Exercice 3

1. f est une densité de probabilité. En effet, $f(x,y)$ est une fonction continue positive $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. De plus

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-y}\mathbb{1}_{\{y\geqslant x\geqslant 0\}}dxdy = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^0 e^{-y}dx\right)dy \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-y}\left(\int_0^y dx\right)dy = \int_0^{+\infty} ye^{-y}dy = 1.\end{aligned}$$

2. Loi marginale de X

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-y}\mathbb{1}_{\{y>x>0\}}dy = \int_x^{+\infty} e^{-y}dy = e^{-x}\mathbb{1}_{\{x>0\}}$$

Loi marginale de Y

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-y}\mathbb{1}_{\{y>x>0\}} = e^{-y}\int_0^y dx = ye^{-y}\,\mathbb{1}_{\{y>0\}}$$

On constate que $f_Y(y)f_X(x) \neq f_{(X,Y)}(x,y)$, donc X et Y ne sont pas indépendantes.

3. La formule de Bayes donne

$$P(X\leqslant 1|Y>2) = \frac{P(\{X\leqslant 1\}\cap\{Y>2\})}{P(Y>2)}.$$

Par des calculs intégrales, nous avons

$$P(Y>2) = \int_2^{+\infty} f_Y(y)dy = \int_2^{+\infty} ye^{-y}\mathbb{1}_{\{y>0\}}dy = 3e^{-2}.$$

Et

$$\begin{aligned}P(\{X\leqslant 1\}\cap\{Y>2\}) &= \int_{-\infty}^1\int_2^{+\infty} e^{-y}\mathbb{1}_{\{y>x>0\}}dydx = \int_{-\infty}^1\left(\int_2^{+\infty} e^{-y}\mathbb{1}_{\{y>x>0\}}dy\right)dx \\ &= \int_{-\infty}^1\left(\int_{\{y\in[2,+\infty[\text{et}\, y\in[x,+\infty[\}} e^{-y}dy\right)dx\end{aligned}$$

Posons l'intégrale $I(x) = \left(\int_{\{y\in[2,+\infty[\text{et}\, y\in[x,+\infty[\}} e^{-y}dy\right)$et notons le domaine :
$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$ tel que $y\in[2,+\infty[$ et $y\in[x,+\infty[\}$. Il est clair que

- Si $x>2 \Rightarrow D = [x,+\infty[$.
- Si $0<x\leqslant 2 \Rightarrow D = [2,+\infty[$.

Par suite,

$$I(x) = \int_x^{+\infty} e^{-y}\mathbb{1}_{\{x>2\}}dy + \int_2^{+\infty} e^{-y}\mathbb{1}_{\{0<x<2\}}dy = \mathbb{1}_{\{x>2\}}e^{-x} + e^{-2}\mathbb{1}_{\{0<x<2\}}.$$

On montre donc

$$P(\{X\leqslant 1\}\cap\{Y>2\}) = \int_{-\infty}^1 e^{-x}\mathbb{1}_{\{x>2\}}dx + \int_{-\infty}^1 e^{-2}\mathbb{1}_{\{0<x<2\}}dx = 0 + \int_0^1 e^{-2}dx = e^{-2}$$

On conclut que

$$P(X\leqslant 1/Y>2) = \frac{e^{-2}}{3e^{-2}} = \frac{1}{3}$$

Exercice 4

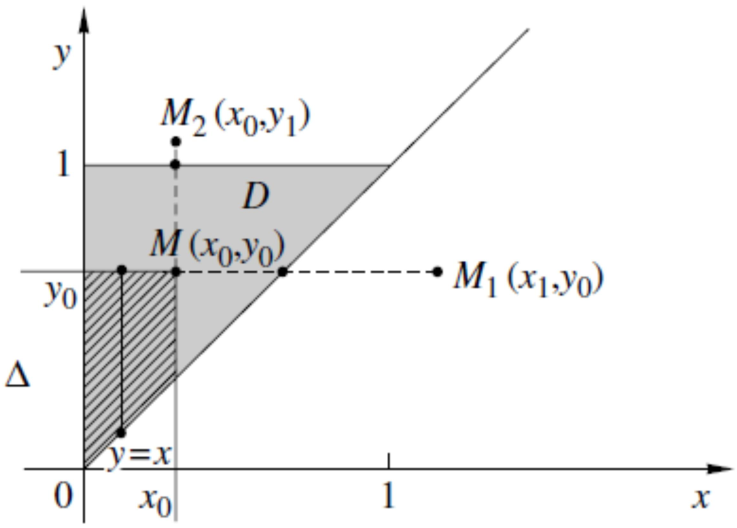
1) L'intégrale de f sur $\mathbb{R}^2$ doit être égale à 1 ; elle se réduit à l'intégrale sur le domaine D où elle est non nulle :

$$1 = k \int\int_D \frac{dxdy}{\sqrt{xy}} = k \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \int_x^1 \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2k \int_0^1 (\frac{1}{\sqrt{x}} - 1)dx = 2k$$

donc $k = \frac{1}{2}$. Remarquons que si l'expression de f est symétrique en x et y, il n'en est pas de même du domaine D et il aurait été plus rapide ici d'intégrer d'abord par rapport à x.

Si on note Δ le domaine défini par $x < x_0$ et $y < y_0$, par définition $F(x_0, y_0) = \int\int_\Delta f(x, y)dxdy$. Bien entendu, si $x_0 \leqslant 0$ ou $y_0 \leqslant 0$, Δ n'a aucun point commun avec D où $f > 0$, donc $F(x_0, y_0) = 0$. Pour un point $M(x_0, y_0)$ situé dans D maintenant (voir figure 4.9) c'est-à-dire tel que $0 < x_0 \leqslant y_0 < 1$:

$$F(x_0, y_0) = \int\int_{D\cap\Delta} \frac{dxdy}{2\sqrt{xy}} = \frac{1}{2} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{x}} \int_x^{y_0} \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{x}}(2\sqrt{y_0} - 2\sqrt{x})$$
$$= \int_0^{x_0} (\frac{\sqrt{y_0}}{\sqrt{x}} - 1)dx = \sqrt{x_0}(2\sqrt{y_0} - \sqrt{x_0})$$



Notons qu'ici il fallait d'abord intégrer par rapport à y, car sinon il aurait fallu séparer $D \cap \Delta$ en deux domaines d'intégration. Pour les autres zones du plan, si nous quittons D sur une horizontale, à droite du point précédent, la valeur de F au point $M_1(x_1, y_0)$ est la même qu'au point d'intersection avec la frontière de D, puisqu'au-delà $f = 0$, soit pour un point de coordonnées telles que $x_1 > y_0 > 0$ et $y_0 < 1$:

$$F(x_1, y_0) = F(y_0, y_0) = y_0$$

Si maintenant nous quittons le domaine D sur une verticale au-dessus du point $M(x_0, y_0)$, nous atteignons un point M_2 de coordonnées x_0 et y_1, avec $0 < x_0 < 1 \leqslant y_1$ et en ce point :

$$F(x_0, y_1) = F(x_0, 1) = \sqrt{x_0}(2 - \sqrt{x_0})$$

Enfin, si $x_0 > 1$ et $y_0 > 1$, alors $D \cap \Delta = D$ et $F(x_0, y_0) = 1$. En résumé :

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \text{ ou } y \leqslant 0 \\ 2\sqrt{xy} - x & \text{si } 0 < x \leqslant y < 1 \\ 2\sqrt{x} - x & \text{si } 0 < x < 1 \leqslant y \\ y & \text{si } 0 < y < x \text{ et } y \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \text{ et } y \geqslant 1 \end{cases}$$

2) On peut en déduire les f.r. marginales :

$$F_X(x) = F(x,+\infty) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2\sqrt{x} - x & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leqslant x \end{cases}$$

$$F_Y(y) = F(+\infty,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 0 \\ y & \text{si } 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leqslant y \end{cases}$$

On en déduit les densités par dérivation ; pour $0 < x \leqslant 1$:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1\,,$$

résultat que l'on peut retrouver par intégration de f :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_x^1 \frac{dy}{2\sqrt{xy}} = \frac{1}{\sqrt{x}}[\sqrt{y}]_x^1 = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$$

La loi de Y est la loi uniforme sur $[0,1]$, avec $f_Y(y) = 1$ si $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Comme $f_X(x)f_Y(y) \neq f(x,y)$ on en conclut que X et Y ne sont pas indépendantes.

3) Les lois conditionnelles peuvent se définir par leurs densités. Pour $0 < y_0 < 1$, quand $0 < x \leqslant y_0$:

$$f_X(x|Y = y_0) = \frac{f(x,y_0)}{f_Y(y_0)} = \frac{1}{2\sqrt{xy_0}}$$

Pour $0 < x_0 < 1$ et quand $x_0 < y \leqslant 1$:

$$f_Y(y|X = x_0) = \frac{f(x_0,y)}{f_X(x_0)} = \frac{1}{2(1-\sqrt{x_0})\sqrt{y}}$$

On peut alors déterminer la régression :

$$E(Y|X = x_0) = \frac{1}{2(1-\sqrt{x_0})}\int_{x_0}^1 \frac{y}{\sqrt{y}}dy = \frac{1 - x_0\sqrt{x_0}}{3(1-\sqrt{x_0})} = \frac{1}{3}(1 + \sqrt{x_0} + x_0)$$

On calcule alors :

$$E[E(Y|X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} E(Y|X = x)f_X(x)dx = \frac{1}{3}\int_0^1 (\frac{1}{\sqrt{x}} - x)dx = \frac{1}{2}$$

qui est bien la valeur de $E(Y)$.