Mathématiques 1

Chapitre 5 : Fonctions à deux variables II (Optimisation)

Mohamed Essaied Hamrita

IHEC, Université de Sousse

Novembre 2020

Table des matières

Définition

Un optimum ou extremum est soit un maximum soit un minimum, c'est-à-dire la valeur la plus haute ou la plus faible que prend la fonction sur son ensemble de définition ou tout sous-ensemble de son ensemble de définition.

Définition

Un optimum ou extremum est soit un maximum soit un minimum, c'est-à-dire la valeur la plus haute ou la plus faible que prend la fonction sur son ensemble de définition ou tout sous-ensemble de son ensemble de définition.

Définition 1

Soit f une fonction à deux variables, définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$.

- *On dit que f présente un maximum (resp. minimum) relatif ou local en (x_0, y_0) intérieur de $\mathcal{D}$ si : $\exists\ \alpha > 0$ tel que*

$$\left\{\begin{array}{l} |x - x_0| < \alpha \\ |y - y_0| < \alpha \end{array}\right. \Longrightarrow f(x,y) \leq f(x_0,y_0) \text{ (resp. } f(x,y) \geq f(x_0,y_0))$$

- *On dit que f présente un maximum (resp. minimum) relatif ou local en $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ si : $\forall\,(x,y) \in \mathcal{D}$,*

$$f(x,y) \leq f(x_0,y_0) \text{ (resp. } f(x,y) \geq f(x_0,y_0))$$

Extrema libres

Théorème 1 (Condition nécessaire)

Soit $\mathcal{D}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) n \mathcal{D}$ et $f : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}^2$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ en ce point. Si f présente un extrémum local alors $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Définition 2

Un point (x_0, y_0) vérifiant $f'_x(x0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ est appelé point stationnaire ou point critique de f.

Exercice 1

Déterminer les points critiques de la fonction f définie par :

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$$

Extrema libres

$f'_x = 2x - 2$ et $f'_y = 2y - 6$.
$f'_x = 0 \iff x = 1$ et $f'_y = 0 \iff y = 3$. D'où le point $(1, 3)$ est un point critique de f.

Exercice 2

Déterminer les points critiques de la fonction f dans chacun des cas suivants :
1) $f(x, y) = (x - 1)^2 + 2y^2$.
2) $f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$.
3) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

$f'_x = 2x - 2$ et $f'_y = 2y - 6$.
$f'_x = 0 \iff x = 1$ et $f'_y = 0 \iff y = 3$. D'où le point $(1, 3)$ est un point critique de f.

Exercice 2

Déterminer les points critiques de la fonction f dans chacun des cas suivants :
1) $f(x, y) = (x-1)^2 + 2y^2$.
2) $f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$.
3) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

1) $(1, 0)$.
2) $(0, 0)$ et $(-4, -2)$.
3) $(0, 0)$, $(-1, -1)$ et $(1, 1)$.

Théorème 2

Soit (x_0, y_0) *un point critique d'une fonction* $f(x, y)$*. Le déterminent suivant est appelé le Hessien en* (x_0, y_0)*, noté* $\mathcal{H}$ *:*

$$\mathcal{H}(x_0, y_0) = f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2$$

a) *si* $\mathcal{H} > 0$ *et* $f''_{xx} > 0$*, alors* $f(x_0, y_0)$ *est un minimum local*

b) *si* $\mathcal{H} > 0$ *et* $f''_{xx} < 0$*, alors* $f(x_0, y_0)$ *est un maximum local*

c) *si* $\mathcal{H} < 0$*, on dit que le point* (x_0, y_0) *est un point selle ou encore un point col.*

Remarques :

- Si $\mathcal{H} = 0$, on ne peut rien dire.
- $\mathcal{H} = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = f''_{xx} f''_{yy} - f''_{xy} f''_{yx} = f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2.$

Exercice 3

Déterminer les points critiques de f et étudier leurs natures dans chacun des cas suivants :

1) $f(x,y) = x^2 + y^3 - 2xy - y,$ *2)* $f(x,y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4$

1) $(1,1)$ est un minimum local et $(-1/3, -1/3)$ est un point selle.

2)

(x,y)	$\mathcal{H}$	f''_{xx}	Nature du point
$(1,0)$	$24 > 0$	$-6 < 0$	maximum local
$(-1,0)$	$-24 < 0$		point selle
$(1,1)$	$-48 < 0$		point selle
$(-1,1)$	$48 > 0$	$6 > 0$	minimum local
$(1,-1)$	$-48 < 0$		point selle
$(-1,-1)$	$48 > 0$	$6 > 0$	minimum local

Extrema liés

Dans cette section, on présentera une méthode, dite méthode de Lagrange, de recherche d'un extremum d'une fonction assujettie à une contrainte.

Exemple 1

Soit $U(x,y) = x^{\alpha}y^{\beta}$ *une fonction désignant les préférence d'un consommateur face aux deux biens* x *et* y*. Ce consommateur dispose d'un revenu* R *et on suppose que ce revenu est alloué totalement à l'achat des bien* x *et* y*. Les prix unitaires des biens sont respectivement* p_x *et* p_y*.*
Le consommateur cherche à maximiser sa satisfaction sous la contrainte budgétaire. Donc son programme s'écrit :

$$\begin{cases} \max U(x,y) = x^{\alpha}y^{\beta} \\ \text{s/c } xp_x + yp_y = R \end{cases}$$

Extrema liés

Définition 3

Soit $f(x,y)$ une fonction de deux variables définie sur $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2$ appelée fonction objectif (à maximiser ou à minimiser) et soit $g(x,y) = 0$ une contrainte. On appelle le lagrangien, la fonction suivante :

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

où λ est appelé multiplicateur de Lagrange et est inconnu.

Le lagrangien du programme du consommateur de l'exemple précédent est :

$$L(x,y,\lambda) = x^\alpha y^\beta + \lambda(xp_x + yp_y - R)$$

Description de la méthode de Lagrange

Soit $L(x,y,\lambda)$ le lagrangien formé.
1) Condition du premier ordre : On cherche les points critiques qui sont solution de $L'_x = L'_y = L'_\lambda = 0$.
2) Condition du second ordre : On définit le Hessien bordé, noté $\mathcal{H}_b$, par :

$$\mathcal{H}_b = \begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} & g'_x \\ L''_{yx} & L''_{yy} & g'_y \\ g'_x & g'_y & 0 \end{vmatrix}$$

- Si $\mathcal{H}_b < 0$, alors on a un minimum.
- Si $\mathcal{H}_b > 0$, alors on a un maximum.
- Si $\mathcal{H}_b = 0$, alors on a un point selle.

Extrema liés

Remarque

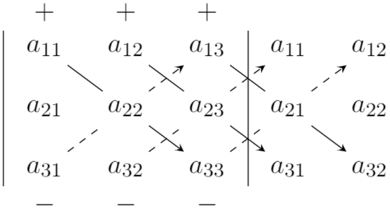
Pour le calcul de $\mathcal{H}_b$, on peut procéder comme suit :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_b &= g'_x \times \begin{vmatrix} L''_{yx} & L''_{yy} \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} - g'_y \times \begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} \\ &= g'_x(L''_{yx}g'_y - L''_{yy}g'_x) - g'_y(L''_{xx}g'_y - L''_{xy}g'_x)\end{aligned}$$

On peut aussi appliquer la règle de Sarrus pour le calcul du déterminant $\mathcal{H}_b$.

Règle de Sarrus

La règle de Sarrus consiste à recopier les deux premières colonnes à droite de la matrice, puis on additionne les produits de trois termes en les regroupant selon la direction de la diagonale descendante (à gauche), et on soustrait ensuite les produits de trois termes regroupés selon la direction de la diagonale montante (à droite).



$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Exemple 2

Déterminer les minima et les maxima de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ *sous la contrainte* $x^2 + y^2 = 1$.

Extrema liés

Exemple 2

Déterminer les minima et les maxima de $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ *sous la contrainte* $x^2 + y^2 = 1$.

La fonction de Lagrange : $L(x,y,\lambda) = x^2 + 2y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$.
Condition du premier ordre : $L'_x = L'_y = L'_\lambda = 0$.
$L'_x = 0 \Longrightarrow 2x + 2x\lambda = 0 \Longrightarrow x(1+\lambda) = 0 \ (1)$.
$L'_y = 0 \Longrightarrow 4y + 2y\lambda = 0 \Longrightarrow y(2+\lambda) = 0 \ (2)$.
$L'_\lambda = 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 1 \ (3)$.
D'après (1), on aura $x = 0$ ou $\lambda = -1$.

- si $x = 0$, alors, d'après (3), on a $y = \pm 1$.
- si $\lambda = -1$, alors, d'après (2), on a $y = 0$ et d'après (3), on a $x = \pm 1$.

Donc, on a 4 points critiques pour ce programme : $(0, \pm 1)$ et $(\pm 1, 0)$.

Extrema liés

Condition du second ordre :

$L''_{xx} = 2 + 2\lambda$, $L''_{yy} = 4 + 2\lambda$, $L''_{xy} = L''_{yx} = 0$, $g'_x = 2x$ et $g'_y = 2y$.

- Le point $(0, -1)$: Dans ce cas, $\lambda = -2$, d'où

  $$\mathcal{H}_b(0,-1) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \times (-4) = 8 > 0$$

  Le point $(0, -1)$ est un maximum local.

- Le point $(0, 1)$: Dans ce cas, $\lambda = -2$, d'où

  $$\mathcal{H}_b(0,1) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \times (-4) = 8 > 0$$

  Le point $(0, 1)$ est un maximum local.

Extrema liés

- Le point $(-1, 0)$: Dans ce cas, $\lambda = -1$, d'où
$$\mathcal{H}_b(-1,0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \times 8 = -16 < 0$$
Le point $(-1, 0)$ est un minimum local.
- Le point $(1, 0)$: Dans ce cas, $\lambda = -1$, d'où
$$\mathcal{H}_b(1,0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \times (-8) = -16 < 0$$
Le point $(1, 0)$ est un minimum local.

Exercice 4

Trouver les maximums et les minimums de la fonction soumise à la contrainte donnée :
$f(x,y) = x^2 + y^2\,; \qquad xy = 1$
$f(x,y) = 3x + y\,; \qquad x^2 + y^2 = 10.$

1) $f(x,y) = x^2 + y^2\,; \qquad xy = 1$
Le lagrangien s'écrit : $L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(xy-1)$.
Condition du premier ordre : $L'_x = L'_y = L'_\lambda = 0$.

$$\begin{cases} L'_x = 0 \Longrightarrow 2x = -\lambda y & (1) \\ L'_y = 0 \Longrightarrow 2y = -\lambda x & (2) \\ L'_\lambda = 0 \Longrightarrow xy = 1 & (3) \end{cases}$$

Depuis (3), on conclut que $(x,y) \neq (0,0)$. D'où, la relation (1) donne $\lambda = -\dfrac{2x}{y}$ et (2) donne $y^2 = x^2$. Depuis (3), on trouve que $x = y = \pm 1$.

Extrema liés

Donc, ce programme possède deux points critiques $(1,1)$ et $(-1,1)$.
Condition du second ordre : $L''_{xx} = 2$, $L''_{yy} = 2$, $L''_{xy} = \lambda$, $g'_x = y$ et $g'_y = x$.

- le point $(1,1)$, $\lambda = -2$:
$$\mathcal{H}_b(1,1) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 - 4 = -8 < 0$$
Le point $(1,1)$ est un minimum local.
- le point $(-1,-1)$, $\lambda = -2$:
$$\mathcal{H}_b(1,1) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4 - 4 = -8 < 0$$
Le point $(-1,-1)$ est un minimum local.

2) $f(x,y) = 3x + y\,;\qquad x^2 + y^2 = 10$

Le lagrangien s'écrit : $L(x,y,\lambda) = 3x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 10)$.

Condition du premier ordre : $L'_x = L'_y = L'_\lambda = 0$.

$$\begin{cases} L'_x = 0 \Longrightarrow 3 + 2\lambda x = 0 & (1) \\ L'_y = 0 \Longrightarrow 1 + 2\lambda y = 0 & (2) \\ L'_\lambda = 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 10 & (3) \end{cases}$$

Depuis (1) et (2), on a $\lambda = -\dfrac{3}{2x} = -\dfrac{1}{2y} \Longrightarrow x = 3y,\ (x,y) \neq (0,0)$. Par substitution dans la relation (3), on obtient $y^2 = 1 \Longrightarrow y = \pm 1$ et $x = \pm 3$.

$(3,1)$ et $(-3,-1)$ sont les points critiques du programme.

Condition du second ordre : $L''_{xx} = 2\lambda$, $L''_{yy} = 2\lambda$, $L''_{xy} = 0$, $g'_x = 2x$ et $g'_y = 2y$.

Extrema liés

- le point $(3,1)$, $\lambda = -1/2$:

  $$\mathcal{H}_b(3,1) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 + 36 = 40 > 0$$

  Le point $(3,1)$ est un maximum local.

- le point $(-3,-1)$, $\lambda = 1/2$:

  $$\mathcal{H}_b(-3,-1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \\ -6 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 - 36 = -40 < 0$$

  Le point $(-3,-1)$ est un minimum local.