Ex4 : $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \ \lambda > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La variance est par définition :

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

avec $E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, dx$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\, dx$$

Intégration par parties :

Soient $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \lambda e^{-\lambda x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-\lambda x} \end{cases}$

D'où $E(X) = \underbrace{\left[-x e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty}}_{\substack{\shortparallel \\ 0}} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx$

$$= \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x}\, dx$$

Soient $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v'(x) = \lambda e^{-\lambda x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 2x \\ v(x) = -e^{-\lambda x} \end{cases}$

$$E(X^2) = \underbrace{\left[-x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty}}_{0} + 2\underbrace{\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x}\,dx}_{\frac{E(X)}{\lambda}}$$

$$0 \quad + 2 \quad \frac{E(X)}{\lambda}$$

$$= \frac{2}{\lambda^2}.$$

Ainsi $V(X) = E(X^2) - E^2(X)$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$