CHAPITRE I

ECHANTILLONNAGE

A - Rappels de cours

1. Lois de probabilités

1.1 Définitions et caractérisations

Les principales lois de probabilités, leurs conditions de validité, et leurs paramètres représentatifs sont rappelées dans le tableau ci-dessous:

Loi	Nature	Définition	Caractérisation	E(X)	Var(X)
BERNOULLI	Discrète	Variable indicatrice d'un caractère au cours de n épreuves de BERNOULLI (*)	Valeurs : $\{0,1\}$ $\Pr ob(X=0)=q$ $\Pr ob(X=1)=p$	p	q
Binomiale **B(n,p)**	Discrète	Occurrence d'un caractère au cours de n épreuves de BERNOULLI indépendantes	Valeurs : $\{0,1,2....,n\}$ $\Pr ob(X=x)=C_n^x p^x q^{n-x}$	$n.p$	$n.p.q$
Hypergéométrique	Discrète	Occurrence d'un caractère au cours de n épreuves de BERNOULLI dépendantes (à savoir le tirage sans remise d'un échantillon de taille n dans une population de taille N)	Valeurs : $\{0,1,2....,n\}$ $\Pr ob(X=x)=\dfrac{C_{N.p}^x . C_{N.q}^{n-x}}{C_N^n}$	$n.p$	$\dfrac{N-n}{N-1}.npq$
POISSON **P(a)**	Discrète	Occurrence des événements relativement rares	Valeurs : N $\Pr ob(X=x)=e^{-a}.\dfrac{a^x}{x!}$	a	a

(*) Pour rappel, l'épreuve de BERNOULLI est une épreuve dans laquelle, seuls sont possibles, les résultats C (avec la probabilité p) et $\overline{C}$ (avec la probabilité complémentaire $q=1-p$).

Loi	Nature	Définition	Caractérisation	E(X)	Var(X)
Géométrique	Discrète	Nombre de tentatives nécessaires jusqu'à l'obtention du caractère C à travers des épreuves de BERNOULLI indépendantes	Valeurs : N^* $\Pr ob(X=x)=q^{x-1}.p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Binomiale négative	Discrète	Nombre de tentatives jusqu'à l'obtention r fois d'un caractère C à travers des épreuves de BERNOULLI indépendantes	Valeurs : $[r,+\infty[$ $\Pr ob(X=x)=C_{x-1}^{r-1}p^r.q^{x-r}$	$\frac{r}{p}$	$\frac{r.q}{p^2}$
Uniforme $U_{[a,b]}$	Continue	Probabilité uniforme sur $[a,b]$	Valeurs : $[a,b]$ $f(x)=\frac{1}{b-a}.1_{[a,b]}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle	Continue	Caractéristique des durées de vie des équipements qui ne vieillissent pas (loi « sans mémoire »)	Valeurs : R^+ $f(x)=\lambda.e^{-\lambda.x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Gamma n	Continue	Loi de la somme de n variables aléatoires exponentielles indépendantes	Valeurs : R^+ $f(x)=\frac{\lambda^n.e^{-\lambda.x}.x^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{n}{\lambda}$	$\frac{n}{\lambda^2}$
Normale $N(m,\sigma)$	Continue	Loi « universelle » vers laquelle convergent une large part des autres lois	Valeurs : R $f(x)=\frac{1}{\sigma.\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{(x-m)^2}{2.\sigma^2}}$ (tables de valeurs en annexes)	m	σ^2

Loi	Nature	Définition	Caractérisation	E(X)	Var(X)
Chi-deux $\chi^2(n)$	Continue	Loi de la somme $\sum_{i=1}^{i=n} X_i^2$ où les X_i sont des variables normales, centrées, réduites, et indépendantes	Valeurs : R^+ $f(x)=\dfrac{x^{\frac{n}{2}-1}.e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}.\Gamma(\frac{n}{2})}$ avec $\Gamma(n)=\int_0^{+\infty} t^{n-1}.e^{-t}.dt$ (tables de valeurs en annexes)	n	$2n$
STUDENT **T(n)**	Continue	Loi de $T=\dfrac{X}{\sqrt{\dfrac{Y}{n}}}$ où X est normale centrée réduite et où Y suit la loi du chi -deux $\chi^2(n)$	Valeurs : R^+ $f(x)=\dfrac{\Gamma(\frac{n+1}{2}).(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{(n+1)}{2}}}{\sqrt{n.\pi}.\Gamma(\frac{n}{2})}$ (tables de valeurs en annexes)	0 $n \succ 1$ (indéterminée pour n=1)	$\dfrac{n}{n-2}$ $n \succ 2$ (infinie pour $n \leq 2$)
FISHER SNEDECOR **F(n,p)**	Continue	Loi de $F=\dfrac{X/n}{Y/p}$ où X et Y suivent respectivement les lois $\chi^2(n)$ et $\chi^2(p)$	Valeurs : R^+ $f(x)=\dfrac{n^{\frac{n}{2}}.p^{\frac{p}{2}}.\Gamma(\frac{n+p}{2}).x^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma(\frac{n}{2}).\Gamma(\frac{p}{2}).(n.x+p)^{\frac{n+p}{2}}}$ (tables de valeurs en annexes)	$\dfrac{p}{p-2}$ $p \succ 2$	Voir renvoi (*) ci-dessous.

(*) La variance de la loi de FISHER SNEDECOR est égale à $(\dfrac{p}{p-2})^2.\dfrac{2.(n+p-2)}{n.(p-4)}$ pour $p \succ 4$.

1.2 Propriétés de convergence

• Le **théorème central limite** tient une place fondamentale dans la justification desdites convergences. Pour rappel, son énoncé est le suivant :

Soit $X_n, n \in N$, une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi d'espérance m et de variance σ^2 finies. Alors, la somme $Z=\sum_{i=1}^{i=n} X_i$ converge pour n assez grand (en pratique à partir de n=30) vers la loi normale de moyenne $n.m$ et d'écart -type $\sigma.\sqrt{n}$.