Épreuve : Statistique mathématique Durée : 02 Heures Date : 20/01/2022 Nbre de pages : 02 pages	Université de Sousse Institut des Hautes Études Commerciales de Sousse	Niveau : **M1** **Finance & Actuariat** Enseignant : **Hamrita Mohamed Essaied** **Session principale**

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la clarté entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Téléphone portable et documents interdits.

Exercice 1 (7 points)

Soit X une variable aléatoire continue dont sa fonction de probabilité, f, est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2\theta^3}\exp\left(-\dfrac{x}{\theta}\right), & x \geq 0 \text{ et } \theta > 0. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On rappelle que : $\Gamma(n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}dx$ et $\Gamma(n+1) = n!\ \forall n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que X suit une loi de gamma dont on précisera ses paramètres.
2) Calculer la fonction génératrice des moments de X. En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
3) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ.
4) Etudier les qualités de cet estimateur (biais, convergence et efficacité).

Exercice 2 (7 points)

On considère la fonction de densité jointe du couple aléatoire (X, Y) définie par :

$$f(x, y) = \frac{6}{7}\left(x^2 + \frac{xy}{2}\right), \quad 0 < x < 1,\ 0 < y < 2.$$

1) Calculer $\mathbb{P}\left(X = \frac{1}{2}, Y = \frac{1}{3}\right)$, $\mathbb{P}\left(X = \frac{1}{2}, Y = 2\right)$ et $\mathbb{P}\left(X > \frac{1}{2}, Y < \frac{1}{3}\right)$.
2) Déterminer les densités marginales en X et en Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes? Calculer $\mathbb{E}(X)$.
3) Calculer la densité conditionnelle de $Y|X = x$.
4) Calculer $\mathbb{E}(Y|X = x)$. En déduire $\mathbb{E}(Y)$.
5) Soient $U = X + Y$ et $V = X - Y$. Déterminer la densité jointe du couple (U, V).

Exercice 3 (7 points)

Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un n−échantillon aléatoire indépendant et identiquement distribué selon la loi normale de paramètres m et $\sigma^2 = \theta$ inconnus tous les deux.

1) Déterminer la fonction de vraisemblance en logarithme de l'échantillon.
2) Déterminer par la méthode du maximum de vraisemblance des estimateurs des paramètres m et θ.
3) Les estimateurs sont-ils sans biais ? Sinon, donner des estimateurs sans biais.
4) Déterminer la matrice des variances-covariance de $(\widehat{m}, \widehat{\theta})$. Étudier l'efficacité des estimateurs.

Bon travail