Mathématiques 2

Chapitre 5 : Applications linéaires

Mohamed Essaied Hamrita

IHEC, Université de Sousse

Avril 2021

Table des matières

Définitions

Définition 1

Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application de E dans F. On dit que f est une ***application linéaire*** *si*

$$\begin{array}{lrcl} \forall x, y \in E & f(x+y) & = & f(x)+f(y) \\ \forall x \in E,\ \forall \alpha \in \mathbb{R} & f(\alpha x) & = & \alpha f(x) \end{array}$$

Remarque 1

- $f(0) = 0$.
- $f(-x) = -f(x)$.
- *Si $F = E$, f est appelée un* ***endomorphisme*** *de E.*

Définitions

Théorème 1

Soient E et F deux espaces vectoriels, et f une application de E dans F.
Les trois affirmations suivantes sont équivalentes :
1) f est une application linéaire.
2) $\forall x, y \in E, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\quad f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ ..
3) Pour tout $n \geq 1$,

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in E, \ \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \quad f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

Exemple 1

f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$: $(x, y) \longmapsto (x + y, 2x + 3y, -x + y)$ est une application linéaire

Définitions

Exercice 1

Vérifier que f définie ci dessous est une application linéaire.
f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$: $(x, y) \longmapsto (2x + y, x - 3y, -x + 2y)$

Soient $X_1 = (x_1, y_1), X_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Vérifions que $f(\alpha X_1 + \beta X_2) = \alpha f(X_1) + \beta f(X_2)$.

$$
\begin{aligned}
f(\alpha X_1 + \beta X_2) &= f(\alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2)) \\
&= f((\alpha x_1 + \beta x_2), (\alpha y_1 + \beta y_2)) \\
&= (2(\alpha x_1 + \beta x_2) + (\alpha y_1 + \beta y_2), (\alpha x_1 + \beta x_2) \\
&\quad - 3(\alpha y_1 + \beta y_2), -(\alpha x_1 + \beta x_2) + 2(\alpha y_1 + \beta y_2)) \\
&= \alpha(2x_1 + y_1, x_1 - 3y_1, -x_1 + 2y_1) \\
&\quad + \beta(2x_2 + y_2, x_2 - 3y_2, -x_2 + 2y_2) \\
&= \alpha f(X_1) + \beta f(X_2)
\end{aligned}
$$

Définitions

Théorème 2

Soient E et F deux espaces vectoriels, et f une application linéaire de E dans F.
Soit A un sous-espace vectoriel de E. Alors $f(A) = \{f(a),\ a \in A\}$, est un sous-espace vectoriel de F.
Soit B un sous-espace vectoriel de F. Alors $f^{-1}(B) = \{b \in E,\ f(b) \in B\}$, est un sous-espace vectoriel de E.

Noyau-Image

Définition 2

Soient E, F deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. On appelle
- image de f et on note Im(f) le sous-espace vectoriel de F :
Im$(f) = f(E) = \{f(X),\ X \in E\}$.
- noyau de f et on note Ker(f) le sous-espace vectoriel de E :
Ker$(f) = f^{-1}(\{0\}) = \{X \in E,\ f(X) = 0\}$.

Exercice 2

Soit $f : (x, y, z) \mapsto (2x + y, x - 3y + z)$.
Déterminer Ker(f) et Im(f).

Noyau-Image

- Ker$(f) = \{X \in E = \mathbb{R}^3 \,/ f(X) = 0\} \Longrightarrow 2x + y = 0$ et $x - 3y + z = 0$ $\Longrightarrow y = -2x$ et $z = -7x$.
Donc, $X \in$ Ker$(f) \Longleftrightarrow X = (x, y, z) = (x, -2x, -7x) = x(1, -2, -7)$.
Soit Ker(f)= Vect$((1, -2, -7))$.
Ker(f) est le sous espace vectoriel engendré par $(1, -2, -7)$.
- Im$(f) = \{(2x + y, x - 3y + z) \in F = \mathbb{R}^2 \,/ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$
Or $(2x + y, x - 3y + z) = x(2, 1) + y(1, -3) + z(0, 1)$, donc Im$(f)$ = Vect$((2, 1), (1, -3), (1, 0))$.
Im$(f) \subset \mathbb{R}^2$ et $\{(1, -3), (0, 1)\}$ un système libre, donc Im$(f) = \mathbb{R}^2$.

Noyau-Image

Proposition 1

Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. L'application f est

- ***surjective*** *si et seulement si $Im(f) = F$.*
- ***injective*** *si et seulement si $Ker(f) = \{0\}$*

Théorème 3 (Théorème du rang)

Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Si E est de dimension finie, il en est de même pour $Im(f)$ et $Ker(f)$ et :

$$dim(Im(f)) + dim(Ker(f)) = dim(E) \ .$$

Noyau-Image

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *l'application linéaire définie par*

$$f(x,y) = (x+y, x-y, x+y)$$

1) Déterminer le noyau de f*, son image.* f *est-elle injective ? surjective ?*
2) Vérifier le théorème du rang.

1) $\text{Ker}(f) = \{X \in E = \mathbb{R}^2 \,/ f(X) = 0\} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y = & 0 \\ x-y = & 0 \\ x+y = & 0 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow x = y = 0$, Donc $\text{Ker}(f) = \{(0,0) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$. On conclut que f est injective et $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$.

Noyau-Image

$$\text{Im}(f) = \{(x+y, x-y, x+y) \in \mathbb{R}^3 \ /(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$
$$= x(1,1,1) + y(1,-1,1) = \text{Vect}((1,1,1),(1,-1,1))$$

$\text{Im}(f)$ est le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ engendré par le système $\{(1,1,1),$ $(1,-1,1)\}$.
$\text{Im}(f) = \text{Vect}((1,1,1),(1,-1,1)) \neq \mathbb{R}^3$, donc f n'est pas surjective.
2) On a $\text{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$, donc $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$ et $\dim(\text{Im}(f)) = 2$ et $\dim(E) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$, ainsi le théorème du rang est vérifié
$\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f) = 0 + 2 = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$.

Théorème 4

Soit $f : E \mapsto F$ une application linéaire avec E et F de dimension finie. Supposons dim $E =$ dim F. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) f est bijective
(ii) f est injective
(iii) f est surjective

Autrement dit, dans le cas d'une application linéaire entre deux espaces de même dimension, pour démontrer qu'elle est bijective, il suffit de démontrer l'une des deux propriétés : injectivité ou surjectivité.

Exemple 2

Soit $f(x, y, z) = (x - y + z, x + y + z, x - 2z)$ une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Montrer que f est bijective.

On a $E = \mathbb{R}^3 = F$, donc dim $E =$ dim F. Pour montrer que f est bijective, il suffit de vérifier que f est injective ou f est surjective.

Ker $f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/ f(x, y, z) = (0, 0, 0)\} \Longleftrightarrow \begin{cases} x - y + z = & 0 \\ x + y + z = & 0 \\ x - 2z = & 0 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0)$, donc Ker $f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, d'où f est injective.
dim $E =$ dim F et f est injective $\Longleftrightarrow$ f est bijective.

Exercice 4

Soit $f(x, y, z) = (-2x + y, y - z, x + y + z)$ une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Montrer que f est bijective.

Matrice d'une application linéaire

Définition 3

Soient E *un espace vectoriel de dimension* n, $\mathcal{B}_E = (e_1, \ldots, e_n)$ *une base de* E, F *un espace vectoriel de dimension* m *et* $\mathcal{B}_F = (f_1, \ldots, f_m)$ *une base de* F. *Soit* f *une application linéaire de* E *dans* F *définie par*

$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ *et* $j = 1, 2, \ldots, n$.

On appelle matrice de f *dans les bases* $(e_1, \ldots, e_n)$ *et* $(f_1, \ldots, f_m)$ *la matrice* M *définie par* $M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

On la note par $M = Mat(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$.

Matrice d'une application linéaire

Exemple 3

Soit $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (2x + y, x - 3y + z)$.
Déterminer la matrice de f.

$E = \mathbb{R}^3$, donc (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ où $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$.
$f(e_1) = f(1, 0, 0) = (2, 1) = 2f_1 + f_2$
$f(e_2) = f(0, 1, 0) = (1, -3) = f_1 - 3f_2$
$f(e_3) = f(0, 0, 1) = (0, 1) = f_2$
Donc $Mat(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

On peut déterminer la matrice de f autrement.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + y \\ x - 3y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = MX.$$

Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Déterminer l'application linéaire f associée à A.

Puisque la matrice est carré d'ordre 3, alors f est un endomorphisme dans $\mathbb{R}^3$.

$$f(X) = AX = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y+2z \\ -x+2y+z \\ -3z \end{pmatrix}.$$

$$f(x,y,z) = (2x+y+2z, -x+2y+z, -3z).$$

Matrice d'une application linéaire

Proposition 2

Soient f *et* g *deux applications linéaires de* E *dans* F*. Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$*.*
$Mat(f+g, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = Mat(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) + Mat(g, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$.
$Mat(\lambda f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = \lambda Mat(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$.
Soient $f : E \mapsto F$ *et* $g : F \mapsto G$ *deux applications linéaires.*
$Mat(g \circ f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G) = Mat(g, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G) Mat(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$.

Exercice 6

Soient $f(x, y) = (x - y, x + 2y, 2x - y)$ *et*
$g(x, y, z) = (x - y + 2z, y - z, x + z, x + y + z)$ *deux appliations linéaires.*
Déterminer la matrice de $g \circ f$*.*

Matrice d'une application linéaire

$$Mat(f,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix} \text{ et } Mat(g,\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } Mat(g\circ f,\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4 & -5\\ -1 & 3\\ 3 & -2\\ 4 & 0\end{pmatrix}$$

Rang d'une application linéaire

Définition 4

Soit $f : E \mapsto F$ *une application linéaire. On appelle rang de* f*, noté* $rg\ f$*, dim(Im* f*)* $= rg(Mat(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$.

Exercice 7

Soit $f(x, y, z) = (x - y + 2z, z, x - y)$ *une application linéaire. Déterminer le rang de* f*.*

$$Mat(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$|M| = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, donc $rg(M) = 3$. Ainsi $rg(f) = 3$.

Proposition 3

- *f est bijective si et seulement si $A = Mat(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$ est inversible.*
- *Si f est bijective, alors la matrice associée à f^{-1} dans la base $\mathcal{B}_E$ est A^{-1}.*

Exercice 8

Soit $f(x, y, z) = (x - y + 2z, z, x - y)$ une application linéaire. Montrer que f est bijective.

$$Mat(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$|M| = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, Donc M est inversible $\Longrightarrow f$ est bijective.

Changement de base

Définition 5

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *et* $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ *deux bases de* E. *On appelle matrice de passage de la base* $\mathcal{B}$ *vers la matrice* $\mathcal{B}'$ *la matrice* $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, *dont les colonnes sont formées des coordonnées des vecteurs* e'_i *dans la base* $\mathcal{B}$.

Exemple 4

Soit $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (e_1 = (1,0), e_2 = (0,1))$ *la base canonique et* $\mathcal{B}' = (e'_1 = (1,1), e'_2 = (-1,2)$. *Vérifier que* $\mathcal{B}'$ *est une base de* E *et déterminer la matrice de passage* $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

Pour vérifier que $\mathcal{B}'$ est une base, il suffit de vérifier que le système $S = (e'_1, e'_2)$ est libre. Pour ce faire, on peut procéder de deux manières ;

- $\lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$,
- S est libre $\Longleftrightarrow |S| \neq 0$.

Changement de bases

- $\lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ et $-\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \Longrightarrow$ $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, donc S est libre et par suite $\mathcal{B}'$ est une base de E.
- $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, donc S est libre.

Pour déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, il faut exprimer e'_1 et e'_2 en fonction de e_1 et e_2.
$e'_1 = a_1 e_1 + a_2 e_2 \Longrightarrow (1,1) = a_1(1,0) + a_2(0,1) = (a_1, a_2)$.
$e'_2 = a_3 e_1 + a_4 e_2 \Longrightarrow (-1,2) = a_3(1,0) + a_4(0,1) = (a_3, a_4)$.
Donc $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Proposition 4

- *Soit* X *la matrice des coordonnées d'un vecteur* u *de* E *dans la base* $\mathcal{B}$ *et* X_1 *la matrice des coordonnées du même vecteur* u *dans la base* $\mathcal{B}_1$, *alors* $X = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} X_1$ *ou* $X_1 = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}^{-1} X$.
- $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ *est inversible et son inverse est égale à la matrice de passage de la base* $\mathcal{B}'$ *vers la base* $\mathcal{B}$, *i.e ;* $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}^{-1}$.
- *Si* $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$ *sont trois bases, alors* $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$.

Changement de bases

Exercice 9

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ *et* $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ *deux bases de* $E = \mathbb{R}^3$ *tels que :*
$e_1 = (1, 0, 1)$, $e_2 = (1, 1, 0)$, $e_3 = (2, 2, 3)$, $e'_1 = (0, -1, -2)$,
$e'_2 = (8, 6, 11)$ *et* $e'_3 = (-2, -1, -4)$.
1) Déterminer la matrice P *de passage de* $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{B}'$.
2) Déterminer, de deux manières, la matrice Q *de passage de* $\mathcal{B}'$ *à* $\mathcal{B}$.
3) Soit $V = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *dans la base* $\mathcal{B}$. *Déterminer les coordonnées de* V *dans la base* $\mathcal{B}'$.

1) Exprimons e'_1, e'_2 et e'_3 en fonction de e_1, e_2 et e_3.
$e'_1 = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \Longrightarrow (0, -1, -2) = a_1(1, 0, 1) + a_2(1, 1, 0) + a_3(2, 2, 3) \Longrightarrow a_1 + a_2 + 2a_3 = 0$, $a_2 + 2a_3 = -1$ et $a_1 + 3a_3 = -2$ $\Longrightarrow a_1 = 1$, $a_2 = 1$ et $a_3 = -1$.

Changement de bases

$e'_2 = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 \Longrightarrow (8, 6, 11) = b_1(1, 0, 1) + b_2(1, 1, 0) + b_3(2, 2, 3)$
$\Longrightarrow b_1 + b_2 + 2b_3 = 8,\ b_2 + 2b_3 = 6$ et $b_1 + 3b_3 = 11 \Longrightarrow b_1 = 2,\ b_2 = 0$
et $b_3 = 3$.
$e'_3 = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 \Longrightarrow (-2, -1, -4) = c_1(1, 0, 1) + c_2(1, 1, 0) + c_3(2, 2, 3) \Longrightarrow c_1 + c_2 + 2c_3 = -2,\ c_2 + 2c_3 = -1$ et $c_1 + 3c_3 = -4$
$\Longrightarrow c_1 = -1,\ c_2 = 1$ et $c_3 = -1$.

Ainsi, $P = (a\ b\ c) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

2) Q est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$, donc pour la déterminer

- on doit exprimer e_1, e_2 et e_3 en fonction de e'_1, e'_2 et e'_3,
- ou bien, $Q = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = P^{-1}$

Changement de bases

$e_1 = a_1e'_1 + a_2e'_2 + a_3e'_3 \Longrightarrow (1,0,1) = a_1(0,-1,-2) + a_2(8,6,11) + a_3(-2,-1,-4)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 8a_2 - 2a_3 & = 1 \\ -a_1 + 6a_2 - a_3 & = 0 \\ -2a_1 + 11a_2 - 4a_3 & = 1 \end{cases} \Longrightarrow a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = 0,\ a_3 = -\frac{1}{2}.$$

$e_2 = b_1e'_1 + b_2e'_2 + b_3e'_3 \Longrightarrow (1,1,0) = b_1(0,-1,-2) + b_2(8,6,11) + b_3(-2,-1,-4)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 8b_2 - 2b_3 & = 1 \\ -b_1 + 6b_2 - a_3 & = 1 \\ -2b_1 + 11b_2 - 4b_3 & = 0 \end{cases} \Longrightarrow b_1 = \frac{1}{6},\ b_2 = \frac{1}{3},\ b_3 = \frac{5}{6}.$$

$e_3 = c_1e'_1 + c_2e'_2 + c_3e'_3 \Longrightarrow (2,2,3) = c_1(0,-1,-2) + c_2(8,6,11) + c_3(-2,-1,-4)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 8c_2 - 2c_3 & = 2 \\ -c_1 + 6c_2 - c_3 & = 2 \\ -2c_1 + 11c_2 - 4c_3 & = 3 \end{cases} \Longrightarrow c_1 - \frac{1}{3},\ c_2 = c_3 = \frac{1}{3}.$$

Changement de bases

Donc, $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Pour la deuxième méthode, calculer P^{-1}.

3) $V = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, les coordonnées de V dans la base $\mathcal{B}'$ sont données par

$$PV = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Changement de bases

Théorème 5

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Soient $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}'_E$ deux bases de E et $\mathcal{B}_F$, $\mathcal{B}'_F$ deux bases de F. On note $P = P_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}'_E}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{B}'_E$ et $Q = P_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}'_F}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_F$ à $\mathcal{B}'_F$. Soit $A = Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$ la matrice de l'application linéaire f de la base $\mathcal{B}_E$ vers la base $\mathcal{B}_F$. Soit $B = Mat_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(f)$ la matrice de l'application linéaire f de la base $\mathcal{B}'_E$ vers la base $\mathcal{B}'_F$.
On a alors la relation suivante :

$$B = Q^{-1}AP$$

Changement de bases

Théorème 5

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Soient $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}'_E$ deux bases de E et $\mathcal{B}_F$, $\mathcal{B}'_F$ deux bases de F. On note $P = P_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}'_E}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{B}'_E$ et $Q = P_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}'_F}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_F$ à $\mathcal{B}'_F$. Soit $A = Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$ la matrice de l'application linéaire f de la base $\mathcal{B}_E$ vers la base $\mathcal{B}_F$. Soit $B = Mat_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(f)$ la matrice de l'application linéaire f de la base $\mathcal{B}'_E$ vers la base $\mathcal{B}'_F$.
On a alors la relation suivante :

$$B = Q^{-1}AP$$

Dans le cas particulier d'un endomorphisme $(E = F)$, nous obtenons une formule plus simple :

$$B = P^{-1}AP$$

On dit que les matrices A et B sont **semblables**.

Changement de bases

Exemple 5

Soient les deux bases de $\mathbb{R}^3$ *:*

$$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ et } \mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *l'application linéaire dont la matrice dans la base* $\mathcal{B}_1$ *est :*

$$A = Mat_{\mathcal{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice de f *dans la base* $\mathcal{B}_2$, $B = Mat_{\mathcal{B}_2}(f)$.

Changement de bases

f est un endomorphisme, donc $B = P^{-1}AP$ où P est la matrice de passage de l'application f de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$.
Si on note $\mathcal{B}_1 = (v_1, v_2, v_3)$ et $\mathcal{B}_2 = (u_1, u_2, u_3)$, exprimons u_1, u_2 et u_3 en fonction de v_1, v_2 et v_3.

$$u_1 = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 \iff \begin{cases} a_1 + 3a_3 & = 1 \\ a_1 - a_2 + 2a_3 & = -1 \\ -a_3 & = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow a = (a_1, a_2, a_3) = (1, 2, 0).$

$$u_2 = b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3 \iff \begin{cases} b_1 + 3b_3 & = 0 \\ b_1 - b_2 + 2b_3 & = 1 \\ -b_3 & = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow b = (b_1, b_2, b_3) = (0, -1, 0).$

$$u_3 = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 \iff \begin{cases} c_1 + 3c_3 & = 0 \\ c_1 - c_2 + 2c_3 & = 0 \\ -c_3 & = -1 \end{cases}$$

$\Longrightarrow c = (c_1, c_2, c_3) = (-3, -1, 1).$

Changement de bases

Ainsi, $P = (a, b, c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Remarque 2

On peut déterminer P autrement. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a
$P_{B_1,B_2} = P_{B_1,B} P_{B,B_2} = P^{-1}_{B,B_1} P_{B,B_2}$
Avec $P_{B,B_1} = (v_1, v_2, v3)$ et $P_{B,B_2} = (u_1, u_2, u3)$.

Cherchons P^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Changement de bases

Soit $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.