Probabilité & Statistique

Chapitre 3: Lois usuelles

Mohamed Essaied Hamrita

1. Lois discrètes
    - Loi de Dirac
    - Loi de Bernoulli
    - Loi Binômiale
    - Loi hypergéométrique
    - Loi géométrique
    - Loi de Poisson
    - Loi binômiale négative
2. Lois continues

Définition

Soit $a \in \mathbb{R}$ un point fixé. On appelle ***loi de Dirac****, notée δ_a , la loi de la v.a. certaine X qui est constante, prenant la même valeur a quel que soit le résultat de l'épreuve:*

$$X(\omega) = a, \ \forall \omega \ \in \omega$$

Ainsi:

$$X(\Omega) = \{a\}, \ \ \mathbb{P}(X = a) = P(\Omega) = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq a \\ 1 \text{ si } x > a \end{cases}$$

On obtient comme moments: $\mathbb{E}(X) = a$ et $\mathbb{V}(X) = 0$.

Définition

Soit $A \in \mathcal{A}$ un événement quelconque ; on appelle v.a. indicatrice de l'événement A, la v.a. définie par $X = \mathbf{1}_A$, c'est-à-dire :

$$X(\omega) = \mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 \ si \ \omega \in A \\ 0 \ sinon \end{cases}$$

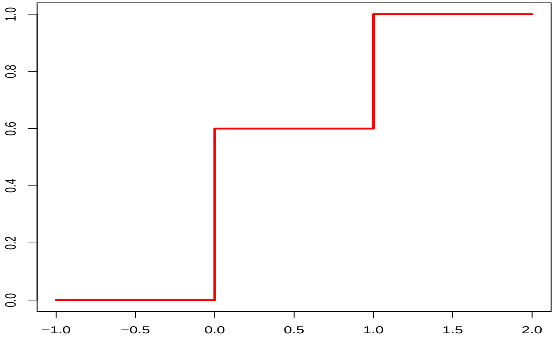
Ainsi $X(\Omega) = \{0, 1\}$ avec: $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

On dit que X suit une **loi de Bernoulli** de paramètre $p = \mathbb{P}(A)$ et on note $X \sim B(1, p)$.

Les moments de cette loi sont: $\mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(A) = p$ et $\mathbb{V}(X) = p(1 - p)$.

La fonction de répartition est définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; x \leq 0 \\ 1 - p & \text{si } \; 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } \; x > 1 \end{cases}$$



Loi Binômiale

Définition

Supposons qu'on exécute n épreuves indépendantes, chacune ayant p pour probabilité de succès et $1 - p$ pour probabilité d'échec. La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès sur l'ensemble des n épreuves est dite variable aléatoire ***binômiale*** *de paramètres (n, p). On note $X \sim B(n, p)$.*

La loi de probabilité d'une variable aléatoire binômiale de paramètres (n, p) est donnée par

$$\mathbb{P}(X = x) = C_n^x p^x (1 - p)^{n-x}, \ x = 0, 1, 2, \dots$$

La moyenne et la variance sont données par:

$$\mathbb{E}(X) = np \quad \mathbb{V}(X) = np(1 - p)$$

Loi hypergéométrique: On tire sans remise un échantillon de n boules d'une urne en contenant N, desquelles A_p sont blanches et $N—N_p$ noires. Désignons par X le nombre de boules blanches tirées. On aura

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{C_{N_p}^{x} C_{N-N_p}^{n-x}}{C_N^n}\,; \quad \max 0, n-(N-N_p) \leq x \leq \min\{n, N_p\}.$$

Cette variable est dite variable aléatoire **hypergéométrique** et notée $X \sim \mathcal{H}(N, n, N_p)$.

- $\mathbb{E}(X) = n\dfrac{N_p}{N}$

Loi hypergéométrique: On tire sans remise un échantillon de n boules d'une urne en contenant N, desquelles A_p sont blanches et $N—N_p$ noires. Désignons par X le nombre de boules blanches tirées. On aura

$$\mathbb{P}(X=x)=\frac{C_{N_p}^{x}\,C_{N-N_p}^{n-x}}{C_N^n}\ ;\quad \max 0, n-(N-N_p)\leq x\leq \min\{n, N_p\}.$$

Cette variable est dite variable aléatoire **hypergéométrique** et notée $X\sim\mathcal{H}(N,n,N_p)$.

- $\mathbb{E}(X)=n\dfrac{N_p}{N}$
- $\mathbb{V}(X)=n\dfrac{N_p}{N}\dfrac{N-n}{N-1}\left(1-\dfrac{N_p}{N}\right)$

Loi géométrique: On exécute une série d'épreuves indépendantes ayant chacune la probabilité p d'être un succès, $0 < p < 1$, jusqu'à obtenir le premier succès. Si X le nombre d'épreuves nécessaires jusqu'à obtenir le premier succès, alors

$$\mathbb{P}(X = x) = (1 - p)^{x-1}p, \quad x = 1, 2, 3, \ldots$$

Cette variable est dite variable aléatoire **géométrique (ou de Pascal)** de paramètre p et dénoté $X \ G(p)$.

Loi géométrique: On exécute une série d'épreuves indépendantes ayant chacune la probabilité p d'être un succès, $0 < p < 1$, jusqu'à obtenir le premier succès. Si X le nombre d'épreuves nécessaires jusqu'à obtenir le premier succès, alors

$$\mathbb{P}(X = x) = (1 - p)^{x-1}p, \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

Cette variable est dite variable aléatoire **géométrique (ou de Pascal)** de paramètre p et dénoté $X\ G(p)$.
La fonction de répartition d'une variable aléatoire $X \sim G(p)$ est

$$F(x) = \begin{cases} 1-(1-p)^a & \text{si } x \in [a, a+1] \text{ avec } a \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$

Loi géométrique: On exécute une série d'épreuves indépendantes ayant chacune la probabilité p d'être un succès, $0 < p < 1$, jusqu'à obtenir le premier succès. Si X le nombre d'épreuves nécessaires jusqu'à obtenir le premier succès, alors

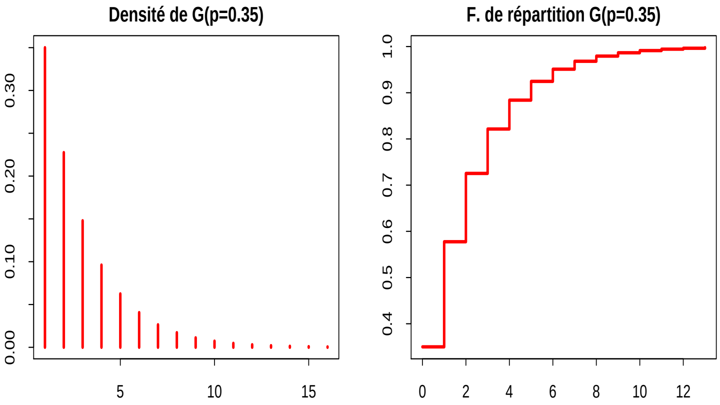
$$\mathbb{P}(X = x) = (1 - p)^{x-1} p, \quad x = 1, 2, 3, \ldots$$

Cette variable est dite variable aléatoire **géométrique (ou de Pascal)** de paramètre p et dénoté $X \ G(p)$.
La fonction de répartition d'une variable aléatoire $X \sim G(p)$ est

$$F(x) = \begin{cases} 1-(1-p)^a & \text{si } x \in [a, a+1] \text{ avec } a \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$
- $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$

Loi géométrique



Loi de Poisson

Définition

Une variable aléatoire X suit une loi de ***Poisson*** *de paramètre $\lambda > 0$ si*

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Ceci est dénoté $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et on a $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda$.

Loi de Poisson

Définition

Une variable aléatoire X suit une loi de ***Poisson*** *de paramètre $\lambda > 0$ si*

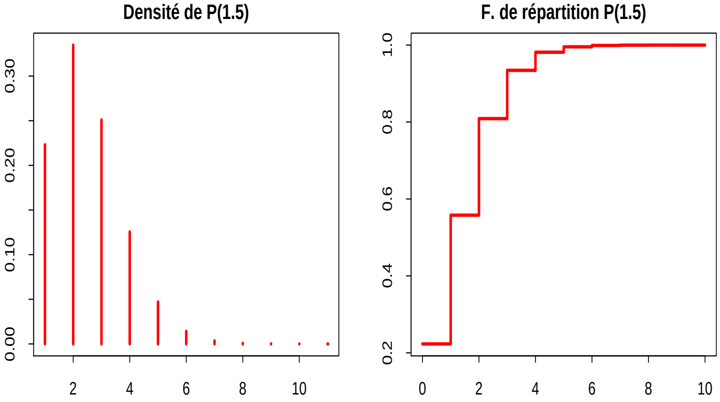
$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Ceci est dénoté $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et on a $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda$.

Si deux variables suivent des lois de Poisson et sont **indépendantes**, $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$, alors leur somme suit aussi une loi de Poisson:

$$X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$$

Loi de Poisson



Loi binômiale négative

Définition

*On exécute une série d'épreuves indépendantes ayant chacune une probabilité p de donner un succès, $0 < p < 1$, jusqu'à obtenir un total de r succès. La variable aléatoire X désignant le nombre d'épreuves nécessaires pour atteindre ce résultat suit une loi appelée colorblue**loi binômiale négative** de paramètres r et p, notée $X \sim \mathcal{BN}(r, p)$ et de densité de probabilité:*

$$\mathbb{P}(X = x) = C_{x-1}^{r-1} p^r (1-p)^{x-r}, \quad x = r, r+1, \ldots$$

Loi binômiale négative

Définition

*On exécute une série d'épreuves indépendantes ayant chacune une probabilité p de donner un succès, $0 < p < 1$, jusqu'à obtenir un total de r succès. La variable aléatoire X désignant le nombre d'épreuves nécessaires pour atteindre ce résultat suit une loi appelée colorblue**loi binômiale négative** de paramètres r et p, notée $X \sim \mathcal{BN}(r, p)$ et de densité de probabilité:*

$$\mathbb{P}(X = x) = C_{x-1}^{r-1} p^r (1-p)^{x-r}, \;\; x = r, r+1, \dots$$

L'espérance et la variance d'une loi binômiale négative sont:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{r}{p} \; ; \quad \mathbb{V}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Loi uniforme

Définition

*Une v.a. X suit une loi **uniforme** continue si sa densité est constante sur un intervalle fini $[a, b]$, étant donc de la forme:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si\ x \in [a, b] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

On écrit $X \sim \mathcal{U}[a, b]$.

Loi uniforme

Définition

Une v.a. X suit une loi ***uniforme*** *continue si sa densité est constante sur un intervalle fini $[a, b]$, étant donc de la forme:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si\ x \in [a, b] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

On écrit $X \sim \mathcal{U}[a, b]$.

- $\mathbb{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$

Loi uniforme

Définition

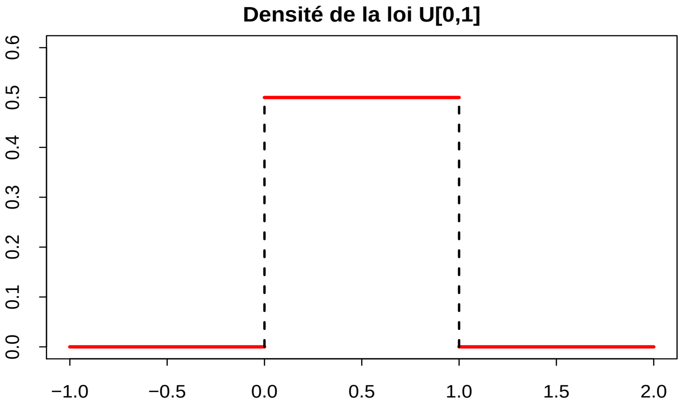
Une v.a. X suit une loi ***uniforme*** *continue si sa densité est constante sur un intervalle fini $[a, b]$, étant donc de la forme:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si\ x \in [a, b] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

On écrit $X \sim \mathcal{U}[a, b]$.

- $\mathbb{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$
- $\mathbb{V}(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Loi uniforme



Loi uniforme

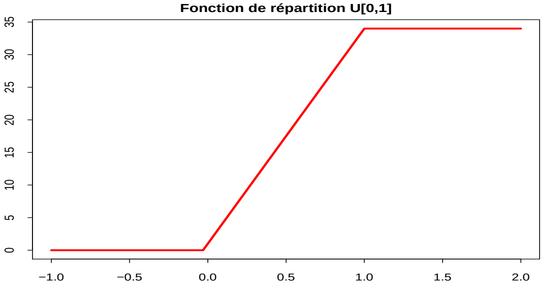
La fonction de répartition est:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} \quad \text{si } x \in [a, b[\\ 1 \quad \text{si } x \geq b \end{cases}$$

Loi uniforme

La fonction de répartition est:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b[\\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$



Loi exponentielle

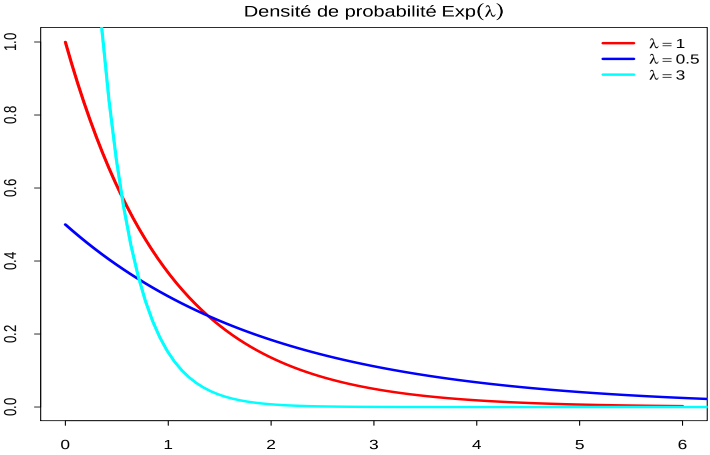
Définition

*La **loi exponentielle** de paramètre $\lambda > 0$ est celle d'une variable positive de densité:*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

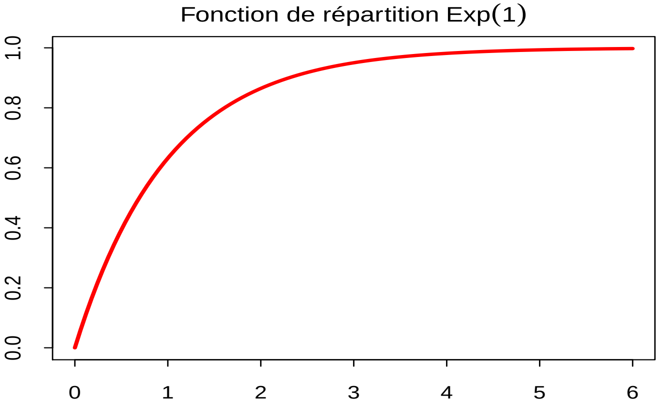
On écrit $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ et on a $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

Loi exponentielle



Loi exponentielle

La fonction de répartition est: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$



1 Lois discrètes

2 Lois continues
- Loi uniforme
- Loi exponentielle
- Loi normale
- Loi Gamma
- Loi de khi-deux χ^2
- Loi Bêta
- Loi de Student
- Loi de Fisher

Loi normale

La **loi normale** de paramètres m et $\sigma > 0$, notée $X \sim N(m, \sigma)$, est la loi définie par la densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) , \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

L'espérance mathématique et la variance de la loi normale sont:

$$\mathbb{E}(X) = m \text{ et } \mathbb{V}(X) = \sigma^2$$

Loi normale

- On peut constater que $f(2m-x) = f(x)$, ce qui indique que le graphe de f est symétrique par rapport à la droite verticale $x = m$.

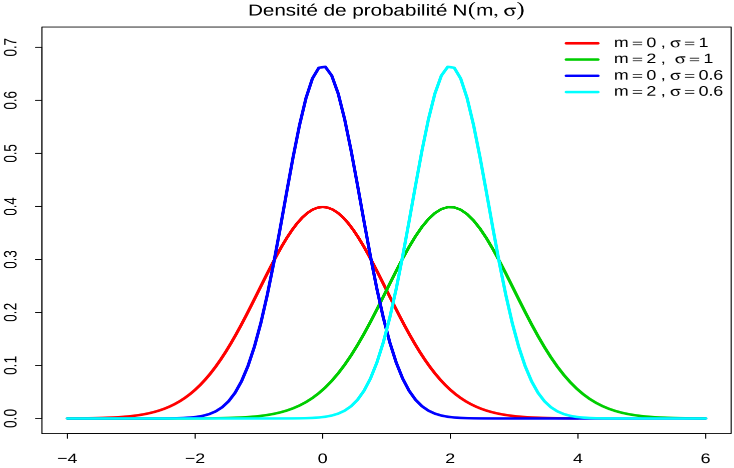
Loi normale

- On peut constater que $f(2m-x) = f(x)$, ce qui indique que le graphe de f est symétrique par rapport à la droite verticale $x = m$.
- L'expression $(x-m)^2$ est minimum pour $x = m$, ce qui va correspondre à un maximum pour f de valeur : $f(m) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

Loi normale

- On peut constater que $f(2m-x) = f(x)$, ce qui indique que le graphe de f est symétrique par rapport à la droite verticale $x = m$.
- L'expression $(x-m)^2$ est minimum pour $x = m$, ce qui va correspondre à un maximum pour f de valeur : $f(m) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.
- Quand x devient infini, alors $f(x) \longrightarrow 0$ donc l'axe des abscisses est asymptote au graphe.

Loi normale


Densité de probabilité N(m, σ)
m = 0 , σ = 1
m = 2 , σ = 1
m = 0 , σ = 0.6
m = 2 , σ = 0.6
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
−4
−2
0
2
4
6

Loi normale standard

Loi normale centrée réduite (loi normale standard):
En faisant le changement de variable $Z = (X - m)/\sigma$, c'est-à-dire en centrant et en réduisant, on obtient une v.a. de loi standard, de moyenne nulle $\mathbb{E}(Z) = 0$ et de variance unité
$\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(X - m)^2/\sigma^2 = \mathbb{V}(X)/\sigma^2 = 1$, donc de densité:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$$

La fonction de répartition est définie par:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$$

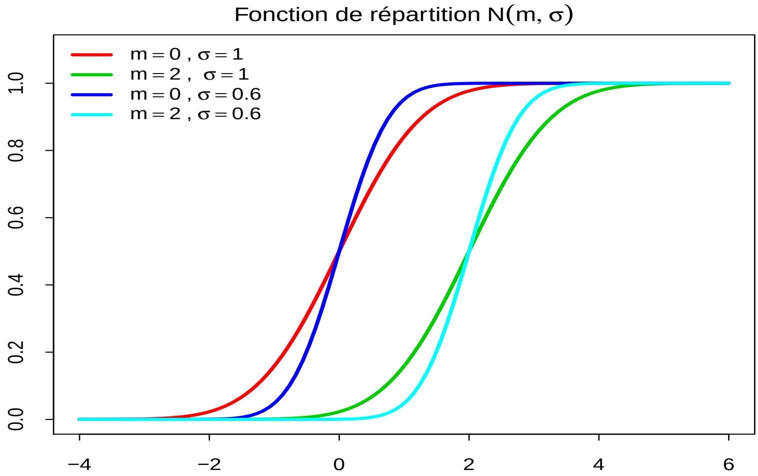
et n'est pas exprimable au moyen d'une fonction usuelle. Les valeurs de $\Phi()$ sont fournies dans les tables statistiques pour $x > 0$.

Loi normale

Pour $x < 0$, on utilise le fait que Φ est une fonction paire, $\Phi(z) = \Phi(-z)$, c'est-à-dire que la loi est symétrique par rapport au centre de distribution 0, soit : $\mathbb{P}(Z \leq -x) = \mathbb{P}(Z > x) = 1 - \Phi(x)$.
De cette symétrie découle également la probabilité d'un intervalle centré à l'origine:

$$\mathbb{P}(|Z| \leq a) = \mathbb{P}(-a \leq Z \leq a) = \Phi(a) - \Phi(-a) = 2\Phi(a) - 1, \quad a > 0$$

Loi normale


Fonction de répartition N(m, σ)
m = 0 , σ = 1
m = 2 , σ = 1
m = 0 , σ = 0.6
m = 2 , σ = 0.6
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
−4
−2
0
2
4
6

Loi normale

Convolution de lois normales:

La convolution (somme) de deux lois normales **indépendantes** est encore une loi normale: si $X \sim N(m_x, \sigma_x)$ et $Y \sim N(m_y, \sigma_y)$ sont des v.a. indépendantes, alors $(X+Y) \sim N\left(m_x + m_y, \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}\right)$.

Loi normale

Convolution de lois normales:

La convolution (somme) de deux lois normales **indépendantes** est encore une loi normale: si $X \sim N(m_x, \sigma_x)$ et $Y \sim N(m_y, \sigma_y)$ sont des v.a. indépendantes, alors $(X+Y) \sim N\left(m_x + m_y, \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}\right)$.

Exercice

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ une suite de v.a indépendantes de même loi $N(m, \sigma)$.

On note $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Calculer $\mathbb{E}\left(\overline{X}\right)$ et $\mathbb{V}\left(\overline{X}\right)$. En déduire la loi de $\overline{X}$.

Définition (Fonction Gamma)

Pour tout nombre réel x tel que $x > 0$, on définit la fonction suivante, appelée ***fonction gamma****, et notée par la lettre grecque Γ:*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Définition (Fonction Gamma)

Pour tout nombre réel x tel que $x > 0$, on définit la fonction suivante, appelée ***fonction gamma****, et notée par la lettre grecque Γ:*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Proposition

La fonction Γ possède les propriétés suivantes:

- $\Gamma(1) = 1$ *et* $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Définition (Fonction Gamma)

*Pour tout nombre réel x tel que $x > 0$, on définit la fonction suivante, appelée **fonction gamma**, et notée par la lettre grecque Γ:*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Proposition

La fonction Γ possède les propriétés suivantes:

- $\Gamma(1) = 1$ *et* $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
- $\forall x > 0, \ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

Définition (Fonction Gamma)

Pour tout nombre réel x tel que $x > 0$, on définit la fonction suivante, appelée ***fonction gamma****, et notée par la lettre grecque Γ:*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Proposition

La fonction Γ possède les propriétés suivantes:

- $\Gamma(1) = 1$ *et* $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
- $\forall x > 0, \ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \ \Gamma(n+1) = n!$

Fonction Gamma

Calculer $\Gamma(4)$, $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$.

Fonction Gamma

Calculer $\Gamma(4)$, $\Gamma\left(\dfrac{5}{2}\right)$.

- $\Gamma(4) = \Gamma(3+1) = 3! = 6.$

Fonction Gamma

Calculer $\Gamma(4)$, $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$.

- $\Gamma(4) = \Gamma(3+1) = 3! = 6.$
- $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right).$

  Or, $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

  D'où $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}.$

Loi de Gamma

Définition (Loi Gamma)

*Une variable aléatoire X suit une **loi Gamma** de paramètres α et $\lambda > 0$, notée $X \sim \gamma(\alpha, \lambda)$ si sa fonction de densité de probabilité est:*

$$f(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}(\lambda x)^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}; \quad \textit{pour } x > 0$$

$\mathbb{E}(X) = \alpha/\lambda$ *et* $\mathbb{V}(X) = \alpha/\lambda^2$.

Loi de Gamma

Définition (Loi Gamma)

Une variable aléatoire X suit une ***loi Gamma*** *de paramètres α et $\lambda > 0$, notée $X \sim \gamma(\alpha, \lambda)$ si sa fonction de densité de probabilité est:*

$$f(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} (\lambda x)^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\lambda x}; \quad \textit{pour } x > 0$$

$\mathbb{E}(X) = \alpha/\lambda$ *et* $\mathbb{V}(X) = \alpha/\lambda^2$.

- Si $\alpha = 1$, alors $\gamma(1, \lambda) \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

Loi de Gamma

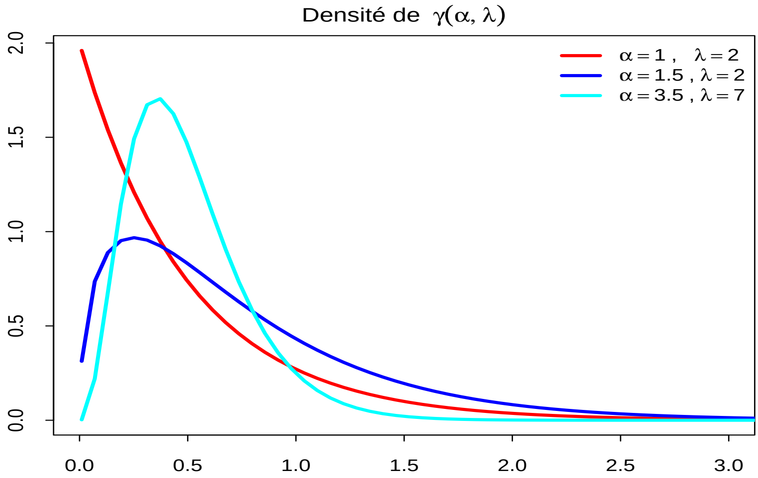
Définition (Loi Gamma)

Une variable aléatoire X suit une ***loi Gamma*** *de paramètres α et $\lambda > 0$, notée $X \sim \gamma(\alpha, \lambda)$ si sa fonction de densité de probabilité est:*

$$f(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}(\lambda x)^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}; \quad \textit{pour } x > 0$$

$\mathbb{E}(X) = \alpha/\lambda$ *et* $\mathbb{V}(X) = \alpha/\lambda^2$.

- Si $\alpha = 1$, alors $\gamma(1, \lambda) \sim \mathcal{E}(\lambda)$.
- Si $X_i \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$, alors $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \gamma(\alpha = n, \lambda)$ (**Loi d'Erlang**).


Densité de $\gamma(\alpha, \lambda)$
$\alpha = 1$, $\lambda = 2$
$\alpha = 1.5$, $\lambda = 2$
$\alpha = 3.5$, $\lambda = 7$
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0

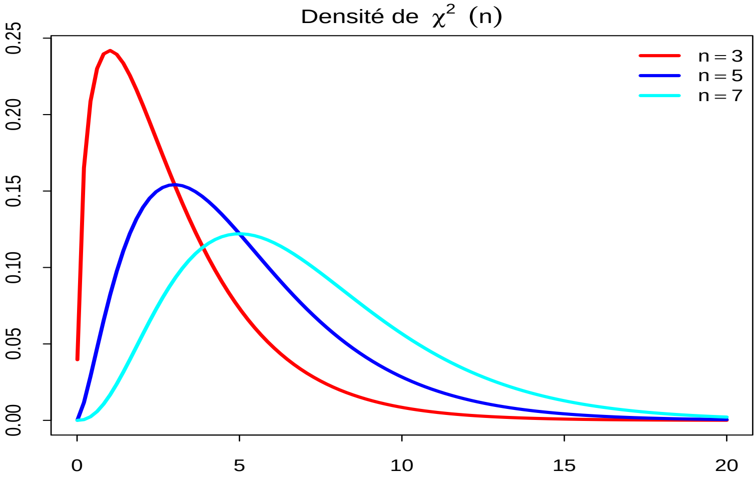
Loi de khi-deux χ^2

Définition

La ***loi du khi-deux*** *à n degrés de liberté, notée $\sim \chi^2(n)$, est la loi $\gamma(n/2, 1/2)$ où n est un entier positif, donc de densité pour $x > 0$:*

$$f(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} e^{-x/2} x^{n/2-1}$$

$\mathbb{E}(X) = n$ et $\mathbb{V}(X) = 2n$.


Densité de χ^2 (n)
n = 3
n = 5
n = 7
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25
0
5
10
15
20

- Si $\underset{1\leq i\leq n}{X_i} \overset{iid}{\sim} \chi^2(p_i)$, alors $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2(N)$ avec $N = \sum p_i$.

- Si $\underset{1\leq i\leq n}{X_i} \overset{iid}{\sim} \chi^2(p_i)$, alors $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2(N)$ avec $N = \sum p_i$.
- Si $\underset{1\leq i\leq n}{X_i} \overset{iid}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$, alors $2\lambda S_n \sim \chi^2(2n)$ avec $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

- Si $\underset{1\leq i\leq n}{X_i} \overset{iid}{\sim} \chi^2(p_i)$, alors $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2(N)$ avec $N = \sum p_i$.
- Si $\underset{1\leq i\leq n}{X_i} \overset{iid}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$, alors $2\lambda S_n \sim \chi^2(2n)$ avec $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
- Il existe également un lien entre la loi normale et la loi khi-deux;

$$\text{Si } \underset{1\leq i\leq n}{X_i} \overset{iid}{\sim} N(m, \sigma), \text{ alors } Q_i = \left(\frac{X_i - m}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1)$$

$$\text{et } Q = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n).$$

Loi Bêta

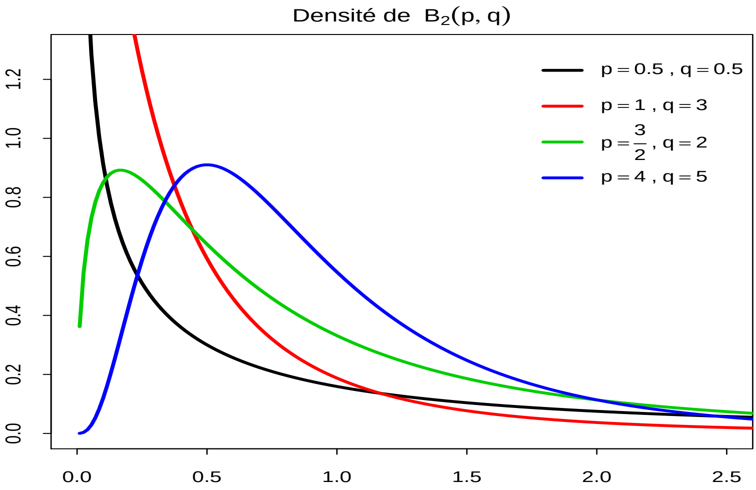
Il existe deux familles de lois bêtas qui se déduisent de la famille des lois gammas.

Définition

Si X et Y sont deux v.a. indépendantes de lois respectives $\gamma(p,1)$ et $\gamma(q,1)$, alors la v.a. $Z = X/Y$ suit une ***loi bêta de seconde espèce*** *de paramètres $p > 0$ et $q > 0$, notée $\beta_2(p,q)$, et de densité pour $z > 0$:*

$$f(z) = \frac{1}{B(p,q)} \frac{z^{p-1}}{(1+z)^{p+q}}, \quad \text{avec} \quad B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

avec $\mathbb{E}(Z) = \dfrac{p}{q-1}$, $q > 1$ *et* $\mathbb{V}(Z) = \dfrac{p(p+q-1)}{(q-1)^2(q-2)}$, $q > 2$.


Densité de $B_2(p, q)$
$p = 0.5$, $q = 0.5$
$p = 1$, $q = 3$
$p = \frac{3}{2}$, $q = 2$
$p = 4$, $q = 5$
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5

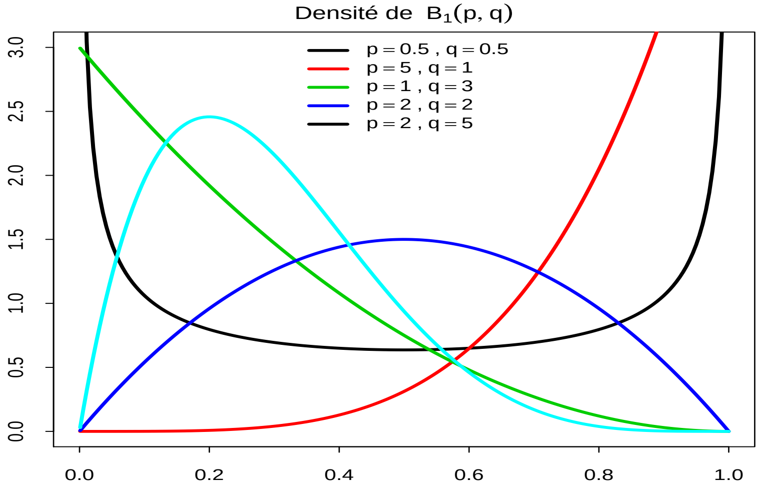
Loi Bêta

Définition

Si X et Y sont deux v.a. indépendantes de lois respectives $\gamma(p,1)$ et $\gamma(q,1)$, alors la v.a. $T = \dfrac{X+Y}{Y} = \dfrac{Z}{1+Z}$ *suit une* ***loi bêta de première espèce*** *de paramètres $p > 0$ et $q > 0$, notée $\beta_1(p,q)$, et de densité pour $t \in [0,1]$:*

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{B(p,q)} t^{p-1}(1-t)^{q-1}, & si\ t \in [0,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

avec $\mathbb{E}(T) = \dfrac{p}{q+1}$ *et* $\mathbb{V}(T) = \dfrac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$, $q > 2$.


Densité de $B_1(p, q)$
p = 0.5 , q = 0.5
p = 5 , q = 1
p = 1 , q = 3
p = 2 , q = 2
p = 2 , q = 5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Loi de Student

Définition

Soit Z une variable aléatoire de loi normale centrée et réduite et soit U une variable indépendante de Z et distribuée suivant la loi du χ^2 à n degrés de liberté. On dit que, la variable

$$T = \frac{Z}{\sqrt{U/n}}$$

suit la loi de **Student** *de degrés de liberté n, notée $T \sim T(n)$ et de densité définie par:*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

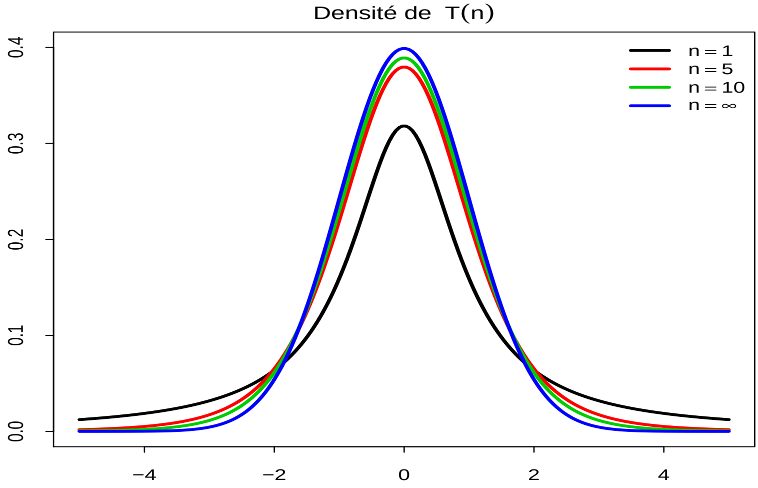
Loi de Student

La densité f associée à la variable T est **symétrique**, centrée en 0 et en forme de cloche.

Son espérance ne peut pas être définie pour $n = 1$, et est nulle pour $n > 1$.

Sa variance est infinie pour $n = 2$ et vaut $\dfrac{n}{n-2}$ pour $n > 2$.

Lorsque n est grand, la loi de Student peut être approchée par la loi normale centrée réduite.


Densité de T(n)
n = 1
n = 5
n = 10
n = ∞
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
−4
−2
0
2
4

Loi de Fisher

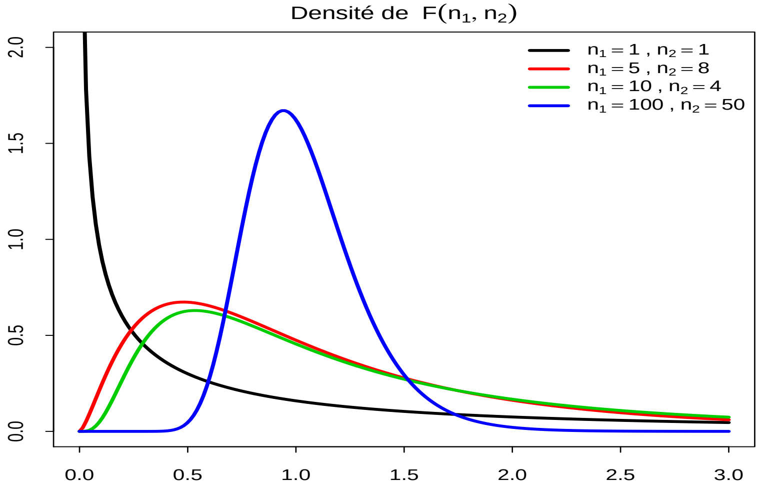
Définition

Une variable aléatoire réelle F est distribuée selon la loi de ***Fisher*** *si elle est construite comme le quotient de deux variables aléatoires indépendantes, U_1 et U_2, distribuées chacune selon une loi du χ^2 et ajustées pour leurs nombres de degrés de liberté, respectivement n_1 et n_2:*

$$F = \frac{U_1/n_1}{U_2/n2} \sim F(n_1, n_2)$$

L'espérance, la variance valent respectivement

$$\mathbb{E}(F) = \frac{n_2}{n_2 - 2} \quad pour\ n_2 > 2; \;\; \mathbb{V}(F) = \frac{2n_2^2(n_1 + n_2 - 2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}$$


Densité de $F(n_1, n_2)$
$n_1 = 1$, $n_2 = 1$
$n_1 = 5$, $n_2 = 8$
$n_1 = 10$, $n_2 = 4$
$n_1 = 100$, $n_2 = 50$
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0

Fin