Recherche opérationnelle & optimisation

Chapitre 2: La méthode du simplexe

Mohamed Essaied Hamrita

Décembre 2021

La plupart des problèmes de la vie réelle lorsqu'ils sont formulés en tant que modèle PL ont plus de deux variables et ont donc besoin d'une méthode plus efficace pour suggérer une solution optimale pour de tels problèmes. Dans ce chapitre, nous discuterons d'une procédure appelée **méthode du simplexe** pour résoudre un PL de tels problèmes. Cette méthode a été développée par G B Dantzig en 1947.

La plupart des problèmes de la vie réelle lorsqu'ils sont formulés en tant que modèle PL ont plus de deux variables et ont donc besoin d'une méthode plus efficace pour suggérer une solution optimale pour de tels problèmes. Dans ce chapitre, nous discuterons d'une procédure appelée **méthode du simplexe** pour résoudre un PL de tels problèmes. Cette méthode a été développée par G B Dantzig en 1947. Le concept de la méthode du simplexe est similaire à la méthode graphique. Dans la méthode graphique, les points extrêmes de l'espace des solutions réalisables sont examinés afin de rechercher la solution optimale qui se trouve à l'un de ces points. Pour les PLs avec plusieurs variables, nous ne pourrons pas représenter graphiquement la région réalisable, mais la solution optimale se trouvera toujours à un point extrême. La méthode du simplexe examine les points extrêmes de manière systématique, en répétant le même ensemble d'étapes de l'algorithme jusqu'à ce qu'une solution optimale soit trouvée. C'est pour cette raison qu'on l'appelle aussi méthode **itérative**.

La méthode du simplexe est composée de 4 étapes:

La méthode du simplexe est composée de 4 étapes:

- Forme standard équivalente;

La méthode du simplexe est composée de 4 étapes:

- Forme standard équivalente;
- Solution de base initiale;

La méthode du simplexe est composée de 4 étapes:

- Forme standard équivalente;
- Solution de base initiale;
- Choix de la variable entrante et variable sortante;

La méthode du simplexe est composée de 4 étapes:

- Forme standard équivalente;
- Solution de base initiale;
- Choix de la variable entrante et variable sortante;
- Pivotage;

La méthode du simplexe est composée de 4 étapes:

- Forme standard équivalente;
- Solution de base initiale;
- Choix de la variable entrante et variable sortante;
- Pivotage;
- Test d'arrêt.

Dans cette section, on suppose que le programme est sous la forme canonique, c.à.d sous l'une des formes suivantes:

$$\begin{cases} \max\ z = cx \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \min\ z = cx \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Dans cette section, on suppose que le programme est sous la forme canonique, c.à.d sous l'une des formes suivantes:

$$\begin{cases} \max \ z = cx \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} \min \ z = cx \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

A partir de ce programme, on déduit la forme standard équivalente, qui consiste à ajouter (ou retrancher) des variables de surplus (ou variables d'écarts).

Exemple 1

On considère le PL suivant:

$$\begin{cases} \max z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 8 \\ 2x_2 + 5x_3 \leq 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 15 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Nous avons un PL de type maximisation sous la forme canonique. Sa forme standard équivalente est obtenue en introduisant 3 variables surplus non négatives.

$$\begin{cases} \max z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + s_1 = 8 \\ 2x_2 + 5x_3 + s_2 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + s_3 = 15 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{cases}$$

Considérons un système d'équations à n variables et m équations où $n \geq m$. Une solution de **base** pour ce système est obtenue de la manière suivante:

a) On pose $n - m$ variables égales à 0. Ces variables sont appelées variables **hors base** (VHB).

b) On résout le système pour les m variables restantes. Ces variables sont appelées les variables de **base** (VB).

c) Le vecteur de variables obtenu est appelé **solution de base** (il contient les variables de base et les variables hors base).

Une solution de base est **admissible** si toutes les variables de la solution de base sont ≥ 0. Cette solution de base admissible correspond à un point extrême.

Reprenons l'exemple précédent;
$n = 6$: nombre de variables de la forme standard.
$m = 3$: nombres de contraintes.
$n - m = 3$: nombre de variables hors bases (variables nulles) et $m = 3$: nombre de variables de bases (variables ≥ 0).
$x_1 = x_2 = x_3 = 0$ (VHB) et $s_1 = 8, s_2 = 10, s_3 = 15$ (VB).
Donc, la solution de base initiale est:

$$x_0 = (0, 0, 0, 8, 10, 15)$$

La méthode de simplexe se base sur des tableaux, appelés tableaux simplexe.

Le premier tableau simplexe est donné comme suit:

c_j		3	5	4	0	0	0	b_i
Base		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
0	s_1	2	**3**	0	1	0	0	8
0	s_2	0	2	5	0	1	0	10
0	s_3	3	2	4	0	0	1	15
z_j		0	0	0	0	0	0	$z=0$
$\delta_j = c_j - z_j$		3	5	4	0	0	0	0

- Variable entrante: on sélectionne la variable qui possède la valeur maximale de δ_j comme variable entrante dans la base dans le cas de maximisation.
- Variable sortante: on sélectionne la variable qui minimise $\frac{b_i}{a_{ij}}$ avec $a_{ij} > 0$.

Dans notre exemple; x_2 a le plus grand δ_j. Donc x_2 est une variable entrante.

$\min \frac{b_i}{a_{ij}} = \min \left\{ \frac{8}{3}, \frac{10}{2}, \frac{15}{2} \right\} = \frac{8}{3}$, donc s_1 quitte la base.

La valeur en rouge dans le premier tableau simplexe est appelée **pivot**.

Pour passer au tableau suivant et donc effectuer la première itération, on procède comme suit:
- On divise la ligne du pivot par le pivot;
- On poursuit avec la matrice identité pour les variables de base. On inscrit 1 à l'intersection de chaque variable et 0 ailleurs.
- On applique la méthode du rectangle.

x_2 entre dans la base et s_1 quitte la base et on divise la ligne du pivot par le pivot

c_j		3	5	4	0	0	0	b_i
Base		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
5	x_2	$2/3$	1	0	$1/3$	0	0	$8/3$
0	s_2							
0	s_3							
z_j								
$\delta_j = c_j - z_j$								

Matrice identité pour les variables de base.

c_j		3	5	4	0	0	0	b_i
Base		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
5	x_2	2/3	1	0	1/3	0	0	8/3
0	s_2		0			1	0	
0	s_3		0			0	1	
z_j								
$\delta_j = c_j - z_j$								

On applique la méthode du rectangle pour le remplissage du reste du tableau;

c_j		3	5	4	0	0	0	b_i
Base		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
5	x_2	2/3	1	0	1/3	0	0	8/3
0	s_2	-4/3	0	5	-2/3	1	0	14/3
0	s_3	**5/3**	0	4	-2/3	0	1	29/3
z_j								
$\delta_j = c_j - z_j$								

le $5/3$ en gras est obtenu comme suit:

$$\frac{3 \times 3 - 2 \times 2}{3}$$

On calcul les z_j, z et les δ_j. Par exemple, pour le
$z_1 = 5 \times 2/3 + 0 \times (-4/3) + 0 \times 5/3 = 10/3$.
$z = 5 \times 8/3 + 0 \times 14/3 + 0 \times 29/3 = 40/3$.

c_j		3	5	4	0	0	0	b_i
Base		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
5	x_2	2/3	1	0	1/3	0	0	8/3
0	s_2	-4/3	0	5	-2/3	1	0	14/3
0	s_3	5/3	0	4	-2/3	0	1	29/3
z_j		10/3	5	0	5/3	0	0	$z = 40/3$
$\delta_j = c_j - z_j$		-1/3	0	**4**	-5/3	0	0	

On calcul les z_j, z et les δ_j. Par exemple, pour le
$z_1 = 5 \times 2/3 + 0 \times (-4/3) + 0 \times 5/3 = 10/3$.
$z = 5 \times 8/3 + 0 \times 14/3 + 0 \times 29/3 = 40/3$.

c_j		3	5	4	0	0	0	b_i
Base		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
5	x_2	2/3	1	0	1/3	0	0	8/3
0	s_2	-4/3	0	5	-2/3	1	0	14/3
0	s_3	5/3	0	4	-2/3	0	1	29/3
z_j		10/3	5	0	5/3	0	0	$z = 40/3$
$\delta_j = c_j - z_j$		-1/3	0	**4**	-5/3	0	0	

On répète les deux étapes précédentes jusqu'à l'obtention l'optimum.

On s'arrête lorsqu'on obtient le maximum: $\delta_j \leq 0, \forall j$.
D'après le tableau précédent, on a $\delta_3 = 4 > 0$, donc la variable x_3 est une variable entrante dans la base.
$\min\{(14/3)/5, (29/3)/4\} = (14/3)/5$, donc la variable s_2 quitte la base et le 5 est le deuxième pivot. Le troisième tableau simplexe est alors:

c_j		3	5	4	0	0	0	b_i
Base		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
5	x_2	2/3	1	0	1/3	0	0	8/3
4	x_3	-4/15	0	1	-2/15	1/5	0	14/15
0	s_3	41/15	0	0	2/15	-4/5	1	89/15
z_j		34/15	5	0	17/15	4/5	0	$z = 256/15$
$\delta_j = c_j - z_j$		**11/15**	0	0	-17/15	-4/5	0	

On a $\delta_1 = 11/15 > 0$, donc la variable x_1 est une variable entrante dans la base.
$\min\{(8/3)/(2/3), (89/15)/(41/15)\} = 89/41$, donc la variable s_3 quitte la base et le 41/15 est le troisième pivot. Le quatrième tableau simplexe est alors:

c_j		3	5	4	0	0	0	b_i
Base		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
5	x_2	0	1	0	15/41	8/41	-10/41	50/41
4	x_3	0	0	1	-6/41	5/41	4/41	62/41
3	x_1	1	0	0	2/41	-12/41	15/41	89/41
z_j		33	5	4	45/41	24/41	11/41	$z = 765/41$
$\delta_j = c_j - z_j$		0	0	0	-45/41	-24/41	-11/41	

Tous les coefficients $\delta_j \leq 0$, donc la solution est optimale. Ainsi, on a $X^* = (50/41, 62/41, 89/41)$ et $z^* = 765/41$. Les VB sont x_1, x_2 et x_3.

Exercice 1

Résoudre le PL suivant par la méthode du simplexe

$$\begin{cases} \max z = 2x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La forme canonique équivalente au PL est donnée par:

$$\begin{cases} \max z = 2x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + x_2 + s_1 = 8 \\ x_1 + x_2 + s_2 = 5 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{cases}$$

Le premier tableau simplexe représentant la solution initiale est donné par

c_j		2	3	0	0	b_i
Base		x_1	x_2	s_1	s_2	
0	s_1	1	1	1	0	4
0	s_2	1	**2**	0	1	5
z_j		0	0	0	0	$z = 0$
$\delta_j = c_j - z_j$		2	3	0	0	

$\delta_j \geq 0$ et $\max\{\delta_j\} = 3$, donc la variable x_2 entre dans la base.

$\min\left\{\frac{4}{1}, \frac{5}{2}\right\} = \frac{5}{2}$, donc la variable s_2 quitte la base.

Le deuxième tableau simplexe est donné par

c_j		2	3	0	0	b_i
Base		x_1	x_2	s_1	s_2	
0	s_1	**1/2**	0	1	-1/2	3/2
3	x_2	1/2	1	0	1/2	5/2
z_j		3/2	3	0	3/2	$z = 15/2$
$\delta_j = c_j - z_j$		1/2	0	0	-3/2	

$\delta_1 > 0$, donc la variable x_1 entre dans la base.

$\min\left\{\frac{3/2}{1/2}, \frac{5/2}{1/2}\right\} = 3$, donc la variable s_1 quitte la base.

Le troisième tableau simplexe est donné par

c_j		2	3	0	0	b_i
Base		x_1	x_2	s_1	s_2	
2	x_1	1	0	2	-1	3
3	x_2	0	1	-1	1	1
z_j		2	3	1	1	$z = 9$
$\delta_j = c_j - z_j$		0	0	-1	-1	

$\delta_j \leq 0$, pour tous j, donc le dernier tableau simplexe est optimale. Ainsi la solution optimale est donnée par $x^* = (3, 1, 0, 0)$ et $z^* = 9$.
Il est à remarquer que les variable de base de la solution optimale sont x_1 et x_2.

1. Introduction

2. Méthode du simplexe

3. La forme matricielle

La forme canonique équivalente d'un PL mis sous sa forme standard est:

$$\begin{cases} \max z = cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

où c : un vecteur ligne des coefficients de la fonction objectif.
x : un vecteur colonne contenant les variables de décisions (VB et VHB).
A : est une matrice rectangulaire.
b : est un vecteur colonne.
En connaissant les variables de bases, on peut déterminer le tableau simplexe à l'aide du calcul matriciel.

Si on note par c_B et B le vecteur des coefficients de la fonction objectif et la matrice des coefficients des contraintes des variables de bases respectivement, on obtient le tableau simplexe

	x	b
VB	$B^{-1}A$	$B^{-1}b$
z_j	$c_B B^{-1}A$	$c_B B^{-1}b$
δ_j	$c - c_B B^{-1}A$	

Si on note par c_B et B le vecteur des coefficients de la fonction objectif et la matrice des coefficients des contraintes des variables de bases respectivement, on obtient le tableau simplexe

	x	b
VB	$B^{-1}A$	$B^{-1}b$
z_j	$c_B B^{-1}A$	$c_B B^{-1}b$
δ_j	$c - c_B B^{-1}A$	

Reprenons l'exercice précédent;

$$x = (x_1, x_2, s_1, s_2), \quad c = (2, 3, 0, 0), \quad b' = (4, 5)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Première itération: détermination d'une solution initiale. On choisit les variables d'écarts comme variables de base, donc $VB = (s_1, s_2)$; $c_B = (0, 0)$ et B la matrice des coefficients des contraintes des variables de base. Donc la matrice B sera formée par les colonnes correspondantes aux s_1 et s_2 de la matrice A. Soit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{donc } B^{-1} = B$$

$$B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$B^{-1}b = b$, $c_B B^{-1}A = (0, 0, 0, 0)$, $c - c_B B^{-1}A = c$ et $z = c_B B^{-1}b = 0$.
Donc, le premier tableau simplexe est donné comme suit:

	x				b
VB	1	1	1	0	4
	1	2	0	1	5
z_j	0	0	0	0	0
δ_j	2	3	0	0	

x_2 entre dans la base et s_2 quitte la base, donc

$$c_B = (0,3), \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & 1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \; B^{-1}b = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$$

$$c_B B^{-1} A = (3/2, 3, 0, 3/2), \quad c - c_B B^{-1} A = (1/2, 0, 0, -3/2)$$

et $c_B B^{-1} b = 15/2$

Donc le deuxième tableau simplexe est

	x				b
VB	$1/2$	0	1	$-1/2$	$3/2$
	$1/2$	1	0	$1/2$	$5/2$
z_j	$3/2$	3	0	$3/2$	$15/2$
δ_j	$1/2$	0	0	$-3/2$	

x_1 entre dans la base et s_2 quitte la base. Donc $VB = (x_1, x_2)$

$$c_B = (2,3), \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \; B^{-1}b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_B B^{-1}A = (2,3,1,1), \quad c - c_B B^{-1}A = (0,0,-1,-1)$$

et $c_B B^{-1} b = 9$

Donc le troisième tableau simplexe est

	x				b
VB	1	0	2	-1	3
	0	1	-1	1	1
z_j	2	3	1	1	9
δ_j	0	0	-1	-1	

Ce dernier tableau est optimal car $c - c_B B^{-1} A \leq 0$. Ainsi la solution optimale est $x^* = (3, 1, 0, 0)$ et $z^* = 9$.

Exercice 2

Soit le PL suivant:

$$\begin{cases} \max z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ 2x_1 + 3x_3 \leq 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Sachant que $VB = (x_1, x_2, s_3)$, *déterminer le tableau simplexe optimale du PL.*

Les matrices A et B sont données comme suit:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ -1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \ B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \ c_B B^{-1}b = 21/2, \ c_B B^{-1}A = (3, 2, 11/2, 2, 1/2, 0)$$

Ainsi, le tableau optimal du PL est donné comme suit:

	x						b
VB	1	0	3/2	0	1/2	0	5/2
	0	1	1/2	1	−1/2	0	3/2
	0	0	−1/2	−1	−1/2	1	1/2
z_j	3	2	11/2	2	1/2	0	11/2
δ_j	0	0	−11/2	−2	−1/2	0	