TD1	Université de Sousse	Niveau : **M1**
Statistique Mathématique		**Finance & Actuariat**
		Enseignant :
2021/2022	**Institut des Hautes Études Commerciales de Sousse**	**Mohamed Essaied Hamrita** mhamrita@gmail.com https://github.com/Hamrita

Exercice 1

Une urne contient une boule blanche et une boule noire.

1) On effectue des tirages avec remise jusqu'à obtention d'une boule blanche. Déterminer la loi de probabilité du nombre N de tirages, puis calculer $\mathbb{E}(N)$ et $\mathbb{V}(N)$. Déterminer sa fonction génératrice des moments.
2) Mêmes questions si on remet une boule noire en plus après chaque tirage d'une boule noire. Calculer alors $\mathbb{P}(N > n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2

Lors d'un examen oral, on vous demande de tirer les trois sujets que vous aurez à traiter dans une urne qui en contient dix. Parmi ces dix sujets, il y en a 3 que vous ne connaissez pas. Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre de sujets qui vous seront inconnus à l'issue de ce tirage. Calculer les probabilités des différentes valeurs possibles de X et en déduire $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 3

Pour être sélectionné aux Jeux olympiques, un athlète doit réussir deux fois à dépasser les minima fixés par sa fédération. Il a une chance sur trois de réussir à chaque épreuve à laquelle il participe. On note X la variable aléatoire qui représente le nombre d'épreuves auxquelles il devra participer pour être sélectionné.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.
2) Si cet athlète ne peut participer qu'à quatre épreuves maximum, quelle est la probabilité qu'il soit sélectionné ?

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire de densité définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\theta}} \exp\left(-\frac{(\ln x)^2}{2\theta}\right), \quad \text{pour } x > 0 \text{ et } \theta > 0$$

1) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y = \ln X$.
2) En déduire la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire Y.

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire de densité f, (θ et λ deux réels strictement positifs) :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{x-\lambda}{\theta}\right) & \text{si } x > \lambda \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ puis déterminer la fonction de répartition F de X.
2) Déterminer la loi de probabilité de la v.a. $Y = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$, où $X_1, \ldots, X_n$ sont des v.a. indépendantes et de même loi que X.

Exercice 6

Soit X une $v.a$ telle que $X \sim \gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Reconnaître la loi de X et déterminer la loi de $Y = \sqrt{X}$.

Exercice 7

Soit $X \sim \gamma(\alpha, \lambda)$.

1) Déterminer la fonction génératrice des moments, $\phi(t)$, de la $v.a$ X. En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
2) Soient $Z \sim N(0,1)$ et $Y = Z^2$. Déterminer la loi de la $v.a$ Y et donner $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.
3) On suppose que $\alpha \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $W = 2\lambda X$. En déduire $\mathbb{E}(W)$ et $\mathbb{V}(W)$.
4) Soient $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ des $v.a$ indépendantes et de même loi $N(0,1)$, i.e $Z_i \overset{iid}{\sim} N(0,1)$. Soit $Q = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$. Déterminer la densité de Q et donner $\mathbb{E}(Q)$ et $\mathbb{V}(Q)$.