Série de révision (Algèbre)

Mohamed Essaied Hamrita

IHEC Sousse 2021

Exercice 1

Considérons les matrices à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si elles ont un sens, calculer les matrices AB, BA, CD, DC, AE, CE et $E'E$.

Exercice 2

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1) En utilisant l'algorithme de Gauss, déterminer la forme échelonnée de M. En déduire le déterminant et le rang de M. M est-elle inversible?

2) En utilisant l'algorithme de Gauss, calculer M^{-1}. Calculer le déterminant de M^{-1}.

3) Déterminer la matrice adjointe de M, notée $\mathrm{Adj}(M)$. Recalculer M^{-1} en utilisant la matrice adjointe.

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I$.

Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire A^n.

Exercice 4

Soit $A_m = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & m \end{pmatrix}$.

1) Calculer le déterminant de A_m en fonction de m.

2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur m pour que A_m soit inversible.

Exercice 5

1) Vérifier que les matrices suivantes sont inversibles et déterminer leurs inverses par l'algorithme de Gauss:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2) On considère les matrices suivantes:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},\quad Q = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -6 \\ -6 & 3 & -7 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix},\quad R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que P et Q sont inversibles et déterminer leurs inverses.

b) Trouver la matrice M telle que $PMQ = R$.

Exercice 6

Déterminer le rang des matrices suivantes ($m \in \mathbb{R}$)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 10 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 3 & -7 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & m \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 18 & m+1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7

Résoudre les systèmes linéaires suivants en utilisant l'algorithme de Gauss:

$$(S_1) : \left\{ \begin{array}{rcr} x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 & = & -8 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 & = & 7 \end{array} \right. \qquad (S_2) : \left\{ \begin{array}{lcr} x_1 + x_2 - 2x_3 & = & 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ 4x_1 - 4x_2 + 4x_3 & = & 4 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 & = & -3 \end{array} \right.$$

$$(S_3) : \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 5 \\ 2x_1 + 13x_2 - 7x_3 & = & -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 & = & 1 \end{cases} \quad (S_4) : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 & = & 0 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 & = & 0 \end{cases}$$

$$(S_5) : \begin{cases} x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 + x_2 + mx_3 & = & 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 & = & 1 \end{cases} , \quad (S_6) : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + 6x_2 - 4x_3 & = & 2 \\ -3x_1 - 9x_2 + 6x_3 & = & m - 5 \end{cases}$$

Exercice 8

Considérons les vecteurs dans $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ \text{ et } \ v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1) Vérifier que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. $\mathcal{B}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Montrer que v_4 est une combinaison linéaire du système $\mathcal{B}$.

Exercice 9

1) Dans chacun des cas suivants, montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base en précisant sa dimension.

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x + y - z = 0\right\}$$

$$E = \{(x - y, 2x + y + 4z, 3y + 2z) \,/\, x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

2) Dans chacun des cas suivants, déterminer les sous-espaces vectoriels engendrés par les vecteurs définis ci-dessous:

a) $e = (1, 2)$.

b) $u = (1, -1, 0)$.

c) $v_1 = (2, 1, 0)$ et $v_2 = (-1, 2, 1)$.

Exercice 10

Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + 2z = 0\}$.
1) Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En donner une base et préciser sa dimension.
2) Soient $u_1 = (3, -7, 2)$, $u_2 = (-4, 2, 1)$. Vérifier que $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2)$ est une base

de E.
3) Soit $\mathcal{B} = (v_1 = (-1,1,0), v_2 = (-2,0,1))$ une base de E. Déterminer P, la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_1$.

Exercice 11

1) Déterminer les valeurs et vecteurs propres des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

2) Soit la matrice M définie par: $M = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0 \\ 0.4 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que $V_1 = (0,0,1)$, $V_2 = (1,2,0)$ et $V_3 = (-2,1,0)$ sont des vecteurs propres de M dont on précisera ses valeurs propres associées.

b) Déterminer deux matrices P et D telles que $M = PDP^{-1}$.

c) En déduire M^n, $n \in \mathbb{N}$.

3) On considère les matrices suivantes:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer les valeurs propres de N, P et Q.

c) En déduire les valeurs propres de la matrice $R = \begin{pmatrix} N & P \\ 0 & Q \end{pmatrix}$.

Exercice 12

Dans chacun des cas suivants, vérifier que f est une application linéaire et déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
a) $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x-y, x+2y)$.
b) $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x-y+z, x-2y)$.
c) $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x-y, x-2y, -y)$.

Exercice 13

Pour chacune des applications linéaires définies dans l'exercice précédent, donner la matrice de f relativement à la base canonique.

Exercice 14

Soit$f$ l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x, y, z) = (x - z, 2x + y - 3z, -y + 2z)$$

et soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
1) Calculer $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$. En déduire la matrice de f relativement à la base canonique. f est-elle bijective?
2) Déterminer les coordonnées de $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ dans la base canonique.
3) Calculer une base de $\ker(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 15

1) Montrer qu'il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ telle que : $f(1, 2) = (0, 2, 3), \;\; f(1, 1) = (1, 0, 1)$.
2) Déterminer $f(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
3) On note $\mathcal{B}_2 = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}_3 = (u_1, u_2, u_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Écrire la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$.
4) Déterminer le noyau de f, l'image de f et le rang de f.
5) f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 16

Soit $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ une application linéaire telle que:

$$(1, 1, 0) \in \; \mathrm{Ker}(f), \; f(0, 1, 1) = (1, 0) \text{ et } f(0, 0, 2) = (2, 2).$$

1) Déterminer $f(x, y, z)$.
2) Trouver la matrice associée à f relativement aux bases canoniques.
3) Trouver une base et la dimension du $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 17

Soit la matrice A définie dans la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ par:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer le rang de A. A est-elle inversible?
2) Trouver une matrice N telle que $A = 3I_3 - 2N$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.
3) Calculer N^2 et N^3.
4) En déduire A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5) Soit $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

a) Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer B, la matrice A relative à la base $\mathcal{B}$.

Exercice 18

On considère l'endomorphisme f défini sur $\mathbb{R}^3$ par:

$$f(x, y, z) = (-2x - 4y + 2z, -2x + y + 2z, 4x + 2y + 5z)$$

1) Vérifier que f est une application linéaire.
2) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note A la matrice de f relative à la base $\mathcal{B}$. Déterminer A.
3) La matrice A est-elle inversible? En déduire que f est bijective.
4) Soit $\mathcal{B}' = \left(u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.
a) Vérifier que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
b) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.
Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} par l'algorithme de Gauss.
c) En déduire B, la matrice de f relative à la base $\mathcal{B}'$.
5) Soient $v_1 = (2, -3, -1)$, $v_2 = (-2, -1, 1)$ et $v_3 = (1, 6, 16)$.
a) Vérifier que v_1, v_2 et v_3 sont trois vecteurs propres de A dont on précisera les

valeurs propres associées.
b) En déduire deux matrices carrées d'ordres 3, Q et D telles que $A = QDQ^{-1}$.
c) Montrer que $A^n = QD^nQ^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$ et expliciter D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 19

On considère les deux bases de $\mathbb{R}^3$ suivantes:

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right), \quad \mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

1) Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$, $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.
2) En déduire $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.
3) Soit $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer les coordonnées de X dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 20

Soit la matrice A définie par: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
1) Déterminer les valeurs et vecteurs propres de A.
2) En déduire les valeurs et vecteurs propres de A^2 et $A + 4I$.
3) Écrire A sous la forme de: $A = PDP^{-1}$ dont on précisera les matrices P et D.

Exercice 21

Soit la matrice $A = \dfrac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
1) Vérifier que 1 est une valeur propre de A. Déterminer les autres valeurs propres de A.
2) Déterminer les vecteurs propres de A.
3) Trouver deux matrices, P et D telles que $A = PDP^{-1}$.
4) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} A^n$.

Correction 1

Le produit de deux matrices a un sens si le nombre de colonnes de la première matrice est égale au nombre de lignes de la deuxième matrice.

AB a un sens et on a $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

De même BA a un sens et on a $BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}$.

On peut vérifier que $CD = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $DC = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$AE = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

CE n'a pas un sens, car le nombre de colonnes de C est différent au nombre de lignes de E.

$E'E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Correction 2

1) $M = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 4 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1/2} \end{pmatrix}$

Ainsi, $|M| = 2 \times 1 \times 1/2 = 1$. Puisque M est une matrice carrée d'ordre 3, donc $rg(M) \leq 3$ et puisque $|M| \neq 0$, alors $rg(M) = 3$. M est inversible car $|M| \neq 0$.

2) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/2 & 5/2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right)$
$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$. Soit $M^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Le déterminant de l'inverse de M est l'inverse du déterminant de M

$\Longrightarrow |M^{-1}| = \dfrac{1}{|M|} = 1.$

3) $\mathrm{Adj}(M) = \mathrm{Com}^t(M)$ où $\mathrm{Com}(M)$ est la comatrice de M dont ces éléments sont les mineurs de M multipliés par $(-1)^{i+j}$.

$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$; $M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$; $M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$; $M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$; $M_{22} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$; $M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$; $M_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -1$; $M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$; $M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 2$, donc $\mathrm{Adj}(M) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}\mathrm{Adj}(M) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Correction 3

$B = A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, Donc $B^n = 0$ pour tout $n > 2$.

$A = B + I$, donc $A^n = (B+I)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k I^{n-k}$

$$\begin{aligned} A^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k I^{n-k} &= C_n^0 B^0 I^n + C_n^1 B I^{n-1} + C_n^2 B^2 I^{n-2} \\ &= I + nBI + \frac{n(n-1)}{2} B^2 I \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Correction 4

1) $|A_m| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & m \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{3m+1}{3} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & m+1 \end{vmatrix} = -6(m+1)$.

2) A_m est inversible $\Longleftrightarrow |A_m| \neq 0 \Longleftrightarrow m \neq -1$.

Correction 5

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \text{ donc } A \text{ est inversible.}$$

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{4} & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1/4} & 1/2 & 3/4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(I|A^{-1}\right).$$

2)

a) Vérifier que $|P| = -3$ et $|Q| = 54$, donc P et Q sont inversibles.

$$(P|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{2} & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1/2 & 3/2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{3/2} & -1/2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4/3 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{array}\right) \sim (I|P^{-1}).$$

$$(Q|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{2} & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{6} & 3 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/2 & 5/12 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/12 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{9/2} & 11/12 & 1/6 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 17/54 & 4/27 & -1/9 \\ 0 & 1 & 0 & -5/27 & 4/27 & -1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 11/54 & 1/27 & 2/9 \end{array}\right) \sim (I|Q^{-1}).$$

b) $PMQ = R \Longrightarrow P^{-1}PMQQ^{-1} = P^{-1}RQ^{-1} \Longrightarrow M = P^{-1}RQ^{-1}$.

Correction 6

- $rg(A) \leq min(3,4) = 3$.
  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & -6 & 2 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $rg(A) = 2$ (nombre de lignes non nulles de la forme échelonnée).

- $rg(B) \leq min(3,4) = 3.$
  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 3 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 6 & -16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $rg(B) = 2$.
- $rg(C) \leq min(3,3) = 3.$
  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, donc $rg(C) = 3$.
- $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & m \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 18 & m+1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & m \\ 0 & 3 & -2m/3 \\ 0 & 18 & m+1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & m \\ 0 & 3 & -2m/3 \\ 0 & 0 & 5m+1 \end{pmatrix}$.
  - Si $m = -1/5$, alors $rg(D) = 2$.
  - Si $m \neq -1/5$, alors $rg(D) = 3$.

Correction 7

La matrice augmentée du système S_1 est:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -8 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-5} & -1 & -10 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{5} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{\frac{7}{5}} & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{39}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{40}{7} \end{pmatrix}$$

D'où, le système admet une unique solution $S_{\mathbb{R}^3}\{(-\frac{39}{7}, \frac{6}{7}, \frac{40}{7})\}$.

La matrice augmentée du système S_2 est:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 4 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{-2} & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -8 & 12 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -6 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-4} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow x_4 = -1,\ x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_3,\ x_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_3$ et $x_3 \in \mathbb{R}$. Le système S_2 admet une infinité de solutions $S_{\mathbb{R}^3}\{(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}k, \frac{1}{2} + \frac{3}{2}k, k, -1), k \in \mathbb{R}\}$.

La matrice augmentée du système S_3 est:

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 13 & -7 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \boxed{12} & -8 & -6 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{33}{12} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{-\frac{1}{2}} & -\frac{9}{4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

D'où, $S_{\mathbb{R}^3}\{(-1, \frac{5}{2}, \frac{9}{2})\}$.

La matrice augmentée du système S_4 est:

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & \boxed{13} & 18 & 8 \\ 0 & 22 & 30 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{13} & -\frac{10}{13} \\ 0 & 1 & \frac{18}{13} & \frac{8}{13} \\ 0 & 0 & \boxed{-\frac{6}{13}} & \frac{6}{13} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

D'où, $S_{\mathbb{R}^3}\{(-1, 2, -1)\}$.

La matrice augmentée du système S_5 est:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & m & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & m-1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{2(1-m)} & 1-m \end{pmatrix}.$$

On distingue deux cas: $m = 1$ et $m \neq 1$.

Premier cas ($\mathbf{m = 1}$):

Dans ce cas, on a $x = 0$, $y = 1 - z$ et $z \in \mathbb{R}$. Donc, si $m = 1$, le système admet une infinité de solutions $S_{\mathbb{R}^3}\{(0, 1-k, k), k \in \mathbb{R}\}$.

Deuxième cas ($\mathbf{m \neq 1}$):

$M \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1-m}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Donc le système admet une unique solution $S_{\mathbb{R}^3}\{(\frac{1-m}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$.

La matrice augmentée du système S_6 est:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & -4 & 2 \\ -3 & -9 & 6 & m-5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & 9 & m+1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m+1 \end{pmatrix}$$

- Si $m = -1$, le système admet une infinité de solutions $S_{\mathbb{R}^3}\{(2 - \frac{5}{2}k, \frac{3}{2}k, k), k \in \mathbb{R}\}$.
- Si $m \neq -1$, le système n'admet aucune solution, $S_{\mathbb{R}^3} = \emptyset$.

Correction 8

$\mathcal{B}$ est une base d'un espace vectoriel si $\mathcal{B}$ est à la fois génératrice et libre.

$\mathcal{B}$ est génératrice d'un $\mathbb{R}-$e.v ssi dim(e.v) = nombre de vecteurs dans

$\mathcal{B}$.

Un système formé par $\mathbf{v_i}$, $\mathbf{i = 1, \ldots, n}$ est libre si $\lambda_1 \mathbf{v_1} + \lambda_2 \mathbf{v_2} + \ldots + \lambda_n \mathbf{v_n} = \mathbf{0}$ $\Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \mathbf{0}$.

Si v_i a n composante, $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ est libre ssi $\det(v_1, v_2, \ldots, v_n) \neq 0$.

1) On a $dim(\mathbb{R}^3) = 3 =$ nombre de vecteurs de $\mathcal{B}$, donc $\mathcal{B}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$. Il reste à vérifier que $\mathcal{B}$ est libre.

Méthode 1:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, donc $\mathcal{B}$ est libre et pae suite, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Méthode 2:

Puisque $dim(\mathcal{B}) = 3 =$ nombre de composantes des vecteurs v_i, $i = 1, 2, 3$, alors $\mathcal{B}$ est libre $\Longleftrightarrow |\mathcal{B}| \neq 0$.

$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) \times (-1) = 1 \neq 0$, donc $\mathcal{B}$ est libre.

2) v_4 est une combinaison linéaire du système $\mathcal{B} \Longrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / v_4 = av_1 + bv_2 + cv_3$.

$$\Longrightarrow \begin{cases} a + b + c & = 4 \\ 2a + b & = 3 \\ b + c & = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b & = 3 - 2a \\ c & = 2 - b \\ a + 3 - 2a + 2 - (3 - 2a) & = 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a & = 2 \\ b & = -1 \\ c & = 3 \end{cases}$$

Donc $v_4 = 2v_1 - v_2 + 3v_3$.

Correction 9

Pour vérifier qu'un sous ensemble est un sous espace vectoriel, on doit vérifier deux propriétés:

- $\mathbf{0} \in \mathbf{E}$,
- $\forall\, \mathbf{X_1}, \mathbf{X_2} \in \mathbf{E}$ **et** $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \mathbf{X_1} + \beta \mathbf{X_2} \in \mathbf{E}$.

$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y - z = 0\}$.

i) $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \Longrightarrow 2 \times 0 + 0 - 0 = 0$. Donc $0_{\mathbb{R}^3} \in E \Longrightarrow E$ est non vide.

ii) Soit $X_1, X_2 \in E$ et soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, a-t-on $\alpha X_1 + \beta X_2 \in E$.

$$\begin{aligned}\alpha X_1 + \beta X_2 =&\alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)\\ =&(w_1, w_2, w_3)\end{aligned}$$

$\alpha X_1 + \beta X_2 \in E \Longleftrightarrow 2w_1 + w_2 - w_3 = 0$.

$$\begin{aligned}2w_1 + w_2 - w_3 =&2(\alpha x_1 + \beta x_2) + (\alpha y_1 + \beta y_2) - (\alpha z_1 + \beta z_2)\\ =&\alpha(2x_1 + y_1 - z_1) + \beta(2x_2 + y_2 - z_2)\\ =&\alpha \times 0 + \beta \times 0 = 0 \text{ car } X_1, X_2 \in E\end{aligned}$$

Ainsi, E est un $s.e.v$ de $\mathbb{R}^3$.

Déterminons une base de E:

$X = (x, y, z) \in E \Longleftrightarrow 2x + y - z = 0 \Longleftrightarrow z = 2x + y$, d'où $(x, y, z) = (x, y, 2x + y) = x(1, 0, 2) + y(0, 1, 1)$, donc $E = Vect(v_1 = (1, 0, 2), v_2 = (0, 1, 1))$ (E est engendré par v_1 et v_2). Et puisque (v_1, v_2) est libre (simple à vérifier), alors $\{v_1, v_2\}$ est une base de E et $dim(E) = 2$.

$E = \{(x - y, 2x + y + 4z, 3y + 2z)/x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

i) $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \Longrightarrow (0 - 0, 2 \times 0 + 0 + 4 \times 0, 3 \times 0 + 2 \times 0) = (0, 0, 0)$. Donc $0_{\mathbb{R}^3} \in E \Longrightarrow E$ est non vide.

ii) $X \in E \Longleftrightarrow \exists(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / X = (x - y, 2x + y + 4z, 3y + 2z)$.
Soit $X_1, X_2 \in E$ et soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
$\exists?(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3 / \alpha X_1 + \beta X_2 = (w_1 - w_2, 2w_1 + w_2 + 4w_3, 3w_2 + 2w_3)$.

$$\begin{aligned}\alpha X_1 + \beta X_2 =&\alpha(x_1 - y_1, 2x_1 + y_1 + 4z_1, 3y_1 + 2z_1)\\ &+\beta(x_2 - y_2, 2x_2 + y_2 + 4z_2, 3y_2 + 2z_2)\\ =&((\alpha x_1 + \beta x_2) - (\alpha y_1 + \beta y_2), 2(\alpha x_1 + \beta x_2) + (\alpha y_1 + \beta y_2) - 4(\alpha z_1 + \beta z_2),\\ &\quad 3(\alpha y_1 + \beta y_2) + 2(\alpha z_1 + \beta z_2))\\ =&(w_1 - w_2, 2w_1 + w_2 + 4w_3, 3w_2 + 2w_3); \quad w_1 = \alpha x_1 + \beta x_2,\\ &\ w_2 = \alpha y_1 + \beta y_2, w_3 = \alpha z_1 + \beta z_2.\end{aligned}$$

Donc $\exists(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3 /\ \alpha X_1 + \beta X_2 = (w_1 - w_2, 2w_1 + w_2 + 4w_3, 3w_2 + 2w_3)$.

Ainsi, E est un $s.e.v$ de $\mathbb{R}^3$.

Déterminons une base de E:

$X = (x, y, z) \in E \Longleftrightarrow \exists(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / X = (x - y, 2x + y + 4z, 3y + 2z)$.

d'où $X = x(1,2,0) + y(-1,1,0) + z(0,4,2)$, donc $E = Vect(u_1 = (1,2,0), u_2 = (-1,1,0), u_3 = (0,4,2))$ (E est engendré par u_1, u_2 et u_3). Il reste à vérifier que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est libre.

$|u_1\ u_2\ u_3| = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \mathbf{3} & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$, donc $\{u_1, u_2, u_3\}$ est libre et par suite le système $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de E et $dim(E) = 3$.

2)

a) $X \in E \Longleftrightarrow \exists\ a \in \mathbb{R}$ tel que $X = (x, y) = ae \Longrightarrow (x, y) = (a, 2a) \Longrightarrow x = 2y$, donc $x - 2y = 0$. Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x - 2y = 0\}$.

b) $X \in E \Longleftrightarrow \exists\ a \in \mathbb{R}^2$ tel que $X = (x, y, z) = au \Longrightarrow (x, y, z) = (a, -a, 0)$ $\Longrightarrow x = -y$, donc $x + y = 0$. Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0\}$.

c) $X \in E \Longleftrightarrow \exists\ (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $X = (x, y, z) = av_1 + bv_2 \Longrightarrow (x, y, z) = (2a - b, a + 2b, b) \Longrightarrow x - 2y = -5b$ et $z = b$ donc $x - 2y = -5z$. Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + 5z = 0\}$.

Correction 10

1) Vérifions que E est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

- $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0), \Longrightarrow 0 + 0 + 2 \times 0 = 0 \Longrightarrow 0 \in E$, donc E est non vide.
- Soient $X_1, X_2 \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
  $\alpha X_1 + \beta X_2 = \alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$.

$$\begin{aligned}(\alpha x_1 + \beta x_2) + (\alpha y_1 + \beta y_2) + 2(\alpha z_1 + \beta z_2) &= \alpha(x_1 + y_1 + 2z_1) + \beta(x_2 + y_2 + 2z_2) \\ &= \alpha \times 0 + \beta \times 0 \ \ (\text{ car } X_1, X_2 \in E \\ &= 0 \Longrightarrow \alpha X_1 + \beta X_2 \in E\end{aligned}$$

Ainsi, E est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

$(x, y, z) \in E \Longrightarrow y = -x - 2z$, d'où $(x, y, z) = (x, -x, 0) + (0, -2z, z) = x(1, -1, 0) + z(0, -2, 1) = xW_1 + zW_2$, donc $E = Vect(W_1, W_2)$ et puisque W_1 et W_2 sont linéairement indépendants (simple à vérifier), alors $\{W_1, W_2\}$ est une base de E et $\dim(E) = 2$.

2) $\dim(E) = \dim(\mathcal{B}_1) = 2$, donc pour montrer que $\mathcal{B}_1$ est une base de E, il suffit de vérifier que u_1 et u_2 sont linéairement indépendants.

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -\lambda_1 - 2\lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

d'où u_1 et u_2 sont linéairement indépendants. Ainsi, $\mathcal{B}_1$ est une base de E.

3) Afin de déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_1$, on exprimera u_1, u_2 sous forme d'une combinaison linéaire de v_1 et v_2.

$$u_1 = a_1 v_1 + a_2 v_2 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3 & = & -a_1 - 2a_2 \\ -7 & = & a_1 \\ 2 & = & a_2 \end{array} \right. \Longrightarrow (a_1, a_2) = (-7, 2).$$

$$u_2 = b_1 v_1 + b_2 v_2 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -4 & = & -b_1 - 2b_2 \\ 2 & = & b_1 \\ 1 & = & b_2 \end{array} \right. \Longrightarrow (b_1, b_2) = (2, 1).$$

Ainsi, la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_1$ est la matrice P dont ses colonnes sont formées par les vecteurs a et b.

$P = (a\ b) = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque : Pour la détermination de la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_1$, on peut procéder autrement (voir l'exercice 18).

Correction 11

$\boldsymbol{\lambda}$ **est une valeur propre de A** $\Longleftrightarrow |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \mathbf{0}$.

V est un vecteur propre de A $\Longleftrightarrow \mathbf{AV} = \lambda \mathbf{V} \Longleftrightarrow (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{V} = \mathbf{0}$.

1) $A = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

- Valeurs propres de A.

$$|A - \lambda I| = 0 \Longleftrightarrow (-6 - \lambda)(5 - \lambda) - 12 = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = -7 \text{ et } \lambda_2 = 6$$

.

- Vecteurs propres associés aux λ_i.

i) $\lambda_1 = -7$, $(A - \lambda_1 I)V_1 = 0 \Longleftrightarrow (A + 7I)V_1 = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\Longleftrightarrow x = -3y \Longleftrightarrow (x, y) = (-3y, y) = y(-3, 1) = yV_1$. D'où, $V_1 = (-3, 1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = -7$.

ii) $\lambda_2 = 6$, $(A - \lambda_2 I)V_2 = 0 \Longleftrightarrow (A - 6I)V_2 = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -12 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\Longleftrightarrow y = 4x \Longleftrightarrow (x, y) = (x, 4x) = x(1, 4) = xV_2$. D'où, $V_2 = (1, 4)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 6$.

$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

- Valeurs propres de B.

$$|A - \lambda I| = 0 \Longleftrightarrow (2 - \lambda)((4 - \lambda)(3 - \lambda) - 20) = 0$$

$$\Longleftrightarrow (2 - \lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 8) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2 \text{ et } \lambda_3 = 8$$

.

- Vecteurs propres associés aux λ_i.

i) $\lambda_1 = -1$, $(B - \lambda_1 I)U_1 = 0 \Longleftrightarrow (B + I)U_1 = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\Longleftrightarrow x = 0$ et $y = -z \Longleftrightarrow (x, y, z) = (0, -z, z) = z(0, -1, 1) = zU_1$. D'où, $U_1 = (0, -1, 1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = -1$.

ii) $\lambda_2 = 2$, $(B - \lambda_2 I)U_2 = 0 \Longleftrightarrow (B - 2I)U_2 = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\Longleftrightarrow x \in \mathbb{R}$ et $y = z = 0 \Longleftrightarrow (x, y, z) = (x, 0, 0) = x(1, 0, 0) = xU_2$. D'où, $U_2 = (1, 0, 0)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 2$.

iii) $\lambda_3 = 8, (B - \lambda_3 I)U_3 = 0 \Longleftrightarrow (B - 8I)U_3 = 0$
$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\Longleftrightarrow x = 0$ et $z = \frac{4}{5}y \Longleftrightarrow (x, y, z) = (0, y, \frac{4}{5}y) = y(0, 1, \frac{4}{5})$. D'où, $U_3 = (0, 5, 4)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_3 = 8$.

2) a) Afin de vérifier que V est un vecteur propre, on écrit $MV = \lambda V$ où λ à préciser.

- $MV_1 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0 \\ 0.4 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times V_1$, donc V_1 est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$.
- $MV_2 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0 \\ 0.4 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \times V_2$, donc V_2 est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 1$.
  Remarque: On remarque bien que $\lambda = 1$ est associée à deux vecteurs propres, donc $\lambda = 1$ est une valeur propre **double**.
- $MV_3 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0 \\ 0.4 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \times V_3$, donc V_3 est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_3 = 0$.

b) La matrice M est diagonalisable, donc elle admet l'écriture $M = PDP^{-1}$ où P est la matrice dont ses colonnes sont formées par les vecteurs propres et D une matrice diagonale formée par les valeurs propres.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $M^n = (PDP^{-1})^n = PDP^{-1} \times PDP^{-1} \times \ldots \times PDP^{-1}$
$= PDI \times DI \times \ldots IDP^{-1} = PD^nP^{-1}$.
avec $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 0^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D$.
Donc $M^n = PD^nP^{-1} = PDP^{-1} = M$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3)a) On peut vérifier que N possède 1 et 2 comme valeurs propres, P a 3 et 4 comme valeurs propres et Q a 5 et 7 comme valeurs propres.

b) $|R - \lambda I| = |N - \lambda I| \times |Q - \lambda I|$, donc les valeurs propres de Q sont celles de N et Q, soit 1, 2, 5 et 7.

Correction 12

Correction 13

Correction 14

Correction 16

1) $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$, donc f est de la forme $f(x, y, z) = (ax + by + cz, \alpha x + \beta y + \gamma z)$.
$f(0, 0, 2) = (2, 2) \Longrightarrow (2c, 2\gamma) = (2, 2) \Longrightarrow (c, \gamma) = (1, 1)$.
$f(0, 1, 1) = (1, 0) \Longrightarrow (b + c, \beta + \gamma) = (1, 0) \Longrightarrow (b, \beta) = (0, -1)$.
$(1, 1, 0) \in \mathrm{Ker}(f) \Longrightarrow f(1, 1, 0) = (0, 0) \Longrightarrow (a + b, \alpha + \beta) = (0, 0) \Longrightarrow (a, \alpha) = (0, 1)$. Ainsi, on aura

$$f(x, y, z) = (z, x - y + z)$$

2) Déterminons la matrice A telle que $f(X) = AX$.

On a $f(X) = f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ x - y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Donc, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de f relative aux bases canoniques.

3) $X \in \mathrm{Ker}(f) \Longleftrightarrow f(X) = 0 \Longleftrightarrow (z, x - y + z) = (0, 0) \Longleftrightarrow z = 0$ et $x = y$. Donc $X \in \mathrm{Ker}(f) \Longrightarrow X = (x, y, z) = (x, x, 0) = x(1, 1, 0)$. Ainsi $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par la vecteur $(1, 1, 0)$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.

$f(x, y, z) = (z, x - y + z) = z(1, 1) + x(0, 1) + y(0, -1)$, donc $\mathrm{Im}(f)$ est le sous espace vectoriel engendré par le système $\{u_1 = (0, 1), u_2 = (0, -1), u_3 = (1, 1)\}$. et puisque $u_1 = (0, 1) = -(0, -1) = -u_2$ donc $\mathrm{Im}(f)$ est engendré par $\{u_1, u_3\}$ et ce système forme une base de $\mathrm{Im}(f)$ car u_1 et u_3 sont linéairement indépendants. En plus, on a $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.
Remarque: On vérifie bien le théorème du rang:
$\dim(E) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3 = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = 1 + 2$.

Correction 18

1) Pour déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$, on peut procéder de deux manières:

Méthode 1: Exprimons les vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ en fonction des vecteurs de la base $\mathcal{B}$.

- $u_1 = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 \Longrightarrow (1, -1, 2) = (a_1 + a_2 + 2a_3, a_2 + 2a_3, a_1 + 3a_3)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 + 2a_3 &= 1 \\ a_2 + 2a_3 &= -1 \\ a_1 + 3a_3 &= 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 + 2a_3 &= 1 \\ a_2 &= -1 - 2a_3 \\ a_1 &= 2 - 3a_3 \end{cases}$$
$\Longrightarrow (a_1, a_2, a_3) = (2, -1, 0).$

- $u_2 = b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 \Longrightarrow (2, 1, 4) = (b_1 + b_2 + 2b_3, b_2 + 2b_3, b_1 + 3b_3)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} b_1 + b_2 + 2b_3 &= 2 \\ b_2 + 2b_3 &= 1 \\ b_1 + 3b_3 &= 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b_1 + b_2 + 2b_3 &= 2 \\ b_2 &= -1 - 2b_3 \\ b_1 &= 4 - 3b_3 \end{cases}$$
$\Longrightarrow (b_1, b_2, b_3) = (1, -1, 1).$

- $u_3 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 \Longrightarrow (-1, 2, 0) = (c_1 + c_2 + 2c_3, c_2 + 2c_3, c_1 + 3c_3)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + 2c_3 &= -1 \\ c_2 + 2c_3 &= 2 \\ c_1 + 3c_3 &= 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + 2c_3 &= -1 \\ c_2 &= 2 - 2c_3 \\ b_1 &= -3c_3 \end{cases}$$
$\Longrightarrow (c_1, c_2, c_3) = (-3, 2, 0).$

Ainsi la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$ est la matrice dont ses colonnes sont formées par les vecteurs a, b et c. Soit

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Méthode 2: En utilisant la proposition $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} \times P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}'}$. Soit $\mathcal{B}_1$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Les matrices de passage de $\mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont données par

$$P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} \times P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}'} = P^{-1}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}} \times P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}'}.$

On peut vérifier que $P^{-1}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

D'où $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2) $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -2 & -3/2 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \\ -1/2 & -1 & -1/2 \end{pmatrix}$.

3) $X_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} X_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Correction 20

1)

$$\begin{aligned} |A-\lambda I| = 0 \iff \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 &\iff (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff (1-\lambda)\left((2-\lambda)(1-\lambda) - (1-\lambda)\right) = 0 \\ &\iff \lambda(1-\lambda)(\lambda-3) = 0 \end{aligned}$$

Soit $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 3$. Donc A possède trois valeurs propres réelles simples.

Remarque: On vérifie bien que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = tr(A) = 1 + 2 + 1 = 4$ et $|A| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$.

Cherchons des vecteurs propres.

- $\lambda_1 = 0 : AV_1 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x - y &= 0 \\ -x + 2y - z &= 0 \\ -y + z &= 0 \end{cases} \Longrightarrow x = y = z.$
  Donc $(x, y, z) = (x, x, x) = x(1, 1, 1)$. Soit $V_1 = (1, 1, 1)$.
- $\lambda_2 = 1 : (A - I)V_2 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} -y &= 0 \\ -x + y - z &= 0 \\ -y &= 0 \end{cases} \Longrightarrow y = 0$ et $z = -x$.

Donc $(x, y, z) = (x, 0, -x) = x(1, 0, -1)$. Soit $V_2 = (1, 0, -1)$.

- $\lambda_3 = 3 : (A - 3I)V_3 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} -2x - y &= 0 \\ -x - y - z &= 0 \\ -y - 2z &= 0 \end{cases} \Longrightarrow y = -2x$ et $z = x$.

  Donc $(x, y, z) = (x, -2x, x) = x(1, -2, 1)$. Soit $V_3 = (1, -2, 1)$.

2) A^2 et $A + 4I$ gardent les mêmes vecteurs propres de A, tandis que les valeurs propres sont λ^2 et $\lambda + 4$ respectivement.
$A^2 : \lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 9$.
$A + 4I : \lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 5$ et $\lambda_3 = 7$.

3) La matrice A peut s'écrire sous la forme de $A = PDP^{-1}$ où les colonnes de P sont formées par les vecteurs propres de A et D est une matrice diagonale formée par les valeurs propres.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Correction 21

1) Pour vérifier que 1 est une valeur propre de A, on doit vérifier que $|A - I| = 0$.

$$|A - I| = \frac{1}{10}\begin{vmatrix} \mathbf{-7} & 4 & 5 \\ 3 & -6 & 3 \\ 4 & 2 & -8 \end{vmatrix} = \frac{1}{10}\begin{vmatrix} -7 & 4 & 5 \\ 0 & \mathbf{\frac{30}{7}} & -\frac{36}{7} \\ 0 & -\frac{30}{7} & \frac{36}{7} \end{vmatrix} = \frac{1}{10}\begin{vmatrix} -7 & 4 & 5 \\ 0 & \frac{40}{7} & -\frac{36}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Donc, $\lambda = 1$ est une valeur propre de A.

2) On sait que $\sum \lambda_i = tr(A)$ et $\prod \lambda_i = |A|$ avec $|A| = -\frac{2}{100}$. D'où

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= \frac{9}{10} \\ \lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 &= \frac{2}{100} \\ \lambda_1 &= 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 &= -\frac{1}{10} \\ \lambda_2 \times \lambda_3 &= \frac{2}{100} \end{cases} \Longrightarrow \lambda_2 = -\frac{2}{10} \text{ et } \lambda_3 = \frac{1}{10}$$

Ainsi, la matrice A possède trois valeurs propres distinctes.

Remarque: On peut déterminer les valeurs propres à partir du polynôme caractéristique;

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{10}\begin{vmatrix} 3 - 10\lambda & 4 & 5 \\ 3 & 4 - 10\lambda & 3 \\ 4 & 2 & 2 - 10\lambda \end{vmatrix} = 0$$

2)

- $\lambda = 1$; $(A - I)V_1 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} -7x + 4y + 5z &= 0 \\ 3x - 6y + 3z &= 0 \\ 4x + 2y - 8z &= 0 \end{cases}$

  $\begin{pmatrix} \mathbf{-7} & 4 & 5 \\ 3 & -6 & 3 \\ 4 & 2 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4/7 & -5/7 \\ 0 & \mathbf{-30/7} & 36/7 \\ 0 & 30/7 & -36/7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7/5 \\ 0 & 1 & -6/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow x = \frac{7}{5}z,\ y = \frac{6}{5}z$ et $z \in \mathbb{R}$. Soit $(x, y, z) = (\frac{7}{5}z, \frac{6}{5}z, z) = z(\frac{7}{5}, \frac{6}{5}, 1)$. Donc $V_1 = (7, 6, 5)$ est un vecteur propre de A associé à $\lambda = 1$.

- $\lambda = -\frac{2}{10}$; $(A + \frac{2}{10}I)V = 0 \Longrightarrow \begin{cases} 5x + 4y + 5z &= 0 \\ 3x + 6y + 3z &= 0 \\ 4x + 2y + 4z &= 0 \end{cases}$

  $\begin{pmatrix} \mathbf{5} & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4/5 & 1 \\ 0 & \mathbf{18/5} & 0 \\ 0 & -6/5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow x = -z,\ y = 0$ et $z \in \mathbb{R}$. Soit $(x, y, z) = (-z, 0, z) = z(-1, 0, 1)$. Donc $V_2 = (-1, 0, 1)$ est un vecteur propre de A associé à $\lambda = -0.2$.

- $\lambda = \frac{1}{10}$; $(A - \frac{1}{10}I)V = 0 \Longrightarrow \begin{cases} 2x + 4y + 5z &= 0 \\ 3x + 3y + 3z &= 0 \\ 4x + 2y + z &= 0 \end{cases}$

  $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & \mathbf{-3} & -9/2 \\ 0 & -6 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow x = z/2,\ y = -3z/2$ et $z \in \mathbb{R}$. Soit $(x, y, z) = (z/2, -3z/2, z) = z(1/2, -3/2, 1)$. Donc $V_3 = (1, -3, 2)$ est un vecteur propre de A associé à $\lambda = 0.1$.

3) La matrice A est diagonalisable, donc elle admet l'écriture suivante: $A = PDP^{-1}$ avec D une matrice diagonale dont la diagonale est égale à λ_i, $i = 1, 2, 3$ et P est la matrice de passage dont les colonnes sont les vecteurs propres associés aux valeurs propres de A;

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}, \quad P = (V_1\ V_2\ V_3) = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4) Déterminons P^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{7} & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1/7 & 1/7 & 1/7 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{6/7} & -27/7 & -6/7 & 1 & 0 \\ 0 & 12/7 & 9/7 & -5/7 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1 & -9/2 & -1 & 7/6 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{9} & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/18 & 1/18 & 1/18 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/6 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/9 & -2/9 & 1/9 \end{array}\right)$$

Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/18 & 1/18 & 1/18 \\ -1/2 & 1/6 & 1/2 \\ 1/9 & -2/9 & 1/9 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} A^n = PD^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-0.2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0.1^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/18 & 1/18 & 1/18 \\ -1/2 & 1/6 & 1/2 \\ 1/9 & -2/9 & 1/9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & -(-0.2)^n & 0.1^n \\ 6 & 0 & -3 \times 0.1^n \\ 5 & 2 \times (-0.2)^n & 2 \times 0.1^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/18 & 1/18 & 1/18 \\ -1/2 & 1/6 & 1/2 \\ 1/9 & -2/9 & 1/9 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{7}{18} + \frac{1}{2}(-0.2)^n + \frac{1}{9}0.1^n & \frac{7}{18} - \frac{1}{6}(-0.2)^n - \frac{2}{9}0.1^n & \frac{7}{18} - \frac{1}{2}(-0.2)^n + \frac{1}{9}0.1^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}0.1^n & \frac{1}{3} - \frac{2}{3}0.1^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}0.1^n \\ \frac{5}{18} - (-0.2)^n + \frac{2}{9}0.1^n & \frac{5}{18} + \frac{1}{3}(-0.2)^n - \frac{4}{9}0.1^n & \frac{5}{18} + (-0.2)^n + \frac{2}{9}0.1^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quand $n \to +\infty$, $(-0.2)^n \to 0$ et $0.1^n \to 0$, d'où

$$\lim_{n \to +\infty} A^n = \begin{pmatrix} \frac{7}{18} & \frac{7}{18} & \frac{7}{18} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{18} & \frac{5}{18} & \frac{7}{18} \end{pmatrix}$$