Mathématiques 2

Chapitre 4 : Espaces vectoriels

Mohamed Essaied Hamrita

IHEC, Université de Sousse

Avril 2022

Table des matières

Définition 1

*Un **espace vectoriel** E est un ensemble sur lequel sont définies **une addition interne** et **une multiplication externe** vérifiants les propriétés suivantes :*

- $\forall u, v \in E,\ u + v = v + u$
- $\forall u, v, w \in E,\ u + (v + w) = (u + v) + w$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall u, v \in E,\ \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
- $\forall u \in E,\ 0 + u = 0$ *et* $0u = 0$
- $1u = u$
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u \in E,\ (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

Définition 1

*Un **espace vectoriel** E est un ensemble sur lequel sont définies **une addition interne** et **une multiplication externe** vérifiants les propriétés suivantes :*

- $\forall u, v \in E,\ u + v = v + u$
- $\forall u, v, w \in E,\ u + (v + w) = (u + v) + w$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall u, v \in E,\ \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
- $\forall u \in E,\ 0 + u = 0$ *et* $0u = 0$
- $1u = u$
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u \in E,\ (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

Exemple 1

$\mathbb{R}^2$ *est espace vectoriel.*
L'ensemble $\mathbb{N}$ *n'est pas un espace vectoriel.*

Définition 2 (Sous espace vectoriel)

Soit E un espace vectoriel. Soit $V \subset E$ muni par les deux lois (interne et externe) vérifiant les propriétés d'un espace vectoriel. V est appelé ***sous-espace vectoriel*** *de E.*

Définition 2 (Sous espace vectoriel)

Soit E un espace vectoriel. Soit $V \subset E$ muni par les deux lois (interne et externe) vérifiant les propriétés d'un espace vectoriel. V est appelé ***sous-espace vectoriel*** *de E.*

RQ : Pour vérifier qu'un ensemble V est un $s.e.v$ de E, il suffit de vérifier les deux propriétés suivantes :

- $0 \in V$, (V est non vide).
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall X, Y \in V$, $\alpha X + \beta Y \in V$.

Définition 2 (Sous espace vectoriel)

*Soit E un espace vectoriel. Soit $V \subset E$ muni par les deux lois (interne et externe) vérifiant les propriétés d'un espace vectoriel. V est appelé **sous-espace vectoriel** de E.*

RQ : Pour vérifier qu'un ensemble V est un $s.e.v$ de E, il suffit de vérifier les deux propriétés suivantes :

- $0 \in V$, (V est non vide).
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall X, Y \in V$, $\alpha X + \beta Y \in V$.

Exercice 1

1) Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}$. Vérifier que E est un $s.e.v$ de $\mathbb{R}^3$.
2) Vérifier que $F = \{(x + z, x - y + z, z) : x, y, z \in \mathbb{R}^3\}$ est un $s.e.v$ de $\mathbb{R}^3$.

Théorème 1

Soit F *et* G *deux* $s.e.v$ *de* E*. Alors* $F \cap G$ *est un* $s.e.v$ *de* E*.*
D'une manière plus générale, si $F_1, F_2 \ldots, F_n$ *des* $s.e.v$ *de* E*, alors* $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n$ *est un* $s.e.v$ *de* E*.*

Théorème 1

Soit F et G deux $s.e.v$ de E. Alors $F \cap G$ est un $s.e.v$ de E.
D'une manière plus générale, si $F_1, F_2 \ldots, F_n$ des $s.e.v$ de E, alors $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n$ est un $s.e.v$ de E.

Théorème 2

Soit F et G des sous-espaces vectoriels de E. Alors $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Théorème 1

Soit F *et* G *deux* $s.e.v$ *de* E*. Alors* $F \cap G$ *est un* $s.e.v$ *de* E*.*
D'une manière plus générale, si $F_1, F_2 \ldots, F_n$ *des* $s.e.v$ *de* E*, alors* $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n$ *est un* $s.e.v$ *de* E*.*

Théorème 2

Soit F *et* G *des sous-espaces vectoriels de* E*. Alors* $F \cup G$ *est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si* $F \subset G$ *ou* $G \subset F$*.*

Définition 3 (Combinaison linéaire)

On appelle ***combinaison linéaire*** *de* $u_1, \ldots, u_n$ *un vecteur de* E *de la forme* $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n$*, où* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *sont des scalaires.*

Théorème 1

Soit F et G deux $s.e.v$ de E. Alors $F \cap G$ est un $s.e.v$ de E.
D'une manière plus générale, si $F_1, F_2 \ldots, F_n$ des $s.e.v$ de E, alors $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n$ est un $s.e.v$ de E.

Théorème 2

Soit F et G des sous-espaces vectoriels de E. Alors $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Définition 3 (Combinaison linéaire)

*On appelle **combinaison linéaire** de $u_1, \ldots, u_n$ un vecteur de E de la forme $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des scalaires.*

Théorème 3

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors toute combinaison linéaire d'éléments de F est un élément de F.

Définition 4

Soit E une partie de $\mathbb{R}^n$ et soit $u_1, u_2, \ldots, u_n$ une famille de n vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^n$. On dit que E est ***engendré*** *par $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ssi $\forall X \in E$, X est combinaison linéaire de $u_1, u_2, \ldots, u_n$. On note*
$E =< u_1, u_2, \ldots, u_n >= Vect(u_1, \ldots, u_n)$.

Définition 4

Soit E une partie de $\mathbb{R}^n$ et soit $u_1, u_2, \ldots, u_n$ une famille de n vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^n$. On dit que E est ***engendré*** *par $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ssi $\forall X \in E$, X est combinaison linéaire de $u_1, u_2, \ldots, u_n$. On note*

$E =< u_1, u_2, \ldots, u_n >= Vect(u_1, \ldots, u_n)$.

Exercice 2

1) Soit $E = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = 0\}$. Montrer que $E =< u_1, u_2 >$ où $u_1 = (1, -1, 0)$ et $u_2 = (0, 2, 1)$.

2) Soit $F = \{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0$ et $y + 3z = 0\}$. Montrer que F est engendré par une famille de vecteurs à préciser.

Définition 5

Soit $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *une famille de* n *vecteurs de l'espace* $\mathbb{R}^n$. *On dit que* $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *est une* ***famille libre*** *de* $\mathbb{R}^n$ *(ou* $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *sont* ***linéairement indépendants****) ssi :*

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

.

Exercice 3

1) Soient $u_1 = (-2, -2, 0)$, $u_2 = (1, 1, -1)$ *et* $u_3 = (0, 1, -3)$. *Montrer que* (u_1, u_2, u_3) *est une famille libre de* $\mathbb{R}^3$.
2) La famille $\mathcal{F} = ((1, -1, 2), (0, 1, -3), (2, 1, -5))$ *est-elle libre ?*

Définition 6

*Un ensemble de vecteurs $S = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ dans un espace vectoriel E est **une base** pour E si S **engendre** E et **est libre**.*
($S =< v_1, v_2, \dots, v_n >$ et S et libre).

Définition 6

*Un ensemble de vecteurs $S = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ dans un espace vectoriel E est **une base** pour E si S **engendre** E et **est libre**.*
($S =< v_1, v_2, \dots, v_n >$ et S et libre).

Exercice 4

Soient $U = (2, 3)$ et $V = (1, 0)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Vérifier que (U, V) est une base de $\mathbb{R}^2$.

Définition 6

*Un ensemble de vecteurs $S = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ dans un espace vectoriel E est **une base** pour E si S **engendre** E et **est libre**.*
($S =< v_1, v_2, \ldots, v_n >$ et S et libre).

Exercice 4

Soient $U = (2, 3)$ et $V = (1, 0)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Vérifier que (U, V) est une base de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 4

*Si $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ est une base d'un espace vectoriel E, alors chaque ensemble contenant plus de n vecteurs dans E est linéairement **dépendant**.*

Somme de deux s.e.v

Proposition 1

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.
L'ensemble $H = \{x + y : x \in F,\ y \in G\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Définition 7

Le sous-espace vectoriel H de la proposition précédente est noté $F + G$ et appelé somme de F et G.

Exemple 2

Soit $F = \{X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : x_1 = 0\ \}$ et $G = \{X \in \mathbb{R}^3 \ : x_3 = 0\}$.
Alors $F + G = \mathbb{R}^3$.
En effet, si $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, on a :
$(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{(0, x_2, x_3)}_{\in F} + \underbrace{(x_1, 0, 0)}_{\in G}$ *; et donc $X \in F + G$.*

Somme directe

Définition 8

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. On dit que la somme de F et G est ***directe*** *quand tout élément de $F+G$ s'écrit de manière unique $X+U$ avec $X \in F$ et $U \in G$. En d'autres termes :*

$$\left(X+U=Y+V;\ (X,Y)\in F^2 \text{ et } (U,V)\in G^2\right) \Longrightarrow X=Y \text{ et } U=V$$

On note alors $F \oplus G$ la somme de F et G.

Somme directe

Définition 8

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. On dit que la somme de F et G est ***directe*** *quand tout élément de $F+G$ s'écrit de manière unique $X+U$ avec $X \in F$ et $U \in G$. En d'autres termes :*

$$\left(X+U=Y+V;\ (X,Y)\in F^2 \text{ et } (U,V)\in G^2\right) \Longrightarrow X=Y \text{ et } U=V$$

On note alors $F \oplus G$ la somme de F et G.

Proposition 2

La somme $F+G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.

Somme directe

Définition 8

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. On dit que la somme de F et G est ***directe*** *quand tout élément de $F+G$ s'écrit de manière unique $X+U$ avec $X \in F$ et $U \in G$. En d'autres termes :*

$$\left(X+U=Y+V;\ (X,Y)\in F^2 \text{ et } (U,V)\in G^2\right) \Longrightarrow X=Y \text{ et } U=V$$

On note alors $F \oplus G$ la somme de F et G.

Proposition 2

La somme $F+G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.

Définition 9

On dit que les sous-espaces vectoriels F et G sont ***supplémentaires*** *dans E lorsque $E = F \oplus G$.*

Exercice 5

1) Soient $F = \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ *;* $G = \{(0, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}$ *et* $H = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$*. Montrer que* $H = F \oplus G$*.*

2) Montrer que les droites $Vect\{(1, 0)\}$ *et* $Vect\{(0, 1)\}$ *sont supplémentaires dans* $\mathbb{R}^2$*.*

Espaces vectoriels de dimension finie

Définition 10

On dit que E est de ***dimension finie*** *quand il admet une famille génératrice et libre* ***finie*** *formée de n vecteurs.*
Ce nombre n est appelé dimension de E et on note $dim(E) = n$.

Exemple 3

$\mathbb{R}^n$ *est un espace vectoriel réel de dimension n.*

Exercice 6

Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : x + y - z = 0\}$. Montrer que E est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$. Donner une base de E et déterminer sa dimension.

Espaces vectoriels de dimension finie

Théorème 5

Si E est un espace vectoriel réel de dimension n, alors :

1. *Toutes les bases de E ont le même ordre égal à n.*

Espaces vectoriels de dimension finie

Théorème 5

Si E est un espace vectoriel réel de dimension n, alors :

1. *Toutes les bases de E ont le même ordre égal à n.*
2. *L'ordre de tout système générateur de E est supérieur à n.*

Espaces vectoriels de dimension finie

Théorème 5

Si E est un espace vectoriel réel de dimension n, alors :

1. *Toutes les bases de E ont le même ordre égal à n.*
2. *L'ordre de tout système générateur de E est supérieur à n.*
3. *L'ordre de tout système libre de E est inférieur à n.*

Espaces vectoriels de dimension finie

Théorème 5

Si E est un espace vectoriel réel de dimension n, alors :

1. *Toutes les bases de E ont le même ordre égal à n.*
2. *L'ordre de tout système générateur de E est supérieur à n.*
3. *L'ordre de tout système libre de E est inférieur à n.*
4. *Si l'ordre d'un système libre ou générateur de E est égal à n, alors ce système est une base de E.*

Théorème 5

Si E est un espace vectoriel réel de dimension n, alors :

1. *Toutes les bases de E ont le même ordre égal à n.*
2. *L'ordre de tout système générateur de E est supérieur à n.*
3. *L'ordre de tout système libre de E est inférieur à n.*
4. *Si l'ordre d'un système libre ou générateur de E est égal à n, alors ce système est une base de E.*
5. *Si F est un sous espace vectoriel de E, alors F est un espace vectoriel réel de dimension fini m, avec $m \leq n$. Si de plus $m = n$, alors $F = E$.*

Espaces vectoriels de dimension finie

Théorème 5

Si E est un espace vectoriel réel de dimension n, alors :

1. *Toutes les bases de E ont le même ordre égal à n.*
2. *L'ordre de tout système générateur de E est supérieur à n.*
3. *L'ordre de tout système libre de E est inférieur à n.*
4. *Si l'ordre d'un système libre ou générateur de E est égal à n, alors ce système est une base de E.*
5. *Si F est un sous espace vectoriel de E, alors F est un espace vectoriel réel de dimension fini m, avec $m \leq n$. Si de plus $m = n$, alors $F = E$.*
6. *Si E_1 et E_2 sont deux sous espaces vectoriels de E, alors :*

Espaces vectoriels de dimension finie

Théorème 5

Si E est un espace vectoriel réel de dimension n, alors :

1. *Toutes les bases de E ont le même ordre égal à n.*
2. *L'ordre de tout système générateur de E est supérieur à n.*
3. *L'ordre de tout système libre de E est inférieur à n.*
4. *Si l'ordre d'un système libre ou générateur de E est égal à n, alors ce système est une base de E.*
5. *Si F est un sous espace vectoriel de E, alors F est un espace vectoriel réel de dimension fini m, avec $m \leq n$. Si de plus $m = n$, alors $F = E$.*
6. *Si E_1 et E_2 sont deux sous espaces vectoriels de E, alors :*
   - $dim(E_1 + E_2) = dim(E_1) + dim(E_2) - dim(E_1 \cap E_2)$.

Espaces vectoriels de dimension finie

Théorème 5

Si E est un espace vectoriel réel de dimension n, alors :

1. *Toutes les bases de E ont le même ordre égal à n.*
2. *L'ordre de tout système générateur de E est supérieur à n.*
3. *L'ordre de tout système libre de E est inférieur à n.*
4. *Si l'ordre d'un système libre ou générateur de E est égal à n, alors ce système est une base de E.*
5. *Si F est un sous espace vectoriel de E, alors F est un espace vectoriel réel de dimension fini m, avec $m \leq n$. Si de plus $m = n$, alors $F = E$.*
6. *Si E_1 et E_2 sont deux sous espaces vectoriels de E, alors :*
   - $dim(E_1 + E_2) = dim(E_1) + dim(E_2) - dim(E_1 \cap E_2)$.
   - $dim(E_1 \oplus E_2) = dim(E_1) + dim(E_2)$.

Espaces vectoriels de dimension finie

Théorème 6

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit F une famille de vecteurs de E. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- F *est une base de* E.
- F *est une famille libre, et* $dim(F) = dim(E)$.
- F *est une famille génératrice, et* $dim(F) = dim(E)$.

Espaces vectoriels de dimension finie

Théorème 6

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit F une famille de vecteurs de E. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- *F est une base de E.*
- *F est une famille libre, et $dim(F) = dim(E)$.*
- *F est une famille génératrice, et $dim(F) = dim(E)$.*

Théorème 7

Soit E un espace vectoriel réel de dimension fini. Soient F et G deux sous espaces vectoriels de E, de bases respectives $\mathcal{B}_\mathbf{F} = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_p}\}$ et $\mathcal{B}_\mathbf{G} = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_q}\}$. Si $\mathcal{B} = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_p}, \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_q}\}$ est une base de E alors $E = F \oplus G$.

Exercice 7

Dans $E = \mathbb{R}^4$, *on considère les sous-espaces vectoriels* $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0\}$ *et* $G = \{(2a, a, 0, a),$ *avec* $a \in \mathbb{R}\}$. *Montrer que* F *et* G *sont supplémentaires dans* E.