Exercices sur les fonctions à deux variables

IHEC Sousse 2021

Mohamed Essaied Hamrita

Exercice 1

Déterminer et représenter graphiquement le domaine de définition des fonctions suivantes puis étudier ses limites en $(0,0)$.

$$1)\ f(x,y)=\frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2},\quad 2)\ f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2},\quad 3)\ f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2},$$

$$4)\ f(x,y)=\frac{x^3}{y},\quad 5)\ f(x,y)=x^y,\quad 6)\ f(x,y)=\frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}},\quad 7)\ f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

Exercice 2

En utilisant le changement en cordonnées polaires, étudier les limites des fonctions suivantes en $(0,0)$

$$1)\ f(x,y)=\frac{x^3-xy}{x^2+y^2},\qquad 2)\ f(x,y)=\frac{y^2}{x^2+y^2},\qquad 3)\ f(x,y)=(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$$

Exercice 3

Les fonctions suivantes sont-elles prolongeable par continuité en $(0,0)$?

$$1)\ f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4-2x^2y+3y^2},\quad 2)\ f(x,y)=\frac{x\ln(1+x^3)}{y(x^2+y^2)},\qquad 3)\ f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2},$$

$$4)\ f(x,y)=\frac{\sin(x^2)-\sin(y^2)}{x^2+y^2}$$

Exercice 4

Soit f la fonction de production définie sur $\mathcal{D}_f = (\mathbb{R}_+^*)^2$ par $f(x,y) = x^{1/3}\sqrt{y}$.

1) Déterminer la différentielle de f.

2) Montrer que f est homogène et déterminer son degré d'homogénéité.

3) Vérifier le théorème d'Euler. En déduire que $e_{f/x} + e_{f/y} = \dfrac{5}{6}$.

Exercice 5

Soit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Montrer que f est homogène et déterminer son degré d'homogénéité.

2) Déterminer $f'_x(x,y)$ et $f'_y(x,y)$ lorsque $(x,y) \neq (0,0)$.

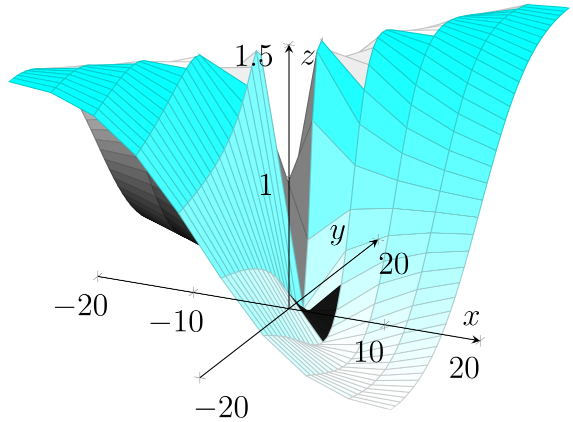
3) Calculer $f'_x(0,0)$ et $f'_y(0,0)$.

4) Montrer que $f''_{xy}(0,0) = -1$ et $f''_{yx}(0,0) = 1$. Ce résultat contredit-il le théorème de Schwarz?

Correction 1

1) $\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \neq 0\}$, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Le représentation graphique en surface de f est donnée comme suit:



Étude de la limite en $(\mathbf{0},\mathbf{0})$: On peut procéder de diverses manières.

Rappel: Pour montrer l'inexistence d'une limite d'une fonction à deux variables, il suffit de trouver deux directions passantes par $(0,0)$ et donnant deux limites différentes (on peut par exemple prendre les directions linéaires, i.e, chercher la limite de $f(x,kx)$, $k \in \mathbb{R}$ et si cette limite dépend du paramètre k alors la limite n'existe pas).

On peut aussi utiliser le changement en cordonnées polaires et chercher la limite de $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Si cette limite dépend de θ on conclut que la limite n'existe pas.

Méthode 1

$$f(x,kx) = \frac{x^2 + x(kx) + (kx)^2}{x^2 + (kx)^2} = \frac{x^2(1+k+k^2)}{x^2(1+k^2)} = \frac{1+k+k^2}{1+k^2} \text{ dépend de } k$$

Donc la limite de f en $(0,0)$ n'existe pas.

Méthode 2

$$\begin{aligned} f(r\cos\theta, r\sin\theta) &= \frac{(r\cos\theta)^2 + r\cos\theta \times r\sin\theta + (r\sin\theta)^2}{r^2(cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \frac{r^2(1+\cos\theta\sin\theta)}{r^2} \\ &= 1 + \cos\theta\sin\theta \qquad \text{dépend de } \theta \end{aligned}$$

Donc la limite de f en $(0,0)$ n'existe pas.

2) $\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \neq 0\}$, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Étude de la limite en $(\mathbf{0},\mathbf{0})$:

Méthode 1

$$f(x,kx) \quad = \frac{x^2 \times (kx)}{x^2 + (kx)^2} = \frac{kx^3}{x^2(1+k^2)} = \frac{kx}{1+k^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \text{ indépendamment de } k.$$

Donc la limite de f en $(0,0)$ peut exister.

$x^2 + y^2 > x^2 \Longrightarrow \dfrac{1}{x^2+y^2} < \dfrac{1}{x^2} \Longrightarrow \dfrac{x^2|y|}{x^2+y^2} < \dfrac{x^2|y|}{x^2} = |y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$, donc $f(x,y)$ admet une limite égale à 0 en $(0,0)$.

Méthode 2

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) \quad = \frac{(r\cos\theta)^2 \times r\sin\theta}{r^2(cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2} = r\cos^2\theta\sin\theta \xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

$\forall\, \theta \in [0, 2\pi]$, on a $|\cos^2\theta\sin\theta| \le 1 \Longrightarrow |r\cos^2\theta\sin\theta| < |r| \xrightarrow[r\to 0]{} 0$, donc f admet une limite nulle en $(0,0)$.

3) $\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2 \neq 0\}$, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

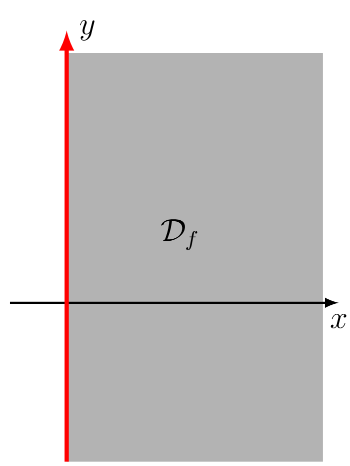
Étude de la limite en $(0,0)$:

$x^2 + y^2 > x^2 \Longrightarrow \dfrac{1}{x^2+y^2} < \dfrac{1}{x^2} \Longrightarrow 0 \le \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} \le \dfrac{x^2y^2}{x^2} = y^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$, donc $f(x,y)$ admet une limite égale à 0 en $(0,0)$.

4) $\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \neq 0\}$, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$ privé de la droite d'équation $y = 0$.

on a $f(x,x) = x^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$ et $f(x,x^3) = 1$, donc f n'admet pas une limite en $(0,0)$.

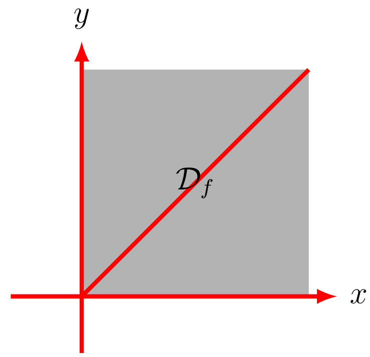
5) $f(x,y) = x^y = \exp(y\ln x)$, d'où $(x,y) \in \mathcal{D}_f \iff x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$.



$f(x,0) = e^0 = 1$ et $f(x, 1/\ln x) = e$, donc f n'admet pas une limite en $(0,0)$.

NB: $\dfrac{1}{\ln x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} = \dfrac{1}{-\infty} = 0.$

6) $\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 0 \text{ et } y > 0 \text{ et } x \neq y\}$



$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{x(x-y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{x(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \\
&= x(\sqrt{x}+\sqrt{y}) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0
\end{aligned}
$$

7) $\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \neq 0\}$, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$f(x,0) = 0$ et $f(x,x^2) = \dfrac{1}{2}$, donc la limite de f en $(0,0)$ n'existe pas.

Correction 2

1) Soit $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

$$
f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^3\cos^3\theta - r\cos\theta r\sin\theta}{r^2(cos^2\theta + \sin^2\theta)} = r\cos^3\theta - \cos\theta\sin\theta
$$

Donc la limite de f en $(0,0)$ n'existe pas parce que $\lim\limits_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = -\cos\theta\sin\theta$ qui dépend du paramètre θ.

2) Soit $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

$$
f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^2\cos^2\theta}{r^2(cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \cos^2\theta
$$

Donc la limite de f en $(0,0)$ n'existe pas.

3) Soit $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= f(r\cos\theta, r\sin\theta) = (r^2(cos^2\theta + \sin^2\theta))\ln(r^2(cos^2\theta + \sin^2\theta)) \\
&= r^2\ln(r^2) \xrightarrow[r\to 0^+]{} 0.
\end{aligned}
$$

Donc la limite de f en $(0,0)$ existe et est égale à 0.

Correction 3

1) $f(x,x) = \dfrac{x}{x^2-2x+3} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$ et $f(x,x^2) = \dfrac{1}{2}$, donc la limite de f en $(0,0)$ n'existe pas ce qui prouve que f n'est pas prolongeble par continuité en $(0,0)$.

2) $f(x,x) = \dfrac{x\ln(1+x^3)}{2x^3} \underset{0}{\sim} \dfrac{x^3}{2x^2} = \dfrac{1}{2}x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

et $f(x,x^2) = \dfrac{x\ln(1+x^3)}{x^2(x^2+x^4)} = \dfrac{\ln(1+x^3)}{x^3}\dfrac{1}{1+x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

Donc f n'est pas prolongeable en $(0,0)$ car la limite de f n'existe pas.

3) $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \dfrac{r^3\cos^3\theta + r^3\sin^3\theta}{r^2(cos^2\theta+\sin^2\theta)} = r(\cos^3\theta+\sin^3\theta) \xrightarrow[r\to 0]{} 0,\ \forall\,\theta\in[0,2\pi]$.

Donc f admet un prolongement par continuité en $(0,0)$ et son prolongement est donné par:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

4) $f(x,0) = \dfrac{\sin x^2}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ et $f(0,y) = -\dfrac{\sin y^2}{y^2} \xrightarrow[y\to 0]{} -1$, donc la limite de f en $(0,0)$ n'existe pas. Ainsi la fonction f n'est pas prolongeable en $(0,0)$.

Correction 4

1) La différentielle de f est $df = f'_x dx + f'_y dy$ avec

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{3}x^{-2/3}\sqrt{y}\ ; \quad \text{et} \quad f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}x^{1/3}y^{-1/2}$$

D'où $df = \left(\dfrac{1}{3}x^{-2/3}\sqrt{y}\right)dx + \left(\dfrac{1}{2}x^{1/3}y^{-1/2}\right)dy$.

2) Soit $\lambda>0$.

$$\begin{aligned} f(\lambda x,\lambda y) &= (\lambda x)^{1/3}\sqrt{\lambda y} = \lambda^{1/3}x^{1/3}\lambda^{1/2}\sqrt{y} \\ &= \lambda^{5/6}x^{1/3}\sqrt{y} = \lambda^{5/6}f(x,y). \end{aligned}$$

Don f est homogène de degré $k = \frac{5}{6}$.

3) Il s'agit de vérifier que: $xf'_x + yf'_y = \frac{5}{6}f(x,y)$.

$$\begin{aligned} xf'_x + yf'_y &= x\left(\frac{1}{3}x^{-2/3}\sqrt{y}\right) + y\left(\frac{1}{2}x^{1/3}y^{-1/2}\right) = \frac{1}{3}x^{1/3}\sqrt{y} + \frac{1}{2}x^{1/3}\sqrt{y} \\ &= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)x^{1/3}\sqrt{y} = \frac{5}{6}f(x,y). \end{aligned}$$

Par définition, $e_{f/x}(x,y) = x\frac{f'_x(x,y)}{f(x,y)}$ et $e_{f/y}(x,y) = y\frac{f'_y(x,y)}{f(x,y)}$.
Or, d'après le résultat précédent, on a: $xf'_x(x,y) + yf'_y(x,y) = \frac{5}{6}f(x,y)$
$\Longrightarrow x\frac{f'_x(x,y)}{f(x,y)} + y\frac{f'_y(x,y)}{f(x,y)} = \frac{5}{6}$. Donc $e_{f/x}(x,y) + e_{f/y}(x,y) = \frac{5}{6}$.

Correction 5

1) Homogénéité de f. Soit $\lambda > 0$.

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^4 x^3 y - \lambda^4 x y^3}{\lambda^2(x^2+y^2)} = \frac{\lambda^4(x^3y - xy^3)}{\lambda^2(x^2+y^2)} = \lambda^2 f(x,y)$$

Donc f est homogène de degré $k = 2$.

2) Soit $(x,y) \neq (0,0)$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ comme quotient de deux fonctions dérivables.

$$f'_x = \frac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - 2x(x^3y - xy^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f'_y = \frac{(x^3 - 3xy^2)(x^2+y^2) - 2y(x^3y - xy^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

3)

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(0/h^2) - 0}{h} = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(0/h^2) - 0}{h} = 0$$

4)

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'_x(0,0+h) - f'_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(-h^5 - 0)/h^4}{h} = -1$$

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'_y(0+h,0) - f'_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(h^5-0)/h^4}{h} = 1$$

Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$f''_{xy} = \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2+y^2)^3}$$

$f''_{xy}(x,0) = 1$ et $f''_{yx}(0,y) = -1$, donc f''_{xy} n'est pas continue en $(0,0)$, on en déduit que le théorème de Schwarz n'est pas applicable en $(0,0)$.

Les graphes de f''_{xy} et f''_{yx} sont identiques sauf à origine, où l'on observe une discontinuité.