TD4 **Statistique Mathématique** **2022/2023**	**Université de Sousse** **Institut des Hautes Études Commerciales de Sousse**	Niveau : **M1** **Finance & Actuariat** Enseignant : **Mohamed Essaied Hamrita** mhamrita@gmail.com https://github.com/Hamrita

Exercice 1

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ une séquence de variables aléatoires indépendantes issue d'une loi Bernoulli de paramètre θ

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{avec une probabilité } \theta \\ 0 & \text{avec une probabilité } 1-\theta \end{cases}$$

Un échantillon aléatoire de taille $n = 15$ a donné : $X = (1,0,0,0,1,1,0,0,0,1,0,0,1,0,1)$.

1) Déterminer, $\widehat{\theta}$, l'estimateur de θ par la méthode du maximum de vraisemblance.

2) Préciser le score, $s(\theta|x_i)$, la hesienne, $H(\theta|x_i)$ et $I_n(\theta)$ la quantité d'information de Fisher. En déduire $\mathbb{E}(\widehat{\theta})$ et $\mathbb{V}(\widehat{\theta})$. Conclure.

3) Effectuer le test $H_0 : \theta = 0.6$ en appliquant :

a) le test du rapport de vraisemblance ;

b) le test de Wald ;

c) le test de multiplicateur de Lagrange

4) Calculer la puissance du test LR pour $\theta_1 = 0.1, 0.2, 0.3, 0.6, 0.8$ et représenter la courbe de la puissance du test en fonction de θ_1.

5) Reprendre les questions précédentes sous le logiciel R.

Solution 1

1) La densité de probabilité de la loi de Bernoulli de paramètre θ est donnée par :

$$f(x_i,\theta)=\theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}\ ,\ \ x_i=\{0,1\}$$

D'où le logarithme de f est $\ln\left(f(x_i,\theta)\right)=x_i\ln(\theta)+(1-x_i)\ln(1-\theta)$, donc

$\ell(\theta|x_i)=\sum\ln\left(f(x_i,\theta)\right)=\ln(\theta)\sum x_i+\ln(1-\theta)\sum(1-x_i)=\ln(\theta)\sum x_i+\ln(1-\theta)(n-\sum x_i)$.

$\dfrac{\partial\ell}{\partial\theta}=0\Longleftrightarrow\dfrac{\sum x_i}{\theta}-\dfrac{n-\sum x_i}{1-\theta}=0\Longleftrightarrow\widehat{\theta}=\overline{X}=0.4.$

2) Le score est $s(\theta|x_i)=\dfrac{\partial\ell}{\partial\theta}=\dfrac{\sum x_i}{\theta}-\dfrac{n-\sum x_i}{1-\theta}=\dfrac{\sum(x_i-\theta)}{\theta(1-\theta)}$ et la hessienne est donnée par :

$H(\theta|x_i)=\dfrac{\partial^2\ell}{\partial\theta^2}=-\dfrac{\sum x_i}{\theta^2}+\dfrac{n-\sum x_i}{(1-\theta)^2}.$

$I_n(\theta)=-\mathbb{E}(H(\theta|x_i)=\mathbb{V}(s(\theta|x_i)=\dfrac{n}{\theta(1-\theta)}.$

L'espérance mathématique de $\widehat{\theta}$ est : $\mathbb{E}(\widehat{\theta})=\mathbb{E}(\overline{X})=\theta.$

L'estimateur $\widehat{\theta}$ est un estimateur sans biais.

La variance de $\widehat{\theta}$ est égale à $\mathbb{V}(\overline{X})=\dfrac{\theta(1-\theta)}{n}$. On a $\lim_{n\longleftarrow\infty}\mathbb{V}(\widehat{\theta})=0$, donc $\widehat{\theta}$ est convergent, de plus $\mathbb{V}(\widehat{\theta})=I_n^{-1}(\theta)$ donc $\widehat{\theta}$ est un estimateur efficace.

3) a) Test LR : La statistique LR est :

$$LR=-2\left(\ell(\theta_0|x_i)-\ell(\widehat{\theta})\right)\sim\chi^2(1)$$

$$\begin{aligned}LR&=-2\left[(\ln(0.6)\times6+\ln(0.4)\times(15-6))-(\ln(0.4)\times6+\ln(0.6)\times(15-6)\right]\\&=2.4327\end{aligned}$$

$LR<\chi^2_{0.95}(1)$, donc, au seuil $\alpha=5\%$, on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle.

b) Test de Wald : La statistique de Wald est :

$$W=g(\widehat{\theta})'\left(J(\theta)I^{-1}(\widehat{\theta})J(\theta)'\right)^{-1}g(\widehat{\theta});\qquad g(\theta)=\theta-0.6$$

$W = (-0.2)\left(1 \times \frac{0.4\times0.6}{15} \times 1\right)^{-1} \times (-0.2) = 2.5.$

c) Test LM :

$$LM = s'(\theta|x_i)I^{-1}(\theta|x_i)s(\theta|x_i)$$

$$LM = \left(\frac{\sum(x_i-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_0)}\right)^2 \frac{\theta_0(1-\theta_0)}{n} = \left(\frac{6-15\times0.6}{0.6\times0.4}\right)^2 \frac{0.6\times0.4}{15} = 2.5.$$

4) On rappelle que la puissance d'un test est égale à la probabilité de rejeter l'hypothèse nulle sachant que l'hypothèse alternative est vraie, i.e : $\pi(\theta) = Pr(D_1|H1) = Pr(W|\theta = \theta_1)$. Or, $W = \{\chi^2(1) < LR\}$, d'où

$\pi(\beta) = Pr(\chi^2(1) < LR|\theta=\theta_1) = 1-Pr(\chi^2(1) \geq LR|\theta=\theta_1), \quad LR = -2(\ell(\theta_1|xi)-\ell(\widehat{\theta}|x_i))$

θ_1	0.1	0.2	0.3	0.6	0.8
LR	9.337	3.139	0.677	2.432	11.457
$\pi(\theta)$	0.9977	0.9235	0.5895	0.8811	0.999

```
x=c(1,0,0,0,1,1,0,0,0,1,0,0,1,0,1)
logL=function(theta,x){
sum(x*log(theta)+(1-x)*log(1-theta) )
}
theta.hat=optim(fn=logL,par=0.1,control=list(fnscale=-1), hessian=TRUE, x=x)
```

La valeur de l'estimateur

```
theta.hat$par

[1] 0.4
```

La valeur de la vraisemblance en logarithme

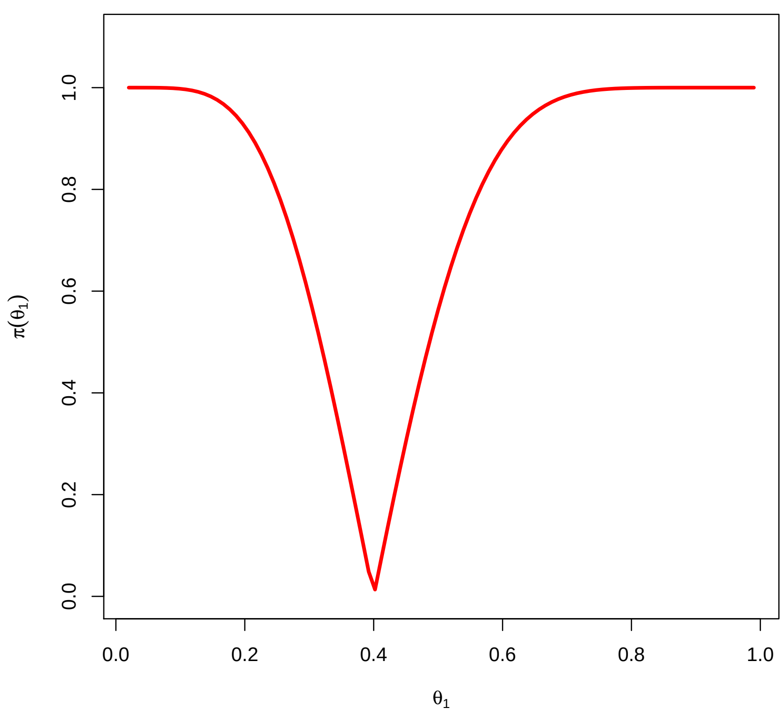
```
theta.hat$value

[1] -10.09518
```

La puissance du test

```
vs=Vectorize(logL,"theta")
t1=c(0.1,0.2,0.3,0.6,0.8); (lr=-2*(vs(t1,x)-logL(theta.hat$par,x))) #$

[1]  9.3371604  3.1394889  0.6774726  2.4327906 11.4572550

(pi_t=pchisq(lr,1))

[1] 0.9977545 0.9235822 0.5895416 0.8811788 0.9992878
```

Graphique de la puissance du test

```
tt=seq(0.02,0.99,len=100); lrt=-2*(vs(tt,x)-logL(theta.hat$par,x))
pit=pchisq(lrt,1)
plot(tt,pit,type="l", lwd=3, col=2,xlab=expression(theta[1]),
ylab=expression(pi(theta[1])), ylim=c(0,1.1))
```



LR test

```
ll0=logL(0.6,x); ll1=logL(0.4,x)
(LR=-2*(ll0-ll1)); qchisq(0.95,1) # (quantile de chi-deux)

[1] 2.432791
[1] 3.841459
```

Wald test

```
g=function(x) x-0.6
vv=c(solve(-theta.hat$hessian))  #$
W=g(0.4)*vv^{-1}*g(0.4)
W

[1] 2.500024
```

LM test

```
ss=function(x,theta) sum(x-theta)/(theta*(1-theta))
LM=ss(x,0.6)^2*0.6*0.4/15
LM

[1] 2.5
```

Exercice 2

Soit le modèle linéaire suivant : $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$ où $\varepsilon \overset{i.i.d}{\sim} N(0, \sigma^2)$. Un échantillon aléatoire de taille $n = 20$ a donné les observations suivantes :

```
x  0  5  0 2  0  0 -2  0 -1 3 -1 2 1 -1 2 -1 3  1  4 2
y -2 13 -4 4 -4 -3 -6 -2 -5 7 -5 5 2 -7 4 -7 6 -1 12 5
```

On souhaite estimer $\boldsymbol{\theta} = \left(\beta, \sigma^2\right)$ par la méthode du maximum de vraisemblance.

1) Écrire la densité de la variable $y_i | x_i$. En déduire sa vraisemblance en logarithme.

2) Déterminer le vecteur score $s(\theta|y_i)$, la matrice hessienne $H(\theta|y_i)$ et la quantité d'information de Fisher $I_n(\theta|y_i)$.

3) Déterminer l'estimateur du vecteur $\boldsymbol{\theta}$ par la méthode du maximum de vraisemblance. Étudier ses qualités.

4) Tester $H_0: \beta = 3$ et $\sigma^2 = 9$ par le trigoly (LR, Wald et LM).

4) Reprendre les questions avec le logiciel R.

Solution 2

1) On a $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$, donc $\mathbb{E}(y_i) = \beta x_i$ et $\mathbb{V}(y_i) = \sigma^2$. Ainsi, la densité de la variable $y_i|x_i$ est donnée par :

$$f(y_i|x_i,\boldsymbol{\theta}) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-1/2}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(y_i-\beta x_i)^2\right)$$

$$\ln\left(f(y_i|xi,\boldsymbol{\theta})\right) = -\frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2}(y_i-\beta x_i)^2$$

$$\ell(y_i|x_i,\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n}\ln\left(f(y_i|xi,\boldsymbol{\theta})\right) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\beta x_i\right)^2$$

2) Le vecteur score est donné comme suit :

$$s(\boldsymbol{\theta}|y_i,x_i) = \left(\frac{\partial\ell}{\partial\beta},\frac{\partial\ell}{\partial\sigma^2}\right)' = \left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i(y_i-\beta x_i)\right), -\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\beta x_i\right)^2\right)'$$

et la matrice hessienne :

$$H(\boldsymbol{\theta}|y_i,x_i) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 & -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i(y_i-\beta x_i)\right) \\ -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i(y_i-\beta x_i)\right) & \frac{n}{2\sigma^4}-\frac{1}{\sigma^6}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\beta x_i\right)^2 \end{pmatrix}$$

La quantité d'information de Fisher est définie par

$$I(\boldsymbol{\theta}|y_i,x_i) = -\mathbb{E}\left(H(\boldsymbol{\theta}|y_i,x_i)\right) = \mathbb{V}\left(s(\boldsymbol{\theta}|y_i,x_i)\right)$$

3) La condition nécessaire est traduite par $s(\boldsymbol{\theta}|y_i,x_i) = (0,0)$.
$s_1 = 0 \Longleftrightarrow \widehat{\beta} = \dfrac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = 2.647$ et $s_2 = 0 \Longleftrightarrow \widehat{\sigma^2} = \dfrac{\sum_{i=1}^n (y_i - \widehat{\beta} x_i)^2}{n} = 6.120.$

$$\mathbb{E}(\widehat{\beta}) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \mathbb{E}(y_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \frac{\beta \sum_{i=1}^n x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \beta,$$ donc $\widehat{\beta}$ est **sans biais**.

$$\mathbb{E}(\widehat{\sigma^2}) = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left(y_i - \mathbb{E}(y_i)\right)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{V}(y_i)}{n} = \sigma^2,$$ donc $\widehat{\sigma^2}$ est **sans biais**.

$$I(\boldsymbol{\theta}|y_i,x_i) = -\mathbb{E}\left(H(\boldsymbol{\theta}|y_i,x_i)\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_i^2 & 0 \\ 0 & \dfrac{n}{2\sigma^4} \end{pmatrix}$$

En effet;

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_i^2\right) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_i^2 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n \left(x_i(y_i - \beta x_i)\right)\right) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n \left(x_i \mathbb{E}(y_i - \beta x_i)\right) = 0$$

$$\mathbb{E}\left(-\frac{n}{2\sigma^4} + \frac{1}{\sigma^6}\sum_{i=1}^n \left(y_i - \beta x_i\right)^2\right) = -\frac{n}{2\sigma^4} + \frac{1}{\sigma^6}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left(y_i - \beta x_i\right)^2 = -\frac{n}{2\sigma^4} + \frac{n\sigma^2}{\sigma^6} = \frac{n}{2\sigma^4}$$

Donc la variance du vecteur $\widehat{\theta}$ est estimée par :

$$\widehat{\mathbb{V}}\left(\widehat{\theta}\right) = \widehat{I}^{-1}\left(\widehat{\theta}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\widehat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{2\widehat{\sigma}^4}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0720 & 0 \\ 0 & 3.749 \end{pmatrix}$$

4)

```r
x=c(0,5,0,2,0,0,-2,0,-1,3,-1,2,1,-1,2,-1,3,1,4,2)
y=c(-2,13,-4,4,-4,-3,-6,-2,-5,7,-5,5,2,-7,4,-7,6,-1,12,5)
vs=function(theta,x,y){ n=length(y)
-n/2*log(2*pi*theta[2])-1/(2*theta[2])*sum((y-theta[1]*x)^2)
}
theta=optim(fn=vs, par=c(0,1),control=list(fnscale=-1),x=x,y=y,hessian=T)
theta$par # estimateurs

[1] 2.647277 6.123271

theta$value  # vraisemblance

[1] -46.49535

round(theta$hessian,3) # hessienne

        [,1]   [,2]
[1,] -13.881  0.000
[2,]   0.000 -0.266

round(solve(-theta$hessian),3)  # la matrice des variances

      [,1]  [,2]
[1,] 0.072 0.000
[2,] 0.000 3.753
```

Test LR

```r
ll1=theta$value ; ll0=vs(c(3,9),x,y); LR=-2*(ll0-ll1); LR

[1] 2.489103

qchisq(0.95,2)

[1] 5.991465
```

Test de Wald

$$g(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\beta} \\ \widehat{\sigma^2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$ et le jacobien est égale à 1.

```
g=diag(1,2)%*%theta$par-c(3,9)
W=t(g)%*%(-theta$hessian)%*%g
c(W)

[1] 3.931256

# LM test
s.theta=c(1/(9)*sum(x*(y-3*x)),
     -length(x)/(2*9)+1/(2*9^2)*sum((y-3*x)^2))
LM=t(s.theta)%*%solve(-theta$hessian)%*%s.theta;  c(LM)

[1] 1.116559
```

Exercice 3

Soit le processus auto-régressif d'ordre 1 défini par :

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \overset{i.i.d}{\sim} N(0,\sigma^2)$$

On désire estimer le vecteur $\boldsymbol{\theta} = (\phi, \sigma^2)$ par la méthode du maximum de vraisemblance. Un échantillon de taille $n = 20$ a donné :

```
 [1]  1.07  0.53 -0.17 -0.10 -1.67  1.07 -1.59 -0.06 -0.06  2.15 -0.74  0.95
[13] -0.96 -0.74  0.71  0.10 -1.71  0.02  0.63  0.57
```

1) Déterminer la densité de la variable aléatoire $Y_t | Y_{t-1}$. En déduire la vraisemblance associée.

2) Déterminer le vecteur score, $s(\boldsymbol{\theta}|Y_{t-1})$, la matrice hessienne, $H(\boldsymbol{\theta}|Y_{t-1})$ et la quantité d'information de Fisher, $I_n(\boldsymbol{\theta})$.

3) Déterminer l'estimateur de $\boldsymbol{\theta}$ par la méthode du maximum de vraisemblance. Étudier les qualités de l'estimateur (biais, convergence et efficacité).

4) Calculer la valeur des critères d'information AIC et BIC. On rappelle :

$$AIC = 2k - 2\log(\ell(\boldsymbol{\theta})); \qquad BIC = k\ln(n) - 2\log(\ell(\boldsymbol{\theta}))$$

avec k est le nombre de paramètres estimés et n est nombre d'observations utilisé dans l'estimation.

5) En utilisant les tests LR, Wald et LM, tester, au seuil $\alpha = 5\%$, $H_0 : \phi = -0.5$ et $\sigma^2 = 1$.

Solution 3

1) Soit $Y_i = (Y_2, Y_3, \ldots, Y_n)$ et $X_i = (Y_1, Y_2, \ldots Y_{n-1})$, d'où $Y_i = \phi X_i + \varepsilon_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$. D'après l'exercice précédent, on a :

$$f(y_i|x_i) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(y_i - \phi x_i)^2\right)$$

La vraisemblance est donnée par :

$$LogL = \ell(y_i|x_i, \boldsymbol{\theta}) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum(y_i - \phi x_i)^2$$

```
Y=c(1.07,0.53,-0.17,-0.1,-1.67,1.07,-1.59,-0.06,-0.06,2.15,-0.74,0.95,-0.96,-0.74,
0.71,0.10,-1.71,0.02,0.63,0.57)
y=Y[-1]; x=Y[-20]
ll=function(theta,x,y){n=length(y)
-n/2*log(2*pi*theta[2])-1/(2*theta[2])*sum((y-theta[1]*x)^2)
}
```

```r
estim=optim(fn=ll, par=c(0,0.1), control=list(fnscale=-1), x=x, y=y,hessian=T)
estim$par  #$ l'estimateur

[1] -0.2923829  0.8866790

estim$value  #$ valeur de log-vraisemblance

[1] -25.81531

(H=round(estim$hessian,3))  #$ la hessienne

        [,1]    [,2]
[1,] -21.779  -0.007
[2,]  -0.007 -12.079

round(solve(-H),3)  # la matrice des variances du theta

      [,1]  [,2]
[1,] 0.046 0.000
[2,] 0.000 0.083

(aic=2*2-2*estim$value)  #$  AIC (k=2: nbre de paramètres estimés)

[1] 55.63063

n=length(y)    # nbre d'observations
(bic=2*log(n)-2*estim$value)  #$ BIC

[1] 57.5195
```

5) Tests :

```r
# LR test
ll0=ll(c(-0.5,1),x,y); ll1=estim$value    #$
(LR=-2*(ll0-ll1));   qchisq(0.95,2)

[1] 0.9672126
[1] 5.991465
```

```r
# Wald test
g=diag(1,2)%*%estim$par-c(-0.5,1)
W=t(g)%*%(-estim$hessian)%*%g;  c(W)
```

```
[1] 1.093565
```

```r
# LM test
ss=c(sum(x*(y+0.5*x)),
     -length(x)/2+1/2*sum((y+0.5*x)^2))
LM=t(ss)%*%solve(-estim$hessian)%*%ss;  c(LM)
```

```
[1] 0.7764187
```