Econométrie de la finance

Chapitre 1: Introduction

Mohamed Essaied Hamrita

Octobre 2021

Matériels et outils

- Les supports pédagogiques sont déposés au dépôt de (https://github.com/Hamrita/TSFin.git).
- Logiciel statistique: (https://www.r-project.org/)
- IDE: RStudio (https://www.rstudio.com/products/rstudio/download/)

Quelques concepts de bases

- Un processus x_t est **une série temporelle discrète** si x_t est une variable aléatoire et l'indice t est dénombrable.
- Une série observée est une réalisation de ce processus stochastique.
- Un processus x_t est **strictement stationnaire** si sa distribution est **invariante** dans le temps. Mathématiquement parlant, x_t est strictement stationnaire si pour tout indice de temps arbitraire $\{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$, où $m > 0$, et pour un entier k fixé, $F(x_{t_1}, \ldots, x_{t_m}) = F(x_{t_1+k}, \ldots, x_{t_m+k})$.
- Une série temporelle est **faiblement stationnaire** si les deux premiers moments de x_t existent et **invariants** dans le temps. Statistiquement parlant, $\mathbb{E}(x_t) = m$ et $Cov(x_t, x_{t+k}) = \gamma(k)$, où $\mathbb{E}()$ est l'espérance mathématique, Cov est la covariance et $\gamma(k)$, dite fonction d'auto-covariance d'ordre k vérifiant $\gamma(-k) = \gamma(k), \forall k \in \mathbb{Z}$.
- Une séquence de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées est strictement stationnaire.

Séries temporelles linéaires

Un processus x_t est dit linéaire s'il peut s'écrire sous la forme: (représentation de Wald)

$$x_t = m + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \psi_k e_{t-k}$$

où m et ψ_k sont deux réels avec $\psi_0 = 1$ et $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\psi_k| < \infty$ et $\{e_t\}$ est une séquence aléatoire iid de moyenne nulle et admettant une distribution. Dans la pratique, on s'intéresse aux séries temporelles unilatérales

$$x_t = m + \sum_{k=0}^{+\infty} \psi_k e_{t-k}$$

La série temporelle linéaire dans l'équation précédente est faiblement stationnaire si nous supposons en outre que $\mathbb{V}(e_t) = \sigma_e^2$.

Dans ce cas, on a $\mathbb{E}(x_t) = m$, $\mathbb{V}(x_t) = \sigma_e^2 \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k^2$ et $\gamma(k) = \sigma_e^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{i+k}$.

Le modèle ARIMA est un modèle célèbre qui admet cette écriture. Dans ce cas, les coefficients ψ_i se calculent comme suit:

$$\psi_i = \theta_i + \sum_{0 \leq k \leq i} \phi_k \psi_{i-k} \; ; \qquad 0 \leq i < \max(p, q+1)$$

Exercice

Soit $x_t \sim AR(1)$ tel que $x_t = 0.4x_{t-1} + e_t; \quad e_t \overset{iid}{\sim} BB(0,1)$

1. Déterminer la représentation de Wald et donner les valeurs de ψ_i pour $i = 0, 1, 2, \ldots, 10$.
2. En déduire l'expression de $\gamma(k)$ en fonction de k. Donner les valeurs de $\gamma(k)$ pour $k = 0, 1, \ldots, 10$.

```
psi_i=ARMAtoMA(ar=0.4,lag.max = 10)  # représentation de Wald
psi_i
```

```
 [1] 0.4000000000 0.1600000000 0.0640000000 0.0256000000 0.0102400000
 [6] 0.0040960000 0.0016384000 0.0006553600 0.0002621440 0.0001048576
```

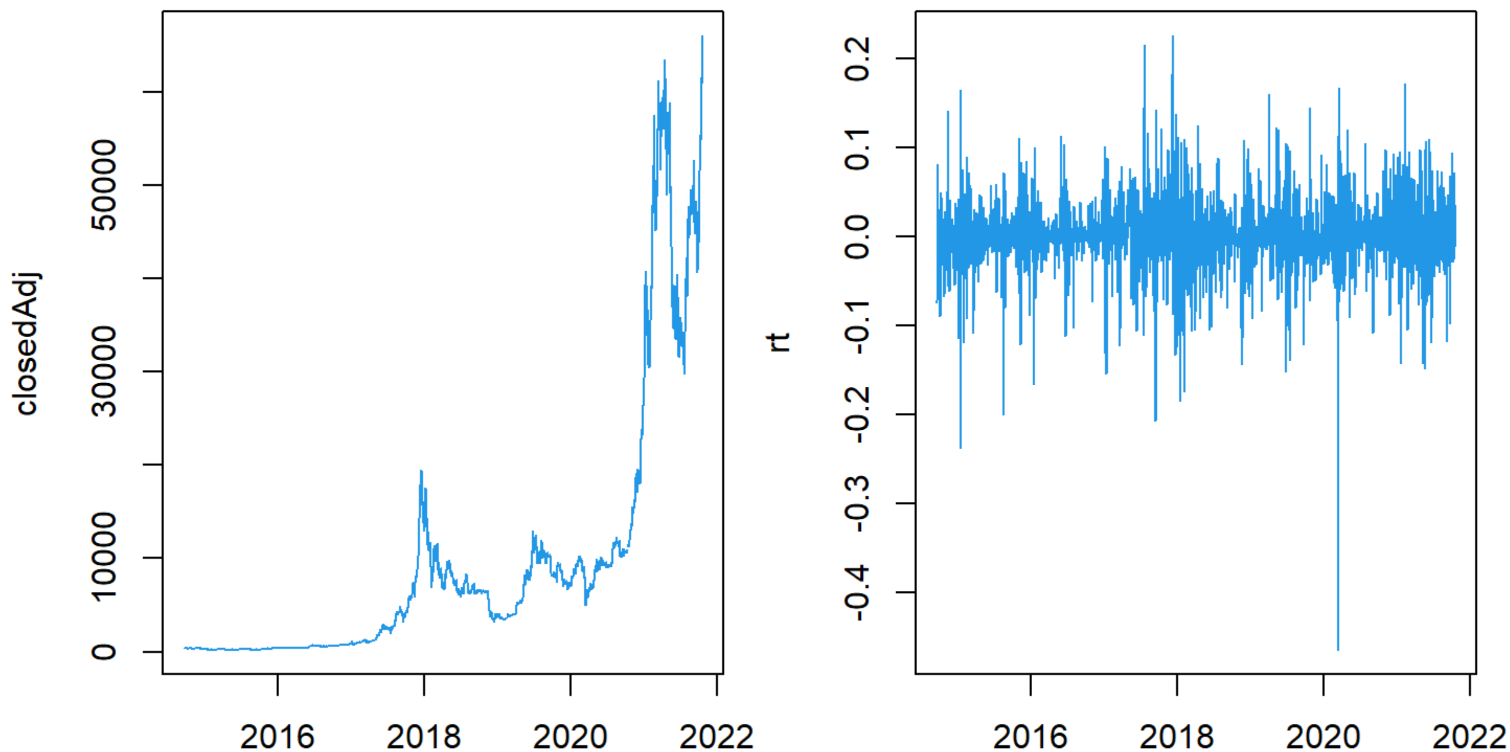
```
ARMAacv=function(ar=0,ma=0,n=10){
  p=c(1,ARMAtoMA(ar,ma,n+10000))
  gg=NULL
  for(ii in 1:n) gg[ii]=sum(p[1:10000]*p[(ii+1):(10000+ii)])
  c(sum(p^2),gg)
}
ARMAacv(ar=0.4,n=10)
```

```
 [1] 1.1904761905 0.4761904762 0.1904761905 0.0761904762 0.0304761905
 [6] 0.0121904762 0.0048761905 0.0019504762 0.0007801905 0.0003120762
[11] 0.0001248305
```

```
# 0.4^(0:10)*25/21
```

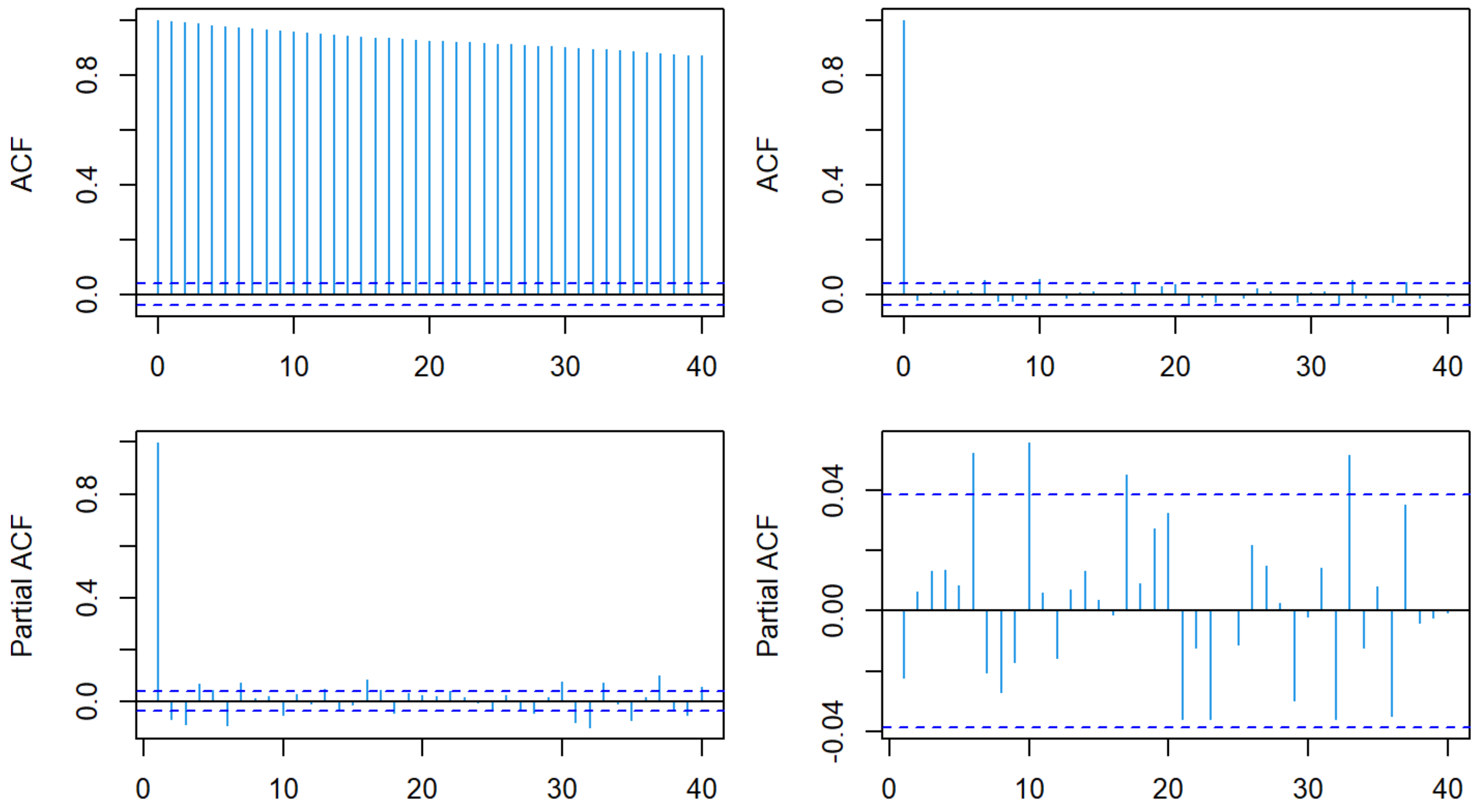
- Tout processus qui ne peut pas s'écrire sous la représentation de Wald est un processus **non linéaire**.
- Nous commençons par un exemple réel qui présente clairement des caractéristiques non linéaires et nécessite une modélisation non linéaire.
- On considère le cours journalier de Bitcoin ₿ contre le dollar américain (BTC/USD) allant de 17-09-2014 à 20-10-2021. On donne l'évolution du cours ajusté (figure à gauche) ainsi que l'évolution du rendement qui est défini par $r_t = \ln\left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right)$ où p_t est le cours ajusté.

```r
library(quantmod); library(zoo)
btc=getSymbols("BTC-USD", src="yahoo", from="2014-09-17",to="2021-10-20",auto.assign = FALSE)
closedAdj=zoo(btc[,6]); rt=diff(log(closedAdj))
par(mfrow=c(1,2), mar=c(2.5,3.8,1,1))
plot(closedAdj, col=4, xlab=""); plot(rt,col=4, xlab="")
```



- La figure de l'évolution des prix (à gauche) montre que la moyenne ainsi que la variance évoluent dans le temps tous les deux, donc la série est non stationnaire.
- En transformant la série, $r_t = \ln(p_t) - \ln(p_{t-1})$, on voit bien que la moyenne semble être stable dans le temps. Tandis que la variance semble être variable dans le temps et de manière asymétrique. Ce qui suggère à son tour que les rendements du Bitcoin **ne sont pas linéaires**.

```
par(mfrow=c(2,2), mar=c(2.5,3.8,1,1))
acf(closedAdj, 40,na.action = na.pass, col=4, xlab=""); acf(rt, 40,na.action = na.pass, col=4, xlab="")
pacf(closedAdj,40,na.action = na.pass,col=4, xlab=""); pacf(rt,40,na.action = na.pass,col=4, xlab="")
```



Propriétés des séries financières

- grande variété des séries utilisées (prix d'action, taux d'intérêt, taux de change etc.), importance de la fréquence d'observation (seconde, minute, heure, jour, etc), disponibilité d'échantillons de très grande taille.
- existence de régularités statistiques ("faits stylisés") communes à un très grand nombre de séries financières et difficiles à reproduire artificiellement à partir de modèles stochastiques. Mandelbrot (1963).
  - Non stationnarité des prix p_t
  - Possible stationnarité des rendements.
  - Regroupement des extrêmes (volatility clustering): On observe empiriquement que de fortes variations des rendements sont généralement suivies de fortes variations. Ce type de phénomène remet en cause l'hypothèse d'homoscédasticité.
  - Non corrélation des rendements mais auto-corrélation des carrés.
  - Queues de distribution épaisses: la distribution des résidus demeure leptokurtique.
  - Asymétrie: Les baisses du cours génèrent plus de volatilité que les hausses de même amplitude (effet de levier).
  - Saisonnalité: Les rendements présentent de nombreux phénomènes de saisonnalité (effets week end, effet janvier, etc..)

Tests de linéarité

- La flexibilité des modèles non linéaires dans l'ajustement des données peut rencontrer le problème de trouver une structure fallacieuse (spurious) dans une série chronologique donnée.
- Il est donc important de vérifier la nécessité d'utiliser des modèles non linéaires. À cette fin, nous introduisons des tests de linéarité pour les données de séries temporelles. Les tests **paramétriques** et **non paramétriques** sont pris en compte.
- Tests paramétriques:
  - Le test de multiplicateur de Lagrange (Engle (1982))
  - Le test RESET (Regression error specification test) (Ramsey (1969), Keenan (1985))
- Tests non paramétriques
  - Le test McLeod-Li (McLeod and Li (1983))
  - Le test BDS (Broock et al. (1996))
  - Test de Peña-Rodríguez (Peña and Rodríguez 2002, 2006)

Tests paramétriques

Le test LM: Il s'agit de tester l'effet ARCH (héteroscédasticité conditionnelle) proposé par Engle (1982). L'hypothèse nulle est: $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$ du modèle:
$e_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \alpha_2 e_{t-2}^2 + \ldots = \alpha_m e_{t-m}^2 + a_t, t = 1, 2, \ldots, T.$

e_t est la série des résidus obtenue suite à un modèle linéaire (ARIMA, régression linéaire).

$$LM = TR^2 \overset{H_0}{\sim} \chi^2(m) \text{ où } R^2 \text{ est le coefficient de détermination.}$$

Si $LM < \chi^2_\alpha(m)$, l'hypothèse nulle est acceptée; **absence d'effet ARCH**.

Remarques:

- Ce test est équivalent au test de Fisher;

$$F = \frac{(SCR_0 - SCR_1)/m}{SCR_1/(T - 2m - 1)} \overset{H_0}{\sim} F(m, T - 2m - 1)$$

  où SCR_0 et SCR_1 sont les sommes des carrés résiduelles sous H_0 et H_1 respectivement.

- On accepte l'hypothèse nulle si p.value est supérieure à $\alpha\%$.

```r
archLM=function(x,p=1, disp=T){
  # x: time series;  p: lag order; disp: display or not the result
  mat=embed(x^2,(p+1))
  reg=summary(lm(mat[,1]~mat[,-1]))
  r2=reg$r.squared
  statistic=r2*length(resid(reg))
  cv=qchisq(0.95,p)
  pvalue=1-pchisq(statistic,p)
  if(disp){
  cat("=================================================\n")
  cat("=======            ARCH LM test         =========\n")
  cat("=================================================\n")
  cat("====    H0: no ARCH effects             =========\n\n")

  cat(" Chi-squared: ", statistic, "  df: ", p,  "  p.value: ", pvalue,
      "  critical value 5%: ", cv, " \n")
  cat(" F-statistic", reg$fstatistic[1]," df:  ", reg$fstatistic[-1],"p.value: ",
      1-pf(reg$fstatistic[1], reg$fstatistic[2],reg$fstatistic[3]),
      " critical value 5%: ", qf(0.95,reg$fstatistic[2], reg$fstatistic[3]), "\n")
  }
  return(invisible(list("Chi-squared"=statistic, "p-value"=pvalue,
               "df"=p)))
}
```

Appliquons le test LM sur les rendements du Bitcoin (en supposant que $r_t = m + \epsilon_t$)

```
et=rt-mean(rt,na.rm=T)
archLM(et, 12)
```

```
================================================
=======           ARCH LM test        =========
================================================
====   H0: no ARCH effects             =========

 Chi-squared:  79.22112   df:  12   p.value:  5.809353e-12   critical value 5%:  21.02607
 F-statistic 6.778986  df:   12 2533 p.value:  3.736567e-12  critical value 5%:  1.755988
```

Le résultat montre bien **l'existence d'un effet ARCH** sur les rendements du Bitcoin (p.value presque nulle).

RESET Test

Ramsey (1969) a proposé un test de spécification pour les modèles de régression linéaire. Ce test est aussi applicable aux modèles AR. Les étapes du test sont décrites comme suit:

- Estimation, par MCO, le modèle: $x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \ldots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t$, on obtient, alors $\widehat{\phi} = (\widehat{\phi}_0, \widehat{\phi}_1, \ldots, \widehat{\phi}_p)$, $\widehat{x}_t$, $e_t = \hat{\varepsilon}_t = x_t - \widehat{x}_t$ et $SCR_0 = \sum e_t^2$.
- Estimation, par MCO, le modèle:
  $x_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1} + \ldots + \alpha_p x_{t-p} + \beta_1 \widehat{x}_t^2 + \beta_2 \widehat{x}_t^3 + \ldots + \beta_s \widehat{x}_t^{s+1} + \nu_t$, pour $s \geq 1$. En déduire $SCR_1 = \sum \widehat{\nu}_t^2$. Le modèle est non linéaire, si $H_0 : \alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \beta_1 = \beta_s = 0$, donc on peut faire recours au test du Fisher.
- Calcul du statistique $F = \dfrac{(SCR_0 - SCR_1)/(s+p+1)}{SCR_1/(T-2p-s-1)} \overset{H_0}{\sim} F(s+p+1, T-2p-s-1)$
- **Remarque:** Parce que les variables $\widehat{x}_j$ pour $j = 2, \ldots, s+1$ ont tendance à être fortement corrolées avec $(x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots, x_{t-p})$ et entre elles, les composantes principales de $(\widehat{x}_t^2, \ldots, \widehat{x}_t^{s+1})$ qui ne sont pas colinéaires avec $(x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots, x_{t-p})$ sont souvent utilisées dans l'ajustement de la deuxième équation.

```r
reset.test=function(x,p=1,s=1){
  # Estimate of AR(p)
  xx=embed(x,(p+1))
  mod1=lm(xx[,1]~xx[,-1])
  scr0=sum(mod1$residuals^2)
  xx.hat=mod1$fitted.values
  et=mod1$residuals;  TT=length(xx.hat)
  # Estimate of model 2
  xxx=matrix(0,nr=TT, nc=s)
  for(ii in 1:s)  xxx[,ii]=xx.hat^(s+1)
  X=cbind(xx[,-1],xxx)
  mod2=lm(et~X);  scr1=sum(mod2$residuals^2)
  df2=TT-p-s-1 ; df1=s+p+1
  F_stat=df2/df1*(scr0-scr1)/scr1
  pval=pf(F_stat,df1,df2,lower.tail = F)
  cval=qf(0.95,df1,df2)
  dec=ifelse(pval < 0.05, "H0 is rejected", "H0 is accepted")
  cat("=======================================\n")
  cat("        RESET test                     \n")
  cat("=======================================\n\n")
  cat("      H0: the model is linear          \n\n")
  cat("F-statistic: ", F_stat, "df: ", c(df1,df2), " p-value: ", pval, "CV 5%: ", cval,"\n")
  cat("Decision: ", dec , "\n")

  return(invisible(list(Fstatistic=F_stat,df=c(df1,df2),p.value=pval)))
}
```

```r
reset.test(na.omit(rt), p=2,1)
```

```
========================================
        RESET test
========================================

      H0: the model is linear

F-statistic:  1.298354 df:  4 2577  p-value:  0.2683325 CV 5%:  2.375381
Decision:  H0 is accepted
```

Keenan Test

- Keenan (1985) a proposé un test de non-linéarité pour les séries temporelles qui utilise uniquement $\widehat{x}_t^2$ et modifie la deuxième étape du test RESET pour éviter la multi-colinéarité entre $\widehat{x}_t^2$ et $(x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots, x_{t-p})$.
- Plus précisément, la deuxième régression linéaire est divisée en deux étapes. En premier lieu, on supprime la dépendance linéaire de $\widehat{x}_t^2$ sur $(x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots, x_{t-p})$ en ajustant la régression $\widehat{x}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1} + \ldots + \alpha_p x_{t-p} + v_t$ et déduire les résidus $\hat{v}_t$.
- En second lieu, on considère le modèle $e_t = \gamma \hat{v}_t + u_t$ pour obtenir la somme des carrées $SCR_0 = \sum \widehat{u}_t^2$ afin de tester l'hypothèse nulle $H0 : \gamma = 0$

```r
keenan.test=function(x,p=1){
  # Estimate of AR(p)
  xx=embed(x,(p+1))
  mod1=lm(xx[,1]~xx[,-1])
  xx.hat=mod1$fitted.values
  et=mod1$residuals
  # Estimate of model 2
  # (i)
  mod21=lm(xx.hat^2~xx[,-1])
  vt=mod21$residuals
  mod22=lm(et ~ -1+vt)
  F_stat=summary(mod22)$fstatistic[1]
  df=summary(mod22)$fstatistic[-1]
  pval=pf(F_stat,df[1],df[2],lower.tail = F)
  cval=qf(0.95,df[1],df[2])
  dec=ifelse(pval < 0.05, "H0 is rejected", "H0 is accepted")
  cat("=======================================\n")
  cat("        Keenan test                    \n")
  cat("=======================================\n")
  cat("      H0: the model is linear          \n\n")
  print(summary(mod22)$coefficients)
  cat("\n\nF-statistic: ", F_stat, "df: ", c(df), " p-value: ", pval, "CV 5%: ", cval,"\n")
  cat("Decision: ", dec , "\n")

  return(invisible(list(Fstatistic=F_stat,df=c(df),p.value=pval)))
}
```

```
keenan.test(na.omit(rt),2)
```

```
========================================
        Keenan test
========================================
      H0: the model is linear

   Estimate Std. Error  t value   Pr(>|t|)
vt  565.753    248.112 2.280232 0.02267514


F-statistic:  5.19946 df:  1 2580  p-value:  0.02267514 CV 5%:  3.845066
Decision:  H0 is rejected
```

Le test de McLeod-Li

- Une statistique de type test-portemanteau, basée sur la fonction d'auto-corrélation des carrés résiduels obtenus à partir d'un modèle ARMA, a été proposée par McLeod and Li (1983). L'idée est d'appliquer la statistique de Ljung-Box aux carrés des résidus d'un modèle $ARMA(p,q)$ pour vérifier l'inadéquation du modèle. Par conséquent, la statistique de test est

$$Q(m) = n(n+2)\sum_{i=1}^{n} \frac{\hat{\rho}_i^2(e_i^2)}{n-i}$$

  où n est la taille de l'échantillon, m est un nombre correctement choisi d'auto-corrélations utilisées dans le test et e_i les résidus du modèle ARMA.

- Sous H_0, $Q(m) \sim \chi^2(m-p-q)$.

```
arma_pq=arima(rt,c(1,0,1))
resid2=arma_pq$residuals^2
m=1L:7L; Q=NULL ; pval=NULL
for (i in m) { Q[i]=Box.test(resid2,i,"Ljung-Box")$statistic
pval[i]= Box.test(resid2,i,"Ljung-Box")$p.value
}
tab=rbind(m,Q,p.value=pval)
print(tab, digits=4)
```

```
             [,1]      [,2]      [,3]      [,4]      [,5]      [,6]     [,7]
m       1.000e+00 2.000e+00 3.000e+00 4.000e+00 5.000e+00 6.000e+00 7.00e+00
Q       3.477e+01 3.973e+01 4.203e+01 5.550e+01 6.018e+01 6.433e+01 8.83e+01
p.value 3.719e-09 2.358e-09 3.954e-09 2.554e-11 1.116e-11 5.898e-12 2.22e-16
```

- **Le test BDS :** Le test BDS (Broock et al. (1996)), développé dans le cadre de la théorie du chaos, est l'un des tests de non-linéarité les plus populaires.
- La statistique BDS est basée sur l'intégrale des corrélations. Etant donné une série temporelle $\{x_t\}$, et en posant $x_t^m = \{x_t, x_{t-1}, \ldots, x_{t-m+1}\}$, l'intégrale des corrélations est donnée par:

$$C_{m,T}(\epsilon) = \sum_{t<s} I_\epsilon x_t^m x_t^s \left\{ \frac{2}{T_m(T_m - 1)} \right\}$$

  où $T_m = T - (m-1)$ et $I_\epsilon x_t^m x_s^m$ est une fonction indicatrice égale à un si $||x_t^m - x_t^s|| < \epsilon$ et égale à zéro sinon avec $||.||$ désigne la norme supérieure.
- La statistique de BDS est donnée par:

$$W_{m\epsilon} = \sqrt{T} \frac{C_{m,T}(\epsilon) - C_{1,T}(\epsilon)^m}{s_{m,T}}$$

  où $s_{m,T}$ est l'écart-type estimé.
- Sous l'hypothèse nulle, pour laquelle la série $\{x_t\}$ est considérée iid, Broock et al. (1996) ont montré que $W_{m\epsilon}$ converge vers la loi normale standard.
- Dans la pratique, le test BDS est appliqué aux résidus suite à une estimation d'un modèle linéaire.

```r
mod=arima(rt,c(1,0,1))
residd=c(mod$residuals) ;
fNonlinear::bdsTest(na.omit(residd))@test
```

```
$data.name
[1] "na.omit(residd)"

$statistic
eps[1] m=2 eps[1] m=3 eps[2] m=2 eps[2] m=3 eps[3] m=2 eps[3] m=3 eps[4] m=2
 10.947219  14.762387   9.236784  12.056526   8.272856  10.621231   7.758839
eps[4] m=3
  9.459227

$p.value
  eps[1] m=2   eps[1] m=3   eps[2] m=2   eps[2] m=3   eps[3] m=2   eps[3] m=3
6.851911e-28 2.560545e-49 2.540183e-20 1.791830e-33 1.307873e-16 2.374085e-26
  eps[4] m=2   eps[4] m=3
8.571025e-15 3.102280e-21

$parameter
Max Embedding Dimension                  eps[1]                  eps[2]
             3.00000000              0.01974641              0.03949281
                 eps[3]                  eps[4]
             0.05923922              0.07898562
```

Test de Peña-Rodríguez (Peña and Rodríguez 2002, 2006)

- Peña et Rodríguez (2002) ont proposé une statistique de test de Portemanteau qui peut être utilisée pour la vérification d'un modèle linéairement ajusté, y compris la non-linéarité dans les résidus.
- Soit e_t les résidus suite à un modèle linéaire. Soit z_t une fonction de e_t; $z_t = e_t^2$ ou $z_t = |e_t|$. L'auto-corrélation empirique de retard k de z_t est:

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{i=k+1}^{T} (z_{t-i} - \overline{z})(z_t - \overline{z})}{\sum_{i=1}^{T} (z_t - \overline{z})^2}$$

- Pour un entier positif donné, m, l'hypothèse nulle du test de Peña-Rodríguez est $H_0 : \rho = \rho_2 = \ldots = \rho_m$. La statistique est $\widehat{D}_m = T\left(1 - \left|\widehat{R}_m\right|^{1/m}\right)$ où

$$\widehat{R}_m = \begin{pmatrix} 1 & \hat{\rho}_1 & \ldots & \hat{\rho}_m \\ \hat{\rho}_1 & 1 & \ldots & \hat{\rho}_{m-1} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \vdots \\ \hat{\rho}_m & \hat{\rho}_{m-1} & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

- En utilisant l'idée de pseudo-vraisemblance, (Peña and Rodríguez 2006) ont modifié la statistique du test:

$$\widehat{D}^*_m = -\frac{T}{m+1}\log\left(|\widehat{R}|\right)$$

qui est distribuée asymptotiquement comme un mélange de m variables aléatoires indépendantes $\chi^2(1)$. Cependant, les auteurs ont dérivé deux approximations pour simplifier le calcul. Ils ont aboutit au résultat $N\widehat{D}^*_m \sim N(0,1)$ où $N\widehat{D}^*_m$ est une approximation à $\widehat{D}^*_m$ (Eq 10 de Peña and Rodríguez (2006)).

- Sous R, on peut faire recours à la fonction `PRnd` du package `NTS`.

```
NTS::PRnd(na.omit(residd))
```

```
lambda:  3.972973
ND-stat & p-value  0.1135843 0.9095673
```

Références

Broock, W. A., J. A. Scheinkman, W. D. Dechert, and B. LeBaron. 1996. "A Test for Independence Based on the Correlation Dimension." *Econometric Reviews* 15 (3): 197–235.

Engle, Robert F. 1982. "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation." *Econometrica* 50 (4): 987–1007.

Keenan, Daniel MacRae. 1985. "A Tukey Nonadditivity-Type Test for Time Series Nonlinearity." *Biometrika* 72 (1): 39–44.

Mandelbrot, Benoit. 1963. " The Variation of Certain Speculative Prices." *The Journal of Business* 36: 394–94.

McLeod, A. I., and W. K. Li. 1983. "Diagnostic Checking Arma Time Series Models Using Squared-Residual Autocorrelations." *Journal of Time Series Analysis* 4 (4): 269–73.

Peña, Daniel, and Julio Rodríguez. 2002. "A Powerful Portmanteau Test of Lack of Fit for Time Series." *Journal of the American Statistical Association* 97 (458): 601–10.

———. 2006. "The Log of the Determinant of the Autocorrelation Matrix for Testing Goodness of Fit in Time Series." *Journal of Statistical Planning and Inference* 136 (8): 2706–18.

Ramsey, J. B. 1969. "Tests for Specification Errors in Classical Linear Least-Squares Regression Analysis." *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* 31 (2): 350–71.