Liste Exercices

Exercice 1

1) En utilisant la notion d'équivalence, déterminer les limites suivantes:

$$\text{a) } \lim_{0} \frac{\ln(1+4x)}{\sin(3x)}, \quad \text{b) } \lim_{0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}, \quad \text{c) } \lim_{e} \frac{\ln(\ln x)}{x-e}, \quad \text{d) } \lim_{\pi} \frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}, \qquad \text{e) } \lim_{0} \frac{\ln(\cos x)}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$$

2) En utilisant la règle de l'Hopital, déterminer les limites suivantes:

$$\text{a) } \lim_{2} \frac{\sqrt{7+x}-3}{x-2}, \quad \text{b) } \lim_{2} \frac{4}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}, \quad \text{c) } \lim_{+\infty} \frac{x^2}{2^x}, \quad \text{d) } \lim_{1} x^{\frac{1}{x-1}}, \quad \text{e) } \lim_{+\infty} \frac{e^x}{\ln x}$$

Exercice 2

1) Enoncer le théorème des accroissements finis et l'appliquer à la fonction $\sqrt{x}$ sur lintervalle $[10000, 10001]$.
En déduire: $100 + \frac{1}{202} < \sqrt{10001} < 100 + \frac{1}{200}$.

2) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que:

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}, \ \forall\, x > 0$$

Exercice 3

Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuit'e sur $\mathbb{R}$?

$$a)\ f(x) = \sin x \cdot \sin\frac{1}{x} \ ; \quad b)\ g(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) \ ; \quad c)\ h(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}\ .$$

Exercice 4

Soit la fonction réelle, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\phi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que la fonction ϕ et continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que $2\phi(x) = x^3\phi'(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5

Soit la fonction f définie par:

$$f(x) = \frac{\sqrt{\frac{1}{x} + x} - \sqrt{\frac{1}{x} - x}}{x + |x|}$$

1) Déterminer le domaine de définition de f, D_f.
2) Peut-on prolonger par continuité la fonction f en 0?

Exercice 6

Soit la fonction f définie par:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4 - x^2}{2} & \text{si } x \in]-\infty, 1[; \\ \dfrac{3}{2x} & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur tout $\mathbb{R}$.
2) Enoncer le théorème des accroissement finis.
3) Vérifier que f satisfait aux hypothèses de ce théorrème sur $[0, 3]$ et déterminer toutes les valeurs c répondant à ce théorème.

Exercice 7

Soit la fonction réelle, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - x}{\ln |x - 1|} & \text{si } x \neq 1; \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1) Examiner la continuité de f en $x = 1$.
2) Etudier la dérivabilité de f en $x = 1$.

Exercice 8

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x \ln x}{x^2 - 1}$.

1) Définir la fonction g prolongement de la fonction f.
2) Déterminer $\lim\limits_{0} f(x)$