Corrigé examen Math 1 - Session Janvier 2022

Exercice 1

1) La fonction $f(x) = e^{\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(x)}$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) La limite de $\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(x)$ lorsque $x \longrightarrow 0$ vaut $-\infty$ et par suite $\lim\limits_{0} f(x) = 0$.

On peut donc prolonger f par continuité en 0 par $f(0) = 0$.

3) On remarque que $\dfrac{f(x)}{x} = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(x)}$ et donc $\lim\limits_{0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

4) Pour $x > 0$, on étudie la fonction $g(x) = \ln(x) - (1+x)$. Sa dérivée vaut $g'(x) = \dfrac{1}{x} - 1$ qui s'annule en $x = 1$. La fonction g présente un maximum en $x = 1$, qui vaut -2. La fonction g est donc négative pour tout réel $x > 0$. Par suite, $\forall\, x > 0\,;\ \ln(x) \leq (1+x)$.

5) La limite de $\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(x)$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$ est égale à $+\infty$ et par suite $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$.

6) Pour tout $x > 0$, on a

$$f'(x) = \left[-\frac{1}{x^2}\ln(x) + \left(1+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}\right] f(x) = \frac{1}{x^2}\left[(1+x) - \ln(x)\right] f(x) > 0,\ \forall\, x > 0$$

Donc f est croissante.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ 0	↗	$+\infty$

7) La limite de $\dfrac{\ln(x)}{x}$ quand $x \longrightarrow +\infty$ vaut 0 par croissance comparée. Par suite, $e^{\frac{\ln(x)}{x}} - 1 = \dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{\ln(x)}{x}\varepsilon\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$, avec $\varepsilon(t) \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow 0$.

Donc $\dfrac{e^{\frac{\ln(x)}{x}} - 1}{\frac{\ln(x)}{x}} = 1 + \varepsilon\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$. Ainsi, on a $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{e^{\frac{\ln(x)}{x}} - 1}{\frac{\ln(x)}{x}} = 1$

Exercice 3

Il est à remarquer que $f(x,y) = \dfrac{2x^2+4xy+y^2}{x+y}$, en effet

$$f(x,y) \quad = \quad \frac{2x^3-3xy^2+2x^2y-y^3}{x^2-y^2} = \frac{(x-y)(2x^2+4xy+y^2)}{(x-y)(x+y)} = \frac{2x^2+4xy+y^2}{x+y}$$

1) $(x,y) \in \mathcal{D}_f \iff y \neq -x$, donc $\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : y \neq -x\}$. Soit tout le plan privé de la droite d'équation $y = -x$.

2) On pose $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ avec $r \in [0,1]$ et $\theta \in [0,\pi]$.

$\lim\limits_{(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{2r^2\cos^2\theta + 4r^2\cos\theta\sin\theta + r^2\sin\theta}{r\cos\theta + r\sin\theta} = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r(2\cos^2\theta + 4\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta)}{\cos\theta+\sin\theta} = 0 \quad \forall\theta \in [0,\pi]$. Donc, $f(x,y)$ admet une limite finie en $(0,0)$ et vaut 0. Ainsi, $f(x,y)$ est prolongeable par continuité en $(0,0)$.

3) La fonction f est homogène de degré $k = 1$, en effet, pour tout $\lambda > 0$, on a

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{2(\lambda x)^2 + 4(\lambda x)(\lambda y) + (\lambda y)^2}{(\lambda x)+(\lambda y)} = \frac{\lambda^2(2x^2+4xy+y^2)}{\lambda(x+y)} = \lambda^1 f(x,y)$$

4) Dérivées partielles premières:

$$f'_x = \frac{2x^2+4xy+3y^2}{(x+y)^2}$$
$$f'_y = \frac{2x^2+2xy+y^2}{(x+y)^2}$$

4) Théorème d'Euler: $xf'_x + yf'_y = kf(x,y)$.

$$\begin{aligned} xf'_x + yf'_y &= x\frac{2x^2+4xy+3y^2}{(x+y)^2} + y\frac{2x^2+2xy+y^2}{(x+y)^2} = \frac{2x^3+4x^2y+3xy^2}{(x+y)^2} + \frac{2x^2y+2xy^2+y^3}{(x+y)^2} \\ &= \frac{(x+y)(2x^2+4xy+y^2)}{(x+y)^2} = \frac{2x^2+4xy+y^2}{x+y} = f(x,y) \end{aligned}$$

5) Les points critiques:

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2+4xy+3y^2 = 0 & (1) \\ 2x^2+2xy+y^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

$(1)-(2) \Longrightarrow 2y(x+y) = 0 \Longrightarrow y = 0$, car $y \neq -x$. Donc $y = 0$ et $x = 0$. Or, le point $O(0,0) \notin \mathcal{D}_f$. Ainsi, la fonction f n'admet pas des points critiques.

Exercice 4

Le lagrangien s'écrit: $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(x + 3y - 8) = \ln(e^{-x} + 3e^{-y}) - \lambda(x + 2y - 8)$.

Condition du premier ordre:

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{-e^{-x}}{e^{-x} + 3e^{-y}} = \lambda & (1) \\ \dfrac{-3e^{-y}}{e^{-x} + 3e^{-y}} = 3\lambda & (2) \\ x + 3y - 8 = 0 & (3) \end{cases}$$

$\frac{(2)}{(1)} \Longrightarrow \dfrac{3e^{-y}}{e^{-x}} = 3 \Longrightarrow e^{x-y} = 1 \Longrightarrow x = y.$

$(3) \Longrightarrow 4x = 8$. Soit $x = 2 = y$ et $\lambda = \dfrac{1}{4}$.

Condition du second ordre:

$L''_{xx} = \dfrac{e^{-x}(e^{-x} + 3e^{-x}) - e^{-x}e^{-x}}{(e^{-x} + 3e^{-y})^2} \Longrightarrow L''_{xx}(2, 2) = \dfrac{3}{16}.$

$L''_{yy} = \dfrac{3e^{-y}(e^{-x} + 3e^{-x}) - 9e^{-y}e^{-y}}{(e^{-x} + 3e^{-y})^2} \Longrightarrow L''_{yy}(2, 2) = \dfrac{3}{16}.$

$L''_{xy} = L''_{yx} = \dfrac{-3e^{-x}e^{-x}}{(e^{-x} + 3e^{-y})^2} \Longrightarrow L''_{xy}(2, 2) = -\dfrac{3}{16}.$

Ainsi, $\mathcal{H}(2, 2) = \begin{vmatrix} \frac{3}{16} & -\frac{3}{16} & 1 \\ -\frac{3}{16} & \frac{3}{16} & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 < 0$. Donc le point $A(2, 2)$ est un **minimum**.