Probabilité & Statistique

Chapitre 2: Variables aléatoires

Mohamed Essaied Hamrita

1. Matériels
2. Définitions
3. Les moments
4. Fonctions génératrices des moments (fgm)
5. Changement de variable

1. Matériels
2. Définitions
3. Les moments
4. Fonctions génératrices des moments (fgm)
5. Changement de variable

Matériels

- Supports pédagogiques (slides + documents + codes)
  https://github.com/Hamrita/Proba-Stat

Matériels

- Supports pédagogiques (slides + documents + codes)
  https://github.com/Hamrita/Proba-Stat
- Logiciel statistique: R (https://www.r-project.org/)
  Vidéo expliquant l'installation
  https://www.youtube.com/watch?v=4ZhaB_kbTKc&list=PLVMtMDWXCQ364TxQxXdUZfyMmiXe9YIPH&index=3

Matériels

- Supports pédagogiques (slides + documents + codes)
  https://github.com/Hamrita/Proba-Stat
- Logiciel statistique: R (https://www.r-project.org/)
  Vidéo expliquant l'installation
  https://www.youtube.com/watch?v=4ZhaB_kbTKc&list=PLVMtMDWXCQ364TxQxXdUZfyMmiXe9YIPH&index=3
- Un ordinateur portable ou une tablette ou un smart phone plus une connexion internet.

1. Matériels
2. Définitions
3. Les moments
4. Fonctions génératrices des moments (fgm)
5. Changement de variable

Définitions

Définition

Une ***variable aléatoire*** *(v.a.) X est une fonction définie sur l'espace fondamental Ω, qui associe une valeur numérique à chaque résultat de l'expérience aléatoire étudiée. Ainsi, à chaque évènement élémentaire ω, on associe un nombre $X(\omega)$.*

Exemple

On lance deux fois une pièce de monnaie et on s'intéresse au nombre X de fois ou PILE apparaît.

ω	PP	PF	FP	FF
$X(\omega)$	2	1	1	0

Définitions

Remarques

- Une variable aléatoire est dite **discrète** lorsque l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre, i.e $X(\Omega)$, est fini ou infini dénombrable. Pour une telle variable aléatoire X, on définit sa loi de probabilité par

$$f(x) = P(X = x)$$

- Une variable aléatoire est dite **continue** si l'ensemble $X(\Omega)$ est un intervalle (ou une réunion d'intervalles) de $\mathbb{R}$.

Définitions

Définition (Fonction de répartition)

Soit X une v.a.. On appelle ***fonction de répartition*** *de X la fonction de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par*

$$F(x) = P[X \leq x] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k \leq x} P(X = k) & \text{si } X \text{ est discrète} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt & \text{si } X \text{ est continue} \end{cases}$$

Définitions

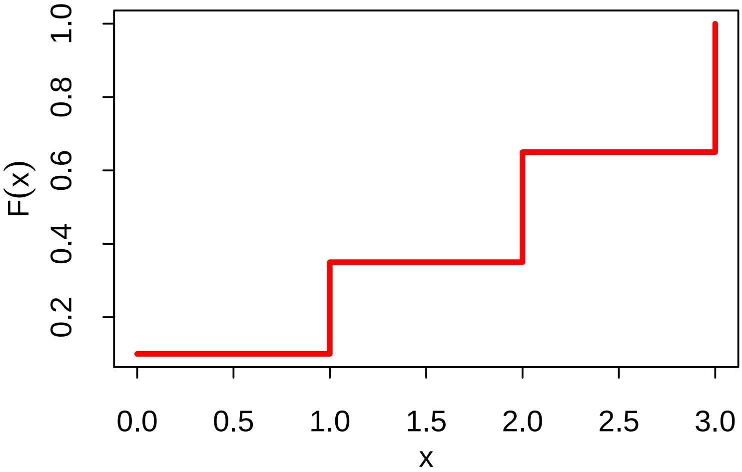
Exercice 1 Dans chacun des cas suivants, déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X et donner son graphique.

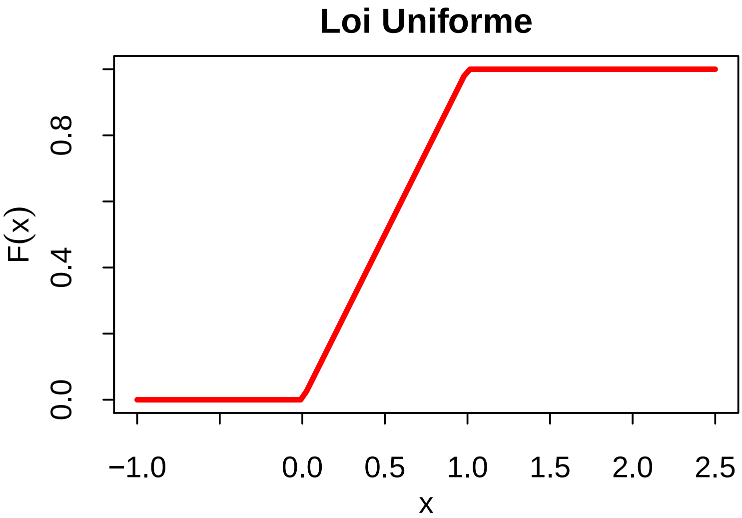
1)

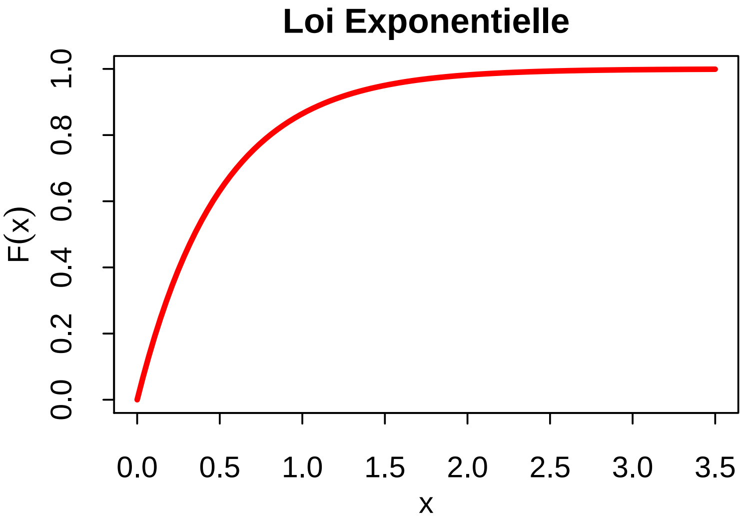
x	0	1	2	3
$f(x) = P(X = x)$	0.1	0.25	0.3	0.35

2) $X \sim \mathcal{U}[0,1]$

3) $X \sim \mathcal{E}(\lambda = 2)$; i.e $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, si $x \geq 0$ et $\lambda > 0$..


F(x)
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
x


Loi Uniforme
F(x)
0.0
0.4
0.8
−1.0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
x


Loi Exponentielle
F(x)
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0.0 0.5 1.0 1.5 2.0 2.5 3.0 3.5
x

Définitions

Proposition

Soit F une fonction de répartition. Alors

1. *F est croissante,*

Définitions

Proposition

Soit F une fonction de répartition. Alors

1. *F est croissante,*
2. *F est continue à droite et admet une limite à gauche en tout point x égale à $P[X < x]$,*

Définitions

Proposition

Soit F une fonction de répartition. Alors

1. *F est croissante,*
2. *F est continue à droite et admet une limite à gauche en tout point x égale à $P[X < x]$,*
3. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Définitions

Proposition

Soit F une fonction de répartition. Alors

1. *F est croissante,*
2. *F est continue à droite et admet une limite à gauche en tout point x égale à $P[X < x]$,*
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \ \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Définitions

Proposition

Soit F une fonction de répartition. Alors

1. *F est croissante,*
2. *F est continue à droite et admet une limite à gauche en tout point x égale à $P[X < x]$,*
3. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Tous les calculs de probabilité concernant X peuvent être traités en termes de fonction de répartition.
$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$ pour tout $a < b$;
$P(X \leq a) = F(a)$ et $P(X > b) = 1 - F(b)$.

1. Matériels
2. Définitions
3. Les moments
4. Fonctions génératrices des moments (fgm)
5. Changement de variable

Les moments

Définition

*L'**espérance ou moyenne** d'une v.a. X est définie par*

$$\mathbb{E}(X) = \begin{cases} \sum_{x} xP(X = x) & \text{si } X \text{ est discrète} \\ \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx & \text{si } X \text{ est continue} \end{cases}$$

Les moments

Définition

*L'**espérance ou moyenne** d'une v.a. X est définie par*

$$\mathbb{E}(X) = \begin{cases} \sum_x xP(X=x) & \textit{si } X \textit{ est discrète} \\ \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx & \textit{si } X \textit{ est continue} \end{cases}$$

Exercice 2 Dans chacun des cas définis dans l'exercice précédent, déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Les moments

Proposition

Pour toute fonction g,

$$\mathbb{E}\left(g(X)\right) = \begin{cases} \displaystyle\sum_x g(x)P(X=x) & \text{si } X \text{ est discrète} \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)dx & \text{si } X \text{ est continue} \end{cases}$$

Les moments

Proposition

Pour toute fonction g,

$$\mathbb{E}\left(g(X)\right) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x} g(x)P(X = x) & \textit{si } X \textit{ est discrète} \\ \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)dx & \textit{si } X \textit{ est continue} \end{cases}$$

Exercice 3 Dans chacun des cas définis dans l'exercice 1, déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $Y = X^2$.

Propriétés

P1 *Pour tout réels a et b,* $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$.

Propriétés

P1 *Pour tout réels a et b,* $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b.$

P2 *Si* X *et* Y *sont deux v.a. qui admettent une espérance:*

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

Propriétés

P1 *Pour tout réels a et b,* $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$.

P2 *Si* X *et* Y *sont deux v.a. qui admettent une espérance:*

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

Propriétés

P1 *Pour tout réels* a *et* b, $\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X) + b$.

P2 *Si* X *et* Y *sont deux v.a. qui admettent une espérance:*

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

Définition (Variance)

La ***variance*** *d'une v.a.* X *est le réel positif*

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\Big(X - \mathbb{E}(X)\Big)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$$

et ***l'écart-type*** *de* X *est la racine carrée de sa variance, i.e*

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

Les moments

Exercice 4 Montrer que si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

Les moments

Exercice 4 Montrer que si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

Propriétés

P1 *La variance est une quantité positive,* $\mathbb{V}(X) \geq 0$.

Les moments

Exercice 4 Montrer que si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

Propriétés

P1 *La variance est une quantité positive,* $\mathbb{V}(X) \geq 0$.

P2 *Pour tout réels a et b,* $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$. *On déduit que* $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$.

Les moments

Exercice 4 Montrer que si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

Propriétés

P1 *La variance est une quantité positive,* $\mathbb{V}(X) \geq 0$.

P2 *Pour tout réels* a *et* b, $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$. *On déduit que* $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$.

P3 *Si* X *et* Y *sont deux v.a.* ***indépendantes****,alors:*

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$$

1. Matériels
2. Définitions
3. Les moments
4. Fonctions génératrices des moments (fgm)
5. Changement de variable

Fonctions génératrices des moments

Définition

La ***fonction génératrice des moments*** $\phi(t)$ *d'une variable aléatoire* X *est définie pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *par*

$$\phi(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right] \begin{cases} \displaystyle\sum_x e^{tx} P(X = x) \ \textit{si } X \textit{ est discrète} \\ \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{tx} f(x) dx \ \textit{si } X \textit{ est continue} \end{cases}$$

Fonctions génératrices des moments

Définition

*La **fonction génératrice des moments** $\phi(t)$ d'une variable aléatoire X est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par*

$$\phi(t) = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right] \begin{cases} \displaystyle\sum_x e^{tx} P(X = x) \text{ si } X \text{ est discrète} \\ \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{tx} f(x) dx \text{ si } X \text{ est continue} \end{cases}$$

$\phi(t)$ est appelée fonction génératrice des moments car tous les moments de X peuvent être obtenues par les dérivées successives de $\phi(t)$.

Par exemple

$$\phi'(t) = \frac{d}{dt}\mathbb{E}\left[e^{tX}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{d}{dt}(e^{tX})\right] = \mathbb{E}\left[Xe^{tX}\right]$$

Par conséquent $\phi'(0) = \mathbb{E}(X)$.
D'une manière plus générale, $\phi^{(n)}(0) = \mathbb{E}\left(X^n\right),\ n \geq 1$.
Une propriété importante des fonctions génératrices des moments est que la fonction génératrice des moments de la somme des variables aléatoires indépendantes est simplement le produit des fonctions génératrices des moments individuelles.
Supposons que X et Y sont indépendantes et ont respectivement des fonctions génératrices des moments $\phi_X(t)$ et $\phi_Y(t)$. Alors

$$\phi_{X+Y}(t) = \mathbb{E}\left(e^{t(X+Y)}\right) = \mathbb{E}\left(e^{tX}e^{tY}\right) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right)\mathbb{E}\left(e^{tY}\right) = \phi_X(t)\phi_Y(t)$$

Fonctions génératrices

Exercice 5 Déterminer la fgm de la loi exponentielle de paramètre λ.

Fonctions génératrices

Exercice 5 Déterminer la fgm de la loi exponentielle de paramètre λ.

$$
\begin{aligned}
\phi(t) =& \mathbb{E}\left(e^{tX}\right) = \int_0^{+\infty} e^{tX}\lambda e^{-\lambda X} dx \\
&= \int_0^{+\infty} \lambda e^{x(t-\lambda)} dx = \frac{\lambda}{t-\lambda}\int_0^{+\infty} (t-\lambda) e^{x(t-\lambda)} dx \\
&= \frac{\lambda}{t-\lambda}\left[e^{x(t-\lambda)}\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{\lambda}{\lambda - t}, \text{ pour } t < \lambda.
\end{aligned}
$$

Fonctions génératrices

La moyenne et la variance peuvent être déduite à partir de la fonction génératrice des moments, en effet;

$$\mathbb{E}(X) = \phi'(0) = \left.\frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}\right|_{t=0} = \frac{1}{\lambda}$$

Fonctions génératrices

La moyenne et la variance peuvent être déduite à partir de la fonction génératrice des moments, en effet;

$$\mathbb{E}(X) = \phi'(0) = \left.\frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}\right|_{t=0} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \phi''(0) = \left.\frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}\right|_{t=0} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Fonctions génératrices

La moyenne et la variance peuvent être déduite à partir de la fonction génératrice des moments, en effet;

$$\mathbb{E}(X) = \phi'(0) = \left.\frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}\right|_{t=0} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \phi''(0) = \left.\frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}\right|_{t=0} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Ainsi,

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Fonctions génératrices

En utilisant le développement en série de l'exponentielle, on peut déterminer l'expression de $\mathbb{E}(X^k)$, en effet;

Rappel: $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

$$\phi(t) = \mathbb{E}\left(e^{tX}\right) = \int_0^{+\infty} e^{tX} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tX)^k}{k!} f(x)dx$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t)^k}{k!} \int_0^{+\infty} X^k f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t)^k}{k!} \mathbb{E}\left(X^k\right)$$

Fonctions génératrices

Or $\phi(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda - t} = \dfrac{1}{1 - \frac{t}{\lambda}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\lambda^k}$, d'où

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbb{E}\left(X^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\lambda^k} \Longrightarrow \mathbb{E}\left(X^k\right) = \frac{k!}{\lambda^k}$$

Fonctions génératrices

Or $\phi(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda - t} = \dfrac{1}{1-\frac{t}{\lambda}} = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{t^k}{\lambda^k}$, d'où

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\mathbb{E}\left(X^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\lambda^k} \Longrightarrow \mathbb{E}\left(X^k\right) = \frac{k!}{\lambda^k}$$

$\mathbb{E}\left(X\right) = \dfrac{1!}{\lambda} = \dfrac{1}{\lambda}$.

$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \dfrac{2!}{\lambda^2} = \dfrac{2}{\lambda^2}$.

1. Matériels
2. Définitions
3. Les moments
4. Fonctions génératrices des moments (fgm)
5. Changement de variable

Changement de variable

Soit $Y = h(X)$. On cherche à déterminer la loi de probabilité de la v.a. Y, connaissant la fonction de répartition (f.r.) de la v.a. X. On suppose que $h()$ est bijective, donc elle admet une fonction réciproque $h^{-1}()$.

$$G(y) = P(Y \leq y) = \mathbb{P}(h(X) \leq y) =$$

- Si h est croissante, $G(y) = \mathbb{P}(X \leq h^{-1}(y)) = F\left(h^{-1}(y)\right)$.
- Si h est décroissante, $G(y) = \mathbb{P}(X > h^{-1}(y)) = 1 - F\left(h^{-1}(y)\right)$.

Si X admet une densité f et que h est de plus dérivable, on peut déterminer la densité $g = dG/dy$ de Y par dérivation.

Exemple

Soit X une variable aléatoire de densité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{3}{4}x^2 \text{ si } x \in [-1, 1], \\ 0 \qquad \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer la densité de la v.a. $Y = 2X + 1$.

Exemple

Soit X *une variable aléatoire de densité*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{3}{4}x^2 \text{ si } x \in [-1,1], \\ 0 \quad\quad \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer la densité de la v.a. $Y = 2X + 1$.

$Y = h(X) = 2X + 1$, *la fonction* h *est strictement croissante sur* $[-1, 1]$, *donc elle est bijective et sa fonction réciproque est* $h^{-1}(Y) = \frac{Y-1}{2}$.

Donc, $G(y) = F\left(\frac{Y-1}{2}\right)$ *et* $g(y) = dF\left(\frac{y-1}{2}\right)/dy = \frac{1}{2}f(\frac{y-1}{2})$.

Soit $g(y) = \begin{cases} \frac{1}{8} + \frac{3}{8}\left(\frac{y-1}{2}\right)^2 \text{ si } y \in [-1,3], \\ 0 \quad\quad \text{sinon} \end{cases}$

Changement de variable

Même dans le cas où la fonction h n'est pas inversible, on peut parfois déterminer la loi de $Y = h(X)$. Considérons par exemple $h(x) = X^2$; la fonction h n'est pas injective car $h(-x) = h(x)$ pour tout x réel et cependant on peut déterminer la loi de la v.a. positive $Y = X^2$.

Changement de variable

Même dans le cas où la fonction h n'est pas inversible, on peut parfois déterminer la loi de $Y = h(X)$. Considérons par exemple $h(x) = X^2$; la fonction h n'est pas injective car $h(-x) = h(x)$ pour tout x réel et cependant on peut déterminer la loi de la v.a. positive $Y = X^2$.

$$
\begin{aligned}
G(y) =& \mathbb{P}\left(Y \leq y\right) = \mathbb{P}\left(X^2 \leq y\right) = \mathbb{P}\left(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\right) \\
=& F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}) \\
g(y) =& \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{y})\right) \\
=& \begin{cases} \dfrac{1+3y}{4\sqrt{y}} & \text{si } y \in]0,1], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Fin