Mathématiques 2

Chapitre 1 : Les matrices

Mohamed Essaied Hamrita

IHEC, Université de Sousse

Février 2022

Table des matières

Généralités

Notations et vocabulaires

Définition : Une **matrice** d'ordre (n, p) est un tableau de valeurs réelles formé de n lignes et p colonnes.

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \longleftarrow \text{ i }^{\text{ième}} \text{ ligne}$$

$$\uparrow$$

$\text{j}^{\text{ième}}$ colonne

Généralités

La notation abrégée est : $M = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\ldots,n \\ j=1,2,\ldots,p}}$

le premier indice désignera le numéro de la ligne et le deuxième indice celui de la colonne.

Cas particuliers

On appelle matrice **ligne** ou **vecteur ligne** la matrice d'ordre $(1, p)$
$V = (a_1 \ a_2 \ \ldots \ a_p)$.

On appelle matrice **colonne** ou **vecteur colonne** la matrice d'ordre $(n, 1)$

$$V = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

On appelle matrice **carrée** d'ordre n la matrice d'ordre (n, n).

Généralités

Parmi les matrices carrées, on distingue :

Généralités

Parmi les matrices carrées, on distingue :

- **Les matrices diagonales** vérifiants $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Généralités

Parmi les matrices carrées, on distingue :

- **Les matrices diagonales** vérifiants $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **La matrice identité** définie par

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

Généralités

- **Les matrices triangulaires supérieures**, vérifiants $a_{ij} = 0$ si $i > j$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Généralités

- **Les matrices triangulaires supérieures**, vérifiants $a_{ij} = 0$ si $i > j$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Les matrices triangulaires inférieures** vérifiants $a_{ij} = 0$ si $i < j$.

Généralités

- **Les matrices triangulaires supérieures**, vérifiants $a_{ij} = 0$ si $i > j$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Les matrices triangulaires inférieures** vérifiants $a_{ij} = 0$ si $i < j$.
- **Les matrices symétriques** vérifiants $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout i et j. Par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

est une matrice symétrique.

Généralités

- **Les matrices triangulaires supérieures**, vérifiants $a_{ij} = 0$ si $i > j$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Les matrices triangulaires inférieures** vérifiants $a_{ij} = 0$ si $i < j$.
- **Les matrices symétriques** vérifiants $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout i et j. Par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

est une matrice symétrique.

- **La matrice nulle** est la matrice dont tous les coefficients sont nuls.

Généralités

On appelle **matrice transposée** de $A(n,p)$, la matrice $B(p,n)$ vérifiant $b_{ij} = a_{ji}$. On note la transposée d'une matrice A par A' ou A^t.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Remarque : A est une matrice **symétrique** si $A{=}A'$. On dit que A est **antisymétrique** si $A' = -A$.

$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice antisymétrique

Addition

Deux matrices A et B sont égales si elles ont les mêmes coefficients :
$A = B \iff a_{ij} = b_{ij}, \ \forall\, i, j$.
La somme de deux matrices $A(n, p)$ et $B(n, p)$ est la matrice $C(n, p)$ définie par : $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. On note $C = A + B$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2+3 & 1+5 & -4+2 \\ -3+2 & 5+(-1) & 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Propriétés : Soient A, B et C trois matrices d'ordre (n, p).

- $A + B = B + A$.

Opérations sur les matrices

Addition

Deux matrices A et B sont égales si elles ont les mêmes coefficients :
$A = B \iff a_{ij} = b_{ij},\ \forall\, i, j.$
La somme de deux matrices $A(n, p)$ et $B(n, p)$ est la matrice $C(n, p)$ définie par : $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. On note $C = A + B$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2+3 & 1+5 & -4+2 \\ -3+2 & 5+(-1) & 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Propriétés : Soient A, B et C trois matrices d'ordre (n, p).

- $A + B = B + A$.
- $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Opérations sur les matrices

Addition

Deux matrices A et B sont égales si elles ont les mêmes coefficients :
$A = B \iff a_{ij} = b_{ij},\ \forall\, i, j.$
La somme de deux matrices $A(n,p)$ et $B(n,p)$ est la matrice $C(n,p)$ définie par : $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. On note $C = A + B$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2+3 & 1+5 & -4+2 \\ -3+2 & 5+(-1) & 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Propriétés : Soient A, B et C trois matrices d'ordre (n,p).

- $A + B = B + A$.
- $(A + B) + C = A + (B + C)$.
- $(A + B)' = A' + B'$

Opérations sur les matrices

Multiplication

Le produit d'une matrice $A(n,p)$ par un scalaire α est la matrice $C(n,p)$ définie par : $c_{ij} = \alpha a_{ij}$. On note $C = \alpha A$.

Propriétés :

- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Opérations sur les matrices

Multiplication

Le produit d'une matrice $A(n,p)$ par un scalaire α est la matrice $C(n,p)$ définie par : $c_{ij} = \alpha a_{ij}$. On note $C = \alpha A$.

Propriétés :

- $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$.

$$-2 \times \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 0 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

Produit de deux matrices

Soient $A(n,p)$ et $B(p,m)$ deux matrices. Le produit de A et B, noté $A \times B$ est la matrice $C(n,m)$ définie par : $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \times 2 + 3 \times (-2) & 1 \times (-3) + 3 \times 2 & 1 \times 1 + 3 \times 0 \\ 2 \times 2 + (-1) \times (-2) & 2 \times (-3) + (-1) \times 2 & 2 \times 1 + (-1) \times 0 \\ -1 \times 2 + 2 \times (-2) & -1 \times (-3) + 2 \times 2 & -1 \times 1 + 2 \times 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 6 & -8 & 2 \\ -6 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Opérations sur les matrices

Remarque : On ne peut effectuer la multiplication de deux matrices A et B que si le **nombre de colonnes** de la matrice A est **égal** au **nombre de lignes** de la matrice B.
En général $A \times B \neq B \times A$. Si $A \times B = B \times A$, on dit que A et B **commutent**.

Propriétés :

- $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$

Opérations sur les matrices

Remarque : On ne peut effectuer la multiplication de deux matrices A et B que si le **nombre de colonnes** de la matrice A est **égal** au **nombre de lignes** de la matrice B.
En général $A \times B \neq B \times A$. Si $A \times B = B \times A$, on dit que A et B **commutent**.

Propriétés :

- $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
- $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$

Opérations sur les matrices

Remarque : On ne peut effectuer la multiplication de deux matrices A et B que si le **nombre de colonnes** de la matrice A est **égal** au **nombre de lignes** de la matrice B.
En général $A \times B \neq B \times A$. Si $A \times B = B \times A$, on dit que A et B **commutent**.

Propriétés :

- $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
- $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$
- $(A \times B)' = B' \times A'$

Opérations sur les matrices

Remarque : On ne peut effectuer la multiplication de deux matrices A et B que si le **nombre de colonnes** de la matrice A est **égal** au **nombre de lignes** de la matrice B.
En général $A \times B \neq B \times A$. Si $A \times B = B \times A$, on dit que A et B **commutent**.

Propriétés :

- $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
- $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$
- $(A \times B)' = B' \times A'$
- Si A est une matrice carrée d'ordre n, $A \times I_n = I_n \times A = A$, I_n est la matrice identité d'ordre n.

Exercice

Calculer les produits suivants :

$$a_1 = (1, -2, 3)\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \; ; \; a_2 = (-2, 0, 3, -1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice

Calculer les produits suivants :

$$a_1 = (1, -2, 3)\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \; ; \; a_2 = (-2, 0, 3, -1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$a_1 = 1 \times 6 + (-2) \times 1 + 3 \times (-3) = -5.$

$a_2 = (-2) \times 1 + 0 \times 1 + 3 \times (-3) + (-1) \times 4 = -15.$

$A = \begin{pmatrix} 9 & 28 & 19 & 28 \\ 25 & 2 & 9 & 56 \end{pmatrix}.$

Opérations sur les matrices

Puissance d'une matrice

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On définit les **puissances** de A par :
$A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$ et $A^0 = I_n$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Si $A^2 = A$, alors on dit que A est **idempotente**.

Formule de Newton

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n. Si les matrices A et B commutent ($AB = BA$), alors

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^{n-k} B^k$$

Remarques

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n.

- $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$. L'égalité $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ne se produira que dans le cas où A et B commutent.

Remarques

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n.

- $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$. L'égalité $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ne se produira que dans le cas où A et B commutent.
- De même $(A-B)(A+B) = A^2 - BA + AB - B^2$.

Opérations sur les matrices

Remarques

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n.

- $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$. L'égalité $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ne se produira que dans le cas où A et B commutent.
- De même $(A-B)(A+B) = A^2 - BA + AB - B^2$.

Opérations sur les matrices

Remarques

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n.

- $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$. L'égalité $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ne se produira que dans le cas où A et B commutent.
- De même $(A-B)(A+B) = A^2 - BA + AB - B^2$.

Exercice

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre 2 définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Calculer $(A-B)(A+B)$ et $A^2 - B^2$.

Opérations sur les matrices

Solution

A-B$=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$ et $A+B=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

$$(A-B)(A+B)=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & -22 \\ -28 & -35 \end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & -6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B^2=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 21 \\ 14 & 42 \end{pmatrix}$$

D'où $A^2-B^2=\begin{pmatrix} 12 & -6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 7 & 21 \\ 14 & 42 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -27 \\ -8 & -45 \end{pmatrix}$

Exercice

Soit la matrice J définie par $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer J^2 et trouver une relation entre J^2 et I_3. En déduire J^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice

Soit la matrice J définie par $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer J^2 et trouver une relation entre J^2 et I_3. En déduire J^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $A = I_3 + J$. Trouver une relation entre A et A^2. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En appliquant la formule de Binôme, déterminer A^n.

Solution

Il est à remarquer que $A = I_3 + J$, avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $A^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k J^k I_3^{n-k}$. On peut vérifier que

$$J^k = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } k = 2, \\ 0_3 & \text{si } k > 2 \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
A^n &= C_n^0 J^0 I_3^n + C_n^1 J^1 I_3^{n-1} + C_n^2 J^2 I_3^{n-2} \\
&= 1 \times I_3 \times I_3 + n \times J \times I_3 + \frac{n(n-1)}{2} \times J^2 \times I_3 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Inverse d'une matrice

Définition

Une matrice carrée d'ordre n est dite **inversible** s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que $AB = BA = I_n$. On note $B = A^{-1}$. La matrice $B = A^{-1}$ s'appelle la matrice inverse de A.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

La matrice A est inversible et $A^{-1} = B$.

Théorème

- Si deux matrices carrées d'ordre n A et B sont inversibles alors la matrice AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Inverse d'une matrice

Définition

Une matrice carrée d'ordre n est dite **inversible** s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que $AB = BA = I_n$. On note $B = A^{-1}$. La matrice $B = A^{-1}$ s'appelle la matrice inverse de A.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

La matrice A est inversible et $A^{-1} = B$.

Théorème

- Si deux matrices carrées d'ordre n A et B sont inversibles alors la matrice AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- En particulier $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.

Calcul de l'inverse d'une matrice

Inverse d'une matrice d'ordre 2.

Soit A la matrice d'ordre 2 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

L'inverse de A est donnée par :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \qquad A^{-1} = \frac{1}{3 - 2} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul de l'inverse : Méthode de Gauss-Jordan

Dans ce paragraphe, on exposera une méthode de calcul de l'inverse d'une matrice, dite méthode de Gauss-Jordan. Cette méthode consiste à transformer la matrice A en I_n et I_n en A^{-1}.

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{c|c} I_n & A^{-1} \end{array}\right]$$

Cette méthode consiste à effectuer un certain nombre d'actions élémentaires pour aboutir à ce résultat.

Opérations élémentaires

- On peut échanger deux lignes quelconques L_i et L_k. On écrira $L_i \longleftrightarrow L_k$.

Calcul de l'inverse : Méthode de Gauss-Jordan

Dans ce paragraphe, on exposera une méthode de calcul de l'inverse d'une matrice, dite méthode de Gauss-Jordan. Cette méthode consiste à transformer la matrice A en I_n et I_n en A^{-1}.

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{c|c} I_n & A^{-1} \end{array}\right]$$

Cette méthode consiste à effectuer un certain nombre d'actions élémentaires pour aboutir à ce résultat.

Opérations élémentaires

- On peut échanger deux lignes quelconques L_i et L_k. On écrira $L_i \longleftrightarrow L_k$.
- On peut remplacer une ligne quelconque L_i par l'un de ses multiples non nuls. On notera $L_i \longleftrightarrow \alpha L_i$ $(\alpha \neq 0)$.

Calcul de l'inverse : Méthode de Gauss-Jordan

Dans ce paragraphe, on exposera une méthode de calcul de l'inverse d'une matrice, dite méthode de Gauss-Jordan. Cette méthode consiste à transformer la matrice A en I_n et I_n en A^{-1}.

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{c|c} I_n & A^{-1} \end{array}\right]$$

Cette méthode consiste à effectuer un certain nombre d'actions élémentaires pour aboutir à ce résultat.

Opérations élémentaires

- On peut échanger deux lignes quelconques L_i et L_k. On écrira $L_i \longleftrightarrow L_k$.
- On peut remplacer une ligne quelconque L_i par l'un de ses multiples non nuls. On notera $L_i \longleftrightarrow \alpha L_i$ $(\alpha \neq 0)$.
- On peut remplacer une ligne quelconque par la somme d'un multiple (non nul) de cette ligne et d'une combinaison finie des autres lignes.

$$L_i \longleftrightarrow \alpha L_i + \sum_{k \neq i} \beta_k L_k$$

Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Effectuons des opérations élémentaires pour atteindre la transformation suivante :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & A^{-1} \end{array}\right]$$

- $a_{11} = 1$, donc la première ligne reste inchangée $(L_1 \longleftarrow L_1)$.

Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Effectuons des opérations élémentaires pour atteindre la transformation suivante :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & A^{-1} \end{array}\right]$$

- $a_{11} = 1$, donc la première ligne reste inchangée $(L_1 \longleftarrow L_1)$.
- Afin de rendre $a_{21} = 0$, on peut effectuer l'opération élémentaire suivante : $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$.

Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Effectuons des opérations élémentaires pour atteindre la transformation suivante :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \end{array} A^{-1} \right]$$

- $a_{11} = 1$, donc la première ligne reste inchangée $(L_1 \longleftarrow L_1)$.
- Afin de rendre $a_{21} = 0$, on peut effectuer l'opération élémentaire suivante : $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$.

Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Effectuons des opérations élémentaires pour atteindre la transformation suivante :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & A^{-1} \end{array}\right]$$

- $a_{11} = 1$, donc la première ligne reste inchangée $(L_1 \longleftarrow L_1)$.
- Afin de rendre $a_{21} = 0$, on peut effectuer l'opération élémentaire suivante : $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$.

Après ces deux opérations élémentaires, on aura :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Exemple

Il reste une opération afin de rendre $a_{12} = 0$. Pour ce faire, on procède comme suit $L_1 \longleftarrow L_1 - 2 \times L_2$. D'où, on obtient

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Donc,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarques

- Dans la première opération, a_{11} est appelé premier **pivot**.

Remarques

- Dans la première opération, a_{11} est appelé premier **pivot**.
- D'une manière générale, la méthode de Gauss-Jordan, appelée aussi Pivot de Gauss, est décrite comme suit :

Remarques

- Dans la première opération, a_{11} est appelé premier **pivot**.
- D'une manière générale, la méthode de Gauss-Jordan, appelée aussi Pivot de Gauss, est décrite comme suit :
  1. Si $a_{11} \neq 0$, alors a_{11} est le premier pivot et $L_1 \longleftarrow \dfrac{1}{a_{11}} L_1$.

Remarques

- Dans la première opération, a_{11} est appelé premier **pivot**.
- D'une manière générale, la méthode de Gauss-Jordan, appelée aussi Pivot de Gauss, est décrite comme suit :
  1. Si $a_{11} \neq 0$, alors a_{11} est le premier pivot et $L_1 \longleftarrow \dfrac{1}{a_{11}} L_1$.
  2. On effectue les opérations élémentaires suivantes : $L_k \longleftarrow L_k - \dfrac{a_{k1}}{a_{11}} L_1$ pour $k = 2, \ldots, n$.

Remarques

- Dans la première opération, a_{11} est appelé premier **pivot**.
- D'une manière générale, la méthode de Gauss-Jordan, appelée aussi Pivot de Gauss, est décrite comme suit :
  1. Si $a_{11} \neq 0$, alors a_{11} est le premier pivot et $L_1 \longleftarrow \dfrac{1}{a_{11}} L_1$.
  2. On effectue les opérations élémentaires suivantes : $L_k \longleftarrow L_k - \dfrac{a_{k1}}{a_{11}} L_1$ pour $k = 2, \ldots, n$.
  3. Si $a_{11} = 0$, on intervertit 2 lignes pour ramener un coefficient différent de 0 en haut à gauche.

Remarques

- Dans la première opération, a_{11} est appelé premier **pivot**.
- D'une manière générale, la méthode de Gauss-Jordan, appelée aussi Pivot de Gauss, est décrite comme suit :
  1. Si $a_{11} \neq 0$, alors a_{11} est le premier pivot et $L_1 \longleftarrow \dfrac{1}{a_{11}} L_1$.
  2. On effectue les opérations élémentaires suivantes : $L_k \longleftarrow L_k - \dfrac{a_{k1}}{a_{11}} L_1$ pour $k = 2, \ldots, n$.
  3. Si $a_{11} = 0$, on intervertit 2 lignes pour ramener un coefficient différent de 0 en haut à gauche.
  4. On repète 1, 2, 3 pour la nouvelle matrice mais en prenant un deuxième pivot a_{22} de la nouvelle matrice et a_{k2} au lieu de a_{k1} et ainsi de suite en prenant comme pivot a_{pp} toujours de la dernière matrice et en remplaçant a_{k2} par a_{kp}.

Exemple

Déterminons, par la méthode de Gauss-Jordan, l'inverse de la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -5 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$1^{\text{ière}}$ itération : $k = 1$, Pivot$_1$: $a_{11} = 2$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{4}{2}L_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Exemple

$2^{\text{ième}}$ itération : $k = 2$, Pivot$_2$: $a_{22} = 2$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -2 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1/2}{3/2} L_2 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{3/2} L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{3/2} L_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{7}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Exemple

$3^{\text{ième}}$ itération : $k=3$, Pivot$_3$: $a_{33}=4$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{7}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{-7/3}{4} L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2/3}{4} L_3 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{4} L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{19}{12} & -\frac{3}{2} & \frac{7}{12} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{6} & 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}\right]$$

Ainsi,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{19}{12} & -\frac{3}{2} & \frac{7}{12} \\ -\frac{7}{6} & 1 & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Exercice

Déterminer, par la méthode de Gauss-Jordan, l'inverse de la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -8 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$1^{\text{ière}}$ itération : $k = 1$, Pivot$_1$: $a_{11} = -2$.

$$\left[\begin{array}{cccc} -2 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -8 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -\frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + \frac{3}{2}L_1 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} & 0 \end{array}\right.$$

Exercice

$2^{\text{ième}}$ itération : $k = 2$, Pivot$_2$: $a_{22} = \frac{1}{4}$.

$$\longrightarrow \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \leftarrow 4L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$3^{\text{ième}}$ itération : $k = 3$, Pivot$_3$: $a_{33} = -4$.

$$\longrightarrow \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{4}L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_3 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{4}L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 + \frac{1}{4}L_3 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{array}\right]$$

Exercice

$4^{\text{ième}}$ itération : $k = 4$, Pivot$_4$: $a_{44} = \frac{1}{4}$.

$$\longrightarrow \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_4 \\ L_3 \leftarrow L3 + L_4 \\ L_4 \leftarrow 4L_4 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Ainsi,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Forme échelonnée

Définition

Une matrice est dite sous **forme échelon réduite** (ou bien sous **forme échelonnée réduite**) si,

Forme échelonnée

Définition

Une matrice est dite sous **forme échelon réduite** (ou bien sous **forme échelonnée réduite**) si,

a) elle est sous forme échelon ;

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & 0 \\ 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & * & 0 \\ 0 & 1 & * & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A est sous forme échelonnée réduite. B n'est pas sous forme échelonnée réduite.

Forme échelonnée

Définition

Une matrice est dite sous **forme échelon réduite** (ou bien sous **forme échelonnée réduite**) si,

a) elle est sous forme échelon ;

b) tous ses éléments directeurs sont égaux à 1 ;

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & 0 \\ 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & * & 0 \\ 0 & 1 & * & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A est sous forme échelonnée réduite. B n'est pas sous forme échelonnée réduite.

Forme échelonnée

Définition

Une matrice est dite sous **forme échelon réduite** (ou bien sous **forme échelonnée réduite**) si,

a) elle est sous forme échelon ;

b) tous ses éléments directeurs sont égaux à 1 ;

c) dans une colonne qui contient un 1 directeur, il n'y a pas d'autre élément non nul.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & 0 \\ 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & * & 0 \\ 0 & 1 & * & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A est sous forme échelonnée réduite. B n'est pas sous forme échelonnée réduite.

Forme échelonnée

Pour déterminer la forme échelonnée d'une matrice A, on applique la méthode de Gauss-Jordan.

Théorème 1 (Unicité)

Soit $A \in \mathcal{M}_n$, il existe une unique matrice échelon réduite $R \in \mathcal{M}_n$, qui est équivalente à A suivant les lignes.

Exemple

Donner la matrice échelon réduite équivalente à

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 9 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

Le rang

Définition

On appelle **rang** d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n$ noté $rg(A)$, le nombre de lignes **non nulles** de la forme échelon réduite de cette matrice. Il est aussi égal au nombre de colonnes contenant 1.

Théorème 2

Soient A et B deux matrices $m \times n$. Alors

a) *Si A et B sont équivalentes suivant les lignes, $rg(A) = rg(B)$.*

b) $rg(A) \leq \min(m, n)$.

Exercice

Donner le rang des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$