Mathématiques 1

Chapitre 4 : Développements limités et applications (Partie 2)

Mohamed Essaied Hamrita

IHEC, Université de Sousse

Novembre 2021

Table des matières

Calcul des limites

Dans cette partie, on donnera les applications des développements limités. Les développements limités permettent de remplacer une fonction par une fonction polynôme plus simple et de lever une possible indétermination lors du calcul des limites. D'une façon générale, une fonction $f(x)$, quand $x \longrightarrow 0$ est **équivalente** au **premier terme non nul** de son éventuel développement limité au voisinage de 0.

Exemple 1

Montrer que :

$$\lim_{0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2} = \frac{3}{2}; \qquad \lim_{0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3} = \frac{1}{6}$$

Calcul des limites

Au voisinage de 0, on a $e^{x^2} = 1 + x^2 + x^2\varepsilon_1(x^2)$

et $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_2(x)$, d'où $\dfrac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2} \underset{0}{\sim} \dfrac{1 + x^2 - 1 + \dfrac{x^2}{2}}{x^2} \underset{0}{\sim} \dfrac{3}{2}$.
De même, pour la deuxième limite,

$$\begin{aligned}
\frac{x(e^x+1) - 2(e^x-1)}{x^3} &\underset{0}{\sim} \frac{x(1+x+\frac{x^2}{2}+1) - 2(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-1)}{x^3} \\
&\underset{0}{\sim} \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3} \underset{0}{\sim} \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Soit f une fonction dérivable en a et admettant un $DL_n(a)$. On note c_n le premier coefficient non nul, autre que c_0 et c_1.
$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_n(x-a)^n + o(x)$.
L'équation de la tangente T à la courbe de f au point $M(a, f(a))$ est : $y = c_0 + c_1(x-a)$. La position de la courbe de f par rapport à sa tangente est donnée par l'étude du signe de $c_n(x-a)^n$:

- Si n est pair et $c_n > 0$, alors au voisinage de a, la courbe de f est située au dessus de la tangente.
- Si n est pair et $c_n < 0$, alors au voisinage de a, la courbe de f est située au dessous de la tangente.
- Si n est impair, alors au voisinage de a, $c_n(x-a)^n$ change de signe et la courbe de f traverse de la tangente. $M(a, f(a))$ est un point d'inflexion.

Exemple 2

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)$.

1) Déterminer D_f, le domaine de définition de f.

2) Déterminer le $DL_2(0)$ de f. En déduire $\lim\limits_{0} f(x)$.

3) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point $(0, f(0))$ et étudier la position de la courbe par rapport à cette tangente.

Étude des branches infinies

Si, au voisinage de l'infini, on peut écrire f sous la forme : $f(x) = ax + b + \dfrac{c_n}{x^n} + o(x)$, alors la courbe de f admet la droite (Δ) d'équation $y = ax + b$ comme asymptote oblique au voisinage de l'infini. La position de la courbe de f par rapport à (Δ) dépend du signe de $\dfrac{c_n}{x^n}$.

Exemple 3

Étudier la branche infinie au $V(+\infty)$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = (x^2 - 1)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$