Recherche opérationnelle & optimisation

Chapitre 4: Dualité - Analyse de sensibilité

Mohamed Essaied Hamrita

Janvier 2022

1. Introduction
2. Les règles de passage primal-dual
3. Théorèmes de la dualité
4. La méthode du dual simplexe

Chaque programme linéaire peut être considéré comme un problème primal.
Il y a un autre programme linéaire associé avec le primal, uniquement défini par celui-là. Ce programme linéaire est le problème dual.
Ces deux programmes sont toujours symétriques, dans les sens suivants:

- Il y a une contrainte duale pour chaque variable primale, et une variable duale pour chaque contrainte primale.

Chaque programme linéaire peut être considéré comme un problème primal.

Il y a un autre programme linéaire associé avec le primal, uniquement défini par celui-là. Ce programme linéaire est le problème dual.

Ces deux programmes sont toujours symétriques, dans les sens suivants:

- Il y a une contrainte duale pour chaque variable primale, et une variable duale pour chaque contrainte primale.
- Les coefficients objectives des variables primales deviennent les cotés droits des contraintes duales, et les cotés droits des contraintes primales deviennent les coefficients objectives des variables duales.

Chaque programme linéaire peut être considéré comme un problème primal.

Il y a un autre programme linéaire associé avec le primal, uniquement défini par celui-là. Ce programme linéaire est le problème dual.

Ces deux programmes sont toujours symétriques, dans les sens suivants:

- Il y a une contrainte duale pour chaque variable primale, et une variable duale pour chaque contrainte primale.
- Les coefficients objectives des variables primales deviennent les cotés droits des contraintes duales, et les cotés droits des contraintes primales deviennent les coefficients objectives des variables duales.
- Le dual du dual est le primal.

On considère le PL suivant:

$$\begin{cases} \max z = 3x_1 + 5x_2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Le dual correspondant au primal est:

$$\begin{cases} \min W = 12y_1 + 10y_2 \\ y_1 + y_2 \geq 3 \\ 2y_1 + 3y_2 \geq 5 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Primal	Dual
max	min
c_i	b_i
n variables $(x_1, \ldots, x_n)$	n contraintes
m contraintes	m variables $(y_1, \ldots, y_m)$
contrainte j de type $\leq$	variable $y_j \geq 0$
contrainte j de type $=$	variable $y_j \in \mathbb{R}$
variable $x_i \geq 0$	contrainte i de type $\geq$
variable $x_i \in \mathbb{R}$	contrainte i de type $=$

$$\begin{cases} \max z = cX \\ AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \min W = b'Y \\ A'Y \geq c' \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 1

Déterminer le dual correspondant au primal suivant:

$$\begin{cases} \min W = 2x_1 + 8x_2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 + 3x_2 \geq 1 \\ 5x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Théorème 1 (Dualité faible)

Soit x une solution réalisable d'un programme linéaire de maximisation, et y une solution réalisable de son dual. Alors $cx \leq b'y$.

Preuve:

$$\begin{cases} c' \leq A'Y \\ X \geq 0 \end{cases} \iff cX \leq (A'Y)'X = Y'AX \leq Y'b = b'Y$$

Théorème 1 (Dualité faible)

Soit x une solution réalisable d'un programme linéaire de maximisation, et y une solution réalisable de son dual. Alors $cx \leq b'y$.

Preuve:

$$\begin{cases} c' \leq A'Y \\ X \geq 0 \end{cases} \iff cX \leq (A'Y)'X = Y'AX \leq Y'b = b'Y$$

Conséquence: Si le primal est non borné, alors le dual est impossible et vice-versa.

Théorème 2 (Dualité forte)

Si le primal a une solution optimale X^*, alors le dual a aussi une solution optimale Y^* et $cX^* = b'Y^*$.

Théorème 3 (Écarts complémentaires)

Soient $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une solution réalisable du primal et $Y = (y_1, \ldots, y_m)$ une solution réalisable du dual. Soient $(e_1, \ldots, e_m)$ les variables d'écarts du primal et $(s_1, \ldots, s_n)$ les variables d'écarts du dual. X et Y représentent les solutions optimales du primal et du dual respectivement si et seulement si:

$$x_i s_i = 0 \ \forall i = 1, \ldots, n$$

$$y_j e_j = 0 \ \forall j = 1, \ldots, m$$

Le tableau du simplexe du programme primal de type maximisation est comme suit:

c_j		3	-1	0	0	b_i
Base		x_1	x_2	e_1	e_2	
3	x_1	1	3	0	1	2
0	e_1	0	5	1	2	2
z_j		3	9	0	3	$z=6$
$\delta_j = c_j - z_j$		0	-10	0	-3	

1) Ce tableau est-il optimal? Si oui, déterminer la solution optimale.
2) En déduire la solution optimale du dual correspondant.

1) Tous les coefficients $\delta_j \leq 0$ et la fonction objectif de type maximisation, donc le tableau du simplexe donné est optimale et on a: $X^* = (2, 0, 2, 0)$ et $z^* = 6$.

2) Puisque le programme primal admet une solution optimale, alors le dual a aussi une solution optimale et on a $W^* = z^* = 6$ et d'après le théorème des écarts complémentaires, on a:

$y_1 e_1 = 0 \implies y_1 = 0$ car $e_1 = 2 \neq 0$.

$y_2 e_2 = 0 \implies y_2 \neq 0$ car $e_2 = 0$. $y_2 = -\delta_4 = 3$

$s_1 x_1 = 0 \implies s_1 = 0$ car $x_1 = 2 \neq 0$.

$s_2 x_2 = 0 \implies s_2 \neq 0$ car $x_2 = 0$. $s_2 = -\delta_2 = 10$.

Ainsi, $Y^* = (0, 3, 0, 10)$.

La méthode du dual simplexe s'applique lorsqu'on dispose d'une solution de base initiale duale réalisable mais **non nécessairement réalisable** au sens où on n'a pas nécessairement **positivité** des variables de base.
A chaque itération de la méthode du simplexe dual, on applique le simplexe sur le problème dual pour déterminer les variables entrante et sortante dans la base du programme primal.
Variable sortante: c'est la variable la plus négative.
Variable entrante: Soit L_i la ligne pivotale. Si $a_{ij} \geq 0$ pour tout j, alors le programme est non réalisable (programme impossible). Sinon, alors la variable sortante x_s est telle que $\frac{\delta_s}{a_{is}} = \min\left\{\frac{\delta_j}{a_{ij}} \,:\; a_{ij} < 0\right\}$.
Critère d'arrêt: Si tous les coefficients du second membre sont **positifs** et $\boldsymbol{\delta_j \leq 0, \forall j}$, alors le tableau est optimal.

Exemple 1

Résoudre le programme suivant par la méthode du dual simplexe.

$$\begin{cases} \min z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \geq 10 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \geq 6 \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 6x_4 \geq 15 \\ x_1, x_2, x_3, x4 \geq 0 \end{cases}$$