Exercices sur les fonctions à deux variables

Optimisation

Mohamed Essaied Hamrita

IHEC Sousse 2021

Exercice 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$f(x, y) = (x - 1)(y - 2)(x + y - 6)$$

1) Vérifier que les points $(2, 3)$ et $(4, 2)$ sont des points critiques de f.

2) Étudier la nature de ces points.

Exercice 2

Soit $f(x, y) = x\,(y^2 + (\ln x)^2)$.

1) Déterminer et représenter graphiquement le domaine de définition de f.

2) Déterminer les points critiques de f et la nature de ces points.

Exercice 3

Soit $\varphi(x) = x^2 + \ln x$.

1) Montrer que $\varphi(x) = 0$ admet une seule solution α et que $\alpha\ \in]0.5, 1[$.

2) On considère la fonction $f(x, y) = xe^y + y \ln x$.

Montrer que f admet un et un seul point critique que l'on exprimera en fonction de α. Quelle est la nature de ce point?

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, déterminer les points critiques de f soumise à la contrainte $g(x,y) = 0$ et le nature de ces points:

1) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4x - 4y$; $\qquad g(x,y) = x^2 + y^2 - 9$

2) $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5$; $\qquad g(x,y) = x^2 + y^2 - 16$

3) $f(x,y) = e^{-xy}$; $\qquad g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 1$

4) $f(x,y) = x \ln x + y \ln y$; $\qquad g(x,y) = x + y - 2$

Exercice 5

1) Vérifier que: $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a $x^3 + x - 2 = (x-1)(x^2 + x + 2)$.

2) Étudier les extrema de $f(x,y) = e^{xy}$ soumise à la contrainte $x^3 + y^3 + x + y = 4$.

Exercice 6

Soit $\alpha > 0$. On considère la fonction $f(x,y) = \ln(xy^\alpha)$.

Déterminer et étudier la nature des points critiques de f soumise à la contrainte $x + y = 1 + \alpha$.

Exercice 7

1) Soit $\varphi(x) = e^x + x - 1$. Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique α et vérifier que $\alpha = 0$.

2) Déterminer les points critiques de $f(x,y) = x + y$ soumise à la contrainte $e^x + e^y + x + y = 2$ dont on précisera leurs natures.

Correction 1

1) $f(x,y) = (x-1)(y-2)(x+y-6)$.

Afin de vérifier que les points $(2,3)$ et $(4,2)$ sont des points critiques de f, on doit vérifier que $f'_x(2,3) = f'_y(2,3) = 0$ et $f'_x(4,2) = f'_y(4,2) = 0$.

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et on a:

$f'_x = (y-2)(x+y-6) + (x-1)(y-2)$; $f'_y = (x-1)(x+y-6) + (y-2)(x-1)$. D'où $f'_x(2,3) = (3-2)(2+3-6) + (2-1)(3-2) = 1 \times (-1) + 1 \times 1 = -1 + 1 = 0$ et $f'_y(2,3) = (2-1)(2+3-6) + (3-2)(2-1) = 1 \times (-1) + 1 \times 1 = -1 + 1 = 0$. Donc le point $(2,3)$ est un point critique à f.

De même, on vérifie que $f'_x(4,2) = f'_y(4,2) = 0$.

2) Pour l'étude de la nature de ces points, on doit étudier le signe du Hessien en ces points. On rappelle que le Hessien est défini par:

$$H(a,b) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(a,b) & f''_{xy}(a,b) \\ f''_{xy}(a,b) & f''_{yy}(a,b) \end{vmatrix}$$

Or, $f''_{xx} = (y-2) + (y-2) = 2(y-2)$; $f''_{yy} = (x-1) + (x-1) = 2(x-1)$ et $f''_{xy} = f''_{yx} = (x+y-6) + (y-2) + (x-1)$. D'où

$$H(2,3) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(2,3) & f''_{xy}(2,3) \\ f''_{xy}(2,3) & f''_{yy}(2,3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

$H(2,3) > 0$ et $f''_{xx}(2,3) > 0$, donc le point $(2,3)$ est un minimum local à f.

$$H(4,2) = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -9 < 0. \text{ Donc le point } (4,2) \text{ est un point selle.}$$

Correction 2

1) $f(x,y) = x(y^2 + (\ln x)^2)$. $(x,y) \in \mathcal{D}_f \iff x > 0$, donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

2) $f'_x = y^2 + (\ln x)^2 + x\left(\dfrac{2}{x}\ln x\right) = y^2 + (\ln x)^2 + 2\ln x$ et $f'_y = 2yx$.

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 + (\ln x)^2 + 2\ln x = 0 & (1) \\ 2yx = 0 & (2) \end{cases}$$

D'après (2), on tire que $y = 0$ car $x > 0$. Donc l'équation (1) devient $(\ln x)^2 + 2\ln x = 0 \Longrightarrow \ln x\,(\ln x + 2) = 0 \Longrightarrow x = 1$ ou $x = e^{-2}$. Donc f admet deux points critiques définis par $(1,0)$ et $(e^{-2}, 0)$.

$\forall\ (x,y) \in \mathcal{D}_f$, on a: $f''_{xx} = \dfrac{2}{x}\ln x + \dfrac{2}{x}$; $f''_{yy} = 2x$ et $f''_{xy} = 2y$.

$$H(1,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \text{ et } f''_{xx}(1,0) > 0 \text{ donc le point } (1,0) \text{ est un minimum local à } f.$$

$$\text{et } H(e^{-2},0) = \begin{vmatrix} -2e^2 & 0 \\ 0 & 2e^{-2} \end{vmatrix} = -4 < 0 \text{ donc le point } (e^{-2},0) \text{ est un point selle à } f.$$

Correction 3

1) φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall\ x > 0$, on a $\varphi'(x) = 2x + \dfrac{1}{x} > 0 \implies \varphi$ est continue strictement croissante sur $]0, +\infty[$, donc φ définit une bijection de $I =]0, +\infty[$ dans $J = \mathbb{R}$. Puisque $0 \in J$, alors il admet un seul antécédent par φ dans I, en d''autres termes, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. De plus, $\varphi(0.5) = -0.44$ et $\varphi(1) = 1$, d'où $\alpha \in]0.5, 1[$.

2) $f(x,y) = xe^y + y\ln x$.

$f'_x = e^y + \dfrac{y}{x} = 0 \Longrightarrow xe^y + y = 0 \qquad (1)$

$f'_y = xe^y + \ln x = 0 \Longrightarrow xe^y + \ln x = 0 \qquad (2)$

D'après (1) et (2), on déduit que $y = \ln x$, d'où (1) devient $x^2 + \ln x = 0 \Longrightarrow x = \alpha$ (daprès la question précédente). Ainsi, $y = \ln\alpha = -\alpha^2$. Donc, le point $(\alpha, -\alpha^2)$ est l'unique point critique de f.

$f''_{xx} = -\dfrac{y}{x^2}$; $f''_{yy} = xe^y$ et $f''_{xy} = e^y + \dfrac{1}{x}$.

$$\text{Donc } H(\alpha, -\alpha^2) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha + \dfrac{1}{\alpha} \\ \alpha + \dfrac{1}{\alpha} & \alpha^2 \end{vmatrix} = \alpha^2 - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 = -\left(2 + \frac{1}{\alpha^2}\right)^2 < 0.$$

Donc le point $(\alpha, -\alpha^2)$ est un point selle à f.

Correction 4

1) Le lagrangien s'écrit:

$$\begin{aligned} L(x, y, \lambda) &= f(x, y) - \lambda g(x, y) \\ &= x^2 + y^2 + 4x - 4y - \lambda(x^2 + y^2 - 9) \end{aligned}$$

Condition du premier ordre:

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 4 - 2\lambda x = 0 \\ 2y - 4 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2 - \lambda x = 0 & (1) \\ y - 2 - \lambda y = 0 & (2) \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 & (3) \end{cases}$$

En additionnant (1) et (2), on obtient $x + y = \lambda(x + y) \Longrightarrow (x + y)(1 - \lambda) = 0 \Longrightarrow y = -x$ ou $\lambda = 1$. Mais, $\lambda = 1$ est contradictoire avec l'équation (1), donc $y = -x$ et l'équation (3) donne $x^2 = \dfrac{9}{2} \Longrightarrow x = \pm\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ et $y = \mp\dfrac{3}{\sqrt{2}}$. Ainsi, $\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}, -\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$ et $\left(-\dfrac{3}{\sqrt{2}}, \dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$ sont les points critiques du programme.

Condition du second ordre:

$L''_{xx} = 2 - 2\lambda$; $L''_{yy} = 2 - 2\lambda$; $L''_{xy} = 0$; $g'_x = 2x$ et $g'_y = 2y$.

- Le point $\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}, -\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$: dans ce cas, $\lambda = \dfrac{3 + 2\sqrt{2}}{3}$.

$$H_b\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = \begin{vmatrix} -\dfrac{4\sqrt{2}}{3} & 0 & 3\sqrt{2} \\ 0 & -\dfrac{4\sqrt{2}}{3} & -3\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & -3\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{4\sqrt{2}}{3}(9 \times 2) + 3\sqrt{2}\left(\frac{4\sqrt{2}}{3} \times 3\sqrt{2}\right)$$

$H_b\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 48\sqrt{2} > 0$ Donc le point $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ est un maximum.

- Le point $\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$: dans ce cas, $\lambda = \frac{3-2\sqrt{2}}{3}$.

$$H_b\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right) = \begin{vmatrix} \frac{4\sqrt{2}}{3} & 0 & -3\sqrt{2} \\ 0 & \frac{4\sqrt{2}}{3} & 3\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{4\sqrt{2}}{3}(-9\times 2) - 3\sqrt{2}\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\times 3\sqrt{2}\right)$$

$H_b\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = -48\sqrt{2} < 0$ Donc le point $\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ est un minimum.

2) $L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5 - \lambda(x^2+y^2-16)$.

Condition du premier ordre:

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4x - 4 - 2\lambda x = 0 \\ 6y - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 16 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 - \lambda x = 0 & (1) \\ 2y(3-\lambda) = 0 & (2) \\ x^2 + y^2 - 16 = 0 & (3) \end{cases}$$

D'après (2), on a $y = 0$ ou $\lambda = 3$. Lorsque $y = 0$, $x = \pm 4$ et lorsque $\lambda = 3$, $x = -2$ et $y = \pm 2\sqrt{3}$.

Donc, le programme admet quatre points critiques: $(\pm 4, 0)$ et $(-2, \pm 2\sqrt{3})$.

Condition du second ordre:

$L''_{xx} = 4 - 2\lambda$; $L''_{yy} = 6 - 2\lambda$; $L''_{xy} = 0$; $g'_x = 2x$ et $g'_y = 2y$.

- Le point $(-4, 0)$: dans ce cas, $\lambda = \frac{5}{2}$.

$$H_b(-4,0) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8\times 8 = -64 < 0$$

Donc le point $(-4, 0)$ est un minimum.

- Le point $(4,0)$: dans ce cas, $\lambda = \dfrac{3}{2}$.

$$H_b(4,0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 8 \times (-24) = -192 < 0$$

Donc le point $(4,0)$ est un minimum.

- Le point $(-2,-2\sqrt{3})$: dans ce cas, $\lambda = 3$.

$$H_b(-2,-2\sqrt{3}) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -4\sqrt{3} \\ -4 & -4\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = -2 \times (-16 \times 3) - 4 \times 0 = 96 > 0$$

Donc le point $(-2,-2\sqrt{3})$ est un maximum.

- Le point $(-2,2\sqrt{3})$: dans ce cas, $\lambda = 3$.

$$H_b(-2,2\sqrt{3}) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 4\sqrt{3} \\ -4 & 4\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = -2 \times (-16 \times 3) - 4 \times 0 = 96 > 0$$

Donc le point $(-2,2\sqrt{3})$ est un maximum.

3) $L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = e^{-xy} - \lambda(x^2+4y^2-1)$.

Condition du premier ordre:

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -ye^{-xy} - 2\lambda x = 0 \\ -xe^{-xy} - 8\lambda y = 0 \\ x^2+4y^2-1 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -e^{-xy} = \dfrac{2\lambda x}{y} & (1) \\ 2\lambda x^2 = 8\lambda y^2 & (2) \\ x^2+4y^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

D'après (3), on a $x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $y = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. Donc, on a quatre points critiques: $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$, $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$, $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$ et $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

Condition du second ordre:

$L''_{xx} = y^2e^{-xy} - 2\lambda$; $L''_{yy} = x^2e^{-xy} - 8\lambda$; $L''_{xy} = xye^{-xy}$; $g'_x = 2x$ et $g'_y = 8y$.

- Le point $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$: dans ce cas, $\lambda = -\frac{1}{4}e^{-1/4}$. En effet:

  $-e^{-xy} = 2\lambda\frac{x}{y} \Longrightarrow -\exp\left(-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right) = 2\lambda\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{4}{\sqrt{2}}\right)$
  $\Longrightarrow -\exp\left(-\frac{1}{4}\right) = 4\lambda \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{4}e^{-1/4}$.

$$\begin{aligned} H_b\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right) &= \begin{vmatrix} \frac{5}{8}e^{-1/4} & \frac{1}{4}e^{-1/4} & -\sqrt{2} \\ \frac{1}{4}e^{-1/4} & \frac{5}{2}e^{-1/4} & -2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\sqrt{2}\begin{vmatrix} \frac{1}{4}e^{-1/4} & \frac{5}{2}e^{-1/4} \\ -\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \end{vmatrix} + 2\sqrt{2}\begin{vmatrix} \frac{5}{8}e^{-1/4} & \frac{1}{4}e^{-1/4} \\ -\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \end{vmatrix} \\ &= -4e^{-1/4} - 4e^{-1/4} = -8e^{-1/4} < 0 \end{aligned}$$

  Donc le point $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ est un minimum.

- Le point $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$: dans ce cas, $\lambda = -\frac{1}{4}e^{-1/4}$.

$$H_b\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \begin{vmatrix} \frac{5}{8}e^{-1/4} & \frac{1}{4}e^{-1/4} & \sqrt{2} \\ \frac{1}{4}e^{-1/4} & \frac{5}{2}e^{-1/4} & 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = 4e^{-1/4} + 4e^{-1/4} = 8e^{-1/4} > 0$$

  Donc le point $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ est un maximum.

- Le point $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$: dans ce cas, $\lambda = \frac{1}{4}e^{1/4}$.

$$H_b\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \begin{vmatrix} -\frac{3}{8}e^{1/4} & -\frac{1}{4}e^{1/4} & -\sqrt{2} \\ -\frac{1}{4}e^{-1/4} & -\frac{3}{2}e^{-1/4} & 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = -2\times(-16\times3) - 4\times0 = 96 > 0$$

  Donc le point $(-2, 2\sqrt{3})$ est un maximum.

Correction 6

Le lagrangien est donné par: $L(x,y,\lambda) = \ln(xy^\alpha) - \lambda(x+y-1-\alpha)$.

Condition du premier ordre:

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{y^\alpha}{xy^\alpha} - \lambda = 0 \\ \dfrac{\alpha x y^{\alpha-1}}{xy^\alpha} - \lambda = 0 \\ x+y-1-\alpha = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{1}{\lambda} & (1) \\ \dfrac{y}{\alpha} = \dfrac{1}{\lambda} & (2) \\ x+y-1-\alpha = 0 & (3) \end{cases}$$

D'après (1) et (2), on a $\dfrac{y}{\alpha} = x \Longrightarrow y = \alpha x$, d'où (3) devient $x + \alpha x = 1 + \alpha \Longrightarrow x = 1$. Donc $\lambda = 1$ et $y = \alpha$. Ainsi $(1,\alpha)$ et l'unique point critique du programme.

Condition du second ordre:

$L''_{xx} = -\dfrac{1}{x^2}$; $L''_{yy} = -\dfrac{\alpha}{y^2}$; $L''_{xy} = 0$; $g'_x = 1 = g'_y$.

$$H_b(1,\alpha) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{1}{\alpha} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 + \frac{1}{\alpha} > 0$$

Donc le point $(1,\alpha)$ est un maximum.