned}$$

tak, aby pro všechna i, j platilo

$$\begin{aligned} \varphi_i(x_j) &= \delta_{i,j}, \quad \varphi_i(x_{j+1/2}) = 0, \\ \varphi_{i+1/2}(x_j) &= 0, \quad \varphi_{i+1/2}(x_{j+1/2}) = \delta_{i,j}. \end{aligned}$$

Aproximujeme $u \approx u_h$, kde

$$u_h(x) = \sum_j u_j \varphi_j(x) + \sum_j u_{j+1/2} \varphi_{j+1/2}(x).$$

Vezmeme-li za testovací funkci φ_i , dostaneme rovnici

$$u_{i-1} - 8u_{i-1/2} + 14u_i - 8u_{i+1/2} + u_{i+1} = h^2 f(x_i). \quad (1)$$

Testováním $\varphi_{i+1/2}$, dostaneme rovnici

$$-8u_i + 16u_{i+1/2} - 8u_{i+1} = 2h^2 f(x_{i+1/2}). \quad (2)$$

V obou případech jsme integrály na pravé straně approximovali Simpsonovou kvadraturou. Dohromady tvoří (1), (2) soustavu rovnic pro neznámé $u_i, u_{i+1/2}$.

- Vyřešte soustavu metodou sdružených gradientů (ideálně si ji naprogramujte, v nouzi použijte již hotovou implementaci). Eventuálně přímo Gaussovou eliminací (stačí počítat jen na těch pěti nenulových diagonálách).
- Podívejte se na chybu metody v uzlech, tj. $u(x_i) - u_i$, pro různá h .
- Zkuste získat velmi přesné řešení.