| | | |
|---|---|---|
| Epreuve : **Mathématiques II-Algèbre**<br>**Session PRINCIPALE**<br>Date : **10/06/2021**<br>Durée : **02 heures**<br>**Nombre de Pages : 02** | **Université de Sousse**<br>IHEC<br>**Institut des Hautes Etudes Commerciales de Sousse** | Niveau : **1ére Année**<br>Filière : **Licence Gestion**<br>Chargés de cours :<br>***Boubaker Heni***<br>**Hamrita Mohamed Essaied**<br>**Nefzi Hana** |

## *Exercice 1* (7 pts)

$$\text{Soient } A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver les réels $\alpha$ et $\beta$ tels que $A = \alpha B + \beta I_3$. (1 pt)
2. Calculer $B^2$, $B^3$ et $B^n$ $\forall n \geq 3$. (1 pt)
3. Calculer $A^n$ en fonction de $I$, $B$ et de $B^2$ $\forall n \geq 2$.(1 pt)
4. Montrer que $A$ est inversible et calculer $A^{-1}$. (1 pt)
5. Montrer que $(A-2I)^3 = \left(A^3 - 6A^2 + 12A - 8I_3\right)$. (1 pt)
6. En déduire que $A$ n'est pas diagonalisable. (1 pt)
7. Exprimer $A^{-1}$ en fonction de $A$ et de $I_3$ et recalculer $A^{-1}$. (1 pt)

## *Exercice 2* (6 pts)

Soient $A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 6 \\ -8 & 1 & 6 \\ -12 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, $V_1 = (3,2,4)$, $V_2 = (0,1,0)$ et $V_3 = (-2,-2,-3)$.

1. Vérifier que les vecteurs $V_1$, $V_2$ et $V_3$ sont des vecteurs propres de $A$ dont on précisera les valeurs propres associées. (1 pt)
2. En déduire que $A$ est diagonalisable. (1 pt)
3. Soit $P$ la matrice de colonnes $V_1$, $V_2$, $V_3$. Calculer $P^2$ et donner $P^{-1}$ telle que $A = PDP^{-1}$. (1 pt)
4. En déduire que $A$ est inversible et donner $A^{-1}$. (1 pt)
5. En déduire $\ker(A)$ et préciser sa dimention. (1 pt)
6. Calculer $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. (1 pt)

***Exercice 3*** (**7 pts**)

On considère la matrice $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 7 & 6 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer la ligne réduite échelonneé $\mathcal{R}_A$ de la matrice $A$. (1 pt)

2) Déterminer $\ker(A)$, en donner une base et préciser sa dimention. (1 pt)

3) Déterminer $\ker({}^tA)$, en donner une base et préciser sa dimention. (1 pt)

4) Déterminer $\mathcal{C}(A)$ , l'espace colonne de $A$, en donner une base et préciser sa dimention. (1 pt)

5) Déterminer $\mathcal{L}(A)$ , l'espace ligne de $A$, en donner deux bases et préciser sa dimention. (1 pt)

6) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$, $b = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ et $(S) : AX = b$.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a$, $b$, $c$ et $d$ pour que $(S)$ soit compatible. (2 pts)

*Bon travail*