# Probabilité & Statistique

## Chapitre 1: Rappels sur les probabilités

**Mohamed Essaied Hamrita**

# Matériels

- Supports pédagogiques (slides + documents + codes)
  https://github.com/Hamrita/Proba-Stat

## Matériels

- Supports pédagogiques (slides + documents + codes)
  https://github.com/Hamrita/Proba-Stat
- Logiciel statistique: R (https://www.r-project.org/)
  Vidéo expliquant l'installation
  https://www.youtube.com/watch?v=4ZhaB_kbTKc&list=PLVMtMDWXCQ364TxQxXdUZfyMmiXe9YIPH&index=3

# Matériels

- Supports pédagogiques (slides + documents + codes)
  https://github.com/Hamrita/Proba-Stat
- Logiciel statistique: R (https://www.r-project.org/)
  Vidéo expliquant l'installation
  https://www.youtube.com/watch?v=4ZhaB_kbTKc&list=PLVMtMDWXCQ364TxQxXdUZfyMmiXe9YIPH&index=3
- Un ordinateur portable ou une tablette ou un smart phone plus une connexion internet.

1. Matériels
2. Probabilité sur un espace fini, évènements
   - Définitions
   - Diagrammes de Venn
   - Axiomes de probabilité
3. Probabilité uniforme
4. Probabilité conditionnelle et indépendance

# Définitions

On s'intéresse à une expérience aléatoire qui conduit à la réalisation d'un seul résultat parmi un nombre fini de résultats possibles $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. On note $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ l'ensemble de ces résultats.

## Exemple

- *Jet d'une pièce à pile ou face:* $\Omega = \{P, F\}$
- *Jet d'un dé cubique:* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

On appelle **évènement** une partie $A$ de $\Omega$ et on associe la probabilité $\sum_{k:\omega_k \in A} p_k$ à l'évènement $A$.

# Définitions

## Définition

*Une probabilité $\mathbb{P}$ sur un ensemble fini $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ est une pondération $p_1, p_2, \ldots, p_n$ des éléments de cet ensemble telle que:*

$$\forall\, 1 \leq k \leq n,\ \ p_k \geq 0 \ \textit{et} \ \sum_{k=1}^{n} p_k = 1$$

*On attribue à tout évènement $A \subset \Omega$ le nombre*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k:\omega_k \in A} p_k$$

*qui est appelé* ***probabilité*** *de l'évènement $A$.*

# Définitions

## Exemple

*Jet de deux dés à six faces:* $\Omega = \{(i,j) :\ 1 \leq i,\ j \leq 6\}$ *où* $i$ *désigne la valeur de la face supérieure du premier dé et* $j$ *celle du second. Pour des raisons de symétrie (si les dés ne sont pas pipés), on munit de la pondération suivante:*

$$\forall\, 1 \leq i,\ j \leq 6,\ p(i,j) = \frac{1}{36}$$

*Soit* $A$ *l'évènement: les valeurs des deux dés sont identiques.*

$$A = \{(1,1),(2,2),...,(6,6)\} \text{ et } \mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{6} p(i,i) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

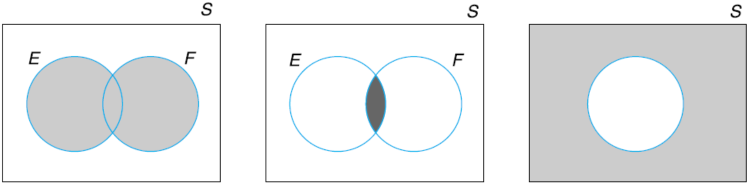
# Définitions

## Terminologies

- Si $\mathbb{P}(A) = 0$, l'évènement $A$ est dit **impossible**.
- Si $\mathbb{P}(A) = 1$, il est **certain**.
- On appelle évènement **contraire** de $A$ et on note $A^c$ ou $\overline{A}$ l'évènement $\Omega \backslash A$.
- Si $A, B \subset \Omega$, l'évènement $A$ **et** $B$ est noté $A \cap B$.
- L'évènement $A$ **ou** $B$ est noté $A \cup B$.

Les opérations de formation d'unions, d'intersections et de compléments d'événements obéissent à certaines règles proches des règles de l'algèbre:

- Loi commutative: $E \cup F = F \cup E \qquad E \cap F = F \cap E$.
- Loi associative: $(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$
  $(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G)$.
- Loi distributive: $(E \cup F) \cap G = E \cap G \cup F \cap G$
  $E \cap F \cup G = (E \cup G) \cap (F \cup G)$.




(A) (B) (C)

## Axiomes de probabilité

Soit $\Omega$ un ensemble des possibles et $A$ une partie de $\omega$.

**Axiome 1** $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$;

**Axiome 2** $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

**Axiome 3** Pour toute séquence des évènements mutuellement exclusifs $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(A_i \cap A_j = \emptyset)$ on a:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i),\ n = 2, 3, \ldots, \infty$$

## Axiomes de probabilité

Soit $\Omega$ un ensemble des possibles et $A$ une partie de $\omega$.

**Axiome 1** $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$;

**Axiome 2** $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

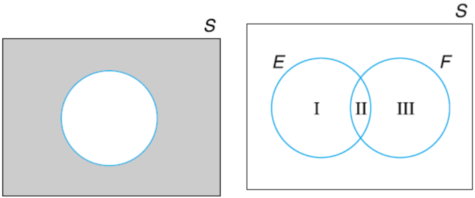
**Axiome 3** Pour toute séquence des évènements mutuellement exclusifs $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(A_i \cap A_j = \emptyset)$ on a:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i),\ n = 2, 3, \ldots, \infty$$

## Proposition

- *Pour tout évènement A, on a:* $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

## Preuve




- $\mathbb{P}(S) = 1 = \mathbb{P}(E \cup \overline{E}) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(\overline{E})$.
- $\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(I) + \mathbb{P}(II) + \mathbb{P}(III)$.

Or, $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(I) + \mathbb{P}(II)$ et $\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(III) + \mathbb{P}(II)$.

Donc $\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(II)$.

## Définition

*On dit que la probabilité $\mathbb{P}$ sur l'espace fini $\Omega$ est* ***uniforme*** *si*

$$\mathbb{P}(\omega_k) = \frac{1}{card(\omega)}$$

*Chaque singleton $\omega_k$ a la même chance de réalisation.*
*Pour tout évènement $A$ de $\Omega$, on a*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

## Exemple

*On jette un dé cubique équilibré dont ses faces sont numérotées de 1 à 6.*
*1) Déterminer la probabilité* $p_i = \mathbb{P}(i)$ *(l'apparition du numéro* $i$*).*
*2) Déterminer la probabilité d'avoir un numéro pair.*

1. Matériels
2. Probabilité sur un espace fini, évènements
3. Probabilité uniforme
4. Probabilité conditionnelle et indépendance
   - Probabilité conditionnelle
   - Indépendance

La notion de probabilité conditionnelle permet de prendre en compte l'information dont on dispose (à savoir qu'un événement $B$ est réalisé) pour actualiser la probabilité que l'on donne à un événement $A$ :

**Définition** *Soit $\Omega$ muni d'une probabilité $\mathbb{P}$ et $A, B \subset \Omega$. La probabilité conditionnelle de l'événement $A$ sachant l'événement $B$ est notée $\mathbb{P}(A|B)$ et définie par*

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \begin{cases} \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B) & \text{si } \mathbb{P}(B) > 0 \\ \mathbb{P}(A) & \text{sinon.} \end{cases}}$$

La notion de probabilité conditionnelle permet de prendre en compte l'information dont on dispose (à savoir qu'un événement $B$ est réalisé) pour actualiser la probabilité que l'on donne à un événement $A$ :

**Définition** *Soit $\Omega$ muni d'une probabilité $\mathbb{P}$ et $A, B \subset \Omega$. La probabilité conditionnelle de l'événement $A$ sachant l'événement $B$ est notée $\mathbb{P}(A|B)$ et définie par*

$$\boxed{\mathbb{P}(A|B) = \begin{cases} \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B) & si\ \mathbb{P}(B) > 0 \\ \mathbb{P}(A) & sinon. \end{cases}}$$

**Exercice** *Parmi 10 pièces mécaniques, 4 sont défectueuses. On prend successivement deux pièces au hasard dans le lot (sans remise). Quelle est la probabilité pour que les deux pièces soient correctes.*

# Formule de Bayes

**Proposition** *Soit $B_1, \ldots, B_m$ une partition de $\Omega$ (i.e. des sous-ensembles disjoints de $\Omega$ dont la réunion est $\Omega$) et $A \subset \Omega$ t.q. $\mathbb{P}(A) > 0$. Alors pour tout $1 \leq i \leq m$,*

$$\boxed{\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)}.}$$

**Exercice** Pour dépister une maladie, on applique un test sanguin. Si le patient est atteint, le test donne un résultat positif dans 99% des cas. Mais le test est également positif pour 2% des personnes en bonne santé. La proportion de personnes malades dans la population soumise au test est de $10^{-3}$. Calculer la probabilité pour qu'un patient soit en bonne santé sachant que le résultat de son test est positif.

**Définition** *Soit $\Omega$ muni d'une probabilité $\mathbb{P}$. Deux événements $A$ et $B$ sont dits indépendants si*

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).}$$

**Remarque** L'indépendance de $A$ et $B$ se caractérise aussi par les relations $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ ou $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$, c'est-à-dire que la probabilité donnée à l'événement $A$ (resp. $B$) n'est pas modifiée par l'information que l'événement $B$ (resp. $A$) est réalisé.

**Définition** *$m$ événements $A_1, \ldots, A_m$ sont dits indépendants si*

$$\forall I \subset \{1, \ldots, m\},\ \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$