Ex4

$f(x) = x^2 e^x$

Soient $u(x) = x^2$ et $v(x) = e^x$

u et v sont n fois dérivables et ses dérivées nièmes sont continues sur $\mathbb{R}$, donc f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme produits de deux f° de classe C^∞.

$u'(x) = 2x$; $u''(x) = 2$

$u^{(n)}(x) = 0 \quad \forall\ n \geq 3.$

$v'(x) = e^x$ et $v^{(n)}(x) = e^x \ \forall n \geq 1$

En appliquant la formule de Leibniz, on aura

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$$

$$= C_n^0 u v^{(n)} + C_n^1 u' v^{(n-1)} + C_n^2 u'' v^{(n-2)}$$

$$= x^2 e^x + n \times 2x e^x + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 \times e^x$$

$$= \left[x^2 + 2nx + 2n(n-1)\right] e^x$$

$\forall n \in \mathbb{N}$