Recherche opérationnelle & optimisation

Chapitre 1: Programmation linéaire

Mohamed Essaied Hamrita

Janvier 2022

1. Définitions-Exemples
2. Ensemble des admissibles
3. Résolution graphique

Définition 1

Un programme linéaire (PL) est un programme d'optimisation (maximisation ou minimisation) d'une fonction ***linéaire*** *soumise à des contraintes* ***linéaires****.*

Définition 1

Un programme linéaire (PL) est un programme d'optimisation (maximisation ou minimisation) d'une fonction ***linéaire*** *soumise à des contraintes* ***linéaires****.*

La fonction à optimiser est appelée **fonction objectif**.

Définition 1

Un programme linéaire (PL) est un programme d'optimisation (maximisation ou minimisation) d'une fonction ***linéaire*** *soumise à des contraintes* ***linéaires****.*

La fonction à optimiser est appelée **fonction objectif**.
Un PL possède principalement 3 composantes:

- Fonction objectif

Définition 1

Un programme linéaire (PL) est un programme d'optimisation (maximisation ou minimisation) d'une fonction ***linéaire*** *soumise à des contraintes* ***linéaires****.*

La fonction à optimiser est appelée **fonction objectif**.
Un PL possède principalement 3 composantes:

- Fonction objectif
- Variables de décisions

Définition 1

Un programme linéaire (PL) est un programme d'optimisation (maximisation ou minimisation) d'une fonction ***linéaire*** *soumise à des contraintes* ***linéaires****.*

La fonction à optimiser est appelée **fonction objectif**.
Un PL possède principalement 3 composantes:

- Fonction objectif
- Variables de décisions
- Les contraintes

Formellement, un PL s'écrit comme suit:

$$\begin{gathered}
\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + + a_{mn}x_n \leq b_m \\
x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n \geq 0
\end{gathered}$$

Formellement, un PL s'écrit comme suit:

$$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + +a_{1n}x_n \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + +a_{2n}x_n \leq b_2$$
$$\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + +a_{mn}x_n \leq b_m$$
$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \; x_n \geq 0$$

Matriciellement, le programme s'écrit:

$$\begin{cases} \max z = cx \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Remarques

- $\max z \Longleftrightarrow \min -z$;

Remarques

- max $z \Longleftrightarrow$ min $-z$;
- pour un programme de minimisation, les inégalités du programme doivent être de type $\geq$.

Exemple 1

Un fabricant produit 2 types de yaourts à la fraise A et B à partir de Fraise, de Lait et de Sucre. Chaque yaourt doit respecter les proportions suivantes de matières premières.

	A	*B*
Fraise	*2*	*1*
Lait	*1*	*2*
Sucre	*0*	*1*

On dispose de 800 Kg de Fraises, 700 Kg de Lait et 300 Kg de sucre. La vente de 1 Kg de yaourts A et B rapporte respectivement 4 DT et 5 DT. Donner le programme qui maximise le profit du fabricant.

Hypothèses

- **Proportionnalité:** La contribution de toute variable à la fonction objectif ou aux contraintes est proportionnelle à cette variable.

Hypothèses

- **Proportionnalité:** La contribution de toute variable à la fonction objectif ou aux contraintes est proportionnelle à cette variable.
- **Additivité:** La contribution de toute variable à la fonction objectif ou aux contraintes est indépendante des valeurs des autres variables.

Hypothèses

- **Proportionnalité:** La contribution de toute variable à la fonction objectif ou aux contraintes est proportionnelle à cette variable.
- **Additivité:** La contribution de toute variable à la fonction objectif ou aux contraintes est indépendante des valeurs des autres variables.
- **Divisibilité:** Les variables de décision peuvent être des fractions. Cependant, en utilisant une technique spéciale appelée programmation en nombres entiers, nous pouvons contourner cette condition.

Hypothèses

- **Proportionnalité:** La contribution de toute variable à la fonction objectif ou aux contraintes est proportionnelle à cette variable.
- **Additivité:** La contribution de toute variable à la fonction objectif ou aux contraintes est indépendante des valeurs des autres variables.
- **Divisibilité:** Les variables de décision peuvent être des fractions. Cependant, en utilisant une technique spéciale appelée programmation en nombres entiers, nous pouvons contourner cette condition.
- **Certitude:** Cette hypothèse est aussi appelée hypothèse déterministe. Cela signifie que tous les paramètres (tous les coefficients de la fonction objectif et les contraintes) sont connus avec certitude. Lorsque cette hypothèse n'est pas vérifiée, on parlera d'un programme stochastique.

Définition 2 (Forme canonique)

Un PL est dit sous la forme ***canonique*** *s'il est de la forme suivante:*

$$\begin{cases} max\ z = cx \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} min\ z = cx \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Définition 2 (Forme canonique)

Un PL est dit sous la forme ***canonique*** *s'il est de la forme suivante:*

$$\begin{cases} max\ z = cx \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad ou \begin{cases} min\ z = cx \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Pour obtenir cette forme, on procède aux transformations suivantes:
i) $a_j x_j = b_j \iff a_j x_j \leq b_j$ et $a_j x_j \geq b_j$.
ii) $x_j \in \mathbb{R}$ (de signe quelconque), on pose $x_j = x_j' - x_j''$ avec $x_j', x_j'' \geq 0$.
iii) $a_j x_j \geq b_j \iff -a_j x_j \leq -b_j$.

Exercice 1

Écrire sous la forme canonique les PLs suivants:

$$(PL1)\quad \begin{cases} \max z = 20x_1 + 10x_2 \\ 3x_1 - 4x_2 \leq 5 \\ x_1 + 3x_2 \geq -1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$(PL2)\quad \begin{cases} \min z = 2x_1 + x_2 \\ 2x_1 + x_2 \leq -5 \\ x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Définition 3 (Forme standard)

Un PL est sous la forme standard, si les contraintes d'inégalités d'un PL sous la forme canonique sont mises sous forme d'égalités par l'introduction des variables non négatives (variables d'écarts ou variables de surplus).

$$a_j x_j \leq b_j \iff a_j x_j + s_j = b_j$$

$$a_j x_j \geq b_j \iff a_j x_j - e_j = b_j$$

Exercice 2

Écrire la forme standard équivalente du PL suivant:

$$(PL3)\ \begin{cases} \max z = 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Cette section définit les termes importants liés à la région **réalisable** d'un programme linéaire.

Définition 4 (Ensemble convexe)

*Un ensemble $\mathcal{R}$ est dit **convexe** si toute combinaison convexe de deux points x_1 et x_2 de $\mathcal{R}$ est aussi de $\mathcal{R}$.*

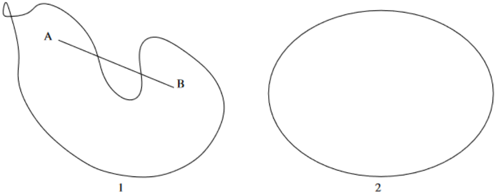
$$\forall\ \lambda \in]0,1[,\ \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \mathcal{R}$$

Cette section définit les termes importants liés à la région **réalisable** d'un programme linéaire.

Définition 4 (Ensemble convexe)

Un ensemble $\mathcal{R}$ est dit ***convexe*** *si toute combinaison convexe de deux points x_1 et x_2 de $\mathcal{R}$ est aussi de $\mathcal{R}$.*

$$\forall\ \lambda \in]0,1[,\ \ \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \mathcal{R}$$



Définition 5 (Point admissible)

Un point x dans un ensemble convexe $\mathcal{R}$ *est appelé un point extrême de R si x ne peut pas être représenté comme une combinaison convexe stricte de deux points distincts dans* $\mathcal{R}$*. Une combinaison convexe stricte est une combinaison convexe pour laquelle* $\lambda \in [0, 1]$*.*
Graphiquement, un point extrême est un point d'angle.

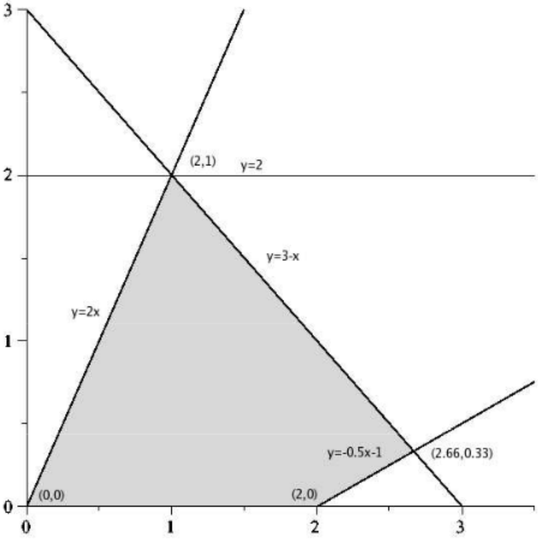
Définition 5 (Point admissible)

Un point x dans un ensemble convexe $\mathcal{R}$ est appelé un point extrême de R si x ne peut pas être représenté comme une combinaison convexe stricte de deux points distincts dans $\mathcal{R}$. Une combinaison convexe stricte est une combinaison convexe pour laquelle $\lambda \in [0, 1]$.
Graphiquement, un point extrême est un point d'angle.

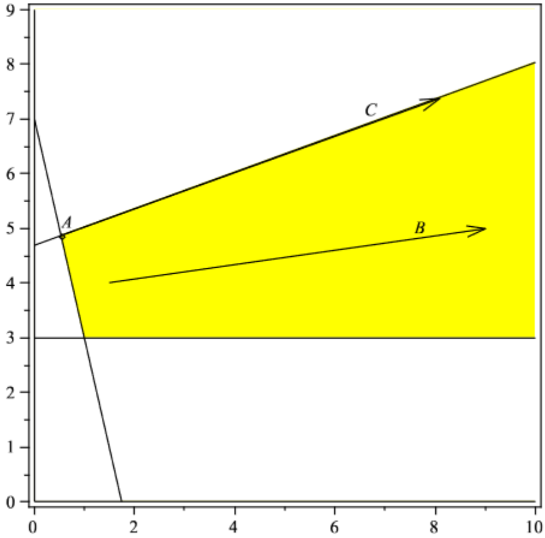
Définition 6

Étant donné un ensemble convexe, un vecteur $\mathbf{d}$ non nul est une ***direction*** *de l'ensemble si pour chaque x_0 de l'ensemble, le rayon $\{x_0 + \lambda \mathbf{d} : \lambda \geq 0\}$ appartient également à l'ensemble.*

Une ***direction extrême*** *d'un ensemble convexe est une direction de l'ensemble qui ne peut pas être représentée comme une combinaison positive de deux directions distinctes de l'ensemble.*


3
2
1
0
0
1
2
3
(2,1)
y=2
y=3-x
y=2x
y=-0.5x-1
(2.66,0.33)
(0,0)
(2,0)

Un ensemble borné avec 4 points extrêmes. Cet ensemble est délimité car il n'y a pas de directions. De plus, le point extrême $(2, 1)$ est un point extrême dégénéré car c'est l'intersection de 3 contraintes, mais la région réalisable n'est que bi-dimensionnelle. En général, un point extrême est dégénéré si le nombre de contraintes d'intersection en ce point est supérieur à la dimension de la région réalisable.


9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0
2
4
6
8
10
A
B
C

La région colorée sur cette figure est un ensemble convexe **non borné**. Le point A est un exemple de point extrême, le vecteur B est un exemple de direction de l'ensemble et le vecteur C est un exemple de direction extrême de l'ensemble.

1. Définitions-Exemples
2. Ensemble des admissibles
3. Résolution graphique

Proposition 1

S'il en existe, il y a toujours une solution optimale sur un sommet (point extrême) de la région réalisable.

Pour trouver l'optimum, il suffit d'examiner les points extrêmes de la région réalisable.

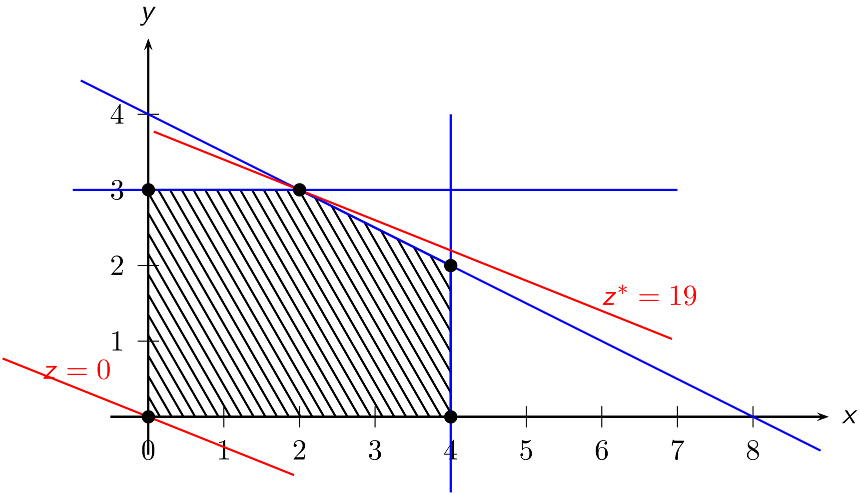
Exercice 3

Soit le PL suivant:

$$\begin{cases} \max z = 2x_1 + 5x_2 \\ x_1 \leq 4 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1) Représenter la région réalisable du PL.

2) Donner, graphiquement, la solution optimale du PL.


y
x
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
$z^* = 19$
$z = 0$

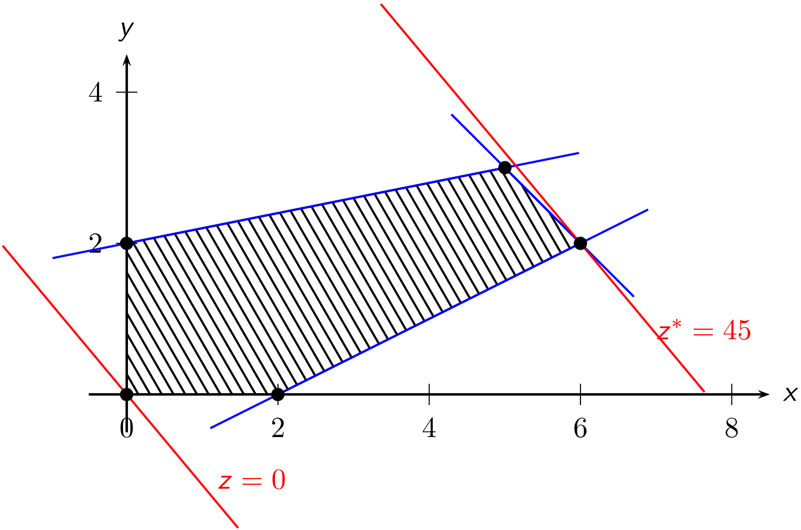
Exercice 4

Soit le PL suivant:

$$\begin{cases} \max z = 6x_1 + 5x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1) Représenter la région réalisable du PL.

2) Donner, graphiquement, la solution optimale du PL.


y
4
2
0
2
4
6
8
x
$z^* = 45$
$z = 0$