Mathématiques 2

Chapitre 2 : Déterminants - Systèmes linéaires

Mohamed Essaied Hamrita

IHEC, Université de Sousse

Mars 2021

Table des matières

Déterminants en dimension 2 et 3

En dimension 2, le calcul du déterminant est simple :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \times d - b \times c$$

Exemple 1

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2) \times 1 - 3 \times 1 = -5$$

Pour le déterminant des matrices carrés de dimension 3, on peut faire appel à la règle de Sarrus :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11} \times a_{22} \times a_{33} + a_{12} \times a_{23} \times a_{31} + a_{13} \times a_{21} \times a_{32})$$

$$- (a_{31} \times a_{22} \times a_{13} + a_{32} \times a_{23} \times a_{11} + a_{33} \times a_{21} \times a_{12})$$

Déterminants en dimension 2 et 3

Exemple 2

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right| = 1+0+0-0+3+4=8$$

Exercice 1

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Déterminants en dimension $n \geq 3$

Définition 1

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ *une matrice carrée d'ordre* n.
On appelle le ***mineur*** *de l'élément* a_{ij}, *noté* M_{ij}, *le déterminant de la matrice carrée* A_{ij} *d'ordre* $n-1$, *obtenue en supprimant dans la matrice* A *la ligne* i *et la colonne* j.

Exemple 3

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2,\ M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2,\ M_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Déterminants en dimension $n \geq 3$

Définition 2

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n.
*On appelle le **cofacteur** de l'élément a_{ij}, noté C_{ij}, le réel définit par $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. La matrice des cofacteurs est appelée **comatrice** et est notée $Com(A)$.*

Exemple 4

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$C_{11} = (-1)^{(1+1)} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$, $C_{12} = (-1)^{(1+2)} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2$,

$C_{23} = (-1)^{(2+3)} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

Définition 3

On appelle déterminant de A, noté $|A|$, le réel définit par :

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij_0} C_{ij_0}, \text{ pour } j \text{ fixé, soit } j = j_0$$

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} C_{i_0 j}, \text{ pour } i \text{ fixé, soit } i = i_0$$

Exemple 5

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \times C_{11} + 2 \times C_{12} + 1 \times C13 = -2 + 4 + 2 = 4$$

Déterminant d'une matrice triangulaire

Théorème 1

Si A est une matrice ***triangulaire*** *d'ordre n alors son déterminant est le produit des éléments de la diagonale principale. C'est à dire,*
$det(A) = a_{11} \times a_{22} \times \ldots \times a_{nn}$.

Exemple 6

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (-1) \times 4 \times (-3) = 12.$$

Déterminant d'une matrice triangulaire

Théorème 2

- *On ne modifie pas un déterminant si on ajoute à une ligne (ou une colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (ou des autres colonnes).*
- *Si on multiplie une ligne ou une colonne par une constante, le déterminant est multiplié par cette même constante.*
- *Un déterminant change de signe si l'on effectue un nombre impair de permutations (si par exemple, on permute deux lignes uniquement ou deux colonnes uniquement).*

La méthode algorithmique, sans astuce donc conseillée, est la méthode du pivot de Gauss, qui procède par transformations successives pour faire apparaître des zéros sous la diagonale.

Méthode de Pivot-Gauss

Exemple 7

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$. *Calculons le déterminant de* A *par la méthode de Pivot-Gauss.*

$a_{11} = 1 \neq 0$, donc le premier pivot est $p_1 = 1$.

$$\begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Méthode de Pivot-Gauss

$a_{22} = -1 \neq 0$, donc le deuxième pivot est $p_2 = -1$.

$$\begin{array}{c} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Ainsi, la matrice obtenue est triangulaire, donc $|A| = 1 \times 1 \times 0(-4) = 0$.

Remarque 1

Constatez qu'à chaque étape de la méthode, les transformations consistent à ajouter à une ligne un multiple d'une autre, ce qui ne change pas le déterminant.

Théorème 3 (Déterminant nul)

Si A est une matrice carrée et que l'une des conditions ci-dessous est vraie, alors $det(A) = 0$.

- *Une ligne entière (ou une colonne entière) se compose de zéros.*
- *Deux lignes (ou colonnes) sont égales.*
- *Une ligne (ou colonne) est un multiple d'une autre ligne (ou colonne).*

Exemple 8

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} & 4 \\ 4 & 2 & -2 & 1 \\ 6 & -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$. *Calculer le déterminant de A.*

$|A| = 0$, car $C_1 = -2 \times C_3$.

Théorème 4 (Propriétés)

Si A *et* B *sont deux matrices carrées d'ordre* n *et* α *un réel non nul, alors*

- $|A \times B| = |A| \times |B|$.
- $|A'| = |A|$.
- $|\alpha A| = \alpha^n |A|$.
- *si* $|A| \neq 0$, $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$.

Remarque 2

En général $|A + B| \neq |A| + |B|$.

Comatrice d'une matrice

Définition 4

Soit $A = (a_{ij})$ *une matrice carrée d'ordre* n*. On appelle comatrice de* A*, la matrice notée Com*(A) *obtenue en remplaçant chaque coefficient par son cofacteur* c_{ij}*.*

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$*. Déterminer la comatrice de* A*.*

On doit déterminer tous les cofacteurs c_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$, où $c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

$M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5 \Longrightarrow c_{11} = -5$.

$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 0 = 4 \Longrightarrow c_{11} = -4$. Et ainsi de suite.

Comatrice d'une matrice

$$\text{Com}(A) = \begin{pmatrix} -5 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Théorème 5 (Inverse d'une matrice)

Si A est inversible, alors $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Com}'(A)$. $\text{Com}'(A)$ est appelée la matrice adjointe de A.

Exercice 3

Déterminer l'inverse de A définie ci-dessus.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Com}'(A) = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Système linéaire

Définition 5

Un **système de m équations** *linéaires et n inconnues est un ensemble de m équations, chacune étant linéaire par rapport aux mêmes n variables :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &=& b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &=& b_2 \\ \vdots && \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &=& b_m \end{array}\right. \iff AX = b$$

$A = (a_{ij}),\ X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ et $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)'$.

Le vecteur b est appelé vecteur du second membre. Lorsque le vecteur b est nul, le système est dit système **homogène**.

Un système d'équations linéaires est dit **compatible** quand il a au moins une solution et **incompatible** quand il n'a pas de solution.

On appelle matrice **augmentée** la matrice définie par la superposition de A et le vecteur b, i.e $[A|b]$.

Méthodes de résolution

1) Matrice échelonnée

Pour la résolution du système linéaire, on peut faire appel à l'algorithme de Gauss. En appliquant les opérations élémentaires, on transforme la matrice augmentée en une matrice dite matrice **échelonnée** de la forme suivante :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} * & * & \dots & * & b_1* \\ 0 & * & \dots & * & b_2* \\ \vdots & 0 & \ddots & * & b_j* \\ 0 & 0 & \dots & * & b_m* \end{array}\right]$$

On peut aussi déterminer la matrice échelonnée réduite. (Sur la diagonale, on aura des 1).

2) Inverse d'une matrice

Dans le cas où le système est de n équations à n variables, on peut déduire la solution, si elle existe du système, par l'inverse de la matrice A.

$$AX = b \Longleftrightarrow X = A^{-1}b$$

.

Exemple 9

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} x+y+2z &=& 3\\ x+2y+z &=& 1\\ 2x+y+z &=& 0\end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcl} x+2z &=& 1\\ -y+z &=& 2\\ x-2y &=& 1\end{array}\right.$$

Résolution du $\mathbf{S_1}$:

La matrice augmentée est $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 0\end{array}\right]$

$$\longrightarrow \quad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - L_1\\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1\end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1 & -2\\ 0 & -1 & -3 & -6\end{array}\right]$$

Méthodes de résolution

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \end{array}\right]$$

On obtient $-4z = -8 \Longrightarrow z = 2$, $y - z = -2 \Longrightarrow y = -2 + z = 0$ et $x + y + 2z = 3 \Longrightarrow x = 3 - y - 2z = -1$. Ainsi le système S_1 admet une solution unique $S_{\mathbb{R}^3} = \{(-1, 0, 2)\}$.
Retrouvons le résultat, en utilisant l'inverse de la matrice des coefficients du système (puisque la matrice est carrée).

$$(A|b) \longrightarrow (I_n|x^*)$$

Méthodes de résolution

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & -6 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{3}{4}L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{4}L_3 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{4}L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Soit $S_{\mathbb{R}^3} = \{(-1, 0, 2)\}$

Méthodes de résolution

Résolution du $\mathbf{S_2}$:

La matrice augmentée est $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right]$$

Donc $-4z = -4 \Longrightarrow z = 1$, $-y + z = 2 \Longrightarrow y = -1$ et $x + 2z = 1 \Longrightarrow x = -1$. Soit $S_{\mathbb{R}^3} = \{(-1, -1, 1)\}$.

Exercice 4

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcl} x+y+2z &=& 8\\ -x-2y+3z &=& 1\\ 3x-7y+4z &=& 10\end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcl} 2x+2y+2z &=& 0\\ -2x+5y+2z &=& 1\\ 8x+y+4z &=& -1\end{array}\right.$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{rcl} 6x+6y+3z &=& 5\\ 3x+6y-3z &=& -2\\ -2y+3z &=& 1\end{array}\right.$$

Résolution du $\mathbf{S_1}$:

La matrice augmentée est

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8\\ -1 & -2 & 3 & 1\\ 3 & -7 & 4 & 10\end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2+L_1\\ L_3 \leftarrow L_3-3L_1\end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8\\ 0 & -1 & 5 & 9\\ 0 & -10 & -2 & -14\end{array}\right]$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 10L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & -52 & -104 \end{array}\right]$$

$z = 2$, $-y + 5z = 9 \Longrightarrow y = 1$ et $x + y + 2z = 8 \longrightarrow x = 3$. Ainsi $S_{\mathbb{R}^3} = \{(3, 1, 2)\}$

Résolution du $\mathbf{S_2}$:

La matrice augmentée est

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & -4 & -1 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

D'où, $7y + 4z = 1 \Longrightarrow y = \frac{1}{7} - \frac{4}{7}z$, et $x + y + z = 0 \Longrightarrow x = -z - y = -\frac{1}{7} - \frac{3}{7}z$. Ainsi, le système S_2 admet une infinité de solutions

$S_{\mathbb{R}^3} = \{-\frac{1}{7} - \frac{3}{7}z, y = \frac{1}{7} - \frac{4}{7}z, z \in \mathbb{R}\}$.

Résolution du $\mathbf{S_3}$:
La matrice augmentée est

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 6 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \quad L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1 \; \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 6 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & -\frac{9}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & -2 & 3 & 11 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \quad L_3 \leftarrow L_3 + \frac{2}{3}L_2 \; \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 6 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & -\frac{9}{2} & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right]$$

La troisième équation étant impossible à satisfaire, le système n'a pas de solution.

Système de Cramer

Figure – Gabriel Cramer (Suisse)

Définition 6

Un ***système de Cramer*** *est un système de n équations linéaires à n inconnues de rang n.*

Système de Cramer

Il résulte de la définition qu'un tel système s'écrit sous forme matricielle : $AX = b$ où A est une matrice carrée d'ordre n et de rang n, donc inversible.
De là nous pouvons conclure :
Tout système de Cramer possède une **solution unique** donnée par $X = A^{-1}b$.

Théorème 6 (Formule de Cramer)

Soit $AX = b$ un système de Cramer. $X = (x_1, \ldots, x_n)$ étant le vecteur inconnu. Les x_i sont donnés par :

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}; \;\; i = 1, \ldots, n$$

où A_i est la matrice obtenue en substituant le vecteur colonne b à la $i-$ième colonne de A ($C_i \longleftarrow b$).

Système de Cramer

Exemple 10

Soit le système suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} 4x+2y+z & = & 3 \\ y & = & 1 \\ x+3y & = & 1 \end{array}\right.$$

Vérifier que ce système est un système de Cramer et déterminer sa solution.

$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Donc le système est un système de Cramer et il admet une unique solution définie comme suit :

$$x = \frac{|A_1|}{|A|}, \text{ avec } |A_1| = \begin{vmatrix} \color{blue}{3} & 2 & 1 \\ \color{blue}{1} & 1 & 0 \\ \color{blue}{1} & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \Longrightarrow x = -2.$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|}, \text{ avec } |A_2| = \begin{vmatrix} 4 & \color{blue}{3} & 1 \\ 0 & \color{blue}{1} & 0 \\ 1 & \color{blue}{1} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \Longrightarrow y = 1$$

$$z = \frac{|A_3|}{|A|}, \text{ avec } |A_3| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & \color{blue}{3} \\ 0 & 1 & \color{blue}{1} \\ 1 & 3 & \color{blue}{1} \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -9 \Longrightarrow z = 9$$