

# Econométrie de la finance

## Chapitre 3 : Les modèles non linéaires univariés

Mohamed Essaied Hamrita

Octobre 2021

### Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Le modèle TAR</b>	<b>1</b>
2.1	Propriétés statistiques . . . . .	3
2.2	Estimation du modèle TAR . . . . .	3
2.3	Prévision . . . . .	3
2.4	Application . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Le modèle à changement de régimes Markovien (Markov Switching)</b>	<b>6</b>
3.1	Simulation d'un modèle MS . . . . .	6
3.2	Estimation . . . . .	7
3.3	Exemples . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Modèle à coefficients dynamiques (Time varying coefficients model)</b>	<b>11</b>

## 1 Introduction

- Dans ce chapitre nous introduisons quelques modèles non linéaires univariés et nous discutons leurs propriétés statistiques.
- Les modèles introduits sont : le modèle TAR (Threshold AR), le modèle Markov switching (MSM), smooth threshold autoregressive (STAR) models, et time-varying parameter models (TVM)

## 2 Le modèle TAR

- Le modèle TAR est proposé par ([Tong 1978](#)) et largement utilisé depuis la publication de l'article de ([Tong et Lim 1980](#)).
- Nous commençons par un modèle TAR simple à deux régimes, puis nous discutons le modèle TAR à régimes multiples.

- **Définition :** Une série temporelle  $\{X_t\}$  suit un modèle TAR d'ordre  $p$  avec la variable seuil  $X_{t-d}$ , s'il vérifie la relation suivante :

$$X_t = \begin{cases} \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \sigma_1 \varepsilon_t, & \text{si } X_{t-d} \leq r \\ \theta_0 + \sum_{i=1}^p \theta_i X_{t-i} + \sigma_2 \varepsilon_t, & \text{si } X_{t-d} > r \end{cases}$$

avec  $\varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} (0, 1)$ ,  $\phi_i$  et  $\theta_i$  des valeurs réelles telles que  $\phi_i \neq \theta_i$  pour quelques valeurs de  $i$ .  $d$  est entier positif et  $r$  représente la valeur seuil (threshold).

Le modèle TAR à deux régimes peut s'écrire sous la forme suivante :

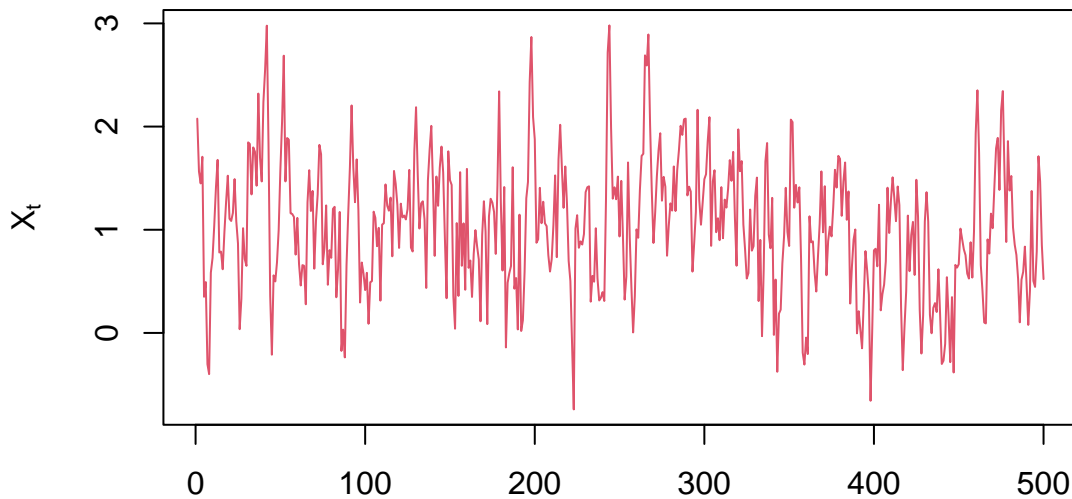
$$X_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \sigma_1 \varepsilon_t + I(X_{t-d} > r) \left( \beta_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i X_{t-i} + \gamma \varepsilon_t \right)$$

où  $I(X_{t-d} > r) = 1$  si  $X_{t-d} > r$  et 0 sinon.  $\beta_i = \theta_i - \phi_i$  pour  $i = 0, 1, \dots, p$  et  $\gamma = \sigma_2 - \sigma_1$

**Exemple :** Soit le processus  $\{X_t\}$  définit par :

$$X_t = \begin{cases} 0.2 + 0.45X_{t-1} + 0.2\varepsilon_t, & \text{si } X_{t-4} \leq -1 \\ 0.4 + 0.6X_{t-1} + 0.5\varepsilon_t, & \text{si } X_{t-4} > 1 \end{cases}$$

```
library(TSA);
set.seed(12345)
x=tar.sim(n=500,Phi1=c(0.2,0.45), Phi2=c(0.4,0.6),p=1,
          d=4,sigma1=0.2,sigma2=0.5, thd=-1)$y
plot(x, type="l", col=2, xlab="", ylab=expression(X[t]))
```



## 2.1 Propriétés statistiques

Considérons le modèle TAR(1) à deux régime :

$$X_t = \begin{cases} \phi_1 X_{t-1} + \sigma_1 \varepsilon_t, & \text{si } X_{t-1} \leq 0 \\ \theta_1 X_{t-1} + \sigma_2 \varepsilon_t, & \text{si } X_{t-1} > 0 \end{cases}$$

La skeleton de ce modèle est

$$f(X_{t-1}) = \begin{cases} \phi_1 X_{t-1}, & \text{si } X_{t-1} \leq 0 \\ \theta_1 X_{t-1}, & \text{si } X_{t-1} > 0 \end{cases}$$

Puisque  $x_0$  est supposée un réel quelconque, alors pour que la série  $X_t$  soit stable, il faut que  $\phi_1 < 1$ ,  $\theta_1 < 1$  et  $\phi_1 \theta_1 < 1$ .

Pour  $d > 1$ , (Chen et Tsay 1991) ont montré que les conditions de stabilité du modèle est :  $\phi_1 < 1$ ,  $\theta_1 < 1$  et  $\phi_1^{s(d)} \theta_1^{t(d)}$  où  $s(d) = t(d) = 1$  si  $d = 1$  et  $s(d) = 1$ ,  $t(d) = 2$  si  $d = 2$ .

## 2.2 Estimation du modèle TAR

Le modèle TAR à deux régime peut être estimé soit par la méthode du maximum de vraisemblance, soit par la méthode des MCO. Ici, on donne la méthode des MCO. La matrice des variables explicatives peut être écrite de la forme suivante :

$$X_t(r) = (X_1' I(X_{t-d} \leq r) \quad X_2' I(X_{t-d} > r))$$

d'où, le modèle peut se réécrire comme :

$$X_t = X_t'(r) \alpha + \varepsilon_t \quad \text{où } \alpha = (\phi' \quad \theta')'$$

Pour  $r$  donnée, on obtient :

$$\hat{\alpha}(r) = (X_t'(r) X_t(r))^{-1} X_t'(r) X_t$$

**Estimation du paramètre  $r$  :** L'estimation du vecteur  $\alpha$  se fait pour  $r$  fixé. Or,  $r$  est généralement inconnu. Donc, ce paramètre sera estimé en faisant varier le paramètre  $r$ , soit une séquence de  $n$  valeurs. Pour chaque valeur de  $r$ , on calcul la somme carré des erreurs du modèle estimé, puis on retient la valeur du  $r$  qui correspond à la somme des carrés des erreurs la plus faible.

**Estimation du paramètre  $d$  :** Dans la pratique, le paramètre  $d$  est inconnu et on doit l'estimer. Ce paramètre sera estimé avec le vecteur  $\alpha$  en imposant  $d \in \{1, 2, \dots, \bar{d}\}$ .

### Test statistique TAR :

Une question importante est posée : quand le modèle TAR est statistiquement significative relativement à un modèle linéaire. Il s'agit de tester :  $H_0 : \phi = \theta$ . Puisque la valeur du seuil  $r$  est inconnue, un tel test devient délicat.

Pour plus amples discussions, voir (Chan 1990) et (Hansen 1997)

## 2.3 Prévision

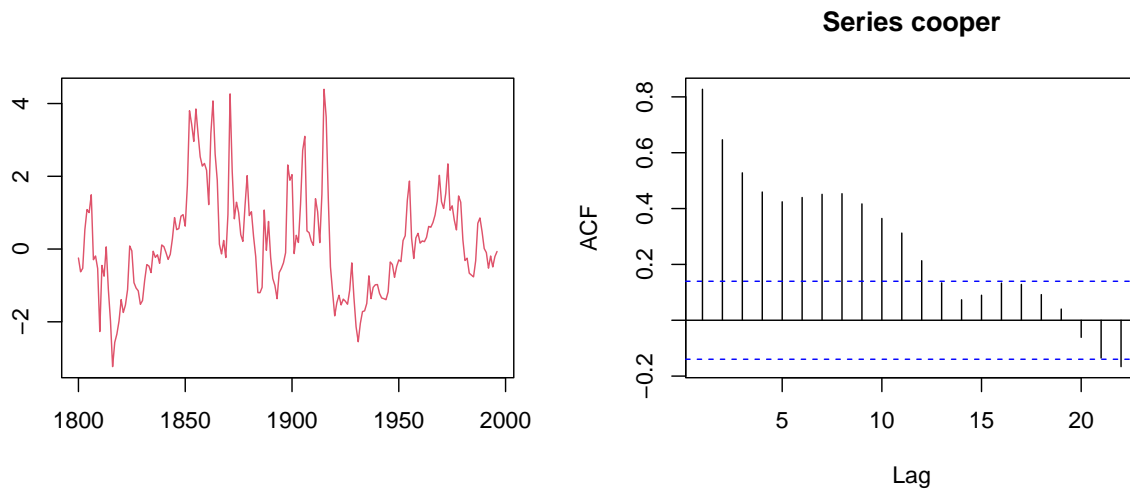
Pour  $d \geq 1$  donné, la prévision à une étape est donnée par :

$$X_{T+1} = \begin{cases} \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{T+1-i}, & e_{T+1} = \sigma_1 \varepsilon_{T+1}, \quad \text{si } X_{T+1-d} \leq r \\ \theta_0 + \sum_{i=1}^p \theta_i X_{T+1-i}, & e_{T+1} = \sigma_2 \varepsilon_{T+1}, \quad \text{si } X_{T+1-d} > r \end{cases}$$

## 2.4 Application

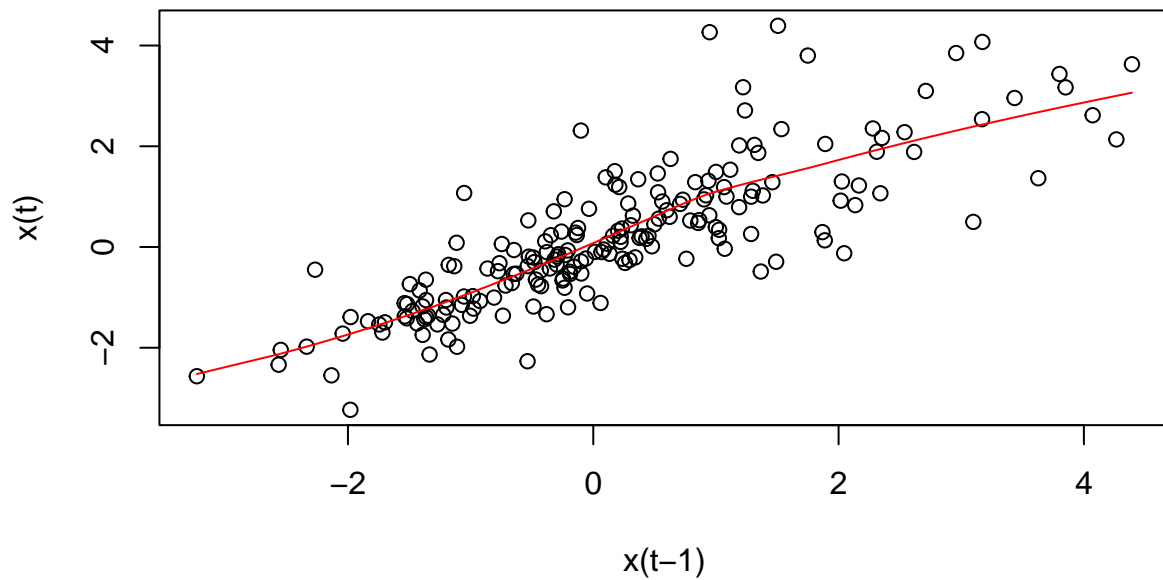
On veut modéliser le prix du Cooper. On considère la série des prix annuels du Cooper allant de 1800 à 1996 (Hyndman et Yang 2018). La série est ajustée après avoir éliminé la tendance. La figure suivante montre l'évolution des prix et la fonction d'auto-corrélation simple.

```
cooper=scan("https://raw.githubusercontent.com/Hamrita/TSFin/main/Chap3/copper.txt")
par(mfrow=c(1,2))
plot(1800:1996,cooper, type="l", col=2, xlab="", ylab="")
acf(cooper)
```



Un premier examen de non linéarité se fait en représentant  $x_t$  en fonction de  $x_{t-1}$

```
y <- cooper[2:197]; x <- cooper[1:196]
m1 <- loess(y~x) ## local smoothing
sx <- sort(x,index=T) ## sorting the threshold variable
ix <- sx$ix ## index for order-statistics
plot(x,y,xlab='x(t-1)',ylab='x(t)')
lines(x[ix],m1$fitted[ix],col="red")
```



On remarque bien que la dépendance entre  $x_t$  et  $x_{t-1}$  est non linéaire.

### Tests de linéarité

```
library(nonlinearTseries)
tests=nonlinearityTest(cooper, F)
tests$TarTest
```

```
$percentiles
[1] 24.72527 75.27473
```

```
$test.statistic
[1] 66.50607
```

```
$p.value
[1] 1.896341e-06
```

On a p-value qui est inférieur à 5%, donc on rejette l'hypothèse nulle de linéarité du modèle.

### Estimation

```
library(tsDyn)
mod=setar(cooper,m=3,d=1,mL=2,mH=2)
ss=summary(mod)
ss$coef
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
const.L	0.11254434	0.06677038	1.6855430	9.351685e-02

```

phiL.1    0.98690602  0.10805163  9.1336526  9.634921e-17
phiL.2   -0.02297053  0.09154768 -0.2509133  8.021508e-01
const.H   0.62130257  0.34080242  1.8230580  6.985800e-02
phiH.1    0.80837079  0.14826866  5.4520680  1.526336e-07
phiH.2   -0.33916240  0.10905935 -3.1098883  2.158115e-03

```

```
ss$AIC
```

```
[1] -94.53252
```

```
ss$thCoef
```

```

th
1.221279

```

### 3 Le modèle à changement de régimes Markovien (Markov Switching)

(Hamilton 1990) introduit *Markov Switching model* d'ordre  $p$ , noté par  $MS(p)$ . Dans le cas de deux régimes, le modèle prend la forme suivante :

$$X_t = \begin{cases} \mu_{1,t} + \varepsilon_{1,t} & \text{si } s_t = 0, t = 1, 2, \dots, t_0 \\ \mu_{2,t} + \varepsilon_{2,t} & \text{si } s_t = 1, t = t_0 + 1, t_0 + 2, \dots, T \end{cases}$$

avec  $\mu_{s_t,t}$  est la moyenne conditionnelle aux temps-régimes, et  $\varepsilon_{s_t,t} \stackrel{iid}{\sim} iid(0, \sigma_{s_t})$  les innovations conditionnelles aux régimes. La variable état  $s_t$  est non observable et on suppose qu'elle est gouvernée par un processus Markovien de premier ordre avec une matrice de transition donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}$$

avec  $p_{ij} = \mathbb{P}(s_t = j | s_{t-1} = i)$  et  $p_{00} + p_{01} = p_{10} + p_{11} = 1$ .

Dans le cas où la moyenne conditionnelle est un processus  $AR(1)$ , on aura la forme suivante :

$$X_t = \begin{cases} \alpha_0 + \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_{1,t} & \text{si } s_t = 0, t = 1, 2, \dots, t_0 \\ \alpha_1 + \phi_2 X_{t-1} + \varepsilon_{2,t} & \text{si } s_t = 1, t = t_0 + 1, t_0 + 2, \dots, T \end{cases}$$

avec  $|\phi_i| < 1$ ,  $i = 1, 2$  et on a  $\mathbb{E}(X_t)$  est égale à  $\alpha_0/(1 - \phi_1)$  si  $s_t = 0$  et à  $\alpha_1/(1 - \phi_2)$  si  $s_t = 1$ .

#### 3.1 Simulation d'un modèle MS

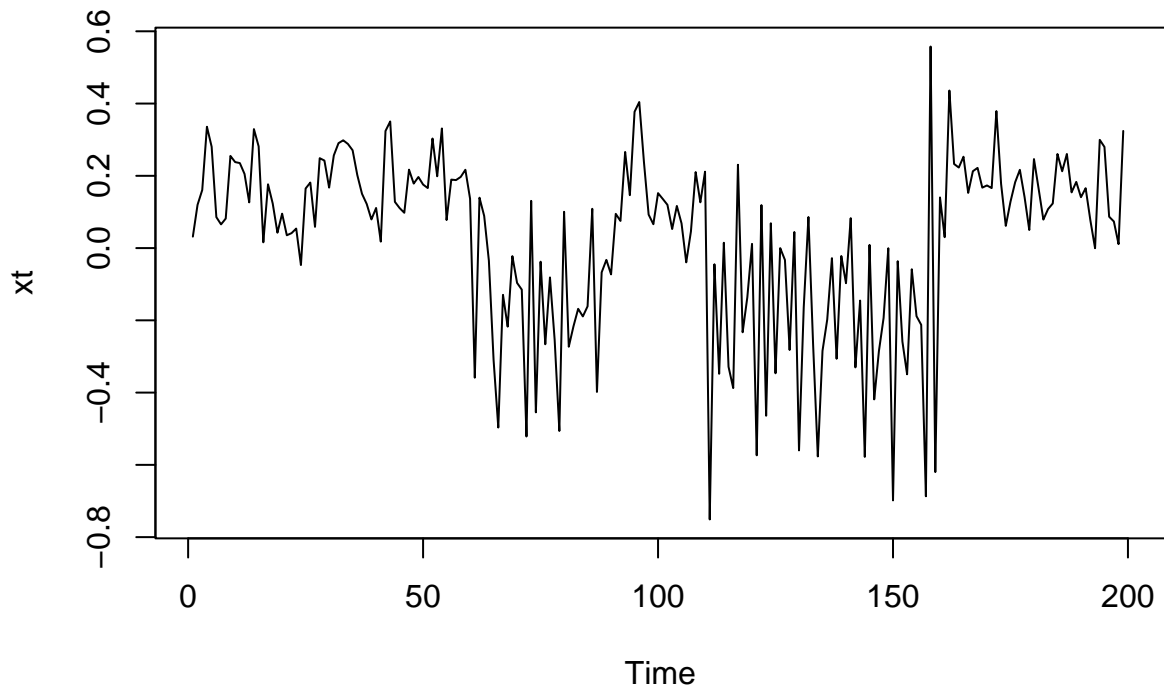
Soit le modèle suivant :

$$X_t = \begin{cases} 0.1 + 0.4X_{t-1} + \varepsilon_{1,t} & \text{si } s_t = 0, \varepsilon_1 \sim N(0, 0.1) \\ -0.3 - 0.5X_{t-1} + \varepsilon_{2,t} & \text{si } s_t = 1, \varepsilon_2 \sim N(0, 0.2) \end{cases}$$

```

St=c(rep(0,60),rep(1,30),rep(0,20),rep(1,50),rep(0,40))
n=length(St); sig1=0.1; sig2=0.2
Xt=numeric(n+1)
set.seed(123)
Xt[1]=rnorm(1); e1=rnorm(n,0,sig1); e2=rnorm(n,0,sig2)
for(i in 2:(n+1)){
  if(St[i-1]==0){
    Xt[i]=0.1+0.4*Xt[i-1]+e1[i]
  }else{
    Xt[i]=-0.3-0.5*Xt[i-1]+e2[i]
  }
}
xt=Xt[-1]
plot.ts(xt)

```



### 3.2 Estimation

Les paramètres intéressés dans le modèle  $MS(2)$  avec moyenne conditionnelle suivant un processus  $AR(1)$  sont représentés par le vecteur  $\theta = (\mu_0, \mu_1, \sigma_1, \sigma_2, p_{00}, p_{11})$  dans le cas où la moyenne conditionnelle est supposée constante.

De plus, on suppose que l'inférence de la variable  $s_t$  pourrait prendre la forme suivante :

$$P_{j,t} = \mathbb{P}(s_t = j | \mathcal{I}_t; \theta)$$

où  $\mathcal{J}_t$  représente l'information disponible à l'instant  $t$  et  $i = 0, 1$ . Puis, on déduit la densité conditionnelle de la variable  $X_t$  qui est donnée par

$$f(X_t|s_t = i, \mathcal{J}_{t-1}, \theta) = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_i^2}(X_t - \mu_i)^2\right), \quad i = 0, 1$$

(Hamilton 1990) a montré que la densité conditionnelle de la  $t$ ème observation est

$$f(X_t|\mathcal{J}_{t-1}, \theta) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 p_{ij} P_{j,t} f(X_t|s_t = i, \mathcal{J}_{t-1}, \theta)$$

On en déduit la fonction de vraisemblance

$$l = \sum_{t=1}^T \log\left(f(X_t|\mathcal{J}_{t-1}, \theta)\right)$$

**Remarques :**

- 1) Il y a d'autres méthodes itératives d'estimation telles que la méthode de Markov chain Monte Carlo (MCMC).
- 2) Les erreurs peuvent avoir une variance qui varie conditionnellement en fonction du temps, dans ce cas on parle du modèle GARCH à changement de régimes Markovien.
- 3) Dans ce cours, nous avons présenté l'estimation du modèle le plus simple (à changement de deux régimes), mais dans la pratique, il y a plus que deux régimes et le nombre de changements est généralement est inconnu et, alors doit être estimé.

## 3.3 Exemples

### 3.3.1 Exemple 1

On commence par l'estimation du modèle simulé ci-dessus.

```
dat=data.frame(cbind(xt[-n],xt[-1]))
names(dat)=c("y","x")
lm1=lm(y~x, data=dat)
library(MSWM)
ms1=msmFit(lm1,k=2,sw=c(T,T,T))
summary(ms1)
```

Markov Switching Model

Call: `msmFit(object = lm1, k = 2, sw = c(T, T, T))`

AIC	BIC	logLik
-205.1837	-170.8776	106.5919

Coefficients:

Regime 1

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept) (S)	0.1220	0.0196	6.2245	4.831e-10 ***
x(S)	0.2584	0.0993	2.6022	0.009263 **



```
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
Residual standard error: 0.09499642
Multiple R-squared: 0.08211
```

```
Standardized Residuals:
      Min       Q1       Med       Q3       Max
-0.21158765 -0.02421152 -0.00101418  0.02057716  0.25395619
```

```
Regime 2
```

```
-----
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)(S)  -0.2928     0.0332  -8.8193 < 2.2e-16 ***
x(S)            -0.5446     0.1019  -5.3445 9.067e-08 ***
```

```
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
Residual standard error: 0.2030312
Multiple R-squared: 0.295
```

```
Standardized Residuals:
      Min       Q1       Med       Q3       Max
-0.4826062522  0.0008980523  0.0021054417  0.0147892786  0.5130174374
```

```
Transition probabilities:
      Regime 1  Regime 2
Regime 1 0.97929577 0.03179132
Regime 2 0.02070423 0.96820868
```

### 3.3.2 Exemple 2

Dans l'exemple suivant, on veut étudier la relation entre le nombre de décès des accidents et les conditions climatiques.

Les données du `traffic` contiennent le nombre quotidien de décès dans des accidents de la circulation en Espagne au cours de l'année 2010, la température moyenne quotidienne et la somme quotidienne des précipitations.

```
data(traffic)
head(traffic)
```

```
      Date NDead      Temp  Prec
1 01/01/2010     3  9.273333 109.1
2 02/01/2010     2  8.761798 150.3
3 03/01/2010     3  9.404396 442.1
4 04/01/2010     4 10.340000 700.9
5 05/01/2010     4  9.353846 132.9
6 06/01/2010     4  7.408889 429.2
```

Dans cet exemple, la variable de réponse est une variable de comptage. Pour cette raison, nous ajustons un modèle linéaire généralisé de Poisson.

```
mod1=glm(NDead~Temp+Prec, family="poisson",data=traffic)
m1=msmFit(mod1,k=2,sw=c(TRUE,TRUE,TRUE),family="poisson",
          control=list(parallel=FALSE))
slotNames(m1)
```

```
[1] "family"      "Likelihood" "model"      "Coef"       "seCoef"
[6] "transMat"    "iniProb"    "call"       "k"          "switch"
[11] "p"           "Fit"
```

```
summary(m1)
```

### Markov Switching Model

```
Call: msmFit(object = mod1, k = 2, sw = c(TRUE, TRUE, TRUE), family = "poisson",
  control = list(parallel = FALSE))
```

```
      AIC      BIC    logLik
1713.878 1772.676 -850.9388
```

#### Coefficients:

##### Regime 1

```
-----
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)(S)  1.5659      0.1587   9.867 < 2e-16 ***
Temp(S)         0.0194      0.0080   2.425  0.01531 *
Prec(S)         0.0004      0.0002   2.000  0.04550 *
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

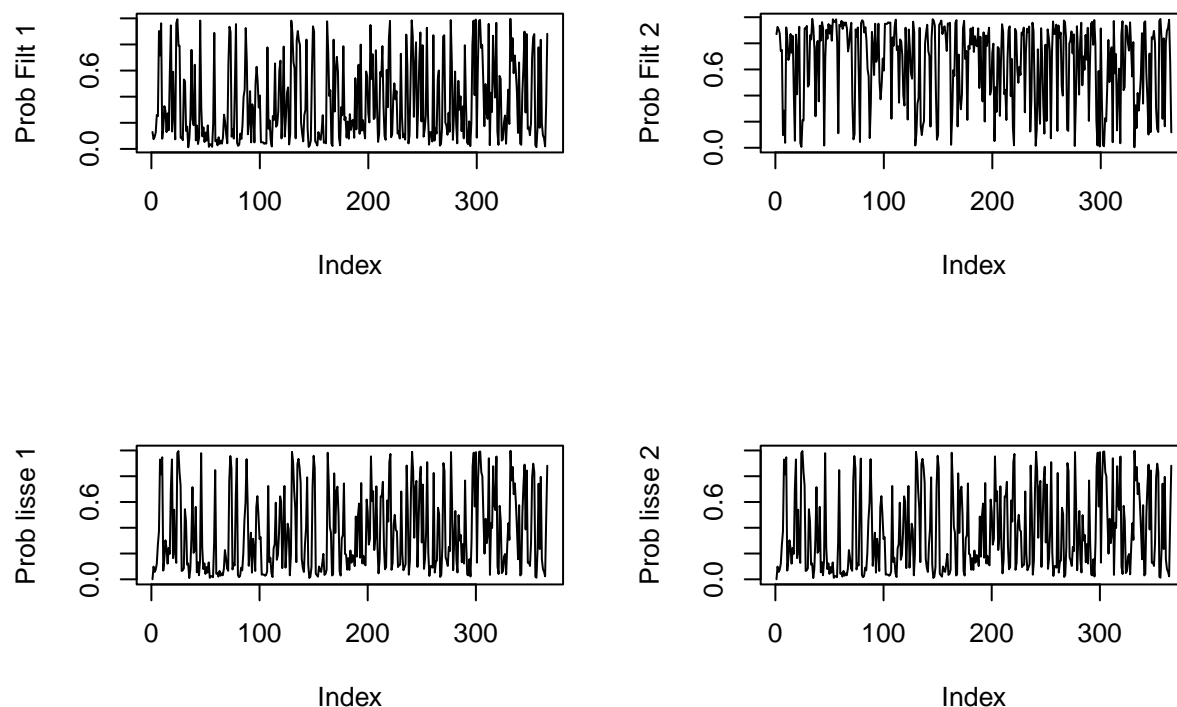
##### Regime 2

```
-----
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)(S)  0.7649      0.1807   4.2330 2.306e-05 ***
Temp(S)         0.0288      0.0083   3.4699 0.0005207 ***
Prec(S)         0.0002      0.0002   1.0000 0.3173105
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

#### Transition probabilities:

```
      Regime 1 Regime 2
Regime 1 0.5086022 0.2712187
Regime 2 0.4913978 0.7287813
```

```
filtProb=m1@Fit@filtProb
smoothProb=m1@Fit@smoProb
par(mfrow=c(2,2))
plot(filtProb[,1], type="l", ylab="Prob Filt 1")
plot(filtProb[,2], type="l", ylab="Prob Filt 2")
plot(smoothProb[,1], type="l", ylab="Prob lisse 1")
plot(smoothProb[,1], type="l", ylab="Prob lisse 2")
```



## 4 Modèle à coefficients dynamiques (Time varying coefficients model)

### Références

- Chan, K. S. 1990. « Testing for Threshold Autoregression ». *The Annals of Statistics* 18 (4) : 1886-94. <https://doi.org/10.1214/aos/1176347886>.
- Chen, Rong, et Ruey S. Tsay. 1991. « On the Ergodicity of Tar(1) Processes ». *The Annals of Applied Probability* 1 (4) : 613-34.
- Hamilton, James D. 1990. « Analysis of time series subject to changes in regime ». *Journal of Econometrics* 45 (1) : 39-70. [https://doi.org/10.1016/0304-4076\(90\)90093-9](https://doi.org/10.1016/0304-4076(90)90093-9).
- Hansen, Bruce. 1997. « Inference in TAR Models ». *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics* 2 (1) : 1-16.
- Hyndman, Rob, et Yangzhuoran Yang. 2018. « tsdl : Time Series Data Library. v0.1.0 ».
- Tong, Howell. 1978. « Pattern Recognition and Signal Processing. NATO ASI Series E : Applied Sc ». In, édité par C Chen. Sijthoff & Noordhoff, Netherlands.
- Tong, Howell, et K. S. Lim. 1980. « Threshold Autoregression, Limit Cycles and Cyclical Data ». *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Methodological)* 42 (3) : 245-68. <https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1980.tb01126.x>.