Éléments du corrigé de l'examen
Math 2 - Session principale 2021

Ex1

1°) $A = \alpha B + \beta I_4 \Longleftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2\alpha & 3\alpha \\ 0 & 0 & 2\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \beta & 2\alpha & 3\alpha \\ 0 & \beta & 2\alpha \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ 2\alpha = 4 \text{ et } 3\alpha = 6 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{A = 2B + 2I}$

2°) $$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

$B^n = B^3 B^{n-3} = 0_3 \quad (\forall n \geq 3)$

3) $A = 2(B+I) \Longleftrightarrow A^n = 2^n (B+I)^n$

et puisque B et I commutent, alors

$$(B+I)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k I^{n-k}$$

$$= C_n^0 B^0 I^n + C_n^1 B I^{n-1} + C_n^2 B^2 I^{n-2}$$

car $B^k = 0 \quad \forall k \geq 3.$

$$= I + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2n & 3n \\ 0 & 0 & 2n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2n(n-1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2n & n(2n+1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A^n = 2^n (B+I)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

2

4°) A est triangulaire $\Rightarrow |A| = 2\times 2\times 2 = 8 \neq 0$
donc A est inversible.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right)$$

Ainsi $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

5°) $A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$(A-2I)^3 = (A-2I)(A-2I)(A-2I)$$
$$= (A^2 - 2IA - 2IA + 4I)(A - 2I)$$
$$= A^3 - 4IA^2 + 4IA - 2IA^2 + 8IA - 8I$$
$$= A^3 - 6A^2 + 12A - 8I.$$

6°) Le polynôme caractéristique de A est :

$P(\lambda) = |A - \lambda I|$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & 6 \\ 0 & 2-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)^3$$

$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ (sol° triple).

$E_2 /$ ~~AE~~ $(A - 2I) E = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y + 6z = 0 \\ 4z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow E_2 = \text{vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

et $\dim E_2 = 1 \neq 3$: ordre de multiplicité de $(\lambda = 2)$.

$\Rightarrow$ A n'est pas diagonalisable.

6°) Le polynôme caractéristique de A est:

$$P(\lambda) = |A - \lambda I|$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & 6 \\ 0 & 2-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)^3$$

$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ (sol° triple).

$E_2 / \cancel{AE} \; (A - 2I)E = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y + 6z = 0 \\ 4z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow E_2 = \text{vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

et $\dim E_2 = 1 \neq 3$: ordre de multiplicité de $(\lambda = 2)$.

$\Rightarrow$ A n'est pas diagonalisable.

ii) $AV_2 = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 6 \\ -8 & 1 & 6 \\ -12 & 0 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = V_2$

De même V_2 est un vecteur propre de A associé à la val. propre $\lambda = 1$.

$AV_3 = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 6 \\ -8 & 1 & 6 \\ -12 & 0 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} = 2V_3$.

V_3 est vecteur propre de A associé à $\lambda = \underline{\underline{2}}$.

$\lambda_1 = 1$ est une racine $\boxed{\text{double et}}$

$\{V_1, V_2\}$ est libre car $\alpha V_1 + \beta V_2 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} 3\alpha = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \\ 4\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

donc ~~$\{V_1, V_2\}$~~ $\dim E_1 = 2 =$ ordre de multiplicité de $\lambda = 1$

Ainsi A est diagonalisable.

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ donc } P \cdot P = I$$

$$\Leftrightarrow \boxed{P = P^{-1}}$$

Ainsi $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

4°) $|A| = \prod_{i=1}^{3} d_i = 1 \times 1 \times 2 = 2 \neq 0$

$\Rightarrow A$ est inversible

vérifie que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & -3 \\ 6 & 0 & -7/2 \end{pmatrix}$

5°) $Ker(A) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -7x + 6z = 0 \\ -8x + y + 6z = 0 \\ -12x + 10z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow AX = 0$$

$$\Leftrightarrow X = A^{-1}0 = 0$$

Ainsi $Ker(A) = \{(0,0,0)\}$ et $\dim(Ker(A)) = 0$

6°) $A^n = PD^nP^{-1} = PD^nP$ (car $P^{-1} = P$).

avec $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2^{n+1} \\ 2 & 1 & -2^{n+1} \\ 4 & 0 & -3\times 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-2^{n+3} & 0 & -6+3\cdot 2^{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$