Mathématiques 1

Chapitre 5 : Fonctions à deux variables I (Domaine - Limites - Continuité - Dérivabilité)

Mohamed Essaied Hamrita

IHEC, Université de Sousse

Novembre 2020

Table des matières

Définition 1

Une fonction $f(x,y)$, *définie sur une partie* $\mathcal{D}$ *de* $\mathbb{R}^2$ *et à valeurs réelles, fait correspondre à tout point* $\mathbf{x} \equiv (x,y)$ *de* $\mathcal{D}$ *un réel unique* $f(\mathbf{x}) = f(x,y)$.
Le domaine de définition de f *est l'ensemble* $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$.

Exemple 1

$f(x,y) = x^2 - xy + y^3, \quad g(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

$f(1,0) = 1^2 - 1 \times 0 + 0^3 = 1, \quad g(0.5, 0.5) = \sqrt{1 - 0.5^2 - 0.5^2} = \sqrt{0.5}$.
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^2$, tandis que la fonction g est définie telle que $x^2 + y^2 \leq 1$, donc le domaine de g est l'intérieur du cercle de centre $(0,0)$ et de rayon égale à 1.

Domaine

Exercice 1

Dans chaque cas, déterminer et représenter le domaine de définition des fonctions données

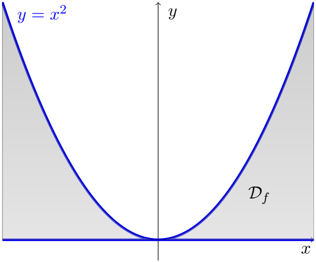
$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2 - y}}{\sqrt{y}}, \quad f(x,y) = \frac{\ln(y)}{\sqrt{x-y}}$$

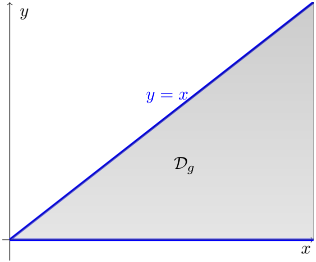
Domaine

Exercice 1

Dans chaque cas, déterminer et représenter le domaine de définition des fonctions données

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{x^2-y}}{\sqrt{y}},\quad f(x,y)=\frac{\ln(y)}{\sqrt{x-y}}$$





Applications partielles

Définition 2

Soient $f(x,y)$ *une fonction à deux variables définie sur* $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ *et* $X_0 = (x_0, y_0)$ *un point de* $\mathcal{D}$.

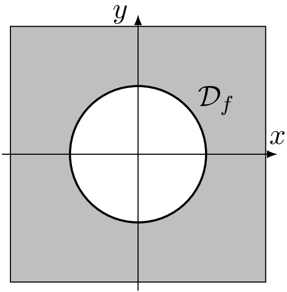
- *On appelle la* ***première application partielle*** *de* f *au point* X_0 *la fonction* $\varphi_{\mathbf{1}}(\mathbf{x}, \mathbf{y_0})$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
- *On appelle la* ***deuxième application partielle*** *de* f *au point* X_0 *la fonction* $\varphi_{\mathbf{2}}(\mathbf{x_0}, \mathbf{y})$ *pour tout* $y \in \mathbb{R}$.

Exemple 2

Soit $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$. *Déterminer le domaine de définition de* f *et les applications partielles en* $(1,2)$.

Applications partielles

La fonction f est définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x^2 + y^2 - 4 > 0$. Donc $\mathcal{D}_f$ est l'extérieur du disque fermé de centre $O(0, 0)$ et de rayon 2.



$\varphi_1(x, 2) = \ln(x^2 + 2^2 - 4) = \ln(x^2)$ et
$\varphi_2(1, y) = \ln(1^2 + y^2 - 4) = \ln(y^2 - 3)$.

Limite

Nous souhaitons étendre la notion de limites étudiées aux fonctions d'une variable. Lorsque nous étendons cette notion aux fonctions de deux variables, nous remarquons qu'il existe de nombreuses similitudes. Cependant, il y a aussi une différence majeure. Le domaine de fonctions de deux variables est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire un ensemble de paires. Un point dans $\mathbb{R}^2$ est de la forme (x, y). Donc, l'équivalent de $x \to x_0$ sera $(x, y) \to (x_0, y_0)$.
Alors que x ne pouvait approcher à x_0 que de deux directions, de gauche ou de droite, (x, y) peut approcher (x_0, y_0) depuis une infinité de directions.
Pour une fonction à une variable, on montre qu'elle admet une limite si elle admet la même limite à droite et à gauche et si ces deux limites sont différentes, on conclut qu'elle n'admet pas une limite en x_0. Le même raisonnement se fait pour les fonctions à deux variables. Pour montrer qu'une fonction n'a pas une limite en (x_0, y_0), il suffit de trouver deux directions qui donnent deux limites différentes.

Définition 3

Soit f *une fonction à deux variables définie sur* $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2$ *et* $\mathbf{X_0} = (x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$, $f(x,y)$ *a pour limite le réel* ℓ *quand* (x,y) *tend vers* (x_0, y_0) *lorsque* $\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0\ : \forall (x,y) \in \mathcal{D}_f$

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \Longrightarrow |f(x,y) - l| < \epsilon$$

Il existe plusieurs notations pour cette limite :

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$$

$$\lim_{\substack{x\longrightarrow x_0 \\ y\longrightarrow y_0}} f(x,y) = \ell$$

$$f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)]{} \ell$$

Limite

Proposition 1

Si la limite existe alors elle est unique

Exercice 2

1) Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \left(\frac{x^2+y^2-2}{x-1} \right)$$

2) Montrer que les limites suivantes n'existent pas

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \left(\frac{x^2+y^2+2xy}{x^2+y^2} \right) ; \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2} \right)$$

Limite

1) Pour déterminer la première limite, il suffit de remplacer (x, y) par $(0, 0)$, on trouve 2.

2) Pour montrer que ces limites n'existent pas, il suffit de trouver deux directions passantes par le point $(0, 0)$ qui donnent deux valeurs différentes.

Pour la première limite :

$f(x, x) = \frac{4x^2}{2x^2} = 2$ et $f(x, 0) = 1$ donc la limite n'existe pas.

Pour la deuxième limite :

$f(x, x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$ et $f(x, 2x) = \frac{2x^2}{5x^2} = \frac{2}{5}$ donc la limite n'existe pas.

1) Pour déterminer la première limite, il suffit de remplacer (x, y) par $(0, 0)$, on trouve 2.
2) Pour montrer que ces limites n'existent pas, il suffit de trouver deux directions passantes par le point $(0, 0)$ qui donnent deux valeurs différentes.
Pour la première limite :
$f(x, x) = \frac{4x^2}{2x^2} = 2$ et $f(x, 0) = 1$ donc la limite n'existe pas.
Pour la deuxième limite :
$f(x, x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$ et $f(x, 2x) = \frac{2x^2}{5x^2} = \frac{2}{5}$ donc la limite n'existe pas.

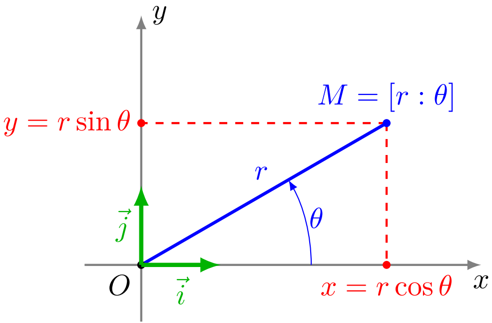
Remarque : Dans la plupart des cas, on peut utiliser les **directions linéaires** pour prouver l'inexistence d'une limite en $(0, 0)$. En d'autres termes, on cherche la limite $\lim\limits_{0} f(x, kx)$, $k \in \mathbb{R}$, si cette limite dépend de la valeur k, alors la limite n'existe pas !

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{kx^2}{(1+k^2)x^2} = \frac{k}{1+k^2}$$

Limite

Une autre stratégie à suivre est le changement en coordonnées polaires. Soit M un point du plan $\mathbb{R}^2$. Soit $O = (0,0)$ l'origine. Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct.

- On note $r = \|\overrightarrow{OM}\|$, la distance de M à l'origine.
- On note θ l'angle entre $\vec{i}$ et $O\vec{M}$.



Limite

On retrouve les coordonnées cartésiennes (x, y) à partir des coordonnées polaires $[r : \theta]$ par les formules

$$x = r\cos\theta \qquad\qquad y = r\sin\theta$$

Autrement dit, on a défini une application :

$$]0, +\infty[\times[0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2 \qquad (r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Proposition 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, sauf peut être en $(0, 0)$. Si $\lim\limits_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \ell \in \mathbb{R}$ existe indépendamment de θ, alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \ell$.

Si cette limite dépend de la valeur de θ, alors la limite n'existe pas.

Limite

Reprenons la dernière limite de l'exercice précédent.

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} &= \lim_{r\longrightarrow 0} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\\ &= \lim_{r\longrightarrow 0} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = \cos\theta\sin\theta\end{aligned}$$

La limite dépend de la valeur de θ, donc elle n'existe pas.

Soit $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$. Déterminons la limite de f en $(0,0)$

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^3\cos^3\theta}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} = \frac{r^3\cos^3\theta}{r^2} = r\cos^3\theta$$

Puisque $\left|\cos^3\theta\right| \leq 1$ alors $r\cos^3\theta \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$ alors $f(r\cos\theta, r\sin\theta) \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$.
Donc f tend vers 0 lorsque $(x,y)\to(0,0)$.

Limite

Théorème 1

Soit $\left|f(x,y)-\ell\right| \leq g(x,y)$ *pour tout* (x,y) *appartenant à l'intérieur du disque de centre* (x_0,y_0)*, sauf peut être en* (x_0,y_0)*. Si* $g(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,y_0)]{} 0$*. alors* $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,y_0)]{} \ell$

Exercice 3

Soit $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$*. Montrer que*

$$\lim_{\substack{x\longrightarrow x_0\\ y\longrightarrow y_0}} f(x,y)=0$$

Limite

Pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$, on a :

$$x^2 + y^2 > x^2 \Longrightarrow \frac{1}{x^2 + y^2} < \frac{1}{x^2} \Longrightarrow \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| < \left| \frac{x^2 y}{x^2} \right| = |y|$$

et puisque $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ y \longrightarrow 0}} y = 0$, alors f admet une limite nulle en $(0, 0)$.

Continuité

Définition 4

1. $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *est continue en* $(x_0, y_0) \in E$ *si* $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow x_0 \\ y \longrightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.
2. f *est continue sur* E *si elle est continue en tout point de* E.

Continuité

Définition 4

1. *$f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue en $(x_0, y_0) \in E$ si* $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow x_0 \\ y \longrightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.
2. *f est continue sur E si elle est continue en tout point de E.*

Definition 3.1 (Prolongement par continuité)

Soit $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Soit (x_0, y_o) un point adhérent à E n'appartenant pas à E. Si f a une limite ℓ lorsque $(x, y) \to (x_0, y_0)$, on peut étendre le domaine de définition de f à $E \cup \{x_0\}$ en posant $f(x_0, y_0) = \ell$. La fonction étendue est continue en (x_0, y_0). On dit que l'on a obtenu un prolongement de f par continuité au point (x_0, y_0).

Exemple 3

Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *définie par*

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Est-il possible de prolonger f *par continuité en* $(0,0)$ *?*

$\lim\limits_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \dfrac{r^2\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{r^2}} = |r|\cos\theta\sin\theta$, or $|\cos\theta\sin\theta| \leq 1$, d'où $|r\cos\theta\sin\theta| \leq |r| \xrightarrow[r\to 0]{} 0$ donc $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$. Ainsi la fonction $f(x,y)$ est prolongeable par continuité au point $(0,0)$.

Dérivées partielles premières

Définition 5

Soit $f(x,y)$ une fonction à deux variables. La dérivée partielle de f par rapport à x, notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ou f'_x, est définie par :

$$f'_x = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

La dérivée partielle de f par rapport à y, notée $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ou f'_y, est définie par :

$$f'_y = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

Exemple 4

Déterminer les dérivées partielles de la fonction $f(x,y) = 2xy^2 - 3y$

Dérivées partielles

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2y^2$$
$$f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 4xy - 3$$

Exercice 4

Soit $f(x, y) = \sqrt{x}(y + 1)$.
1) Déterminer les dérivées partielles de f.
2) Étudier l'existence des dérivées partielles de f *en* $(0, 0)$.

1) $f'_x = \dfrac{y+1}{2\sqrt{x}}$ et $f'_y = \sqrt{x}$.

2) $\forall x > 0$, $\dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$. Donc f n'admet pas une première dérivée partielle en $(0, 0)$. Par contre, $\dfrac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = 0$, donc f admet une deuxième dérivée partielle en $(0, 0)$.

Dérivées partielles d'ordre 2

Définition 6

Soit $f(x_1, x_2)$ *une fonction à deux variables. On définit les dérivées partielles de second ordre de* f *par* $f''_{x_i,x_j} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

Dérivées partielles directes :

$$f''_{x_i,x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

Dérivées partielles croisées :

$$f''_{x_i,x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i \neq j.$$

$$f''_{x_j,x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \quad i \neq j.$$

Théorème 2 (théorème de Schwarz)

Soit f admettant des dérivées partielles de second ordre continues sur $\mathcal{D}$, alors

$$f''_{x_i,x_j} = f''_{x_j,x_i},\ i \neq j$$

Exemple 5

Soit $f(x, y) = x^2 + 5xy + 2y^2$. Déterminer les dérivées de second ordre et vérifier le théorème de Schwarz.

$f'_x = 2x + 5y,\ f'_y = 5x + 4y.$
$f''_{xy} = 5,\ f''_{xx} = 2,\ f''_{yx} = 5$ et $f''_{yy} = 4.$
On vérifie bien que $f''_{xy} = f''_{yx} = 5.$

Exercice 5

Soit la fonction d'utilité d'un consommateur définie par $u(x, y) = Ax^\alpha y^\beta$ avec α et β sont deux réels compris entre 0 et 1.
1) Déterminer le $TMSS_{xy}$.
2) Vérifier que les utilités marginales sont décroissantes.

Différentielles

Définition 7

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- *On appelle **différentielle partielle** de f les produits $\dfrac{\partial f}{\partial x} \times dx$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} \times dy$.*
- *On appelle **différentielle** de f, notée df, la somme des différentielles partielles, i.e : $df = \dfrac{\partial f}{\partial x} dx + \dfrac{\partial f}{\partial y} dx$*

Exemple 6

La différentielle de la fonction $f(x, y) = x^2 - y^2 + 3xy$ est :

$$df = (2x + 3y)dx + (-2y + 3x)dy$$

.

Élasticité

Définition 8

On appelle *élasticité* *de f par rapport à la variable x_i en un point $x = (x_0, y_0)$ le réel :*

$$e_{f/x_i} = \frac{x_i}{f(x_0, y_0)} f'_{x_i}(x_0, y_0)$$

Exemple 7

Soit $f(x,y) = x^2 + 3xy$. Déterminer $e_{f/x}$ et $e_{f/y}$ en $(1,-1)$

$f'x = 2x + 3y, \implies f'_x(1,-1) = 2 \times 1 + 3 \times (-1) = -1$ et $f'_y = 3x \implies f'_y(1,-1) = 3 \times 1 = 3$, donc

$$e_{f/x}(1,-1) = \frac{1}{-2} \times (-1) = \frac{1}{2}, \quad e_{f/y}(1,-1) = \frac{-1}{-2} \times 3 = \frac{3}{2}$$

Fonction homogène

Définition 9

*On dit que $f(x,y)$ est **homogène** de degré k si*

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D}_f,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}_+^* \,;\, f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x,y)$$

Exemple 8

Soit $f(x,y) = x^\alpha y^\beta$. Montrer que f est homogène et déterminer son degré d'homogénéité.

Soit $\lambda > 0$.

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)^\alpha (\lambda y)^\beta = \lambda^\alpha x^\alpha \lambda^\beta y^\beta \\ &= \lambda^\alpha \lambda^\beta x^\alpha y^\beta = \lambda^{(\alpha+\beta)} x^\alpha y^\beta \\ &= \lambda^{(\alpha+\beta)} f(x,y) \end{aligned}$$

donc f est homogène de degré $k = \alpha + \beta$.

Théorème d'Euler

Théorème 3 (théorème d'Euler)

Pour toute fonction homogène de degré k, ayant des dérivées premières continues, on a :

$$xf'_x + yf'_y = kf(x, y)$$

Exemple 9

Vérifier l'identité d'Euler pour la fonction $f(x, y) = x^\alpha y^\beta$.

On a $f'_x = \alpha x^{\alpha-1} y^\beta$ et $f'_y = \beta x^\alpha y^{\beta-1}$ et f homogène de degré $k = \alpha + \beta$.

$$\begin{aligned} xf'_x + yf'_y &= x \times \left(\alpha x^{\alpha-1} y^\beta\right) + y \times \left(\beta x^\alpha y^{\beta-1}\right) \\ &= \alpha x^\alpha y^\beta + \beta x^\alpha y^\beta = (\alpha + \beta) x^\alpha y^\beta \\ &= kf(x, y) \end{aligned}$$