Ex4

$g(x) = x \ln x$

Soient $u(x) = x$ et $v(x) = \ln x$

u et v sont n fois dérivables et leurs dérivées n-ièmes sont continues sur $D_g = \mathbb{R}_+^*$ donc g est n fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$u'(x) = 1$ et $u^{(n)}(x) = 0 \ \forall n \geq 2$

$v'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$v''(x) = (-1) \times 1 \times x^{-2}$

$v^{(3)}(x) = 1 \times 2 \times x^{-3}$

$v^{(4)}(x) = (-1) \times 1 \times 2 \times 3 \times x^{-4}$

Conjecture :

$v^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} (n-1)!\, x^{-n}$

d'où, d'après la formule de Leibniz

$g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$

Pour $n \geq 2$:

$g^{(n)}(x) = C_n^0 u v^{(n)} + C_n^1 u' v^{(n-1)}$

$= 1 \times x \times (-1)^{n+1} (n-1)!\, x^{-n} + n \times (-1)^{n} (n-2)!\, x^{-n+1}$

$= (-1)^n (n-2)!\, x^{-n+1} \left((-1)(n-1) + n \right)$

$= (-1)^n (n-2)!\, x^{-n+1}$

Pour $n = 1$ $g'(x) = \ln x + 1$.