

# TD2

Statistique Mathématique

2021/2022

Université de Sousse



Institut des Hautes Études

Commerciales de Sousse

Niveau : M1

Finance & Actuariat

Enseignant :

Mohamed Essaied Hamrita

[mhamrita@gmail.com](mailto:mhamrita@gmail.com)

<https://github.com/Hamrita>

## Exercice 1

Soit la densité conjointe d'un couple aléatoire  $(X, Y)$

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1) Calculer  $\mathbb{P}(X \leq 1/2, Y \leq 1/4)$  et  $\mathbb{P}(X > 1/3, Y \leq 1/2)$ .
- 2) Déterminer les densités marginales en  $X$  et en  $Y$ . Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes?  
Calculer  $\mathbb{E}(Y)$ .
- 3) Déterminer la densité conditionnelle  $f_{X|Y}$  et calculer  $\mathbb{E}(X|Y = y)$ . En déduire  $\mathbb{E}(X)$ .
- 4) Soit  $U = X + Y$ , déterminer la densité de  $U$ .

## Exercice 2

On considère le couple de variables aléatoires qui possède la distribution continue suivante :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{9}{2}x^{1/2}y^{1/2} & \text{si } 0 \leq y < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1) Calculer  $\mathbb{P}(X = 1/3, Y = 1/4)$  et  $\mathbb{P}(X \leq 1/3, Y \leq 1/4)$ .
- 2) Déterminer les densités marginales en  $X$  et en  $Y$ . Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes?
- 3) Calculer  $\mathbb{P}(X = 1/3)$  et  $\mathbb{P}(1/4 \leq Y \leq 3/4)$ .
- 4) Construire les espérances mathématiques conditionnelles  $\mathbb{E}(Y|X)$  et  $\mathbb{E}(X|Y)$ .
- 5) Calculer les variances conditionnelle  $\mathbb{V}(Y|X)$  et  $\mathbb{V}(X|Y)$ .

### Exercice 3

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires de la loi de densité

$$f(x, y) = e^{-y} \mathbb{1}_{\{y \geq x \geq 0\}}$$

- 1) Vérifier que  $f$  est bien une densité de probabilité du couple  $(X, Y)$ .
- 2) Déterminer les lois marginales de  $X$  et de  $Y$ .
- 3) Calculer  $\mathbb{P}(X \leq 1 | Y > 2)$ .

### Exercice 4

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires de densité définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{k}{\sqrt{xy}} & \text{si } 0 < x \leq y < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1) Déterminer la valeur de la constante  $k$  puis la fonction de répartition  $F$  de ce couple..
- 2) Déterminer les lois marginales de  $X$  et  $Y$  . Ces variables sont-elles indépendantes?.
- 3) Déterminer la loi conditionnelle  $Y|X = x$  et  $\mathbb{E}(Y|X = x)$ . En déduire  $\mathbb{E}(Y)$ .