Ex1

1°) a) $\lim \frac{\ln(1+4x)}{\sin(3x)} = ?$

$\ln(1+4x) \underset{0}{\sim} 4x$ et $\sin(3x) \underset{0}{\sim} 3x$

d'où $\frac{\ln(1+4x)}{\sin(3x)} \underset{0}{\sim} \frac{4x}{3x} = \frac{4}{3}$ d'où $\lim_{0} \frac{\ln(1+4x)}{\sin(3x)} = \frac{4}{3}$.

b) $\sqrt[3]{1+x} - 1 \underset{0}{=} (1+x)^{\frac{1}{3}} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{1}{3}x$

d'où $\lim_{0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} = \lim_{0} \frac{\frac{1}{3}x}{x} = \frac{1}{3}$.

c) soit $h = x - e \xrightarrow[x \to e]{} 0$, d'où $x = h + e$

$$\ln(\ln x) = \ln(\ln(h+e))$$
$$= \ln\left(\ln\left(e\left(1+\frac{h}{e}\right)\right)\right)$$
$$= \ln\left[\ln e + \ln\left(1+\frac{h}{e}\right)\right] = \ln\left(1+\ln\left(1+\frac{h}{e}\right)\right)$$

or $\ln\left(1+\frac{h}{e}\right) \underset{0}{\sim} \frac{h}{e} \Rightarrow$

$$\ln\left(1+\ln\left(1+\frac{h}{e}\right)\right) \underset{0}{\sim} \ln\left(1+\frac{h}{e}\right) \underset{0}{\sim} \frac{h}{e}$$

d'où $\lim_{e} \frac{\ln(\ln x)}{x-e} = \lim_{0} \frac{h/e}{h} = \frac{1}{e} = e^{-1}$.

d) Soit $h = x - \pi \underset{x \to \pi}{\longrightarrow} 0$, d'où $x = h + \pi$

$$1 + \cos x = 1 + \cos(h+\pi) = 1 - \cos(h) \underset{0}{\sim} \frac{h^2}{2}$$

d'où $\lim\limits_{\pi} \frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2} = \lim\limits_{0} \frac{h^2/2}{h^2} = \frac{1}{2}$.

e) on a $1 - \cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2} \Rightarrow \cos x \underset{0}{\sim} 1 - \frac{x^2}{2}$.

d'où $\ln(\cos x) \underset{0}{\sim} \ln\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$

et on a $\sqrt[3]{1+x^2} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{1}{3}x^2$

donc $\lim\limits_{0} \frac{\ln(\cos x)}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} = \lim\limits_{0} \frac{-x^2/2}{\frac{1}{3}x^2} = -\frac{3}{2}$.

2) a) $\lim\limits_{2} \frac{\sqrt{7+x} - 3}{x-2} = \lim\limits_{2} \frac{(\sqrt{7+x} - 3)'}{(x-2)'}$

$$= \lim_{2} \frac{1}{2\sqrt{7+x}} = \frac{1}{6}.$$

b) $\lim\limits_{2} \left(\frac{4}{x^2-4} - \frac{1}{x-2}\right) = \lim\limits_{2} \left(\frac{2-x}{x^2-4}\right) = \lim\limits_{2} \frac{(2-x)'}{(x^2-4)'}$

$$= \lim_{2} \frac{-1}{2x} = -1/4$$

c) $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^2}{2^x} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^2}{\exp(x\ln 2)} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{2x}{(\ln 2)\exp(x\ln 2)}$

$$= \lim_{+\infty} \frac{2}{(\ln 2)^2 \exp(x\ln 2)} = \frac{2}{+\infty} = 0.$$

d) $x^{\frac{1}{x-1}} = \exp\left(\dfrac{\ln x}{x-1}\right)$

or $\lim\limits_{1} \dfrac{\ln x}{x-1} = \lim\limits_{1} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 1$

d'où $\lim\limits_{1} x^{\frac{1}{x-1}} = e$.

e) $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{e^x}{\ln x} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{e^x}{1/x} = \lim\limits_{+\infty} x e^x = +\infty$.

Ex2 :

1°) T.A.F : Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors il $\exists$ un $c \in]a,b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

La f° $x \longrightarrow \sqrt{x}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$, donc elle est continue sur $[10000, 10001]$ et dérivable sur $]10000, 10001[$ $\Rightarrow$ il $\exists$ un $c \in]10000, 10001[$ /

$$\frac{1}{2\sqrt{c}} = \sqrt{10001} - \sqrt{10000}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{c}} = \sqrt{10001} - 100.$$

or $10000 < c < 10001 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{10001}} < \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2\sqrt{10000}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{202} < \frac{1}{2\sqrt{10001}} < \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{200}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{202} < \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{200}$$

d'où $$\frac{1}{202} < \sqrt{10001} - 100 < \frac{1}{200}$$

$$\Rightarrow \boxed{100 + \frac{1}{202} < \sqrt{10001} < \frac{1}{200} + 100}$$

ii) Soit $f(t) = \ln t$

la f° f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

et en particulier sur $[x, x+1]$, $\forall x > 0$

$\Rightarrow$ il $\exists$ un $c \in]x, x+1[$ /

$$f'(c) = \frac{1}{c} = \frac{\ln(x+1) - \ln x}{(x+1) - x} = \ln(x+1) - \ln x$$

or

$$x < c < x+1 \Rightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x} \quad \forall x > 0.$$

1. La fonction est définie sur $\mathbb{R}^*$ t elle est continue sur $\mathbb{R}^*$. Il faut déterminer un éventuel prolongement par continuité en $x=0$, c'est-à-dire savoir si f a une limite en 0.

$$|f(x)| = |\sin x||\sin 1/x| \leqslant |\sin x|.$$

   Donc f a une limite en 0 qui vaut 0. Donc en posant $f(0)=0$, nous obtenons une fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ qui est continue.

2. La fonction g est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. Etudions la situation en 0. Il faut remarquer que g est la taux d'accroissement en 0 de la fonction $k(x)=\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}$: en effet $g(x)=\frac{k(x)-k(0)}{x-0}$. Donc si k est dérivable en 0 alors la limite de g en 0 est égale à la valeur de k' en 0.
   Or la fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $k'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ donc $k'(0)=0$. Bilan : en posant $g(0)=0$ nous obtenons une fonction g définie et continue sur $\mathbb{R}$.

3. h est définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

$$h(x)=\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}=\frac{1+x-2}{(1-x)(1+x)}=\frac{-1+x}{(1-x)(1+x)}=\frac{-1}{(1+x)}.$$

   Donc h a pour limite $-\frac{1}{2}$ quand x tend vers 1. Et donc en posant $h(1)=-\frac{1}{2}$, nous définissons une fonction continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. En -1 la fonction h ne peut être prolongée continuement, car en -1, h n'admet de limite finie.

Exercice I (3pts) $\begin{cases} \varphi(x) = e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$

① φ est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$?

* φ est continue sur $\mathbb{R}^*$ car c'est une f° exponentielle
* Il reste la continuité en 0 :

si $\lim_{x \to 0^{\pm}} \varphi(x) \overset{?}{=} \varphi(0)$

or $\lim_{x \to 0^{\pm}} \varphi(x) = \lim_{x \to 0^{\pm}} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^{\pm}} e^{-\infty} = 0 = \varphi(0)$

d'où f° continue en 0 et ainsi sur $\mathbb{R}$.

* φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

$\varphi'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$ défini sur $\mathbb{R}^*$

* Il reste la dérivabilité en 0 :

$\varphi'(0)$ existe si $\lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0}$ existe (finie)

or $\lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{e^{-1/x^2} - 0}{x - 0} = \lim \frac{e^{-1/x^2}}{x}$

- posons $u = \frac{1}{x}$ quand $x \to 0^+$, on obtient alors

$\lim_{x \to 0^+} u e^{-u^2} = \lim_{u \to +\infty} \frac{u}{e^{u^2}} = 0$

car l'exponentielle l'emporte à l'$+\infty$.

- posons $v = -\frac{1}{x}$ quand $x \to 0^-$, on a alors

$\lim_{x \to 0^-} -v e^{-v^2} = \lim_{v \to +\infty} \frac{-v}{e^{v^2}} = 0$

d'où $\varphi'(0) = 0$, f° dérivable sur $\mathbb{R}$ en entier et en 0 on a 1 tg // à l'axe ox.

(3) $\varphi'(x) = \dfrac{2}{x^3} e^{-x^2} = \dfrac{2}{x^3} \varphi(x) \Longrightarrow$

$$\underline{2\varphi(x) = x^3 \varphi'(x)}$$

xercice I (2,5pts) $f(x)=\dfrac{\sqrt{\frac{1}{x}+x}-\sqrt{\frac{1}{x}-x}}{x+|x|}$

① D_f * dénominateur $\neq 0$

$x>0 \quad x+|x| = 2x \Rightarrow x\neq 0$
$x<0 \quad x+|x| = 0$ impossible $\Big\} \Rightarrow x>$

* $\frac{1}{x}+x \geq 0$ toujours vérifié avec $x>0$

$\frac{1}{x}-x \geq 0$ avec $x>0 \Rightarrow 1-x^2\geq 0 \quad x\in]0$

$D_f =]0,1]$ et $f(x)$ s'écrit alors $\dfrac{\sqrt{\frac{1}{x}+x}-\sqrt{\frac{1}{x}-}}{2x}$

② La fonction n'est pas définie pour $x=0$. Mais voyons si elle admet une limite quand $x\to 0$

$$f(x)=\frac{\sqrt{\frac{1+x^2}{x}}-\sqrt{\frac{1-x^2}{x}}}{2x} = \frac{1}{2x\sqrt{x}}\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1}\right.$$

$$=\frac{1}{2x\sqrt{x}}\;\frac{1+x^2-1+x^2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1}}$$

$$\xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{1}{2}\times\sqrt{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0^+$$

D'où en posant :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \forall x\in]0,1] \\ g(0)=0 \end{cases}$$

On a fait un prolongement par continuité.

CORRECTIONS

Exercice I

$$f(x) \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{pour } x \in]-\infty, 1[\\ \frac{1}{x} & \text{pour } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

① pour $x \in]-\infty, 1[$, $f(x) = \frac{3-x^2}{2}$. polynôme de d° 2, donc continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur le domaine donné.

pour $x \in [1, +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{x}$. définie et continue

Il reste la continuité en 1

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) \stackrel{?}{=} f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{or } \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{3-x^2}{2} = \frac{2}{2} \\ \text{et } f(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} \end{array}\right\rangle =$$

d'où continuité en $x = 1$, et aussi continuité sur $\mathbb{R}$.

② Théorème des Accroissements finis

H : f réelle, définie, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$

C : il existe au moins $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$$

③ La fonction donnée f est définie, continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[0, 3]$ ou sur $[0, 1]$ et $[1, 3]$

f est dérivable sur chacun des domaines définis

* sur $[0, 1]$ $\Rightarrow \exists c_1 \in]0, 1[\rightarrow f'(c_1) = \frac{f(1) - f(0)}{1}$

d'où $-c_1 = \frac{1}{2} - 2 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2} \in]0, 1[$

* sur $[1, 3]$ $\Rightarrow \exists c_2 \in]1, 3[\rightarrow f'(c_2) = \frac{f(3) - f(1)}{3-1}$

$$f'(c_2) = -\frac{3}{2c_2^2} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} = -\frac{1}{2}$$

d'où $c_2^2 = 3 \Longrightarrow c_2 = +\sqrt{3} \in]1, 3[$.

II (3pts)

$f(x) = x^x = e^{x \operatorname{Log} x} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}^{*+}$

$1 \in D_f \Rightarrow f(1) = e^0 = 1 = \lim_{x \to 1^\pm} f(x)$ par continuité de la $f^{ée}$

$g(x) = f(x) - a + b(x-1) - c(x-1)^2$

$D_f = \mathbb{R}^{*+}$

$\longrightarrow 0$, donc

Exercice I : (7pts)

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1-x}{\text{Log}|x-1|} & x \neq 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

① f continue en 1 ? si $\lim\limits_{x \to 1^{\pm}} f(x) \overset{?}{=} f(1) = 0$

Or $\lim\limits_{x-1=h \to 0^{\pm}} f(1+h) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-h}{\text{Log}|h|} \to 0 \times \dfrac{1}{-\infty} \to 0 = f(1)$

d'où continuité en 1.

② Dérivabilité en 1 ? si $\lim\limits_{x \to 1^{\pm}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ existe (fini)

or $\lim\limits_{x \to 1^{\pm}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{h \to 0^{\pm}} \dfrac{-h}{h\,\text{Log}|h|} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-1}{\text{Log}|h|} = 0$

d'où $f'(1) = 0$, la fonction f est dérivabl en 1

et la courbe représentative admet, en ce pt, une tg // à Ox.

Ex8

1°) $x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \text{ et } x \neq -1 \end{cases}$

Ainsi $D_f =]0;1[\cup]1;+\infty[$.

2°) $\lim\limits_{0^+} f(x) = \lim\limits_{0^+} \frac{x \ln x}{x^2 - 1} = \frac{0}{-1} = 0$

$\lim\limits_{1} f(x) = \frac{0}{0}$ (FI)

Soit $h = x - 1 \xrightarrow[x \to 1]{} 0$; $f(x) = f(h+1)$

$f(h+1) = \frac{(h+1)\ln(1+h)}{(h+1)^2 - 1} = \frac{(h+1)\ln(1+h)}{(h+1-1)(h+1+1)}$

$= \frac{(h+1)\ln(1+h)}{h(h+2)} \underset{0}{\sim} \frac{(h+1)h}{h(h+2)} = \frac{h+1}{h+2}$

d'où $\lim\limits_{1} f(x) = \lim\limits_{0} \frac{h+1}{h+2} = \frac{1}{2}$.

Ainsi le prolongement de f par continuité en 0 et en 1 est :

$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D_f \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1/2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$