

# Mathématiques 1

## Chapitre 2 : Fonctions usuelles

Mohamed Essaied Hamrita

IHEC, Université de Sousse

Octobre 2021



# Table des matières

## 1 Fonctions polynôme, rationnelle et racine

- Fonction polynôme
- Fonction rationnelle
- Fonction racine

## 2 Logarithme et exponentielle

- Logarithme
- Exponentielle

## 3 Fonctions circulaires inverses

- Fonction arcsin
- Fonction arccos
- Fonction arctg

# Polynôme

## Définition

On appelle fonction *polynôme* toute fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  pour laquelle il existe un entier naturel  $n$  et des nombres réels  $a_0, a_1, \dots, a_n$  avec  $a_n \neq 0$  tels que :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

Le nombre entier naturel  $n$  s'appelle le degré de  $f$ . Les nombres réels  $a_0, a_1, \dots, a_n$  s'appellent les coefficients de  $f$ .  
 $a_0, a_1x, a_2x^2, \dots, a_nx^n$  s'appellent les monômes de  $f$ .

## Exemple

La fonction  $f$  définie par  $f(x) = 2x - 7$  est une fonction polynôme de degré 1.  
Les fonctions affines sont des fonctions polynômes de degré 1.

# Polynôme

La fonction polynôme a les propriétés suivantes :

- 1 La somme, la différence et le produit de deux fonctions polynômes est une fonction polynôme.
- 2 Le degré du produit de deux polynômes est la somme des degrés de ces deux polynômes.
- 3 Deux fonctions polynômes non nulles sont égales si et seulement si elles ont le même degré et les coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux.
- 4 La fonction polynôme est définie, continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
- 5  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n x^n$

## Définition

On appelle fonction *rationnelle* toute fonction  $f$  définie par le rapport de deux polynômes  $P(x)$  et  $Q(x)$  telle que  $Q(x) \neq 0$ .

## Exemple

Les fonction définies par  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  et  $g(x) = \frac{2x^2 - 1}{x + 1}$  sont deux fonctions rationnelles.

La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est définie par :

$$\lim_{\infty} = \lim_{\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

où  $a_n x^n$  et  $b_m x^m$  sont les monômes les plus haut degré des polynômes  $P(x)$  et  $Q(x)$  respectivement.

## Définition

La fonction **racine carrée** est la fonction  $f$  définie  $[0, +\infty[$  sur par  $f(x) = \sqrt{x}$ .

La fonction **racine  $n$ -ième** est la fonction  $g$  définie  $[0, +\infty[$  sur par  $g(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ .

La fonction racine est une fonction continue et dérivable sur son domaine de définition et elle est croissante sur  $[0, +\infty[$  et on a  $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$ .

si  $a \geq 0$  et  $b > 0$ ,  $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ , et  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ .

Pour tout réel  $a$ ,  $\sqrt{a^2} = |a|$ .

## Proposition

Il existe une unique fonction, notée  $\ln : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad (\text{pour tout } x > 0) \quad \text{et} \quad \ln(1) = 0.$$

## Proposition

Il existe une unique fonction, notée  $\ln : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad (\text{pour tout } x > 0) \quad \text{et} \quad \ln(1) = 0.$$

De plus cette fonction vérifie (pour tout  $a, b > 0$ ) :

- ❶  $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b,$
- ❷  $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a,$



## Proposition

Il existe une unique fonction, notée  $\ln : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad (\text{pour tout } x > 0) \quad \text{et} \quad \ln(1) = 0.$$

De plus cette fonction vérifie (pour tout  $a, b > 0$ ) :

- ❶  $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b,$
- ❷  $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a,$
- ❸  $\ln(a^n) = n \ln a, \text{ (pour tout } n \in \mathbb{N})$

## Proposition

Il existe une unique fonction, notée  $\ln : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad (\text{pour tout } x > 0) \quad \text{et} \quad \ln(1) = 0.$$

De plus cette fonction vérifie (pour tout  $a, b > 0$ ) :

- ❶  $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b,$
- ❷  $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a,$
- ❸  $\ln(a^n) = n \ln a, \text{ (pour tout } n \in \mathbb{N})$
- ❹  $\ln$  est une fonction continue, strictement croissante et définit une bijection de  $]0, +\infty[$  sur  $\mathbb{R},$

## Proposition

Il existe une unique fonction, notée  $\ln : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad (\text{pour tout } x > 0) \quad \text{et} \quad \ln(1) = 0.$$

De plus cette fonction vérifie (pour tout  $a, b > 0$ ) :

- ❶  $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b,$
- ❷  $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a,$
- ❸  $\ln(a^n) = n \ln a, \text{ (pour tout } n \in \mathbb{N})$
- ❹  $\ln$  est une fonction continue, strictement croissante et définit une bijection de  $]0, +\infty[$  sur  $\mathbb{R},$
- ❺  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$

## Proposition

Il existe une unique fonction, notée  $\ln : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad (\text{pour tout } x > 0) \quad \text{et} \quad \ln(1) = 0.$$

De plus cette fonction vérifie (pour tout  $a, b > 0$ ) :

- ❶  $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b,$
- ❷  $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a,$
- ❸  $\ln(a^n) = n \ln a, \text{ (pour tout } n \in \mathbb{N})$
- ❹  $\ln$  est une fonction continue, strictement croissante et définit une bijection de  $]0, +\infty[$  sur  $\mathbb{R},$
- ❺  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$
- ❻ la fonction  $\ln$  est concave et  $\ln x \leq x - 1$  (pour tout  $x > 0$ ).

# Logarithme

$\ln x$  s'appelle le logarithme **naturel** ou aussi logarithme **népérien**. Il est caractérisé par  $\ln(e) = 1$ . On définit le logarithme en base  $a$  par

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Telle que  $\log_a(a) = 1$ . Pour  $a = 10$  on obtient le logarithme **décimal**  $\log_{10}$  qui vérifie  $\log_{10}(10) = 1$  (et donc  $\log_{10}(10^n) = n$ ). Dans la pratique on utilise l'équivalence :

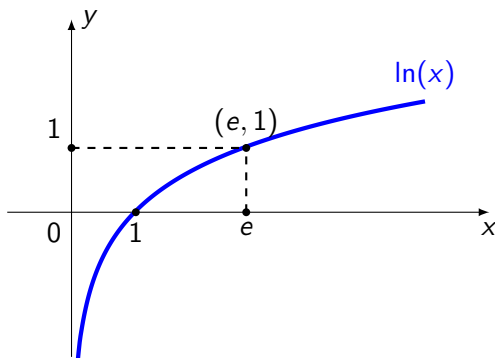
$$x = 10^y \iff y = \log_{10}(x)$$

# Logarithme

La fonction  $\ln$  admet les limites suivantes :

$$\begin{array}{lll} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty & \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty & \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \end{array}$$

La courbe représentative de la fonction  $\ln$  est comme suit :

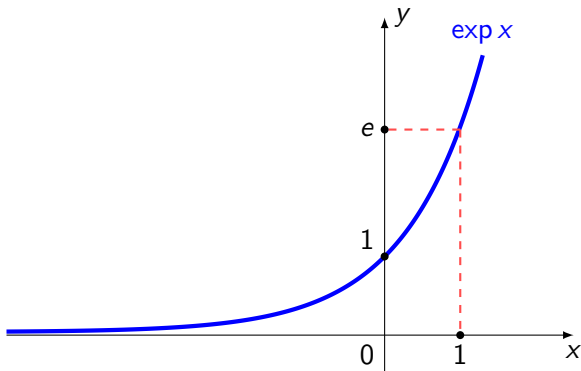


# Exponentielle

## Définition

La bijection réciproque de  $\ln : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  s'appelle la fonction *exponentielle*, notée  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$ .

Sa courbe représentative est donnée comme suit :



# Exponentielle

Pour  $x \in \mathbb{R}$  on note aussi  $e^x$  pour  $\exp x$ .

## Proposition

*La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :*



# Exponentielle

Pour  $x \in \mathbb{R}$  on note aussi  $e^x$  pour  $\exp x$ .

## Proposition

*La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :*

- ①  $\exp(\ln x) = x$  pour tout  $x > 0$  et  $\ln(\exp x) = x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$
- ②  $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$

# Exponentielle

Pour  $x \in \mathbb{R}$  on note aussi  $e^x$  pour  $\exp x$ .

## Proposition

*La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :*

- ①  $\exp(\ln x) = x$  pour tout  $x > 0$  et  $\ln(\exp x) = x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$
- ②  $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$
- ③  $\exp(nx) = (\exp x)^n$

# Exponentielle

Pour  $x \in \mathbb{R}$  on note aussi  $e^x$  pour  $\exp x$ .

## Proposition

*La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :*

- ①  $\exp(\ln x) = x$  pour tout  $x > 0$  et  $\ln(\exp x) = x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$
- ②  $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$
- ③  $\exp(nx) = (\exp x)^n$
- ④  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$  est une fonction continue, strictement croissante vérifiant  $\lim_{-\infty} \exp x = 0$  et  $\lim_{+\infty} \exp = +\infty$ .

# Exponentielle

Pour  $x \in \mathbb{R}$  on note aussi  $e^x$  pour  $\exp x$ .

## Proposition

*La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :*

- ❶  $\exp(\ln x) = x$  pour tout  $x > 0$  et  $\ln(\exp x) = x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$
- ❷  $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$
- ❸  $\exp(nx) = (\exp x)^n$
- ❹  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$  est une fonction continue, strictement croissante vérifiant  $\lim_{-\infty} \exp x = 0$  et  $\lim_{+\infty} \exp x = +\infty$ .
- ❺ La fonction exponentielle est dérivable et  $\exp' x = \exp x$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Elle est convexe et  $\exp x \geq 1 + x$ .

# Exponentielle

Pour  $x \in \mathbb{R}$  on note aussi  $e^x$  pour  $\exp x$ .

## Proposition

*La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :*

- ❶  $\exp(\ln x) = x$  pour tout  $x > 0$  et  $\ln(\exp x) = x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$
- ❷  $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$
- ❸  $\exp(nx) = (\exp x)^n$
- ❹  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$  est une fonction continue, strictement croissante vérifiant  $\lim_{-\infty} \exp x = 0$  et  $\lim_{+\infty} \exp x = +\infty$ .
- ❺ La fonction exponentielle est dérivable et  $\exp' x = \exp x$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Elle est convexe et  $\exp x \geq 1 + x$ .

$$\lim_{-\infty} x^n \exp x = 0$$

$$\lim_{+\infty} \frac{\exp x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{-\infty} x^n \exp x = 0$$

$$\lim_{+\infty} \frac{\exp x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{+\infty} x^n \exp -x = 0$$

$$\lim_0 \frac{\exp x - 1}{x} = 1$$

## Exercice

- ❶ Montrer que  $\ln(1 + e^x) = x + \ln(1 + e^{-x})$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
- ❷ Soit la fonction  $f$  définie sur  $] - 3, 3[$  par :

$$f(x) = \ln \left( \frac{3 - x}{3 + x} \right)$$

- a) Montrer que  $f$  est bien définie sur  $] - 3, 3[$ .
- b) Étudier la parité de  $f$ .

## Exercice

- ❶ Montrer que  $\ln(1 + e^x) = x + \ln(1 + e^{-x})$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
- ❷ Soit la fonction  $f$  définie sur  $] - 3, 3[$  par :

$$f(x) = \ln \left( \frac{3 - x}{3 + x} \right)$$

- a) Montrer que  $f$  est bien définie sur  $] - 3, 3[$ .
- b) Étudier la parité de  $f$ .

$$\begin{aligned} 1) \forall x \in \mathbb{R}, \text{ on a } 1 + e^x &= e^x(e^{-x} + 1) \\ \implies \ln(1 + e^x) &= \ln(e^x(e^{-x} + 1)) = \ln(e^x) + \ln(e^{-x} + 1) = x + \ln(e^{-x} + 1). \end{aligned}$$

## Exercice

- ❶ Montrer que  $\ln(1 + e^x) = x + \ln(1 + e^{-x})$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
- ❷ Soit la fonction  $f$  définie sur  $] - 3, 3[$  par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)$$

- a) Montrer que  $f$  est bien définie sur  $] - 3, 3[$ .
- b) Étudier la parité de  $f$ .

- 1)  $\forall x \in \mathbb{R}$ , on a  $1 + e^x = e^x(e^{-x} + 1)$   
 $\implies \ln(1 + e^x) = \ln(e^x(e^{-x} + 1)) = \ln(e^x) + \ln(e^{-x} + 1) = x + \ln(e^{-x} + 1).$
- 2) a)  $x \in D_f \iff \frac{3-x}{3+x} > 0 \text{ et } 3+x \neq 0 \iff x \in ] - 3, 3[.$



## Exercice

- ❶ Montrer que  $\ln(1 + e^x) = x + \ln(1 + e^{-x})$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
- ❷ Soit la fonction  $f$  définie sur  $] - 3, 3[$  par :

$$f(x) = \ln \left( \frac{3 - x}{3 + x} \right)$$

- a) Montrer que  $f$  est bien définie sur  $] - 3, 3[$ .
- b) Étudier la parité de  $f$ .

$$\begin{aligned} 1) \forall x \in \mathbb{R}, \text{ on a } 1 + e^x &= e^x(e^{-x} + 1) \\ \implies \ln(1 + e^x) &= \ln(e^x(e^{-x} + 1)) = \ln(e^x) + \ln(e^{-x} + 1) = x + \ln(e^{-x} + 1). \end{aligned}$$

$$2) a) x \in D_f \iff \frac{3 - x}{3 + x} > 0 \text{ et } 3 + x \neq 0 \iff x \in ] - 3, 3[.$$

$$\begin{aligned} b) \forall x \in ] - 3, 3[, f(-x) &= \ln \left( \frac{3 - (-x)}{3 + (-x)} \right) = \ln \left( \frac{3 + x}{3 - x} \right) = \ln \left( \frac{1}{\frac{3 - x}{3 + x}} \right) \\ &= -\ln \left( \frac{3 - x}{3 + x} \right) = -f(x), \text{ donc la fonction } f \text{ est } \text{impaire}. \end{aligned}$$

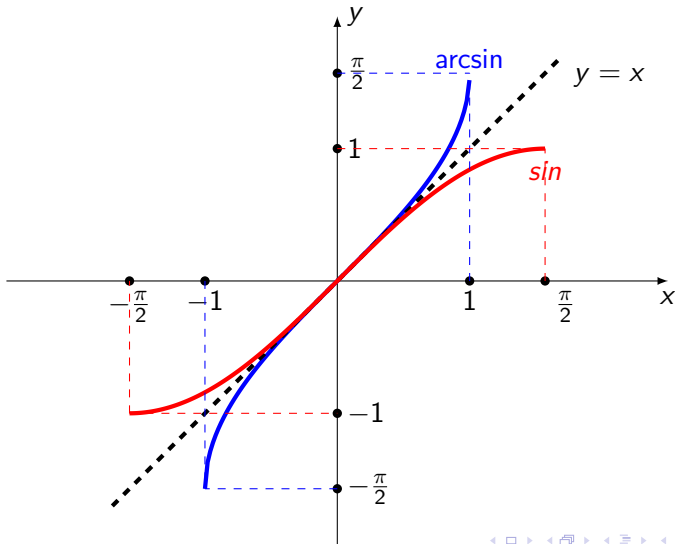
## Définition

La fonction  $\sin$  est continue strictement croissante sur l'intervalle  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ , donc elle définit une bijection de  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  sur  $[-1; 1]$ . La fonction réciproque est appelée **arcsin** et elle est continue strictement croissante sur  $[-1; 1]$ .

$$y = \arcsin(x), |x| \leq 1 \iff x = \sin(y), |y| \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{On a } \forall x \in [-1, 1], \cos^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2 \text{ et } \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}.$$
$$\forall x \in ]-1, 1[, \tan(\arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Les courbes des fonctions sin et arcsin



## Exercice

Déterminer arcsin de  $0, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$

## Exercice

Déterminer arcsin de  $0, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$

Pour trouver ces valeurs, on rappelle que  $\sin(\arcsin(x)) = x, \forall x \in [-1, 1]$ .

Soit  $\theta = \arcsin(x)$ .

$$\arcsin(0) = \theta \implies \sin(\theta) = 0 \implies \theta = 0. \text{ Donc } \arcsin(0) = 0.$$

$$\arcsin(1) = \theta \implies \sin(\theta) = 1 \implies \theta = \frac{\pi}{2}. \text{ Donc } \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \theta \implies \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies \theta = \frac{\pi}{4}. \text{ Donc } \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

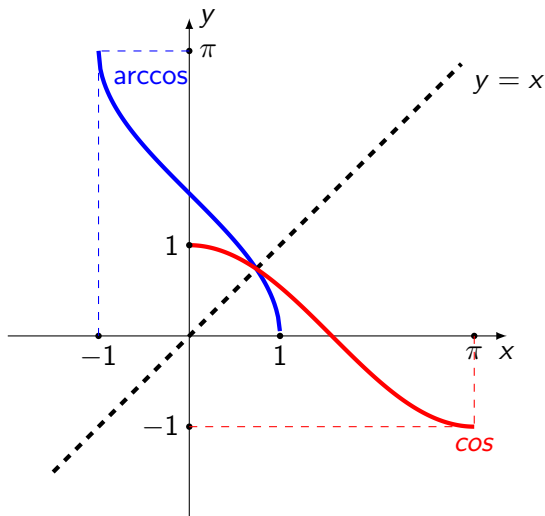
$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \theta \implies \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \theta = \frac{\pi}{3}. \text{ Donc } \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

## Définition

*La fonction  $\cos$  est continue strictement décroissante sur l'intervalle  $[0; \pi]$ , donc elle définit une bijection de  $[0; \pi]$  sur  $[-1; 1]$ . La fonction réciproque est appelée **arccos** et elle est continue strictement décroissante sur  $[-1; 1]$ .*

$$y = \arccos(x), |x| \leq 1 \iff x = \cos(y), y \in [0, \pi]$$

Les courbes des fonctions cos et arccos



## Définition

La fonction  $\tan$  est continue strictement croissante sur l'intervalle  $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ , donc elle définit une bijection de  $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$  sur  $\mathbb{R}$ . La fonction réciproque est appelée **arctan** et elle est continue strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

$$y = \arctan(x), x \in \mathbb{R} \iff x = \tan(y), |y| < \frac{\pi}{2}$$



## Les courbes des fonctions tan et arctan

