Eléments du corrigé du TD1

Exercice 1

1) Les tirages sont effectués jusqu'à ce que l'on obtienne une boule blanche, donc la variable N suit une loi de Pascal de paramètre $p = 1/2$ puisque c'est la probabilité de tirer une boule blanche :

$$P(N = n) = \frac{1}{2^n}$$

D'après les résultats du cours : $E(N) = V(N) = 2$.

2) Si on note respectivement B_i et N_i les événements tirer une boule blanche et tirer une boule noire au i-ème tirage, $i \in \mathbb{N}^*$, la loi de la variable entière N est définie par :

$$P\ (N = 1) = P(B_1) = \frac{1}{2}$$

$$P\ (N = 2) = P(N_1 B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$$

$$\dots$$

$$P\ (N = n) = P(N_1 \dots N_{n-1} B_n) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

Ainsi :

$$E(N) = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} n \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

série harmonique divergente, donc l'espérance est infinie. *A fortiori* la variance n'existe pas non plus.

On obtient :

$$P\ (N > n) = 1 - P(N \leqslant n) = 1 - \sum_{k=1}^{n} P(N = k)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{n+1}$$

Exercice 2

La v. a. X suit une loi hypergéométrique ; pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant 3$:

$$P(X = k) = \frac{\binom{4}{k}\binom{6}{3-k}}{\binom{10}{3}}$$

On obtient ensuite :

$$P(X=0)=\frac{1}{6} \quad P(X=1)=\frac{1}{2} \quad P(X=2)=\frac{3}{10} \quad P(X=3)=\frac{1}{30}$$

$$E(X)=\frac{1}{2}+\frac{3}{5}+\frac{1}{10}=1{,}2$$

En utilisant la formule du cours on retrouve $E(X)=3\frac{4}{10}=1{,}2$.

Exercice 3

1) Il s'agit de la loi binômiale négative ; pour tout entier $k \geqslant 2$:

$$P(X=k)=(k-1)\frac{2^{k-2}}{3^k}$$

2) La probabilité d'être sélectionné est :

$$P(X \leqslant 4)=\sum_{k=2}^{4} P(X=k)=\frac{11}{27}$$

Exercice 4

La v.a. Y a pour fonction de répartition :

$$G(y)=P(\ln X<y)=P(X<e^y)=F(e^y)$$

où F est la f.r. de X. La densité obtenue par dérivation est :

$$g(y)=e^y f(e^y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}\exp-\frac{y^2}{2\theta}$$

qui est la densité de la loi normale centrée de variance θ.

Exercice 5

1) On détermine la f.r. de la v.a. $U=\dfrac{X-\lambda}{\theta}$:

$$G(u)=P(U<u)=P(X<\theta u+\lambda)=F(\theta u+\lambda)$$

où F est la f.r. de X. Par dérivation on obtient la densité de U :

$$g(u)=\theta f(\theta u+\lambda)=e^{-u}$$

pour $u>0$. C'est donc la loi exponentielle avec $G(u)=1-e^{-u}$ pour $u>0$, et $E(U)=V(U)=1$. On en déduit $E(X)=\theta+\lambda$, $V(X)=\theta^2$ et pour $x>\lambda$:

$$F(x) = G\left(\frac{x-\lambda}{\theta}\right) = 1 - \exp\left(-\frac{x-\lambda}{\theta}\right)$$

2) La v.a. m_n a pour fonction de répartition :

$$H(y) = P(m_n < y) = 1 - P\left\{\bigcap_{i=1}^{n}(X_i > y)\right\} = 1 - [1 - F(y)]^n$$

Sa densité est donc :

$$h(y) = n[1 - F(y)]^{n-1} f(y) = \frac{n}{\theta} \exp\left(-n\,\frac{y-\lambda}{\theta}\right)$$

pour $y > \lambda$.