

# Recherche opérationnelle & optimisation

## Chapitre 4: Dualité - Analyse de sensibilité

**Mohamed Essaied Hamrita**

Janvier 2022



- ➊ Introduction
- ➋ Les règles de passage primal-dual
- ➌ Théorèmes de la dualité
- ➍ La méthode du dual simplexe

- 1 Introduction
- 2 Les règles de passage primal-dual
- 3 Théorèmes de la dualité
- 4 La méthode du dual simplexe

Chaque programme linéaire peut être considéré comme un **problème primal**.

Il y a un autre programme linéaire associé avec le primal, uniquement défini par celui-là. Ce programme linéaire est le **problème dual**.

Ces deux programmes sont toujours symétriques, dans les sens suivants:

- Il y a une **contrainte duale** pour chaque **variable primale**, et une **variable duale** pour chaque **contrainte primale**.

Chaque programme linéaire peut être considéré comme un **problème primal**.

Il y a un autre programme linéaire associé avec le primal, uniquement défini par celui-là. Ce programme linéaire est le **problème dual**.

Ces deux programmes sont toujours symétriques, dans les sens suivants:

- Il y a une **contrainte duale** pour chaque **variable primale**, et une **variable duale** pour chaque **contrainte primale**.
- Les **coefficients objectifs** des variables primales deviennent les **cotés droits** des contraintes duales, et les **cotés droits** des contraintes primales deviennent les **coefficients objectifs** des variables duales.

Chaque programme linéaire peut être considéré comme un **problème primal**.

Il y a un autre programme linéaire associé avec le primal, uniquement défini par celui-là. Ce programme linéaire est le **problème dual**.

Ces deux programmes sont toujours symétriques, dans les sens suivants:

- Il y a une **contrainte duale** pour chaque **variable primale**, et une **variable duale** pour chaque **contrainte primale**.
- Les **coefficients objectives** des variables primales deviennent les **cotés droits** des contraintes duales, et les **cotés droits** des contraintes primales deviennent les **coefficients objectives** des variables duales.
- Le dual du dual est le primal.

On considère le PL suivant:

$$\begin{cases} \max z = 3x_1 + 5x_2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Le dual correspondant au primal est:

$$\begin{cases} \min W = 12y_1 + 10y_2 \\ y_1 + y_2 \geq 3 \\ 2y_1 + 3y_2 \geq 5 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

- 1 Introduction
- 2 Les règles de passage primal-dual
- 3 Théorèmes de la dualité
- 4 La méthode du dual simplexe



Primal  
 $\max$   
 $c_j$   
 $n$  variables  $(x_1, \dots, x_n)$   
 $m$  contraintes  
contrainte  $j$  de type  $\leq$   
contrainte  $j$  de type  $=$   
variable  $x_i \geq 0$   
variable  $x_i \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \max z = cX \\ AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

Dual  
 $\min$   
 $b_i$   
 $n$  contraintes  
 $m$  variables  $(y_1, \dots, y_m)$   
variable  $y_j \geq 0$   
variable  $y_j \in \mathbb{R}$   
contrainte  $i$  de type  $\geq$   
contrainte  $i$  de type  $=$

$$\begin{cases} \min W = b'Y \\ A'Y \geq c' \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

## Exercice 1

*Déterminer le dual correspondant au primal suivant:*

$$\begin{cases} \min W = 2x_1 + 8x_2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 + 3x_2 \geq 1 \\ 5x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- 1 Introduction
- 2 Les règles de passage primal-dual
- 3 Théorèmes de la dualité**
- 4 La méthode du dual simplexe

## Théorème 1 (Dualité faible)

*Soit  $x$  une solution réalisable d'un programme linéaire de maximisation, et  $y$  une solution réalisable de son dual. Alors  $cx \leq b'y$ .*

**Preuve:**

$$\begin{cases} c' \leq A'Y \\ X \geq 0 \end{cases} \iff cX \leq (A'Y)'X = Y'AX \leq Y'b = b'Y$$

## Théorème 1 (Dualité faible)

*Soit  $x$  une solution réalisable d'un programme linéaire de maximisation, et  $y$  une solution réalisable de son dual. Alors  $cx \leq b'y$ .*

**Preuve:**

$$\begin{cases} c' \leq A'Y \\ X \geq 0 \end{cases} \iff cX \leq (A'Y)'X = Y'AX \leq Y'b = b'Y$$

**Conséquence:** Si le primal est non borné, alors le dual est impossible et vice-versa.

## Théorème 2 (Dualité forte)

*Si le primal a une solution optimale  $X^*$ , alors le dual a aussi une solution optimale  $Y^*$  et  $cX^* = b'Y^*$ .*

## Théorème 3 (Écarts complémentaires)

*Soient  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  une solution réalisable du primal et  $Y = (y_1, \dots, y_m)$  une solution réalisable du dual. Soient  $(e_1, \dots, e_m)$  les variables d'écart du primal et  $(s_1, \dots, s_n)$  les variables d'écart du dual.  $X$  et  $Y$  représentent les solutions optimales du primal et du dual respectivement si et seulement si:*

$$x_i s_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$y_j e_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m$$

Le tableau du simplexe du programme primal de type maximisation est comme suit:

$c_j$		3	-1	0	0	$b_i$
Base		$x_1$	$x_2$	$e_1$	$e_2$	
3	$x_1$	1	3	0	1	2
0	$e_1$	0	5	1	2	2
$z_j$		3	9	0	3	$z = 6$
$\delta_j = c_j - z_j$		0	-10	0	-3	

- 1) Ce tableau est-il optimal? Si oui, déterminer la solution optimale.
- 2) En déduire la solution optimale du dual correspondant.

1) Tous les coefficients  $\delta_j \leq 0$  et la fonction objectif de type maximisation, donc le tableau du simplexe donné est optimale et on a:  $X^* = (2, 0, 2, 0)$  et  $z^* = 6$ .

2) Puisque le programme primal admet une solution optimale, alors le dual a aussi une solution optimale et on a  $W^* = z^* = 6$  et d'après le théorème des écarts complémentaires, on a:

$$y_1 e_1 = 0 \implies y_1 = 0 \text{ car } e_1 = 2 \neq 0.$$

$$y_2 e_2 = 0 \implies y_2 \neq 0 \text{ car } e_2 = 0. \quad y_2 = -\delta_4 = 3$$

$$s_1 x_1 = 0 \implies s_1 = 0 \text{ car } x_1 = 2 \neq 0.$$

$$s_2 x_2 = 0 \implies s_2 \neq 0 \text{ car } x_2 = 0. \quad s_2 = -\delta_2 = 10.$$

Ainsi,  $Y^* = (0, 3, 0, 10)$ .



- 1 Introduction
- 2 Les règles de passage primal-dual
- 3 Théorèmes de la dualité
- 4 La méthode du dual simplexe

La méthode du dual simplexe s'applique lorsqu'on dispose d'une solution de base initiale duale réalisable mais non nécessairement réalisable au sens où on n'a pas nécessairement positivité des variables de base.

A chaque itération de la méthode du simplexe dual, on applique le simplexe sur le problème dual pour déterminer les variables entrante et sortante dans la base du programme primal.

**Variable sortante:** c'est la variable la plus négative.

**Variable entrante:** Soit  $L_i$  la ligne pivotale. Si  $a_{ij} \geq 0$  pour tout  $j$ , alors le programme est non réalisable (programme impossible). Sinon, alors la variable sortante  $x_s$  est telle que  $\frac{\delta_s}{-a_{is}} = \min \left\{ \frac{\delta_j}{-a_{ij}} : a_{ij} < 0 \right\}$ .

**Critère d'arrêt:** Si tous les coefficients du second membre sont positifs, alors le tableau est optimal.

## Exemple 1

*Résoudre le programme suivant par la méthode du dual simplexe.*

$$\begin{cases} \min z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \geq 10 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \geq 6 \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 6x_4 \geq 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$