Épreuve : **Math1-Analyse** **Session principale** Date : **12/01/2023** Durée : **02 heures** Nombres de pages : **02**	**Université de Sousse** IHEC **Institut des Hautes Études Commerciales de Sousse**	Niveau : **1ère Année** Filière : **Licence Gestion** Chargés de cours : **Boubaker Heni** **Hamrita Mohamed Essaied** **Nefzi Hana**

Exercice 1 (5 points)

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x+x^2}$.

1) Déterminer le domaine de définition de f, D_f. (0.25 pt)

2) Montrer que f se développe au voisinage de 0 par : (1.75 pts)

$$f(x)=1-\frac{3}{2}x+\frac{11}{6}x^2-\frac{25}{12}x^3+o(x^3)$$

3) a) Montrer que f est prolongeable par continuité en $x_0=0$ par une fonction g que l'on précisera. (0.5 pt)

b) Donner l'équation de la tangente Δ à la courbe de g, $\mathscr{C}_g$ au point $M_0(0,1)$. (0.5 pt)

c) Préciser la position de la courbe de g par rapport à la tangente Δ. En déduire la convexité de g au voisinage de 0 (0.5 pt).

4) Montrer que la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition et dresser son tableau de variation (1 pt).

5) Montrer que l'équation $g(x)=-\dfrac{1}{2}$ admet une unique solution α sur $]0,1[$ (0.5).

Exercice 2 (4 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{2}(x-1)\arctan x$.

1) Calculer f' et f''. (1 pt)

2) Étudier les variations de f'. (2 pts)

3) Déterminer l'intervalle J image de $]-\infty,-1]$ par f'. (0.5 pt)

4) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution $c \in]0,1[$ et que f admet un minimum au point c. (0.5 pt)

Exercice 3 (6 points)

Soit f la fonction de deux variables x et y définie par : $f(x,y) = (x+y)\exp\left(\frac{x}{y}\right)$.

1) Déterminer le domaine de définition de f et montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son domaine de définition. (1 pt)

2) Calculer, sur D_f, les dérivées partielles premières et secondes. (2 pts)

3) a) Montrer que f est homogène et déterminer son degré d'homogénéité. (0.5 pt)

   b) Vérifier l'identité d'Euler. (0.5 pt)

   c) Calculer $e_{f/x}(x,y)$ $\forall (x,y) \in D_f$. En déduire, sans calcul, $e_{f/y}(x,y)$. (1 pt)

4) a) Montrer que l'équation $f(x,y) = 1$ définit au voisinage de $M_0(0,1)$ une fonction implicite ϕ et calculer $\phi'(0)$. (0.75 pt)

   b) Donner l'équation de la tangente, $\mathscr{D}$, à $\mathscr{C}_\phi$ au voisinage de 0. (0.25 pt)

Exercice 4 (5 points)

Soit f la fonction définie par $f(x,y) = x^2 + 4y^2 + 2x - 4y + 3$.

1) Trouver les points critiques et étudier leur nature de f. (2 pts)

2) Trouver les points critiques et étudier leur nature de f soumise à la contrainte $g(x,y) = 0$ où $g(x,y) = x + 2y - 2$ (3 pts)

Bon Travail