

Zápočtová úloha č. 2

Řešte následující okrajovou úlohu metodou konečných diferencí:

$$\begin{aligned} u'' &= f \text{ na intervalu } (a, b), \\ u(a) &= A, u(b) = B, \end{aligned} \tag{1}$$

kde a, b, A, B a f si zadejte tak, aby byl výsledek zajímavý (např. $f(x) = \sin(x) - x \cos(2x)$, $a = 0, b = 5, A = 0, B = 1$ apod.)

Metoda konečných diferencí: Dělení (a, b) s krokem h a uzly x_i . Aproximují $u(x_i) \approx u_i$ a v rovnici beru

$$f(x_i) = u''(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}, \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, \tag{2}$$

což je soustava lineárních rovnic pro neznámé u_i .

- Naprogramujte Jacobiho a Gauss-Seidelovu iterační metodu pro vyřešení výsledné soustavy. Srovnejte se standardní funkcí toho programu, který používáte (MATLAB apod.). Kolik je potřeba iterací pro dostatečnou přesnost?
- Podívejte se na chybu metody v uzlech, tj. $u(x_i) - u_i$, pro různá h .
- Zkuste také pro nejjednodušší případ, kdy f je konstantní funkce. Čím je tento případ zajímavý?