# Mathématiques 1

## Chapitre 3 : Dérivation

Mohamed Essaied Hamrita

IHEC, Université de Sousse

Octobre 2021

# Table des matières

# Définitions

## Définition 1

*Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$. On dit que $f$ est* ***dérivable en $x_0$*** *si $\lim\limits_{x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$* ***existe*** *et est* ***finie****.*

*Dans ce cas, on note : $f'(x_0) = \lim\limits_{x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ la* ***dérivée*** *de $f$ en $x_0$.*

## Exemple 1

*En utilisant la définition, déterminer la dérivée de $f(x) = x^2$.*

$$f'(x_0) = \lim_{x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = 2x_0.$$

D'où $f'(x) = 2x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

## Définition 2

*On dit que $f$ est dérivable* ***à gauche*** *(resp.* ***à droite****) en $x_0$ si*

$$\lim_{x_0^-(x_0^+)} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$ *existe et est finie.*

*Dans ce cas, cette limite est appelée dérivée à gauche (resp. à droite) de $f$ en $x_0$ et est notée $f'_g(x_0)$ (resp. $f'_d(x_0)$).*

## Théorème 1

*Soit $f$ une fonction définie sur un voisinage $V(x_0)$. $f$ est dérivable en $x_0$ ssi $f$ est dérivable à droite et à gauche en $x_0$ et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.*

## Exercice 1

*Étudier la dérivabilité de la fonction $f$ au point $x_0 = 0$ dans les deux cas suivants : a) $f(x) = \sqrt{1+2x+x^2}$;    b) $f(x) = |x|$.*

# Définitions

## Théorème 2

*Si $f$ est dérivable en $x_0$, alors $f$ est continue en $x_0$.*

## Exercice 2

*Démontrer le théorème précédent.*

# Fonctions de références

Les fonctions de références suivantes sont dérivables sur leurs domaines respectifs dont les expressions de leurs dérivées sont données comme suit :

| $f(x)$ | $D_f$ | $f'(x)$ | $f(x)$ | $D_f$ | $f'(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a\ (a \in \mathbb{R})$ | $\mathbb{R}$ | 0 | $x^\alpha\ (\alpha \in \mathbb{Q})$ | $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ |
| $\exp x$ | $\mathbb{R}$ | $\exp x$ | $\ln x$ | $\mathbb{R}_+^*$ | $\frac{1}{x}$ |
| $\sin x$ | $\mathbb{R}$ | $\cos x$ | $\tan x$ | $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}[2\pi]\right\}$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ |
| $\cos x$ | $\mathbb{R}$ | $-\sin x$ | | | |

# Calcul de dérivées

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues et dérivables sur un intervalle $I$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors :

1. $\lambda f$ est dérivable et $(\lambda f)' = \lambda f'$
2. $f + g$ est dérivable et $(f+g)' = f' + g'$
3. $f \times g$ est dérivable et $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$
4. $\frac{f}{g}$ est dérivable et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$ $(g \neq 0)$
5. $\frac{1}{g}$ est dérivable et $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$ $(g \neq 0)$
6. si $f > 0$, et si $\alpha \in \mathbb{Q}$, $f^\alpha$ est dérivable et $(f^\alpha)' = \alpha f' f^{\alpha-1}$

**Exemple 2**

*Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :*

$$f(x) = \frac{4\sqrt{x}}{x^2 - 2}; \qquad g(x) = 4x^{\frac{1}{6}}.$$

# Dérivée d'une fonction composée

## Proposition 1

*Soit* $f : I \mapsto \mathbb{R}$ *et* $g : J \mapsto \mathbb{R}$ *tel que* $f(I) \subseteq J$. *Si* $f$ *est dérivable sur* $I$ *et* $g$ *est dérivable sur* $f(I)$, *alors* $g \circ f$ *est dérivable sur I et* $(g \circ f)' = f'(g' \circ f)$

## Exercice 3

*1) Montrer que la dérivée de* $f(x) = \sqrt{u(x)}$ *est* $\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x}}$.

*2) Montrer que la dérivée de* $f(x) = \ln(u(x))$ *est* $\frac{u'(x)}{u(x)}$.

# Dérivé de la réciproque

**Théorème 3**

*Si $f$ est une fonction dérivable et strictement monotone sur $I$ et si $f'(x) \neq 0,\ \forall x \in I$, alors $f^{-1}(x)$ est dérivable sur $J = f(I)$ et on a*

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} \quad \forall x \in J$$

**Exemple 3**

*La fonction $f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}_+$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, donc sa réciproque $f^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0$, on a*

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{2f^{-1}(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

# Dérivée d'ordre supérieur

**Définition 3**

*Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur $I \subseteq \mathbb{R}$. Sa dérivée $f'$ est appelée dérivée* ***première****.*
*Si $f'$ est dérivable, on appelle la dérivée de $f'$ la dérivée* ***seconde*** *de $f$, notée $f''$ ou $f^{(2)}$.*
*La dérivée* ***troisième****, notée $f^{(3)}$, est la dérivée de la dérivée seconde.*
*La dérivée* ***n-ième*** *de $f$, notée $f^{(n)}$ est la dérivée de la dérivée $n-1)$ième de $f$ (si elle existe).*

**RQ :** $f^{(n)}$ existe ssi $f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$ existent et $f^{(n-1)}$ est dérivable.

**Théorème 4 (Formule de Leibniz)**

*Soient $f$ et $g$ deux fonctions $n$ fois dérivables sur $I \subseteq \mathbb{R}$. Alors $f \times g$ est $n$ fois dérivable sur $I$ et on a :*

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$$

## Exercice 4

*Calculer la dérivée $n$-ième des fonctions suivantes :*
$f(x) = x^2 \exp(x), \qquad g(x) = x \ln(x)$

## Exercice 5

*1) Déterminer par récurrence la dérivée d'ordre $n$ de la fonction :*
$x \to (x+a)^{-1}$*, pour tout* $x \neq -a$.
*2) Trouver deux réels $\alpha$ et $\beta$ tels que :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{-1, 2\}, \quad \frac{2x-5}{(x-2)(x+1)} = \frac{\alpha}{x-2} + \frac{\beta}{x+1}.$$

*En déduire la dérivée d'ordre $n$ de la fonction :* $x \to \dfrac{2x-5}{(x-2)(x+1)}$.

# Dérivée d'ordre supérieur

## Définition 4

*Soit $f$ une fonction définie sur $I \subseteq \mathbb{R}$. On dit que $f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ si $f$ est $n$ fois dérivable et que $f^{(n)}$ est continue.*
*Si $f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, alors $f$ est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

## Exemple 4

*La fonction $\exp(x)$ est $n$ fois dérivable et $f^{(n)}$ est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$*

# Sens de variation

**Proposition 2**

*Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur un intervalle ouvert $I$.*

- *Si $f' > 0$ sur $I$, alors $f$ est strictement croissante sur $I$.*
- *Si $f' < 0$ sur $I$, alors $f$ est strictement décroissante sur $I$.*
- *Si $f' \geq 0$ (resp. $f' \leq 0$) sur $I$, alors $f$ est croissante (resp. décroissante) sur $I$.*
- *Si $f' = 0$ sur $I$, alors $f$ est constante sur $I$.*

**Exercice 6**

*Étudier les variations de la fonction $f(x) = x\exp(-x)$ sur $\mathbb{R}$.*

# Théorème de Rolle

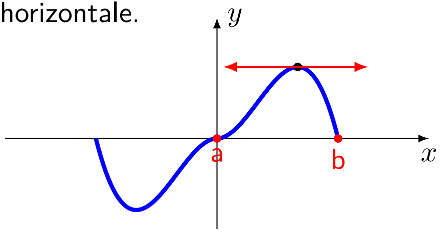
## Théorème 5

*Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *telle que*

- $f$ *est continue sur* $[a,b]$,
- $f$ *est dérivable sur* $]a,b[$,
- $f(a) = f(b)$.

*Alors il existe au moins* $c \in ]a,b[$ *tel que* $f'(c) = 0$.

**Interprétation géométrique :** il existe au moins un point du graphe de $f$ où la tangente est horizontale.

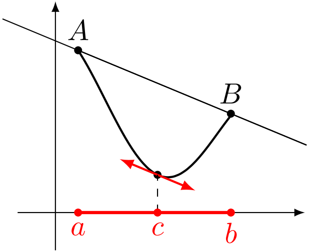


**Théorème 6 (T.A.F)**

*Si $f$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe un réel $c \in ]a,b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

**Interprétation géométrique :** il existe au moins un point du graphe de $f$ où la tangente est parallèle à la droite $(AB)$ où $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$.



# T.A.F

## Exercice 7

*1) Soit* $f(x) = \sqrt{x}$*. Appliquer le T.A.F sur l'intervalle* $[100, 101]$*. En déduire l'encadrement* $10 + \frac{1}{22} \leq \sqrt{101} \leq 10 + \frac{1}{20}$.
*2) En utilisant le T.A.F, montrer que*

$$\forall x > 0, \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$$

1) $f$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc elle est continue sur $[100, 101]$ et dérivable sur $]100, 101[$. D'où, d'après le T.A.F, il existe un réel $c \in ]100, 101[$ tel que $f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}} = \sqrt{101} - \sqrt{100}$.
$100 < c < 101 \Longrightarrow 20 < 2\sqrt{c} < 2\sqrt{101} < 22 \Longrightarrow \frac{1}{22} < \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{20}$
Donc $\frac{1}{22} < \sqrt{101} - \sqrt{100} < \frac{1}{20} \Longrightarrow 10 + \frac{1}{22} < \sqrt{101} < 10 + \frac{1}{20}$

**Théorème 7 (Inégalité des accroissements finis)**

*Si $f$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et s'il existe deux réels $m$ et $M$ tels que : $\forall x \in ]a,b[,\ \ m \leq f'(x) \leq M$, alors*

$$m \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq M$$

**Exemple 5**

*En appliquant les I.A.F, montrer que :*

$$\forall\, x > 0,\ \ \frac{1}{2\sqrt{x+1}} < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

**Théorème 8 (Règle de l'Hopital)**

*Soient $f$ et $g$ deux fonctions dérivables sur un intervalle $]a,b[$ contenant un réel $c$ et $g'(x) \neq 0 \ \forall \ x \in ]a,b[\setminus\{c\}$.*

*Si $\lim\limits_{c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$ et $\lim\limits_{c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, alors $\lim\limits_{c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$.*

**RQ :** $c$ peut être fini ou infini.
On peut appliquer la règle de l'Hopital $n$ fois successives.
Cette règle est applicable pour d'autres formes indéterminées telles que : $0 \times \infty$, $0^0$, $\infty^0$ et $\infty - \infty$.

**Exemple 6**

$$\lim_{1} \frac{x-1}{\ln x} = \lim_{1} \frac{1}{1/x} = \lim_{1} x = 1.$$

## Exercice 8

*En utilisant la règle de l'Hopital, déterminer les limites suivantes :*

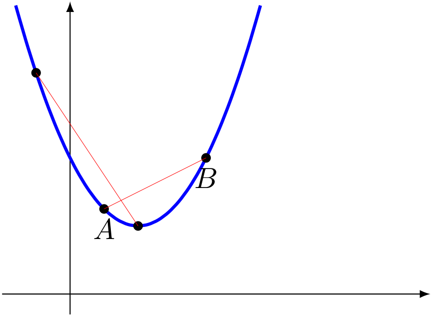
$$\lim_{0^+} x^x, \quad \lim_{\infty} \frac{e^x}{x^n}, \quad \lim_{+\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

# Concavité et convexité

## Définition 5

*Une fonction $f$ est dite* ***convexe*** *sur un intervalle $[a, b]$ si quels que soient deux points $A$ et $B$ du graphe de la fonction, le segment $[AB]$ est entièrement situé* ***au-dessus*** *du graphe. Formellement, $f$ est convexe si :*

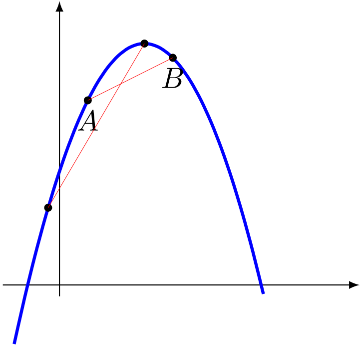
$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y), \quad \forall\, x, y \in [a, b] \text{ et } \alpha \in [0, 1]$$



### Définition 6

*Une fonction $f$ est dite* ***concave*** *sur un intervalle $[a,b]$ si $-f$ est* ***convexe****.*
*Formellement, $f$ est concave si :*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y), \quad \forall\, x, y \in [a,b] \text{ et } \alpha \in [0,1]$$



# Concavité et convexité

### Proposition 3

*Si $f$ est deux fois dérivable sur $[a, b]$, $f$ est **convexe** (resp. **concave**) si et seulement si $\mathbf{f''(x) \geq 0}$ (resp. $\mathbf{f''(x) \leq 0}$).*

### Exemple 7

*La fonction $\ln(x)$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, en effet*
$(\ln(x))'' = -1/x^2 < 0, \ \forall\ x > 0.$
*Par contre la fonction $\exp(x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$ car*
$(\exp(x))'' = \exp(x) > 0, \ \forall\ x \in \mathbb{R}.$

### Exercice 9

*Étudier la concavité des fonctions suivante :*
$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = 3x^2 - 1.$

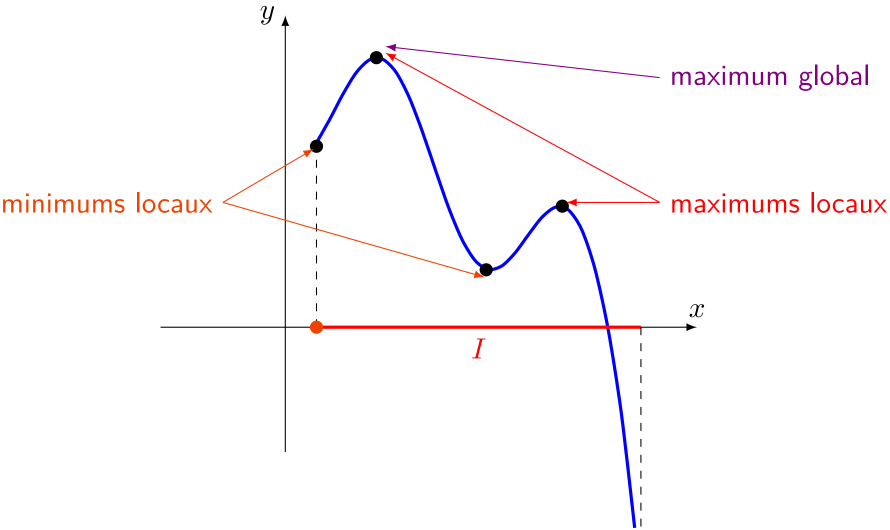
# Maximum et minimum

## Définition 7

*Soit $f$ une fonction définie sur $I$ contenant $a$.*

1. *On dit que $f$ admet un* ***maximum local*** *(resp.* ***minimum local****) en $a$ si et seulement si il existe un intervalle ouvert $J$ contenant $a$ tel que $J \subset I$ et pour tout $x \in J$ on a :* $\mathbf{f(x) \leq f(a)}$ *(resp.* $\mathbf{f(x) \geq f(a)}$*)*
2. *On dit que $f$ admet un* ***maximum global*** *(resp.* ***minimum global****) en $a$ si et seulement si pour tout $x \in I$ on a :* $\mathbf{f(x) \leq f(a)}$ *(resp.* $\mathbf{f(x) \geq f(a)}$*).*
3. *On dit que $f$ admet un extremum en $a$ si et seulement si $f$ admet un maximum ou un minimum en $a$.*

# Maximum et minimum



# Condition d'existence d'extremum

**Proposition 4**

*Si $f$ est continue sur $[a, b]$, alors $f$ admet un maximum global et un minimum global sur $[a, b]$.*

**Théorème 9 (Condition nécessaire)**

*Si $f$ est dérivable en $a \in I$ et si $f$ admet un extremum local en $a$, alors $f'(a) = 0$.*

**Définition 8**

*Un point $a$ en lequel $f$ est dérivable et $f'(a) = 0$ est appelé **point critique**.*

# Condition du second ordre

**Théorème 10**

*Soit $f$ une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert $I$ et $x_0$ un point critique de $f$ . Alors :*

1. *Si $f''(x_0) > 0$, $f$ présente en $x_0$ un minimum local.*
2. *Si $f''(x0) < 0$, $f$ présente en $x_0$ un maximum local.*
3. *Si $f''(x0) = 0$, on ne peut rien dire.*

# Condition du second ordre

**Théorème 10**

*Soit $f$ une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert $I$ et $x_0$ un point critique de $f$ . Alors :*

1. *Si $f''(x_0) > 0$, $f$ présente en $x_0$ un minimum local.*
2. *Si $f''(x0) < 0$, $f$ présente en $x_0$ un maximum local.*
3. *Si $f''(x0) = 0$, on ne peut rien dire.*

**Théorème 11**

*Soit $f$ une fonction concave (resp. convexe) sur intervalle ouvert $I$. Si $x_0$ est un point critique pour $f$ , alors $f$ présente en $x_0$ un maximum (resp. minimum)* ***global*** *sur I.*

## Exercice 10

*Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = x^3 - 12x + 3$.*

1. *Déterminer les extrema de $f$.*
2. *Les extrema de $f$ sont-ils globaux ?*