Mathématiques 1

Chapitre 2 : Fonctions usuelles

Mohamed Essaied Hamrita

IHEC, Université de Sousse

Octobre 2021

Table des matières

Polynôme

Définition

On appelle fonction polynôme toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe un entier naturel n et des nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ avec $a_n \neq 0$ tels que :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

Le nombre entier naturel n s'appelle le degré de f. Les nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ s'appellent les coefficients de f.
$a_0, a_1x, a_2x^2, \ldots, a_nx^n$ s'appellent les monômes de f.

Exemple

La fonction f définie par $f(x) = 2x - 7$ est une fonction polynôme de degré 1.
Les fonctions affines sont des fonctions polynômes de degré 1.

Polynôme

La fonction polynôme a les propriétés suivantes :

1. La somme, la différence et le produit de deux fonctions polynômes est une fonction polynôme.
2. Le degré du produit de deux polynômes est la somme des degrés de ces deux polynômes.
3. Deux fonctions polynômes non nulles sont égales si et seulement si elles ont le même degré et les coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux.
4. La fonction polynôme est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
5. $\lim\limits_{\infty} f(x) = \lim\limits_{\infty} a_n x^n$

Rationnelle

Définition

On appelle fonction rationnelle toute fonction f définie par le rapport de deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ telle que $Q(x) \neq 0$.

Exemple

Les fonction définies par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ et $g(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x + 1}$ sont deux fonctions rationnelles.

La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est définie par :

$$\lim_{\infty} = \lim_{\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

où $a_n x^n$ et $b_m x^m$ sont les monômes les plus haut degré des polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ respectivement.

Racine

Définition

La fonction racine carrée est la fonction f définie $[0, +\infty[$ sur par $f(x) = \sqrt{x}$.
La fonction racine $n-$ième est la fonction g définie $[0, +\infty[$ sur par $g(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$.

La fonction racine est une fonction continue te dérivable sur son domaine de définition et elle est croissante sur $[0, +\infty[$ et on a $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$.

si $a \geq 0$ et $b > 0$, $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$, et $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Pour tout réel a, $\sqrt{a^2} = |a|$.

Logarithme

Proposition

Il existe une unique fonction, notée ln $:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ *telle que :*

$$\ln'(x)=\frac{1}{x}\quad (\textit{pour tout } x>0)\qquad \textit{et}\qquad \ln(1)=0.$$

Logarithme

Proposition

Il existe une unique fonction, notée ln $:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ *telle que :*

$$\ln'(x)=\frac{1}{x}\quad(\textit{pour tout } x>0)\qquad \textit{et}\qquad \ln(1)=0.$$

De plus cette fonction vérifie (pour tout $a,b>0$*) :*

1. $\ln(a\times b)=\ln a+\ln b,$
2. $\ln(\frac{1}{a})=-\ln a,$

Proposition

Il existe une unique fonction, notée ln $:]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *telle que :*

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad (\textit{pour tout } x > 0) \qquad \textit{et} \qquad \ln(1) = 0.$$

De plus cette fonction vérifie (pour tout $a, b > 0$*) :*

1. $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$,
2. $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln a$,
3. $\ln(a^n) = n \ln a$, *(pour tout* $n \in \mathbb{N}$*)*

Logarithme

Proposition

Il existe une unique fonction, notée ln $:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ *telle que :*

$$\ln'(x)=\frac{1}{x}\quad (\textit{pour tout } x>0)\qquad \textit{et}\qquad \ln(1)=0.$$

De plus cette fonction vérifie (pour tout $a,b>0$) :

1. $\ln(a\times b)=\ln a+\ln b$,
2. $\ln(\frac{1}{a})=-\ln a$,
3. $\ln(a^n)=n\ln a$, *(pour tout $n\in\mathbb{N}$)*
4. ln *est une fonction continue, strictement croissante et définit une bijection de* $]0,+\infty[$ *sur* $\mathbb{R}$,

Logarithme

Proposition

Il existe une unique fonction, notée ln $:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ *telle que :*

$$\ln'(x)=\frac{1}{x}\quad(\textit{pour tout } x>0)\qquad \textit{et}\qquad \ln(1)=0.$$

De plus cette fonction vérifie (pour tout $a,b>0$*) :*

1. $\ln(a\times b)=\ln a+\ln b$,
2. $\ln(\frac{1}{a})=-\ln a$,
3. $\ln(a^n)=n\ln a$, *(pour tout* $n\in\mathbb{N}$*)*
4. ln *est une fonction continue, strictement croissante et définit une bijection de* $]0,+\infty[$ *sur* $\mathbb{R}$,
5. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$,

Logarithme

Proposition

Il existe une unique fonction, notée ln $:]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *telle que :*

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad (\textit{pour tout } x > 0) \qquad \textit{et} \qquad \ln(1) = 0.$$

De plus cette fonction vérifie (pour tout $a, b > 0$) :

1. $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$,
2. $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln a$,
3. $\ln(a^n) = n \ln a$, *(pour tout $n \in \mathbb{N}$)*
4. ln *est une fonction continue, strictement croissante et définit une bijection de* $]0,+\infty[$ *sur* $\mathbb{R}$,
5. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$,
6. *la fonction* ln *est concave et* $\ln x \leq x - 1$ *(pour tout $x > 0$).*

Logarithme

$\ln x$ s'appelle le logarithme naturel ou aussi logarithme népérien. Il est caractérisé par $\ln(e) = 1$. On définit le logarithme en base a par

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Telle que $\log_a(a) = 1$. Pour $a = 10$ on obtient le logarithme décimal $\log_{10}$ qui vérifie $\log_{10}(10) = 1$ (et donc $\log_{10}(10^n) = n$). Dans la pratique on utilise l'équivalence :

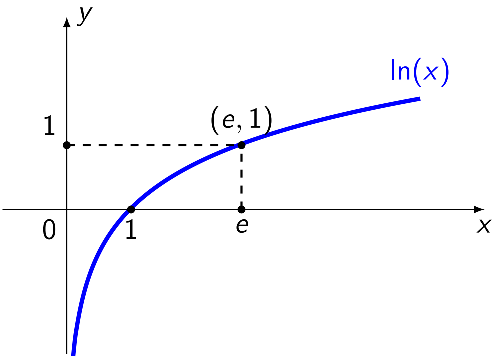
$$\boxed{x = 10^y \iff y = \log_{10}(x)}$$

Logarithme

La fonction ln admet les limites suivantes :

$$\lim_{+\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim_{0^+} \ln x = -\infty \qquad \lim_{0^+} x \ln x = 0$$
$$\lim_{+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \lim_{+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \qquad \lim_{0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

La courbe représentative de la fonction ln est comme suit :

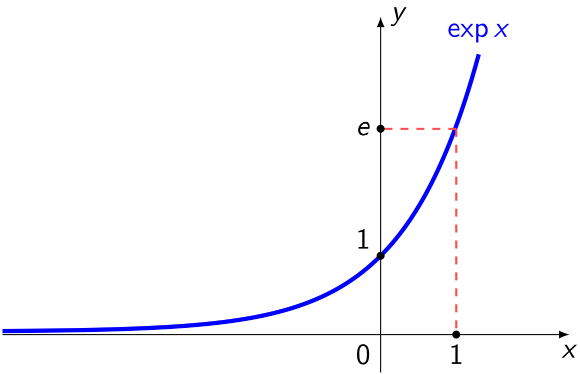


Exponentielle

Définition

La bijection réciproque de ln $:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ *s'appelle la fonction* *exponentielle, notée* exp $:\mathbb{R}\to]0,+\infty[$.

Sa courbe représentative est donnée comme suit :



Exponentielle

Pour $x \in \mathbb{R}$ on note aussi e^x pour $\exp x$.

Proposition

La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :

Exponentielle

Pour $x \in \mathbb{R}$ on note aussi e^x pour $\exp x$.

Proposition

La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :

1. $\exp(\ln x) = x$ *pour tout* $x > 0$ *et* $\ln(\exp x) = x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$
2. $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$

Exponentielle

Pour $x \in \mathbb{R}$ on note aussi e^x pour $\exp x$.

Proposition

La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :

1. $\exp(\ln x) = x$ *pour tout* $x > 0$ *et* $\ln(\exp x) = x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$
2. $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$
3. $\exp(nx) = (\exp x)^n$

Exponentielle

Pour $x \in \mathbb{R}$ on note aussi e^x pour $\exp x$.

Proposition

La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :

1. $\exp(\ln x) = x$ *pour tout* $x > 0$ *et* $\ln(\exp x) = x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$
2. $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$
3. $\exp(nx) = (\exp x)^n$
4. $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ *est une fonction continue, strictement croissante vérifiant* $\lim_{-\infty} \exp x = 0$ *et* $\lim_{+\infty} \exp = +\infty$.

Exponentielle

Pour $x \in \mathbb{R}$ on note aussi e^x pour $\exp x$.

Proposition

La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :

1. $\exp(\ln x) = x$ *pour tout* $x > 0$ *et* $\ln(\exp x) = x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$
2. $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$
3. $\exp(nx) = (\exp x)^n$
4. $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ *est une fonction continue, strictement croissante vérifiant* $\lim_{-\infty} \exp x = 0$ *et* $\lim_{+\infty} \exp = +\infty$.
5. *La fonction exponentielle est dérivable et* $\exp' x = \exp x$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *Elle est convexe et* $\exp x \geq 1 + x$.

Exponentielle

Pour $x \in \mathbb{R}$ on note aussi e^x pour $\exp x$.

Proposition

La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :

1. $\exp(\ln x) = x$ *pour tout* $x > 0$ *et* $\ln(\exp x) = x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$
2. $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$
3. $\exp(nx) = (\exp x)^n$
4. $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ *est une fonction continue, strictement croissante vérifiant* $\lim_{-\infty} \exp x = 0$ *et* $\lim_{+\infty} \exp = +\infty$.
5. *La fonction exponentielle est dérivable et* $\exp' x = \exp x$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *Elle est convexe et* $\exp x \geq 1 + x$.

$$\lim_{-\infty} x^n \exp x = 0 \qquad \lim_{-\infty} x^n \exp x = 0 \qquad \lim_{+\infty} x^n \exp -x = 0$$

$$\lim_{+\infty} \frac{\exp x}{x} = +\infty \qquad \lim_{+\infty} \frac{\exp x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1$$

Exercice

1. *Montrer que* $\ln(1+e^x) = x + \ln(1+e^{-x})$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
2. *Soit la fonction* f *définie sur* $]-3,3[$ *par :*

$$f(x) = \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)$$

a) Montrer que f *est bien définie sur* $]-3,3[$.
b) Étudier la parité de f.

Exercice

1. *Montrer que* $\ln(1+e^x) = x + \ln(1+e^{-x})$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
2. *Soit la fonction* f *définie sur* $]-3,3[$ *par :*

$$f(x) = \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)$$

a) Montrer que f *est bien définie sur* $]-3,3[$.
b) Étudier la parité de f.

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $1 + e^x = e^x(e^{-x}+1)$
$\Longrightarrow \ln(1+e^x) = \ln(e^x(e^{-x}+1)) = \ln(e^x) + \ln(e^{-x}+1) = x + \ln(e^{-x}+1)$.

Exercice

1. *Montrer que* $\ln(1+e^x) = x + \ln(1+e^{-x})$*, pour tout* $x \in \mathbb{R}$*.*
2. *Soit la fonction* f *définie sur* $]-3,3[$ *par :*

$$f(x) = \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)$$

a) Montrer que f *est bien définie sur* $]-3,3[$*.*
b) Étudier la parité de f*.*

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $1+e^x = e^x(e^{-x}+1)$
$\Longrightarrow \ln(1+e^x) = \ln(e^x(e^{-x}+1)) = \ln(e^x)+\ln(e^{-x}+1) = x+\ln(e^{-x}+1)$.

2) a) $x \in D_f \iff \dfrac{3-x}{3+x} > 0$ et $3+x \neq 0 \iff x \in]-3,3[$.

Exercice

1. *Montrer que* $\ln(1+e^x) = x + \ln(1+e^{-x})$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
2. *Soit la fonction* f *définie sur* $]-3,3[$ *par :*

$$f(x) = \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)$$

a) Montrer que f *est bien définie sur* $]-3,3[$.
b) Étudier la parité de f.

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $1+e^x = e^x(e^{-x}+1)$
$\Longrightarrow \ln\left(1+e^x\right) = \ln(e^x(e^{-x}+1)) = \ln\left(e^x\right) + \ln\left(e^{-x}+1\right) = x + \ln\left(e^{-x}+1\right)$.

2) a) $x \in D_f \iff \dfrac{3-x}{3+x} > 0$ et $3+x \neq 0 \iff x \in]-3,3[$.

b) $\forall x \in]-3,3[$, $f(-x) = \ln\left(\dfrac{3-(-x)}{3+(-x)}\right) = \ln\left(\dfrac{3+x}{3-x}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{\frac{3-x}{3+x}}\right)$

$= -\ln\left(\dfrac{3-x}{3+x}\right) = -f(x)$, donc la fonction f est impaire.

arcsin

Définition

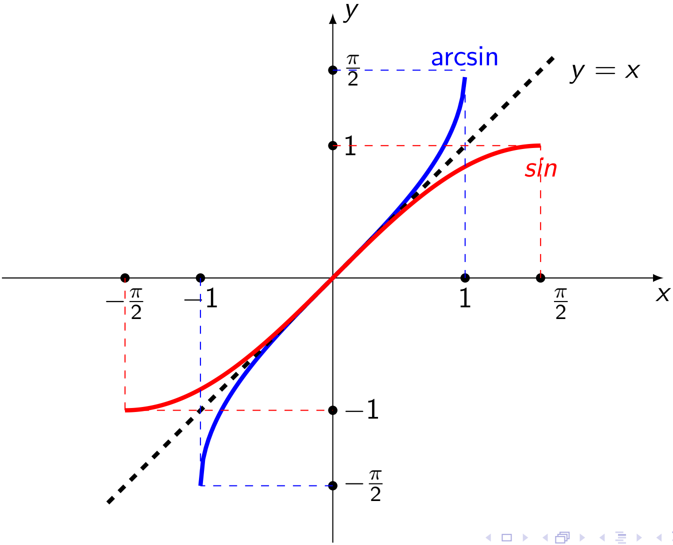
La fonction sin *est continue strictement croissante sur l'intervalle* $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, *donc elle définit une bijection de* $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ *sur* $[-1;1]$. *La fonction réciproque est appelée* arcsin *et elle est continue strictement croissante sur* $[-1;1]$.

$$y = \arcsin(x), |x| \leq 1 \iff x = \sin(y), |y| \leq \frac{\pi}{2}$$

On a $\forall x \in [-1,1]$, $\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2$ et $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

$\forall x \in]-1,1[, \tan(\arcsin(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Les courbes des fonctions sin et arcsin



Exercice

Déterminer arcsin *de* $0, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice

Déterminer arcsin *de* $0, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$

Pour trouver ces valeurs, on rappelle que $\sin(\arcsin(x)) = x,\ \forall x \in [-1, 1]$.
Soit $\theta = \arcsin(x)$.
$\arcsin(0) = \theta \Longrightarrow \sin(\theta) = 0 \Longrightarrow \theta = 0$. Donc $\arcsin(0) = 0$.
$\arcsin(1) = \theta \Longrightarrow \sin(\theta) = 1 \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$. Donc $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$.
$\arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \theta \Longrightarrow \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$. Donc $\arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$.
$\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \theta \Longrightarrow \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$. Donc $\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3}$.

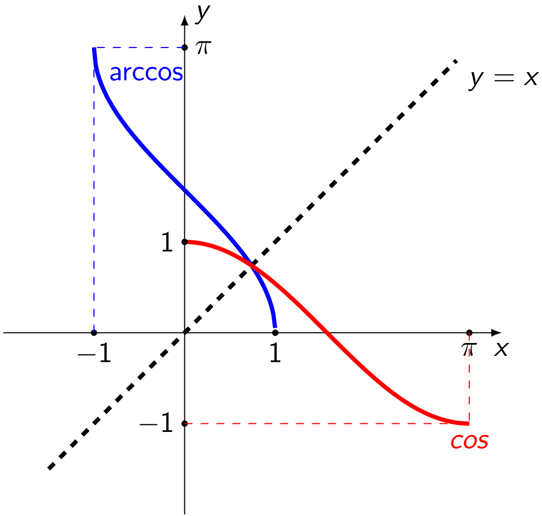
arccos

Définition

La fonction cos *est continue strictement décroissante sur l'intervalle* $[0;\pi]$*, donc elle définit une bijection de* $[0;\pi]$ *sur* $[-1;1]$*. La fonction réciproque est appelée* arccos *et elle est continue strictement décroissante sur* $[-1;1]$*.*
$y = \arccos(x), |x| \leq 1 \iff x = \cos(y), y \in [0,\pi]$

arccos

Les courbes des fonctions cos et arccos



arctg

Définition

La fonction tan *est continue strictement croissante sur l'intervalle* $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, *donc elle définit une bijection de* $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ *sur* $\mathbb{R}$. *La fonction réciproque est appelée* arctan *et elle est continue strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.

$y = \arctan(x), xin\mathbb{R} \iff x = \tan(y), |y| < \frac{\pi}{2}$

Les courbes des fonctions tan et arctan