Épreuve : Statistique mathématique **Durée : 02 Heures** **Date : 12/01/2023** **Nbre de pages : 02 pages**	**Université de Sousse** IHEC Institut des Hautes Etudes Commerciales de Sousse معهد الدراسات العليا التجارية بسوسة **Institut des Hautes Études Commerciales de Sousse**	Niveau : **M1** **Finance & Actuariat** Enseignant : **Hamrita Mohamed Essaied** **Session principale**

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la clarté entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Téléphone portable et documents interdits.

Exercice 1 (9 points)

Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un n-échantillon aléatoire indépendant et identiquement distribué selon la loi normale de paramètres m et $\sigma^2 = \theta$ inconnus tous les deux.

1) Déterminer la fonction de vraisemblance en logarithme de l'échantillon.
2) Déterminer par la méthode du maximum de vraisemblance des estimateurs des paramètres m et θ.
3) Les estimateurs sont-ils sans biais ? Sinon, donner des estimateurs sans biais.
4) Déterminer la matrice des variances-covariance de $(\widehat{m}, \widehat{\theta})$. Étudier l'efficacité des estimateurs.
5) Un échantillon aléatoire de taille $n = 10$ a donné les observations suivantes :

$$x = (2.83, 1.72, 1.64, 2.09, 4.25, 2.83, 3.31, 4.50, 3.17, 1.57)\,; \quad \sum x_i = 27.91, \ \sum x_i^2 = 87.81$$

a) Calculer les valeurs des estimateurs de m et de θ. Calculer la valeur de vraisemblance correspondante.

b) Donner la matrice Hessienne empirique. En déduire l'estimation de la matrice des variances-covariances des estimateurs de m et θ.

c) Écrire les codes R nécessaires pour répondre aux questions précédentes (vraisemblance, estimateurs, matrice hessienne et la matrice des variances-covariances).

Exercice 2 (11 points)

Soit le modèle linéaire suivant : $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ où $\varepsilon \overset{i.i.d}{\sim} N(0,1)$. Un échantillon aléatoire de taille $n = 20$ a donné les observations suivantes :

```
x 0 5  0 2  0  0 -2 0 -1 3 -1 2 1 -1 2 -1 3  1 4 2
y 0 5 -2 2 -2 -1  0 0 -1 3 -1 3 2 -3 2 -3 2 -1 6 3
```

On donne : $\sum x_i = 19$; $\sum y_i = 14$; $\sum x_i y_i = 93$ et $\sum x_i^2 = 85$.

On souhaite estimer $\boldsymbol{\beta} = \left(\beta_0, \beta_1\right)$ par la méthode du maximum de vraisemblance.

1) Écrire la densité de la variable $y_i|x_i$. En déduire sa vraisemblance en logarithme.
2) Déterminer le vecteur score $s(\beta|y_i)$, la matrice hessienne $H(\beta|y_i)$ et la quantité d'information de Fisher $I_n(\beta|y_i)$.
3) Déterminer l'estimateur du vecteur $\boldsymbol{\beta}$ par la méthode du maximum de vraisemblance. Étudier ses qualités.
4) Tester, au seuil $\alpha = 5\%$, $H_0 : \beta_0 = -2$ et $\beta_1 = 1$ par le trigoly (LR, Wald et LM) tout en précisant, à chaque fois, la statistique à utiliser et la règle de décision. (On donne $\chi^2_{0.05}(2) = 6$).
4) Reprendre les questions en écrivant les codes R nécessaires.

Bon travail