Epreuve de **Maths-Analyse** Date : **07/01/2021** Durée :**02 heures** Nbr de Pages : **02**	**Université de Sousse** IHEC **Institut des Hautes Etudes Commerciales de Sousse**	Niveau : **1ére Année** Filière : **Licence Fondamentale en Gestion** Enseignants responsables : **NEFZI Hana** **BOUBAKER Heni** **HAMRITA Mohamed** **Année Univ : 2020– 2021**

Exercice 1 :

$Soit\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

1) Déterminer le domaine de définition de f .
2) a) Rappeler les développements limités de e^x et $ln(1+x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 3.
3) b) Montrer que le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 2 s'écrit :$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sqrt{\boldsymbol{e}} + \frac{\sqrt{e}}{8}\boldsymbol{x} + \frac{\sqrt{e}}{128}\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{o}(\boldsymbol{x}^2)$
4) a) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
   Soient g son prolongement par continuité et C_g sa courbe représentative dans un repère orthonormé
   b) Donner l'équation de la tangente Ʈ à C_g , au point $M\left(0, \sqrt{e}\right)$
   c) Préciser la position relative de Ʈ par rapport à C_g . Justifier.
   d) En déduire la convexité de C_g au voisinage de 0.
5) a) Calculer $g'(x)$ $\forall x \in IR^*$.
   c) Montrer que $\forall x \in IR^*$ $g'(x) = \frac{f(x)}{x^2}h(x)$ où h est une fonction que l'on précisera.
   c) Calculer $g'(0)$.
6) a) Justifier que g est-elle de classe C^1 sur IR^* .
   b) Déterminer le développement limité de h au voisinage de 0 à l'ordre 2
   c) g est-elle de classe C^1 sur IR ?
7) a) Représenter le tableau de variation de la fonction h sur IR.
   b) En déduire le signe de h sur IR.
   c) Calculer $\lim_{+\infty} g(x)\ et\ \lim_{-\infty} g(x)$
   d) En déduire les variations de g.
8) montrer que l'équation $g(x) = \frac{3}{4}e$ admet une solution unique $\alpha \in]ln2, ln11[$

Exercice 2 :

Soit $f(x,y) = \frac{x}{y} e^{\frac{y}{x}}$

1) Déterminer le domaine de définition de f .
2) Montrer que f est de classe C^2 sur IR^2
3) Calculer les dérivées partielles premières et secondes de f.
4) Montrer que f est homogène et , préciser son degré d'homogénéité.
5) Vérifier le théorème d'Euler sur f .

6) a) Calculer l'élasticité partielle de f par rapport à la variable $x\ sur\ IR^* * IR^*$

b) Calculer, de deux façons différentes, l'élasticité partielle de f par rapport à la variable $y\ sur\ IR^* * IR^*$.

7) a) Déterminer les extrémums éventuels de f sur D_f.

b) Etudier leurs natures.

Exercice 3 :

En utilisant les équivalents, calculer la limite de chacune des fonctions suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1+e^x-2\sqrt{1+x}}{1-cos}$; b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{xlnx+1-x}{(x-1)lnx}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} (x-1)^2 sin\left(\frac{1}{x-1}\right) + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$; d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\frac{1}{x}\left(1+\frac{x}{2}\right)ln(1+)}{sinx+cosx- \quad x}$