# Mathématiques 1

## Chapitre 2 : Fonctions usuelles

Mohamed Essaied Hamrita

IHEC, Université de Sousse

Octobre 2021

# Table des matières

# Polynôme

## Définition

*On appelle fonction polynôme toute fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe un entier naturel $n$ et des nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ avec $a_n \neq 0$ tels que :*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

*Le nombre entier naturel $n$ s'appelle le degré de $f$. Les nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ s'appellent les coefficients de $f$.*
*$a_0, a_1 x, a_2 x^2, \ldots, a_n x^n$ s'appellent les monômes de $f$.*

## Exemple

*La fonction $f$ définie par $f(x) = 2x - 7$ est une fonction polynôme de degré 1.*
*Les fonctions affines sont des fonctions polynômes de degré 1.*

# Polynôme

La fonction polynôme a les propriétés suivantes :

1. La somme, la différence et le produit de deux fonctions polynômes est une fonction polynôme.
2. Le degré du produit de deux polynômes est la somme des degrés de ces deux polynômes.
3. Deux fonctions polynômes non nulles sont égales si et seulement si elles ont le même degré et les coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux.
4. La fonction polynôme est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
5. $\lim\limits_{\infty} f(x) = \lim\limits_{\infty} a_n x^n$

# Rationnelle

## Définition

*On appelle fonction rationnelle toute fonction $f$ définie par le rapport de deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ telle que $Q(x) \neq 0$.*

## Exemple

*Les fonction définies par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ et $g(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x + 1}$ sont deux fonctions rationnelles.*

La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est définie par :

$$\lim_{\infty} = \lim_{\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

où $a_n x^n$ et $b_m x^m$ sont les monômes les plus haut degré des polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ respectivement.

# Racine

## Définition

*La fonction* *racine carrée* *est la fonction* $f$ *définie* $[0, +\infty[$ *sur par* $f(x) = \sqrt{x}$.
*La fonction* *racine* $n-$*ième* *est la fonction* $g$ *définie* $[0, +\infty[$ *sur par* $g(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$.

La fonction racine est une fonction continue te dérivable sur son domaine de définition et elle est croissante sur $[0, +\infty[$ et on a $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$.

si $a \geq 0$ et $b > 0$, $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$, et $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Pour tout réel $a$, $\sqrt{a^2} = |a|$.

# Logarithme

## Proposition

*Il existe une unique fonction, notée* ln $:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ *telle que :*

$$\ln'(x)=\frac{1}{x}\quad (\textit{pour tout } x>0)\qquad \textit{et}\qquad \ln(1)=0.$$

**Proposition**

*Il existe une unique fonction, notée* ln $:]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *telle que :*

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad (\textit{pour tout } x > 0) \qquad \textit{et} \qquad \ln(1) = 0.$$

*De plus cette fonction vérifie (pour tout* $a, b > 0$*) :*

1. $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b,$
2. $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln a,$

## Proposition

*Il existe une unique fonction, notée* ln $:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ *telle que :*

$$\ln'(x)=\frac{1}{x}\quad(\textit{pour tout } x>0)\qquad \textit{et}\qquad \ln(1)=0.$$

*De plus cette fonction vérifie (pour tout $a,b>0$) :*

1. $\ln(a\times b)=\ln a+\ln b$,
2. $\ln(\frac{1}{a})=-\ln a$,
3. $\ln(a^n)=n\ln a$, *(pour tout $n\in\mathbb{N}$)*

# Logarithme

## Proposition

*Il existe une unique fonction, notée* ln $:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ *telle que :*

$$\ln'(x)=\frac{1}{x}\quad (\textit{pour tout } x>0)\qquad \textit{et}\qquad \ln(1)=0.$$

*De plus cette fonction vérifie (pour tout $a,b>0$) :*

1. $\ln(a\times b)=\ln a+\ln b$,
2. $\ln(\frac{1}{a})=-\ln a$,
3. $\ln(a^n)=n\ln a$, *(pour tout $n\in\mathbb{N}$)*
4. ln *est une fonction continue, strictement croissante et définit une bijection de* $]0,+\infty[$ *sur* $\mathbb{R}$,

# Logarithme

## Proposition

*Il existe une unique fonction, notée* ln $:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ *telle que :*

$$\ln'(x)=\frac{1}{x}\quad (\textit{pour tout } x>0)\qquad \textit{et}\qquad \ln(1)=0.$$

*De plus cette fonction vérifie (pour tout $a,b>0$) :*

1. $\ln(a\times b)=\ln a+\ln b$,
2. $\ln(\frac{1}{a})=-\ln a$,
3. $\ln(a^n)=n\ln a$, *(pour tout $n\in\mathbb{N}$)*
4. ln *est une fonction continue, strictement croissante et définit une bijection de* $]0,+\infty[$ *sur* $\mathbb{R}$,
5. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$,

# Logarithme

## Proposition

*Il existe une unique fonction, notée* ln $:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ *telle que :*

$$\ln'(x)=\frac{1}{x}\quad (\textit{pour tout } x>0)\qquad \textit{et}\qquad \ln(1)=0.$$

*De plus cette fonction vérifie (pour tout $a,b>0$) :*

1. $\ln(a\times b)=\ln a+\ln b$,
2. $\ln(\frac{1}{a})=-\ln a$,
3. $\ln(a^n)=n\ln a$, *(pour tout $n\in\mathbb{N}$)*
4. ln *est une fonction continue, strictement croissante et définit une bijection de* $]0,+\infty[$ *sur* $\mathbb{R}$,
5. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$,
6. *la fonction* ln *est concave et* $\ln x\le x-1$ *(pour tout $x>0$).*

# Logarithme

$\ln x$ s'appelle le logarithme naturel ou aussi logarithme népérien. Il est caractérisé par $\ln(e) = 1$. On définit le logarithme en base $a$ par

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Telle que $\log_a(a) = 1$. Pour $a = 10$ on obtient le logarithme décimal $\log_{10}$ qui vérifie $\log_{10}(10) = 1$ (et donc $\log_{10}(10^n) = n$). Dans la pratique on utilise l'équivalence :

$$\boxed{x = 10^y \iff y = \log_{10}(x)}$$

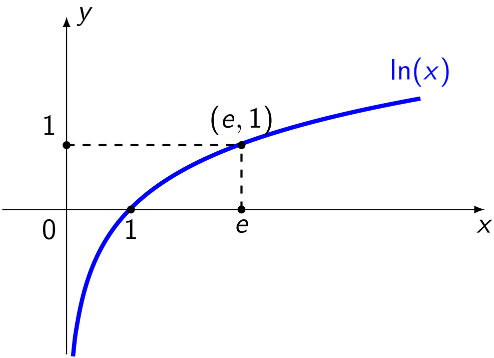
# Logarithme

La fonction ln admet les limites suivantes :

$$\lim_{+\infty} \ln x = +\infty \quad \lim_{0^+} \ln x = -\infty \quad \lim_{0^+} x \ln x = 0$$

$$\lim_{+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \lim_{+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad \lim_{0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

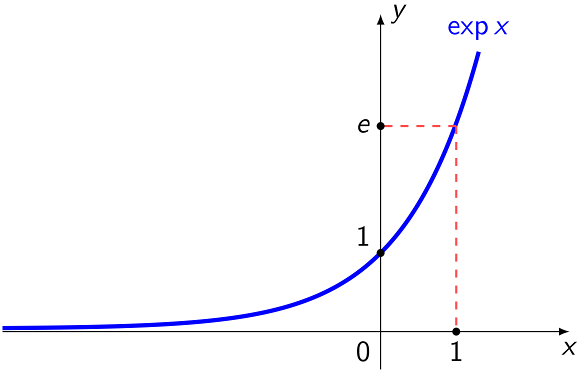
La courbe représentative de la fonction ln est comme suit :



### Définition

*La bijection réciproque de* $\ln : ]0,+\infty[ \to \mathbb{R}$ *s'appelle la fonction* *exponentielle, notée* $\exp : \mathbb{R} \to ]0,+\infty[$.

Sa courbe représentative est donnée comme suit :



# Exponentielle

Pour $x \in \mathbb{R}$ on note aussi $e^x$ pour $\exp x$.

**Proposition**

*La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :*

# Exponentielle

Pour $x \in \mathbb{R}$ on note aussi $e^x$ pour $\exp x$.

## Proposition

*La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\exp(\ln x) = x$ *pour tout* $x > 0$ *et* $\ln(\exp x) = x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$
2. $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$

# Exponentielle

Pour $x \in \mathbb{R}$ on note aussi $e^x$ pour $\exp x$.

## Proposition

*La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\exp(\ln x) = x$ *pour tout* $x > 0$ *et* $\ln(\exp x) = x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$
2. $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$
3. $\exp(nx) = (\exp x)^n$

# Exponentielle

Pour $x \in \mathbb{R}$ on note aussi $e^x$ pour $\exp x$.

## Proposition

*La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\exp(\ln x) = x$ *pour tout* $x > 0$ *et* $\ln(\exp x) = x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$
2. $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$
3. $\exp(nx) = (\exp x)^n$
4. $\exp : \mathbb{R} \to ]0, +\infty[$ *est une fonction continue, strictement croissante vérifiant* $\lim_{-\infty} \exp x = 0$ *et* $\lim_{+\infty} \exp = +\infty$.

# Exponentielle

Pour $x \in \mathbb{R}$ on note aussi $e^x$ pour $\exp x$.

## Proposition

*La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\exp(\ln x) = x$ *pour tout* $x > 0$ *et* $\ln(\exp x) = x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$
2. $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$
3. $\exp(nx) = (\exp x)^n$
4. $\exp : \mathbb{R} \to ]0, +\infty[$ *est une fonction continue, strictement croissante vérifiant* $\lim_{-\infty} \exp x = 0$ *et* $\lim_{+\infty} \exp = +\infty$.
5. *La fonction exponentielle est dérivable et* $\exp' x = \exp x$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *Elle est convexe et* $\exp x \geq 1 + x$.

# Exponentielle

Pour $x \in \mathbb{R}$ on note aussi $e^x$ pour $\exp x$.

## Proposition

*La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\exp(\ln x) = x$ *pour tout* $x > 0$ *et* $\ln(\exp x) = x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$
2. $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$
3. $\exp(nx) = (\exp x)^n$
4. $\exp : \mathbb{R} \to ]0, +\infty[$ *est une fonction continue, strictement croissante vérifiant* $\lim_{-\infty} \exp x = 0$ *et* $\lim_{+\infty} \exp = +\infty$.
5. *La fonction exponentielle est dérivable et* $\exp' x = \exp x$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *Elle est convexe et* $\exp x \geq 1 + x$.

$$\lim_{-\infty} x^n \exp x = 0 \qquad \lim_{-\infty} x^n \exp x = 0 \qquad \lim_{+\infty} x^n \exp -x = 0$$

$$\lim_{+\infty} \frac{\exp x}{x} = +\infty \qquad \lim_{+\infty} \frac{\exp x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1$$

## Exercice

1. *Montrer que* $\ln(1+e^x) = x + \ln(1+e^{-x})$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
2. *Soit la fonction* $f$ *définie sur* $]-3,3[$ *par :*

$$f(x) = \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)$$

*a) Montrer que* $f$ *est bien définie sur* $]-3,3[$.
*b) Étudier la parité de* $f$.

## Exercice

1. *Montrer que* $\ln(1+e^x) = x + \ln(1+e^{-x})$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
2. *Soit la fonction* $f$ *définie sur* $]-3,3[$ *par :*

$$f(x) = \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)$$

*a) Montrer que* $f$ *est bien définie sur* $]-3,3[$.
*b) Étudier la parité de* $f$.

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $1 + e^x = e^x(e^{-x}+1)$
$\Longrightarrow \ln(1+e^x) = \ln(e^x(e^{-x}+1)) = \ln(e^x) + \ln(e^{-x}+1) = x + \ln(e^{-x}+1)$.

## Exercice

1. *Montrer que* $\ln(1+e^x) = x + \ln(1+e^{-x})$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
2. *Soit la fonction* $f$ *définie sur* $]-3,3[$ *par :*

$$f(x) = \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)$$

*a) Montrer que* $f$ *est bien définie sur* $]-3,3[$.
*b) Étudier la parité de* $f$.

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $1+e^x = e^x(e^{-x}+1)$
$\Longrightarrow \ln(1+e^x) = \ln(e^x(e^{-x}+1)) = \ln(e^x) + \ln(e^{-x}+1) = x + \ln(e^{-x}+1)$.
2) a) $x \in D_f \iff \dfrac{3-x}{3+x} > 0$ et $3+x \neq 0 \iff x \in ]-3,3[$.

## Exercice

1. *Montrer que* $\ln(1+e^x) = x + \ln(1+e^{-x})$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
2. *Soit la fonction* $f$ *définie sur* $]-3,3[$ *par :*

$$f(x) = \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)$$

*a) Montrer que* $f$ *est bien définie sur* $]-3,3[$.
*b) Étudier la parité de* $f$.

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $1+e^x = e^x(e^{-x}+1)$
$\Longrightarrow \ln(1+e^x) = \ln(e^x(e^{-x}+1)) = \ln(e^x) + \ln(e^{-x}+1) = x + \ln(e^{-x}+1)$.

2) a) $x \in D_f \iff \dfrac{3-x}{3+x} > 0$ et $3+x \neq 0 \iff x \in ]-3,3[$.

b) $\forall x \in ]-3,3[$, $f(-x) = \ln\left(\dfrac{3-(-x)}{3+(-x)}\right) = \ln\left(\dfrac{3+x}{3-x}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{\frac{3-x}{3+x}}\right)$

$= -\ln\left(\dfrac{3-x}{3+x}\right) = -f(x)$, donc la fonction $f$ est impaire.

## arcsin

**Définition**

*La fonction* $\sin$ *est continue strictement croissante sur l'intervalle* $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, *donc elle définit une bijection de* $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ *sur* $[-1; 1]$. *La fonction réciproque est appelée* arcsin *et elle est continue strictement croissante sur* $[-1; 1]$.

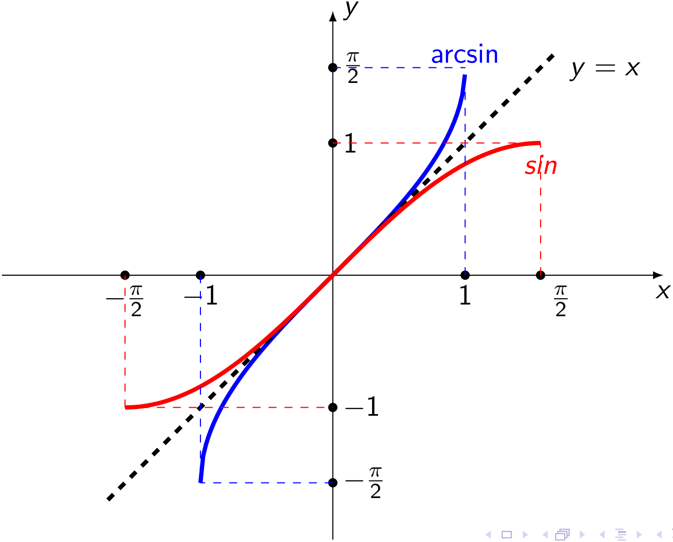
$$y = \arcsin(x), |x| \leq 1 \iff x = \sin(y), |y| \leq \frac{\pi}{2}$$

On a $\forall x \in [-1, 1]$, $\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2$ et $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.

$\forall x \in ]-1, 1[, \tan(\arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

# arcsin

Les courbes des fonctions sin et arcsin



# arcsin

**Exercice**

*Déterminer* arcsin *de* $0, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$

**Exercice**

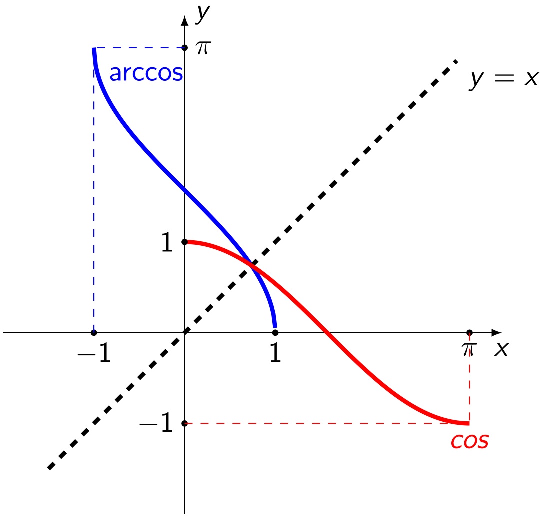
*Déterminer* arcsin *de* $0, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$

Pour trouver ces valeurs, on rappelle que $\sin(\arcsin(x)) = x,\ \forall x \in [-1, 1]$.
Soit $\theta = \arcsin(x)$.
$\arcsin(0) = \theta \Longrightarrow \sin(\theta) = 0 \Longrightarrow \theta = 0$. Donc $\arcsin(0) = 0$.
$\arcsin(1) = \theta \Longrightarrow \sin(\theta) = 1 \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$. Donc $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$.
$\arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \theta \Longrightarrow \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$. Donc $\arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$.
$\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \theta \Longrightarrow \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$. Donc $\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3}$.

### Définition

*La fonction* cos *est continue strictement décroissante sur l'intervalle* $[0;\pi]$*, donc elle définit une bijection de* $[0;\pi]$ *sur* $[-1;1]$*. La fonction réciproque est appelée* arccos *et elle est continue strictement décroissante sur* $[-1;1]$*.*
$y = \arccos(x), |x| \leq 1 \iff x = \cos(y), y \in [0,\pi]$

Les courbes des fonctions cos et arccos



# arctg

## Définition

*La fonction* $\tan$ *est continue strictement croissante sur l'intervalle* $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, *donc elle définit une bijection de* $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ *sur* $\mathbb{R}$. *La fonction réciproque est appelée* arctan *et elle est continue strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.

$y = \arctan(x), xin\mathbb{R} \iff x = \tan(y), |y| < \frac{\pi}{2}$

Les courbes des fonctions tan et arctan