Mathématiques 2

Chapitre 3 : Diagonalisation des matrices

Mohamed Essaied Hamrita

IHEC, Université de Sousse

Mars 2022

Table des matières

1. **Valeurs et vecteurs propres**

2. **Polynôme caractéristique**
   - Critères de diagonalisation
   - Diagonalisation

Définition 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. λ est appelé ***valeur propre*** *de la matrice A s'il existe un vecteur $X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ tel que :* $\mathbf{AX} = \lambda\mathbf{X}$.
Le vecteur X correspondant est appelé ***vecteur propre*** *de A associé à la valeur propre λ.*

Définition 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. λ *est appelé* ***valeur propre*** *de la matrice* A *s'il existe un vecteur* $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *tel que :* $\mathbf{AX} = \lambda\mathbf{X}$.
Le vecteur X *correspondant est appelé* ***vecteur propre*** *de* A *associé à la valeur propre* λ.

Exemple 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$; $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Vérifier que V_1 *est un vecteur propre de* A *dont on déterminera la valeur propre associée.*

Il suffit de vérifier que $AV_1 = \lambda V_1$ où λ est une constante à déterminer.

$$AV_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2V_1.$$

Donc V_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda = 2$.

Il suffit de vérifier que $AV_1 = \lambda V_1$ où λ est une constante à déterminer.

$$AV_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2V_1.$$

Donc V_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda = 2$.

Remarque 1

Si X est un vecteur propre d'une matrice A, alors aX, $a \in \mathbb{R}^*$ est aussi un vecteur propre. En effet :

$$AX = \lambda X \Longleftrightarrow A(aX) = \lambda(aX)$$

Il suffit de vérifier que $AV_1 = \lambda V_1$ où λ est une constante à déterminer.

$$AV_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2V_1.$$

Donc V_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda = 2$.

Remarque 1

Si X est un vecteur propre d'une matrice A, alors aX, $a \in \mathbb{R}^*$ est aussi un vecteur propre. En effet :

$$AX = \lambda X \Longleftrightarrow A(aX) = \lambda(aX)$$

Théorème 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. λ est une valeur propre de A si et seulement si $det(A - \lambda I) = 0$.

Définition 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le polynôme $P(\lambda) = |A - \lambda I|$ est appelé le ***polynôme caractéristique*** *de la matrice A et l'équation $P(\lambda) = 0$ est appelée l'****équation caractéristique*** *de A. Les valeurs propres de A sont les solutions de l'équation caractéristique de A.*

Définition 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le polynôme $P(\lambda) = |A - \lambda I|$ est appelé le ***polynôme caractéristique*** *de la matrice A et l'équation $P(\lambda) = 0$ est appelée l'****équation caractéristique*** *de A. Les valeurs propres de A sont les solutions de l'équation caractéristique de A.*

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer le polynôme caractéristique de A.*
2. *En déduire les valeurs propres de A.*
3. *Déterminer les vecteurs propres.*

1. $P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = (\lambda+1)(\lambda-4)$.
2. $P(\lambda) = 0 \iff \lambda_1 = -1$ ou $\lambda_2 = 4$.
3. $AV_1 = \lambda_1 V_1 \iff (A - \lambda_1 I)V_1 = 0$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 2x + 3y = 0 \iff x = -\frac{3}{2}y$$

Donc, $V_1 = (x, y) = (-\frac{3}{2}y, y) = y(-\frac{3}{2}, 1)$. Soit $V_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_1 = -1$.

Remarque : $2V_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est aussi un vecteur propre de A correspondant à la valeur propre $\lambda_1 = -1$.

Pour $\lambda_2 = 4$, on trouve $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme vecteur propre.

Définition 3

*On appelle la **trace** de A la somme des éléments sur la diagonale.*

Théorème 2

La trace de A est égale à la somme des valeurs propres de A et le déterminant de A est le produit des valeurs propres de A.

Théorème 3

Si A est une matrice carré d'ordre 2, alors

$$P(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A)$$

Théorème 4 (Caylay-Hamilton)

Pour le polynôme caractéristique d'une matrice A, si l'on substitue λ par la matrice A, on obtient une expression matricielle qui est la matrice des zéros, i.e $P(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow P(A) = 0$.

Exercice 2

Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \; ; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Pour A : $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 3$.
Pour B : $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 3$.

Exercice 2

Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \; ; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Pour A : $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 3$.
Pour B : $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 3$.

Définition 4

Soit A une matrice carré et $P(\lambda)$ son polynôme caractéristique. La multiplicité d'une racine λ de $P(\lambda)$ est appelée la ***multiplicité algébrique*** *de la valeur propre λ.*
Si l'ordre de multiplicité est égal à 1, la racine est dite ***simple****.*
La dimension du sous-espace propre est appelé la ***multiplicité géométrique***

Exemple 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$.

$P(\lambda) = 0 \iff \lambda_1 = 1$ ou $\lambda_2 = 2$. La valeur propre λ_1 est de multiplicité algébrique égale à 2 et λ_2 a un ordre de multiplicité égal à 1.

Théorème 5

Si toutes les racines du polynôme caractéristique de A sont ***simples****, alors A est* ***diagonalisable****. (sinon, A peut être ou ne pas être diagonalisable).*

Théorème 5

Si toutes les racines du polynôme caractéristique de A sont ***simples****, alors A est* ***diagonalisable****. (sinon, A peut être ou ne pas être diagonalisable).*

Théorème 6

Soit A une matrice carré d'ordre n. A est ***diagonalisable*** *ssi la somme des dimensions des espaces propres est égale à n, en d'autres termes, ssi pour chaque valeur propre, la multiplicité algébrique est* ***égale*** *à la multiplicité géométrique.*

Théorème 5

Si toutes les racines du polynôme caractéristique de A sont ***simples****, alors A est* ***diagonalisable****. (sinon, A peut être ou ne pas être diagonalisable).*

Théorème 6

Soit A une matrice carré d'ordre n. A est ***diagonalisable*** *ssi la somme des dimensions des espaces propres est égale à n, en d'autres termes, ssi pour chaque valeur propre, la multiplicité algébrique est* ***égale*** *à la multiplicité géométrique.*

Théorème 7

Si A est une matrice réelle et symétrique, alors toutes les valeurs propres de A sont réelles et A est diagonalisable.

Exercice 3

Étudier, si les matrices suivantes sont diagonalisables.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 5

On dit que A est ***semblable*** *à M si A s'écrit :*

$$A = PMP^{-1}, \text{ ou bien } M = P^{-1}AP$$

avec P une matrice ***inversible***

Définition 5

On dit que A est ***semblable*** *à M si A s'écrit :*

$$A = PMP^{-1}, \quad \textit{ou bien } M = P^{-1}AP$$

avec P une matrice ***inversible***

Définition 6

Diagonaliser *une matrice A veut dire trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.*

Exercice 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer le polynôme caractéristique puis déterminer les valeurs propres de* A*. En déduire le déterminant de* A*.*
2. *La matrice* A *est-elle diagonalisable ? Justifier.*
3. *Déterminer les vecteurs propres de* A*.*
4. *Diagonaliser* A *et calculer* A^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*