Mathématiques 1

Chapitre 3 : Dérivation

Mohamed Essaied Hamrita

IHEC, Université de Sousse

Novembre 2020

Table des matières

Définitions

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$. On dit que f est ***dérivable en x_0*** *si $\lim\limits_{x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$* ***existe*** *et est* ***finie****.*

Dans ce cas, on note : $f'(x_0) = \lim\limits_{x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ la ***dérivée*** *de f en x_0.*

Exemple 1

En utilisant la définition, déterminer la dérivée de $f(x) = x^2$.

$$f'(x_0) = \lim_{x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x_0} \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \lim_{x_0} \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = 2x_0.$$

D'où $f'(x) = 2x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Définition 2

On dit que f est dérivable ***à gauche*** *(resp.* ***à droite****) en x_0 si* $\lim\limits_{x_0^-(x_0^+)} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *existe et est finie.*

Dans ce cas, cette limite est appelée dérivée à gauche (resp. à droite) de f en x_0 et est notée $f'_g(x_0)$ (resp. $f'_d(x_0)$).

Théorème 1

Soit f une fonction définie sur un voisinage $V(x_0)$. f est dérivable en x_0 ssi f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Exercice 1

Étudier la dérivabilité de la fonction f au point $x_0 = 0$ dans les deux cas suivants : a) $f(x) = \sqrt{1+2x+x^2}$; b) $f(x) = |x|$.

Théorème 2

Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.

Exercice 2

Démontrer le théorème précédent.

Fonctions de références

Les fonctions de références suivantes sont dérivables sur leurs domaines respectifs dont les expressions de leurs dérivées sont données comme suit :

$f(x)$	D_f	$f'(x)$	$f(x)$	D_f	$f'(x)$
$a\ (a \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	0	$x^\alpha\ (\alpha \in Qq)$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\exp x$	$\mathbb{R}$	$\exp x$	$\ln x$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\tan x$	$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}[2\pi]\right\}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$			

Calcul de dérivées

Soient f et g deux fonctions continues et dérivables sur un intervalle I, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors :

1. λf est dérivable et $(\lambda f)' = \lambda f'$
2. $f + g$ est dérivable et $(f + g)' = f' + g'$
3. $f \times g$ est dérivable et $(f \times g)' = f' \times g'$
4. $\frac{f}{g}$ est dérivable et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$ $(g \neq 0)$
5. $\frac{1}{g}$ est dérivable et $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$ $(g \neq 0)$
6. si $f > 0$, et si $\alpha \in \mathbb{Q}$, f^α est dérivable et $(f^\alpha)' = \alpha f' f^{\alpha - 1}$

Exemple 2

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

$f(x) = \dfrac{4\sqrt{x}}{x^2 - 2}$; $\qquad g(x) = 4x^{\frac{1}{6}}$.

Dérivée d'une fonction composée

Proposition 1

Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ *et* $g : J \mapsto \mathbb{R}$ *tel que* $f(I) \subseteq J$. *Si* f *est dérivable sur* I *et* g *est dérivable sur* $f(I)$, *alors* $g \circ f$ *est dérivable sur I et* $(g \circ f)' = f'(g' \circ f)$

Exercice 3

1) Montrer que la dérivée de $f(x) = \sqrt{u(x)}$ *est* $\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x}}$.

2) Montrer que la dérivée de $f(x) = \ln x$ *est* $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Dérivé de la réciproque

Théorème 3

Si f est une fonction dérivable et strictement monotone sur I et si $f'(x) \neq 0,\ \forall x \in I$, alors $f^{-1}(x)$ est dérivable sur $J = f(I)$ et on a

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} \quad \forall x \in J$$

Exemple 3

La fonction $f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}_+$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R} - +$, donc sa réciproque f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 0$, on a

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{2f^{-1}(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Dérivée d'ordre supérieur

Définition 3

Soit f une fonction définie et dérivable sur $I \subseteq \mathbb{R}$. Sa dérivée f' est appelée dérivée ***première****.*
Si f' est dérivable, on appelle la dérivée de f' la dérivée ***seconde*** *de f, notée f'' ou $f^{(2)}$.*
La dérivée ***troisième****, notée $f^{(3)}$, est la dérivée de la dérivée seconde.*
La dérivée ***n-ième*** *de f, notée $f^{(n)}$ est la dérivée de la dérivée $n-1)$ième de f (si elle existe).*

RQ : $f^{(n)}$ existe ssi $f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$ existent et $f^{(n-1)}$ est dérivable.

Théorème 4 (Formule de Leibniz)

Soient f et g deux fonctions n fois dérivables sur $I \subseteq \mathbb{R}$. Alors $f \times g$ est n fois dérivable sur I et on a :

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Dérivée d'ordre supérieur

Exercice 4

Calculer la dérivée n-ième des fonctions suivantes :
$f(x) = x^2 \exp(x), \qquad g(x) = x\ln(x)$

Exercice 5

1) Déterminer par récurrence la dérivée d'ordre n de la fonction :
$x \to (x+a)^{-1}$*, pour tout $x \neq -a$.*
2) Trouver deux réels α et β tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{-1, 2\}, \quad \frac{2x-5}{(x-2)(x+1)} = \frac{\alpha}{x-2} + \frac{\beta}{x+1}.$$

En déduire la dérivée d'ordre n de la fonction : $x \to \dfrac{2x-5}{(x-2)(x+1)}$.

Dérivée d'ordre supérieur

Définition 4

Soit f *une fonction définie sur* $I \subseteq \mathbb{R}$*. On dit que* f *est de classe* $\mathcal{C}^n$ *si* f *est* n *fois dérivable et que* $f^{(n)}$ *est continue.*
Si f *est de classe* $\mathcal{C}^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$*, alors* f *est dite de classe* $\mathcal{C}^\infty$*.*

Exemple 4

La fonction $\exp(x)$ *est* n *fois dérivable et* $f^{(n)}$ *est continue pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, donc elle est de classe* $\mathcal{C}^\infty$

Sens de variation

Proposition 2

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur un intervalle ouvert I.

- *Si $f' > 0$ sur I, alors f est strictement croissante sur I.*
- *Si $f' < 0$ sur I, alors f est strictement décroissante sur I.*
- *Si $f' \geq 0$ (resp. $f' \leq 0$) sur I, alors f est croissante (resp. décroissante) sur I.*
- *Si $f' = 0$ sur I, alors f est constante sur I.*

Exercice 6

Étudier les variations de la fonction $f(x) = x\exp(-x)$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème de Rolle

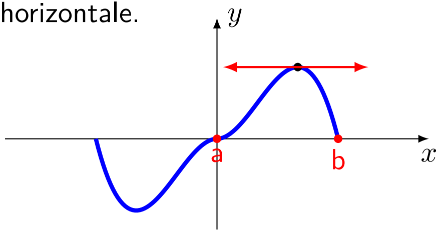
Théorème 5

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *telle que*

- f *est continue sur* $[a, b]$,
- f *est dérivable sur* $]a, b[$,
- $f(a) = f(b)$.

Alors il existe au moins $c \in]a, b[$ *tel que* $f'(c) = 0$.

Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est horizontale.



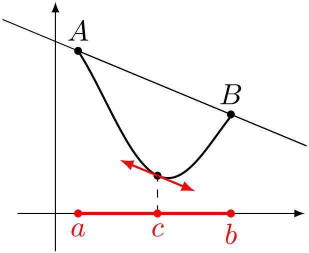
T.A.F

Théorème 6 (T.A.F)

Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est parallèle à la droite (AB) où $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$.



Exercice 7

1) Soit $f(x) = \sqrt{x}$*. Appliquer le T.A.F sur l'intervalle* $[100, 101]$*. En déduire l'encadrement* $10 + \frac{1}{22} \leq \sqrt{101} \leq 10 + \frac{1}{20}$.
2) En utilisant le T.A.F, montrer que

$$\forall x > 0, \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$$

1) f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc elle est continue sur $[100, 101]$ et dérivable sur $]100, 101[$. D'où, d'après le T.A.F, il existe un réel $c \in]100, 101[$ tel que $f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}} = \sqrt{101} - \sqrt{100}$.
$100 < c < 100 \Longrightarrow 20 < 2\sqrt{c} < 2\sqrt{101} < 22 \Longrightarrow \frac{1}{22} < \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{20}$
Donc $\frac{1}{22} < \sqrt{101} - \sqrt{100} < \frac{1}{20} \Longrightarrow 10 + \frac{1}{22} < \sqrt{101} < 10 + \frac{1}{20}$

Théorème 7 (Inégalité des accroissements finis)

Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et s'il existe deux réels m et M tels que : $\forall x \in]a, b[, \;\; m \leq f'(x) \leq M$, *alors*

$$m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M$$

Exemple 5

En appliquant les I.A.F, montrer que :

$$\forall\, x > 0, \;\; \frac{1}{2\sqrt{x+1}} < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Règle de l'Hopital

Théorème 8 (Règle de l'Hopital)

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle $]a,b[$ contenant un réel c et $g'(x) \neq 0 \ \forall \ x \in]a,b[\setminus\{c\}$.

Si $\lim\limits_{c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$ *ou* $\dfrac{\infty}{\infty}$ *et* $\lim\limits_{c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, *alors* $\lim\limits_{c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

RQ : c peut être fini ou infini.

On peut appliquer la règle de l'Hopital n fois successives.

Cette règle est applicable pour d'autres formes indéterminées telles que : $0 \times \infty$, 0^0, ∞^0 et $\infty - \infty$.

Exemple 6

$$\lim_{1} \frac{x-1}{\ln x} = \lim_{1} \frac{1}{1/x} = \lim_{1} x = 1.$$

Règle de l'Hopital

Exercice 8

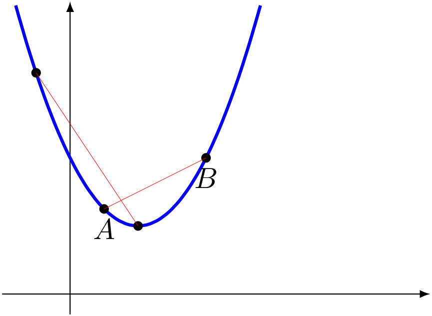
En utilisant la règle de l'Hopital, déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{0^+} x^x, \quad \lim_{\infty} \frac{e^x}{x^n}, \quad \lim_{+\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

Définition 5

Une fonction f est dite ***convexe*** *sur un intervalle $[a, b]$ si quels que soient deux points A et B du graphe de la fonction, le segment $[AB]$ est entièrement situé* ***au-dessus*** *du graphe. Formellement, f est convexe si :*

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y), \quad \forall\, x, y \in [a, b] \text{ et } \alpha \in [0, 1]$$

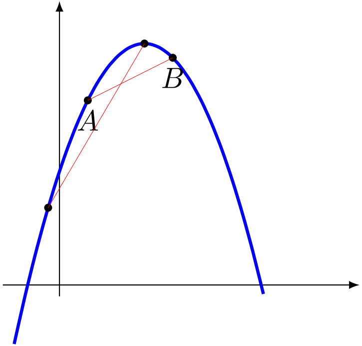


Concavité et convexité

Définition 6

Une fonction f est dite ***concave*** *sur un intervalle $[a,b]$ si $-f$ est* ***convexe****.*
Formellement, f est concave si :

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y) \geq \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y), \quad \forall\, x,y \in [a,b] \text{ et } \alpha \in [0,1]$$



Proposition 3

*Si f est deux fois dérivable sur $[a,b]$, f est **convexe** (resp. **concave**) si et seulement si* $\mathbf{f''(x) \geq 0}$ *(resp.* $\mathbf{f''(x) \leq 0}$*).*

Exemple 7

La fonction $\ln(x)$ *est concave sur* $\mathbb{R}_+^*$, *en effet*
$(\ln(x))'' = -1/x^2 < 0, \ \forall\, x > 0.$
Par contre la fonction $\exp(x)$ *est convexe sur* $\mathbb{R}$ *car*
$(\exp(x))'' = \exp(x) > 0, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$

Exercice 9

Étudier la concavité des fonctions suivante :
$f(x) = \sqrt{x}, \ \ g(x) = 3x^2 - 1.$

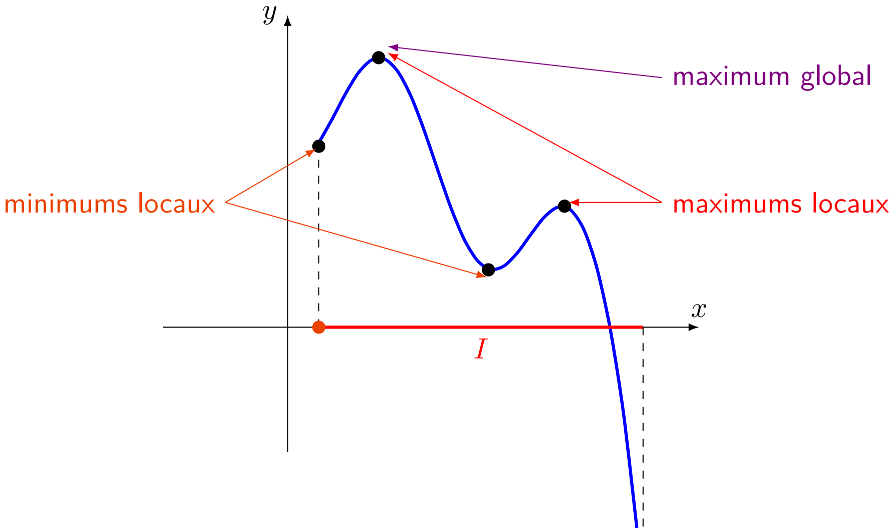
Maximum et minimum

Définition 7

Soit f une fonction définie sur I contenant a.

1. *On dit que f admet un **maximum local** (resp. **minimum local**) en a si et seulement si il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que $J \subset I$ et pour tout $x \in J$ on a : $\mathbf{f(x) \leq f(a)}$ (resp. $\mathbf{f(x) \geq f(a)}$)*
2. *On dit que f admet un **maximum global** (resp. **minimum global**) en a si et seulement si pour tout $x \in I$ on a : $\mathbf{f(x) \leq f(a)}$ (resp. $\mathbf{f(x) \geq f(a)}$).*
3. *On dit que f admet un extremum en a si et seulement si f admet un maximum ou un minimum en a.*

Maximum et minimum



Condition d'existence d'extremum

Proposition 4

Si f est continue sur $[a, b]$, alors f admet un maximum global et un minimum global sur $[a, b]$.

Théorème 9 (Condition nécessaire)

Si f est dérivable en $a \in I$ et si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.

Définition 8

*Un point a en lequel f est dérivable et $f'(a) = 0$ est appelé **point critique**.*

Condition du second ordre

Théorème 10

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un point critique de f . Alors :

1. *Si $f''(x_0) > 0$, f présente en x_0 un minimum local.*
2. *Si $f''(x0) < 0$, f présente en x_0 un maximum local.*
3. *Si $f''(x0) = 0$, on ne peut rien dire.*

Condition du second ordre

Théorème 10

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un point critique de f . Alors :

1. *Si $f''(x_0) > 0$, f présente en x_0 un minimum local.*
2. *Si $f''(x0) < 0$, f présente en x_0 un maximum local.*
3. *Si $f''(x0) = 0$, on ne peut rien dire.*

Théorème 11

Soit f une fonction concave (resp. convexe) sur intervalle ouvert I. Si x_0 est un point critique pour f , alors f présente en x_0 un maximum (resp. minimum) ***global*** *sur I.*

Exercice 10

Soit f *la fonction définie par* $f(x) = x^3 - 12x + 3$.

1. *Déterminer les extrema de* f.
2. *Les extrema de* f *sont-ils globaux ?*