

## Zápočtová úloha č. 3

Řešte následující okrajovou úlohu metodou konečných prvků:

$$\begin{aligned} -u'' &= f \text{ na intervalu } (a, b), \\ u(a) &= 0, u(b) = 0, \end{aligned}$$

kde  $f$  opět zadejte tak, aby byl výsledek zajímavý.

*Metoda konečných prvků - kvadratická aproximace:* Dělení  $(a, b)$  s krokem  $h$  a uzly  $x_i$  a “mezi-uzly”  $x_{i+1/2}$ . Bázové funkce  $\varphi_i, \varphi_{i+1/2}$  jsou po částech dány následujícími lagrangeovskými bázovými funkcemi (definovány na referenčním intervalu  $[0,1]$ ):

$$\begin{aligned} f_1(\hat{x}) &= 2x^2 - 3x + 1, \\ f_2(\hat{x}) &= 4x - 4x^2, \\ f_3(\hat{x}) &= 2x^2 - x \end{aligned}$$

tak, aby pro všechna  $i, j$  platilo

$$\begin{aligned} \varphi_i(x_j) &= \delta_{i,j}, & \varphi_i(x_{j+1/2}) &= 0, \\ \varphi_{i+1/2}(x_j) &= 0, & \varphi_{i+1/2}(x_{j+1/2}) &= \delta_{i,j}. \end{aligned}$$

Aproximujeme  $u \approx u_h$ , kde

$$u_h(x) = \sum_j u_j \varphi_j(x) + \sum_j u_{j+1/2} \varphi_{j+1/2}(x).$$

Vezmeme-li za testovací funkci  $\varphi_i$ , dostaneme rovnici

$$u_{i-1} - 8u_{i-1/2} + 14u_i - 8u_{i+1/2} + u_{i+1} = h^2 f(x_i). \quad (1)$$

Testováním  $\varphi_{i+1/2}$ , dostaneme rovnici

$$-8u_i + 16u_{i+1/2} - 8u_{i+1} = 2h^2 f(x_{i+1/2}). \quad (2)$$

V obou případech jsme integrály na pravé straně aproximovali Simpsonovou kvadraturou. Dohromady tvoří (1), (2) soustavu rovnic pro neznámé  $u_i, u_{i+1/2}$ .

- Vyřešte soustavu metodou sdružených gradientů (ideálně si ji naprogramujte, v nouzi použijte již hotovou implementaci). Eventuálně přímo Gaussovou eliminací (stačí počítat jen na těch pěti nenulových diagonálách).
- Podívejte se na chybu metody v uzlech, tj.  $u(x_i) - u_i$ , pro různá  $h$ .
- Zkuste získat velmi přesné řešení.