# Алгоритм ветвей и границ для задачи коммивояжера не является алгоритмом прямого типа

А.Н. Максименко\*

8 ноября 2018 г.

#### Аннотация

В настоящей работе рассматривается понятие линейного разделяющего алгоритма прямого типа, введенное В.А. Бондаренко в 1983 г. До недавнего времени считалось, что класс алгоритмов прямого типа является широким и включает в себя многие классические комбинаторные алгоритмы, в том числе, алгоритм ветвей и границ для задачи коммивояжера, предложенный J.D.C. Little, K.G. Murty, D.W. Sweeney, C. Karel в 1963 г. Мы покажем, что этот алгоритм не является алгоритмом прямого типа.

#### 1 Введение

В 2015–2018 гг. было опубликовано несколько работ [1–5], основными результатами которых являются оценки кликовых чисел графов многогранников, ассоциированных с различными задачами комбинаторной оптимизации. Основной мотивацией для таких оценок является следующий тезис: "It is known that this value characterizes the time complexity in a broad class of algorithms based on linear comparisons" [5]. A именно, речь идет о классе алгоритмов прямого типа, впервые введенном в [6]. В качестве подтверждения этого тезиса в [2,3] говорится о том, что этот класс включает алгоритмы сортировки, жадный алгоритм, динамическое программирование и метод ветвей и границ<sup>2</sup>. Доказательства того, что эти алгоритмы (а также алгоритм Эдмондса для задачи о паросочетаниях) являются алгоритмами прямого типа, впервые были опубликованы в диссертации [7] (см. также монографию [8]). В 2014 г. в [9] было показано, что алгоритм Куна—Манкреса для задачи о назначениях (а вместе с ним и алгоритм Эдмондса) не принадлежит к этому классу. Там же был описан часто используемый на практике способ модификации алгоритмов, выводящий их из класса алгоритмов прямого типа. Ниже мы докажем, что классический алгоритм ветвей и границ для задачи коммивояжера [10, 11] тоже не принадлежит к этому классу. Тем самым будет показано, что теорема 2.6.3 из диссертации [7] (теорема 3.6.6 из многографии [8]) не может быть доказана в оригинальной постановке. Это позволяет сделать вывод о том, что класс алгоритмов прямого типа не является столь широким, как предполагалось ранее.

Текст статьи организован следующим образом. В разделе 2 приводится псевдокод классического алгоритма ветвей и границ для задачи коммивояжера. В разделе 3 вводятся основные понятия концепции алгоритмов прямого типа и два ключевых определения: алгоритма

<sup>\*</sup>Работа выполнена в рамках гос. задания на НИР  $\mathrm{Яр}\Gamma\mathrm{У}$ , шифр  $1.5768.2017/\Pi220$ .

 $<sup>^1</sup>$ «Известно, что эта величина характеризует сложность по времени в широком классе алгоритмов, основанных на линейных сравнениях»

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Но ссылки на источник с соответствующими доказательствами не приводятся.

прямого типа и алгоритма «прямого типа». В разделе 4 показано, что классический алгоритм ветвей и границ для задачи коммивояжера не является алгоритмом прямого типа, а в разделе 5— что он не является алгоритмом «прямого типа».

### 2 Алгоритм ветвей и границ для задачи коммивояжера

Рассмотрим полный орграф G=(V,A) с множеством вершин  $V=[n]=\{1,2,\ldots,n\}$  и дуг  $A=\{(i,j)\mid i,j\in V,\ i\neq j\}$ . Каждой дуге  $(i,j)\in A$  поставлено в соответствие число  $c_{ij}\in \mathbb{Z}$ , называемое длиной дуги. Длиной подмножества  $H\subseteq A$  будем называть суммарную длину входящих в него дуг:  $\mathrm{len}(H)=\sum_{(i,j)\in H}c_{ij}$ . Задача коммивояжера состоит в том, чтобы найти  $H^*\subseteq A$ , являющееся гамильтоновым контуром в G и имеющее минимальную длину  $\mathrm{len}(H^*)$ .

Для удобства дальнейшего обсуждения поместим числа  $c_{ij}$  в матрицу  $C=(c_{ij})$ . Диагональным элементам  $c_{ii}$  припишем максимально возможные длины,  $c_{ii}:=\infty$ , чтобы исключить их влияние на работу алгоритма, и будем предполагать, что  $\infty-b=\infty$  для любого числа  $b\in\mathbb{Z}$ . Через  $\mathrm{I}(M)$  будем обозначать множество индексов строк матрицы M, а через  $\mathrm{J}(M)$  обозначим множество индексов столбцов матрицы M. В начале работы алгоритма  $\mathrm{I}(C)=\mathrm{J}(C)=V$ . Через M(S,T) обозначим подматрицу матрицы M, лежащую на пересечении строк  $S\subseteq\mathrm{I}(M)$  и столбцов  $T\subseteq\mathrm{J}(M)$ .

Сам алгоритм подробно описан в [11, раздел 4.1.6] и [10]. Мы приводим лишь его псевдо-код — алгоритм 1. Отдельно, в алгоритме 2 описан процесс редуцирования строк и столбцов матрицы, а в алгоритме 3 — способ выбора такого нулевого элемента матрицы, при замене которого на бесконечность сумма редукций матрицы максимальна.

# 3 Алгоритмы прямого типа

При изложении основ теории алгоритмов прямого типа мы будем придерживаться [7] (см. также [8]).

С целью унификации изложения матрица длин дуг C далее будет называться  $6e\kappa mopom^3$  6xodnux dannux или просто 6xodom. Решение задачи коммивояжера, т.е. гамильтонов контур  $H \subseteq A$ , будет представляться в виде 0/1-вектора  $\boldsymbol{x} = (x_{ij})$ , имеющего ту же размерность, что и C. Координаты этого вектора  $x_{ij} = 1$ , при  $(i,j) \in H$ , и  $x_{ij} = 0$  иначе. Через X обозначаем множество всех 0/1-векторов  $\boldsymbol{x}$ , соответствующих гамильтоновым контурам в рассматриваемом орграфе G. Таким образом, при фиксированном входе C задача коммивояжера состоит в поиске решения  $\boldsymbol{x}^* \in X$  такого, что  $\langle \boldsymbol{x}^*, C \rangle \leqslant \langle \boldsymbol{x}, C \rangle \ \forall \boldsymbol{x} \in X$ . Далее будем называть такое решение  $\boldsymbol{x}^*$  оптимальным относительно 6xoda C. Следуя [7, определение 1.1.2], совокупность всех таких оптимизационных задач, образованную фиксированным множеством допустимых решений X (в случае задачи коммивояжера, X однозначно определяется числом вершин орграфа G) и всевозможными входными векторами C, будем называть  $3adaue \check{u}$  X. Два допустимых решения  $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$  задачи X называются cmenchumu, если найдется вектор C такой, что они, и только они, являются оптимальными относительно C. Подмножество  $Y \subseteq X$  называется xolognum, если любая пара  $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in Y$  смежна.

Выпуклая оболочка conv(X) называется *многогранником задачи* X. Так как X в задаче коммивояжера является подмножеством вершин единичного куба, то X совпадает с множеством вершин многогранника conv(X). В этой терминологии два решения  $x, y \in X$  смежны

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Элементы матрицы всегда можно выписать в строку или столбец.

```
Алгоритм 1. Метод ветвей и границ для задачи коммивояжера
   Глобальные: гамильтонов контур Hopt с минимальной длиной; его длина lopt. До
                  начала работы алгоритма lopt := \infty.
   Вход
                 : матрица длин М; множество дуг Arcs, обязательных для включения в
                  контур; текущая сумма всех редукций sum. В самом начале работы
                  алгоритма M := C, Arcs := \emptyset, sum := 0.
1 Procedure BranchBound(M, Arcs, sum)
      /* Редуцируем матрицу M
                                                                                             */
      Reduction(M, sum)
2
      if sum \geqslant lopt then
3
       завершить текущий экземпляр процедуры
4
      /* Выбираем оптимальный нулевой элемент матрицы М
      (i, j) := ChooseArc(M)
5
      /* Разбираем случаи, когда контур содержит дугу (i,j)
      if |I| = 3 then
6
         /* Находим единственный гамильтонов контур
                                                                                             */
          H := \texttt{HamiltonCycle}(\mathsf{Arcs} \cup \{(i, j)\})
7
          if len(H) < lopt then
8
             \mathsf{Hopt} \coloneqq H
9
             lopt := len(H)
10
11
      else
          /st Вычеркиваем i-ю строку и j-й столбец
          \mathsf{Mnew} := \mathsf{M}(\mathsf{I}(\mathsf{M}) \setminus \{i\}, \mathsf{J}(\mathsf{M}) \setminus \{j\})
12
          /* Находим запрещенную дугу
          (l,k) := ForbiddenArc(Arcs,(i,j))
13
          \mathsf{Mnew}[l,k] \coloneqq \infty
14
          BranchBound (Mnew, Arcs \cup {(i, j)}, sum)
15
      /* Разбираем случаи, когда контур не содержит дугу (i,j)
                                                                                             */
16
      M[i,j] := \infty
      BranchBound(M, Arcs, sum)
18 Function HamiltonCycle(Arcs)
      Найти гамильтонов контур, содержащий все дуги из Arcs.
20 Function ForbiddenArc (Arcs,(i, j))
      Найти пару вершин l и k, являющихся концом и началом наибольшего (по
       включению) пути в Arcs, содержащего (i, j).
```

```
Алгоритм 2. Редуцирование строк и столбцов матрицы
  Вход
                 : матрица M; текущая сумма всех редукций sum.
  Выход
                 : редуцированная матрица M; измененная sum.
1 Procedure Reduction(M, sum)
      /* Редуцируем строки матрицы М
                                                                                          */
      for i \in I(M) do
\mathbf{2}
         m \coloneqq \infty
3
         /* Находим m = m(i) = \min_{i \in J(M)} M[i,j]
                                                                                          */
          for j \in J(M) do
4
          if m > M[i,j] then m := M[i,j]
5
6
         \mathsf{sum} \coloneqq \mathsf{sum} + m
       for j \in J(M) do M[i,j] := M[i,j] - m
7
      /* Редуцируем столбцы матрицы М
                                                                                          */
      for j \in J(M) do
8
         m := \infty
9
          for i \in I(M) do
10
          if m > M[i,j] then m := M[i,j]
11
         sum := sum + m
12
          for i \in I(M) do M[i,j] := M[i,j] - m
13
 Алгоритм 3. Выбор дуги
                 : матрица М.
   Вхол
                 : дуга (i^*, j^*), при запрещении которой нижняя оценка длины
  Выход
                  гамильтонова контура максимальна.
1 Function ChooseArc(M)
      w \coloneqq -1
2
```

```
for i \in I(M) do
 3
           for j \in J(M) do
 4
               if M[i,j] = 0 then
 5
                  m := \infty
 6
                   /* Находим m = \min_t M[i,t]
                                                                                                     */
                   for t \in J(M) \setminus \{j\} do
 7
                    if m > M[i,t] then m := M[i,t]
 8
                   k \coloneqq \infty
 9
                   /* Находим k = \min_t M[t,j]
                                                                                                     */
                   for t \in I(M) \setminus \{i\} do
10
                   if k > M[t,j] then k := M[t,j]
11
                   /* Сравниваем m+k с текущим рекордом w
                                                                                                     */
                   if m+k>w then
12
                      w \coloneqq m + k
13
                      (i^*, j^*) := (i, j)
14
```

тогда и только тогда, когда смежны соответствующие вершины многогранника  $\operatorname{conv}(X)$  [7]. Известно [12], что все вершины многогранника коммивояжера попарно смежны при n < 6, где n—число вершин орграфа G, в котором требуется найти оптимальный гамильтонов контур.

Алгоритмы прямого типа относятся к классу линейных разделяющих алгоритмов, которые удобно представлять в виде линейных разделяющих деревьев.

**Определение 1** ( [7, определение 1.3.1]). Линейным разделяющим деревом задачи  $X \subset \mathbb{Z}^m$  называется ориентированное дерево, обладающее следующими свойствами:

- а) в каждый узел, за исключением одного, называемого корнем, входит ровно одна дуга; дуг, входящих в корень, нет;
- б) для каждого узла либо имеется две выходящих из него дуги, либо таких дуг нет вообще; в первом случае узел называется внутренним, во втором внешним, или листом;
- в) каждому внутреннему узлу соответствует некоторый вектор  $B \in \mathbb{Z}^m$ ;
- $\Gamma$ ) каждому листу соответствует некоторый элемент из X (нескольким листьям может соответствовать один и тот же элемент множества X);
- д) каждой дуге d соответствует число  $\operatorname{sgn} d$ , равное 1 либо -1; две дуги, выходящие из одного узла, имеют различные значения;
- е) для каждой цепи  $W = B_1 d_1 B_2 d_2 \dots B_k d_k x$ , соединяющей корень и лист (в обозначении цепи перечислены соответствующие ее узлам векторы  $B_i$ ; дуга  $d_i$  выходит из узла  $B_i$ ,  $i \in [k]$ ), и для любого входа C из неравенств  $\langle B_i, C \rangle \operatorname{sgn} d_i \geqslant 0$ ,  $i \in [k]$ , следует, что решение x является оптимальным относительно C.

Таким образом, в рамках теории линейных разделяющих алгоритмов внимание уделяется только тем операциям, где выполняется проверка условий вида  $\langle B,C\rangle\geqslant 0$ , где C- вектор входных данных. Так, например, в строке 5 алгоритма 2 на самом первом шаге цикла проверяется неравенство  $\infty>C_{11}$ ; на втором шаге проверяется условие  $C_{11}>C_{12}$ , и т. д. А в функциях HamiltonCycle и ForbiddenArc, с точки зрения линейных разделяющих алгоритмов, не происходит ничего интересного, так как не выполняются никакие сравнения с элементами вектора входных данных.

Процесс работы линейного разделяющего алгоритма для фиксированного вектора входных данных C представляет собой некоторую цепь  $B_1d_1B_2d_2...B_md_mx$ , соединяющую корень  $B_1$  и некоторый лист x соответствующего линейного разделяющего дерева. Листом в нашем случае является гамильтонов контур (точнее, его характеристический вектор), являющийся оптимальным относительно C.

Пусть B — некоторый внутренний узел в линейном разделяющем дереве рассматриваемого алгоритма, а X — множество всех допустимых решений (множество меток всех листьев). Обозначим через  $X_B$ ,  $X_B \subseteq X$ , множество меток всех листьев этого дерева, которым предшествует узел B, а через  $X_B^+$  и  $X_B^-$  обозначим подмножества множества  $X_B$ , соответствующие двум выходящим из B дугам. Очевидно,  $X_B = X_B^+ \cup X_B^-$ . Обозначим через  $R_B^- = X_B^+ \setminus X_B^-$  множество меток, отбрасываемых при переходе по «отрицательной» дуге. По аналогии определим множество меток  $R_B^+ = X_B^- \setminus X_B^+$ , отбрасываемых при переходе по «положительной» дуге.

**Определение 2** ( [7, определение 1.4.2]). Линейное разделяющее дерево называется деревом *прямого типа*, если для любого внутреннего узла B и для любой клики  $Y \subseteq X$  выполняется неравенство

$$\min\{|R_B^+ \cap Y|, |R_B^- \cap Y|\} \le 1. \tag{1}$$

Непосредственно из определения следует, что высота дерева прямого типа (то есть число сравнений, используемых алгоритмом в худшем случае) для задачи X не может быть меньше, чем  $\omega(X) - 1$ , где  $\omega(X)$  — кликовое число множества X [7, теорема 1.4.3].

Если же мы хотим доказать, что некий алгоритм не является алгоритмом прямого типа, достаточно указать клику Y, состоящую из четырех решений, и узел B такие, что  $|R_B^+ \cap Y| = |R_B^- \cap Y| = 2$ .

Для каждого  $x \in X$  определим конус исходных данных

$$K(\boldsymbol{x}) = \{C \mid \langle \boldsymbol{x}, C \rangle \leqslant \langle \boldsymbol{y}, C \rangle, \ \forall \boldsymbol{y} \in X\}.$$

Т. е. K(x) состоит из всех векторов C таких, что x оптимален относительно C.

**Определение 3** ( [7, определение 1.4.4]). Линейное разделяющее дерево называется деревом *«прямого типа»*, если каждая цепь  $B_1d_1B_2d_2...B_kd_k\boldsymbol{x}$ , соединяющая корень и лист, удовлетворяет условиям:

- (\*) для любого  $\boldsymbol{y} \in X$ , смежного с  $\boldsymbol{x}$ , найдется такой номер  $i \in [k]$ , что условия  $\langle B_i, C \rangle \operatorname{sgn} d_i > 0$  и  $C \in K(\boldsymbol{y})$  несовместны;
- (\*\*) для любого  $i \in [k]$  из несовместности условий

$$\langle B_i, C \rangle \operatorname{sgn} d_i > 0$$
 и  $C \in K(\boldsymbol{y})$ 

для  $\boldsymbol{y}$ , смежного с  $\boldsymbol{x}$ , и из телесности конуса

$$K(\mathbf{x}) \cap \{C \mid \langle B_i, C \rangle \operatorname{sgn} d_i \leq 0\}$$

следует, что ветвь, начинающаяся в узле  $B_i$  с дугой  $-d_i$ , имеет хотя бы один лист, помеченный  $\boldsymbol{x}$ .

Деревья «прямого типа» с деревьями прямого типа объединяет тот факт, что их высота тоже ограничена снизу величиной  $\omega(X) - 1$  [7, теорема 1.4.5].

Чтобы доказать, что алгоритм 1 не является алгоритмом «прямого типа», мы ограничимся проверкой условия (\*) из этого определения. А именно, мы укажем вполне конкретный входной вектор  $C^*$ , который однозначно определит некоторую цепь  $B_1d_1B_2d_2\dots B_kd_k\boldsymbol{x}$ . Далее будет выбран  $\boldsymbol{y}\in X$ , смежный с  $\boldsymbol{x}$ , для которого условия  $\langle B_i,C\rangle\operatorname{sgn} d_i>0$  и  $C\in K(\boldsymbol{y})$  совместны при любом  $i\in [k]$ . Обратим особое внимание на то, что нам нужно будет проверить совместность условий  $\langle B_i,C\rangle\operatorname{sgn} d_i>0$  и  $C\in K(\boldsymbol{y})$  отдельно для каждого  $i\in [k]$ , вне зависимости от результатов других сравнений. То есть для каждого  $i\in [k]$  достаточно указать  $C_i$  такой, что  $\langle B_i,C_i\rangle\operatorname{sgn} d_i>0$  и  $C_i\in K(\boldsymbol{y})$ .

# 4 Алгоритм 1 не является прямым

Рассмотрим задачу коммивояжера в полном орграфе на 5 вершинах. Множество допустимых решений X такой задачи состоит из двадцати четырех 0/1-векторов, соответствующих гамильтоновым контурам в этом орграфе. Все 24 решения попарно смежны [12].

Предположим, что элементы матрицы длин дуг  $C \in \mathbb{Z}^{5 \times 5}$  удовлетворяют следующим условиям:

$$c_{12} \leqslant c_{13}, \quad c_{12} \leqslant c_{14}, \quad c_{12} \leqslant c_{15},$$
 $c_{21} \leqslant c_{23}, \quad c_{21} \leqslant c_{24}, \quad c_{21} \leqslant c_{25},$ 
 $c_{31} > c_{32}, \quad c_{32} > c_{34}, \quad c_{34} > c_{35}.$ 

$$(2)$$

В самом начале работы рассматриваемого алгоритма выполняется процедура редуцирования этой матрицы (алгоритм 2). Мы ограничимся рассмотрением этапа редуцирования строк. В результате последовательных сравнений в первой строке выбирается наименьший элемент (в данном случае  $c_{12}$ ) и вычитается из всех её элементов. Далее выбирается минимальный элемент во второй строке, им оказывается  $c_{21}$ , и минимальный элемент в третьей строке —  $c_{35}$ . После этого алгоритм переходит к проверке неравенства

$$c_{41} > c_{42}$$
 (3)

(сравнение  $\infty > c_{41}$  присутствует в алгоритме исключительно для краткости описания и не несет никакой информации). Соответствующий узел линейного разделяющего дерева алгоритма обозначим B. Ясно, что алгоритм попадает в этот узел дерева, если, и только если для входного вектора C выполняются условия (2).

Рассмотрим характеристические вектора четырех гамильтоновых контуров:

$$m{x} = egin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \ 0 & 0 & 0 & 1 \ 1 & 0 & 0 & 0 \ 0 & 1 & 0 & 0 \ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad m{y} = egin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \ 1 & 0 & 0 & 0 \ 0 & 1 & 0 & 0 \ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ m{z} = egin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \ 0 & 0 & 0 & 1 \ 0 & 1 & 0 & 0 \ 1 & 0 & 0 & 0 \ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad m{w} = egin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \ 0 & 0 & 0 & 0 \ 1 & 0 & 0 & 0 \ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что входные векторы

$$C_{x} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 & 6 \\ 0 & 6 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad C_{y} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 6 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_{w} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 6 \\ 6 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

удовлетворяют условиям (2), а для каждого  $t \in \{x, y, z, w\}$  и для любого  $s \in X \setminus \{t\}$  выполняется неравенство  $\langle t, C_t \rangle = 5 < \langle s, C_t \rangle$ . Следовательно, все четыре вектора входят в множество меток  $X_B$  всех листьев дерева алгоритма, которым предшествует узел B.

Покажем, что z и w входят в множество меток  $R_B^+$ , отбрасываемых при выполнении неравенства (3), а x и y входят в множество меток  $R_B^-$ , отбрасываемых при невыполнении неравенства (3).

Предположим, что для входной матрицы C выполнены условия (2) и неравенство (3). Тогда  $\langle \boldsymbol{z}, C \rangle > \langle \boldsymbol{z'}, C \rangle$  для

$$m{z'} = egin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \ 1 & & 0 & 0 & 0 \ 0 & 0 & & 0 & 1 \ 0 & 1 & 0 & & 0 \ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично,  $\langle \boldsymbol{w}, C \rangle > \langle \boldsymbol{w'}, C \rangle$  для

$$m{w'} = egin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \ 1 & 0 & 0 & 0 \ 0 & 0 & 1 & 0 \ 0 & 1 & 0 & 0 \ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,  $z, w \in R_B^+$ .

Предположим, что для C выполнены условия (2), но не выполнено неравенство (3). Тогда  $\langle \boldsymbol{x}, C \rangle > \langle \boldsymbol{x'}, C \rangle$  для

$$m{x'} = egin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \ 0 & & 0 & 0 & 1 \ 0 & 0 & & 1 & 0 \ 1 & 0 & 0 & & 0 \ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

и  $\langle \boldsymbol{y}, C \rangle > \langle \boldsymbol{y'}, C \rangle$  для

$$m{y'} = egin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \ 0 & 1 & 0 & 0 \ 0 & 0 & 0 & 1 \ 1 & 0 & 0 & 0 \ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

следовательно,  $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{w} \in R_{R}^{+}$ .

Таким образом, условие (1) для данного узла B не выполнено, и алгоритм 1 не является алгоритмом прямого типа.

# 5 Алгоритм 1 не является «прямым»

При анализе алгоритма 1, как линейного разделяющего дерева, нам будут встречаться только неравенства следующего вида:

$$\langle B^+, C \rangle - \langle B^-, C \rangle > 0,$$
 (4)

где  $C \in \mathbb{Z}^{n^2}$  — вектор входных данных,

$$B^+, B^- \in \{0, 1\}^{n^2}, \quad \langle B^+, B^- \rangle = 0 \quad \text{if} \quad \langle B^+, \mathbf{1} \rangle = \langle B^-, \mathbf{1} \rangle > 0,$$
 (5)

1—вектор из единиц. Иными словами, условие (5) означает, что множества единичных координат для  $B^+$  и  $B^-$  равномощны и не пересекаются. Для каждого такого неравенства и для некоторого допустимого решения  $\boldsymbol{y} \in X \subset \{0,1\}^{n^2}$  нам нужно будет проверить, что существует  $C \in K(\boldsymbol{y})$ , для которого это неравенство выполнено. Такой анализ существенно упрощается, если воспользоваться следующим критерием.

**Лемма 1.** Пусть  $\mathbf{y} \in \{0,1\}^{n^2}$  — характеристический вектор некоторого гамильтонова контура в полном орграфе G = ([n], A). Если выполняются условия (5) и  $\langle B^+, \mathbf{y} \rangle \leqslant 2$ , то неравенство (4) и условие  $C \in K(\mathbf{y})$  совместны.

Доказательство. Пусть

$$S = \{(i, j) \in [n]^2 \mid y_{ij} = 1 \text{ if } B_{ij}^+ = 0\}.$$

Из условия  $\langle B^+, \boldsymbol{y} \rangle \leqslant 2$  следует, что  $|S| \geqslant n-2$ . Положим

$$C := \mathbf{4} - B^-$$

и, после этого,  $C_{ij} := 0$  для  $(i,j) \in S$ . Тогда  $\langle B^+, C \rangle = \langle B^+, \mathbf{4} - B^- \rangle = \langle B^+, \mathbf{4} \rangle$  и  $\langle B^-, C \rangle \leqslant \langle B^-, \mathbf{4} - B^- \rangle = \langle B^+, \mathbf{4} \rangle - \langle B^-, B^- \rangle$  (так как  $B^+$  и  $B^-$  удовлетворяют условиям (5)). Следовательно, неравенство (4) для такого C будет выполнено.

Покажем теперь, что  $\langle \boldsymbol{y}, C \rangle < \langle \boldsymbol{x}, C \rangle$  для любого  $\boldsymbol{x} \in X \setminus \boldsymbol{y}$ .

Очевидно,  $\langle \boldsymbol{y}, C \rangle = (n - |S|)4 \leqslant 8$ .

Пусть  $x \in X$ . Заметим, что если  $\langle y, x \rangle \geqslant n-2$ , то x=y, так как любой гамильтонов контур в орграфе на n вершинах однозначно определяется по любым своим n-2 дугам. Следовательно,  $\langle x, C \rangle \geqslant 3 \cdot 3 = 9$  для любого  $x \in X \setminus y$ .

В частности, условия леммы выполнены, если в  $B^+$  не более двух единиц.

Итак, положим n=4 и рассмотрим следующий вектор входных данных (вместо бесконечности будем подставлять пробел):

$$C^* := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Ясно, что единственным оптимальным решением будет вектор

$$m{x} \coloneqq egin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \ 0 & 1 & 0 \ 0 & 0 & 1 \ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и соответствующий ему контур  $\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,1)\}$ . Нетрудно проверяется, что множество всех допустимых решений X состоит из 6 попарно смежных векторов. Положим

$$m{y} \coloneqq egin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \ 0 & 1 & 0 \ 1 & 0 & 0 \ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

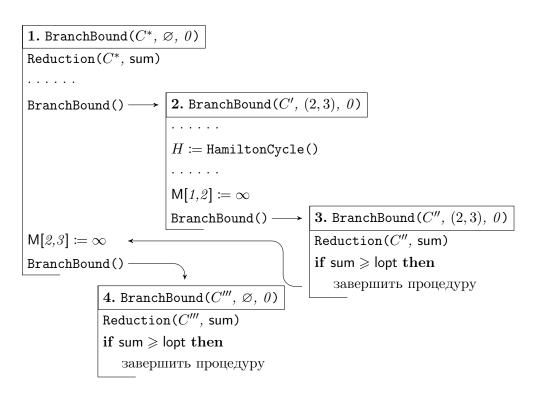


Рис. 1: Общая схема работы алгоритма 1 при входе, задаваемом формулой (6)

Обратим внимание, что y является вторым (после x) по оптимальности относительно  $C^*$ . Именно это обстоятельство во многом упрощает дальнейшую проверку соответствующих сравнений.

В целом схема работы алгоритма при заданном входе  $C^*$  изображена на рис. 1.

Рассмотрим, прежде всего, какие неравенства проверяются при первом входе в процедуру BranchBound с входом  $C^*$ . При редуцировании первой строки матрицы  $C^*$  (строка 5 алгоритма 2) проверяются (и выполняются) неравенства  $\infty > C_{12}$ ,  $C_{13} > C_{12}$  и  $C_{14} > C_{12}$ . Далее мы не будем рассматривать неравенства, в которых сумма (либо разность) элементов исходной матрицы сравнивается с бесконечностью, так как они всегда выполняются и совместны с любым допустимым решением. Заметим, что только что перечисленные неравенства удовлетворяют условиям леммы 1, так как  $\langle B^+, \mathbf{1} \rangle = 1$ . А значит, они совместны с условием  $C \in K(y)$ .

После редуцирования первой строки в её ячейках  $M[1,j], j \in [4]$ , содержатся разности  $C_{1j}-C_{12}$ , а переменная sum принимает значение  $C_{12}$ .

При редуцировании второй строки проверяются неравенства  $C_{21} > C_{23}$  и  $C_{24} > C_{23}$ . Согласно лемме 1, они совместны с условием  $C \in K(\boldsymbol{y})$ .

После редуцирования второй строки в её ячейках  $M[2,j], j \in [4]$ , содержатся разности  $C_{2j}-C_{23}$ , а переменная sum принимает значение  $C_{12}+C_{23}$ .

При редуцировании последних двух строк ситуация полностью аналогична. После завершения редуцирования строк

$$sum = C_{12} + C_{23} + C_{34} + C_{41}.$$

$$\mathsf{M} = \begin{pmatrix} & 0 & C_{13} - C_{12} & C_{14} - C_{12} \\ C_{21} - C_{23} & 0 & C_{24} - C_{23} \\ C_{31} - C_{34} & C_{32} - C_{34} & 0 \\ 0 & C_{42} - C_{41} & C_{43} - C_{41} \end{pmatrix}$$

Далее, при редуцировании первого столбца проверяются неравенства M[2,1] > M[3,1] и M[3,1] > M[4,1]. Нам известно, что  $M[2,1] = C_{21} - C_{23}$ ,  $M[3,1] = C_{31} - C_{34}$ ,  $M[4,1] = C_{41} - C_{41} = 0$ . Следовательно, проверяются неравенства  $C_{21} - C_{23} > C_{31} - C_{34}$  и  $C_{31} - C_{34} > 0$ . Каждое из них удовлетворяет условиям леммы 1.

При редуцировании оставшихся трех столбцов ситуация повторяется. Значение **sum** при редуцировании столбцов не меняется, так как каждый столбец уже содержит нули.

После этого в алгоритме 1 выполняется проверка условия sum  $\geqslant$  lopt. Но lopt  $=\infty$ . Поэтому алгоритм переходит к вычислению функции ChooseArc.

Первым нулевым элементом является M[1,2]. После этого в строке 8 алгоритма 3 выполняются сравнения  $\infty > M[1,3]$  и M[1,3] > M[1,4]. При этом, после предыдущего этапа редукции, имеем  $M[1,3] = C_{13} - C_{12}$  и  $M[1,4] = C_{14} - C_{12}$ . Очевидно, неравенство  $C_{13} - C_{12} > C_{14} - C_{12}$  удовлетворяет условиям леммы 1. На этом шаге выполняется присвоение  $m \coloneqq C_{14} - C_{12}$ . Далее, в строке 11 алгоритма 3 выполняются сравнения  $\infty > M[3,2]$  и M[3,2] > M[4,2]. При этом  $M[3,2] = C_{32} - C_{34}$  и  $M[4,2] = C_{42} - C_{41}$ . Условия леммы 1 снова выполнены. На этом шаге выполняется присвоение  $k \coloneqq C_{42} - C_{41}$ . Далее выполняется сравнение m+k>-1 или, что то же самое,  $C_{14} - C_{12} + C_{42} - C_{41} > -1$ . Очевидно, это неравенство совместимо с условием  $C \in K(\boldsymbol{y})$ . В переменную w заносится значение выражения  $C_{14} - C_{12} + C_{42} - C_{41}$ .

Второй нулевой элемент — M[2,3]. Действуя по аналогии, перечислим только нетривиальные сравнения. Неравенство  $M[2,1] \leq M[2,4]$  или  $C_{21}-C_{23} \leq C_{24}-C_{23}$ , очевидно, совместимо с условием  $C \in K(\boldsymbol{y})$ . Неравенство  $M[1,3] \leq M[4,3]$  тоже совместимо. Далее, в строке 12 проверяется неравенство m+k>w или, с учетом предыдущих действий,

$$C_{21} - C_{23} + C_{13} - C_{12} > C_{14} - C_{12} + C_{42} - C_{41}$$
.

Очевидно, оно удовлетворяет условиям леммы 1. После этого шага

$$w = C_{21} - C_{23} + C_{13} - C_{12}$$
.

Третий нулевой элемент — M[3,4]. Неравенство M[3,1] < M[3,2] или  $C_{31} - C_{34} < C_{32} - C_{34}$ , очевидно, совместимо с условием  $C \in K(\boldsymbol{y})$ . Неравенство M[1,4] < M[2,4] тоже совместимо. Условие m+k < w имеет вид

$$C_{14} - C_{12} + C_{31} - C_{34} < C_{21} - C_{23} + C_{13} - C_{12}$$

и тоже совместимо с условием  $C \in K(y)$ .

Четвертый нулевой элемент — M[4,1]. Легко проверить, что M[4,2] < M[4,3] и M[3,1] < M[2,1] совместимы с условием  $C \in K(y)$ . Условие m+k < w имеет вид

$$C_{31} - C_{34} + C_{42} - C_{41} < C_{21} - C_{23} + C_{13} - C_{12}$$

и тоже совместимо.

В данный момент мы все еще находимся в первом экземпляре процедуры BranchBound. После описанного выше выполнения функции ChooseArc выбирается дуга (i,j) = (2,3) (сумма m+k для нее оказалась наибольшей), из матрицы M вычеркиваются 2-я строка и 3-й столбец, а дуга (3,2) становится запрещенной. На вход второго экземпляра процедуры

BranchBound подается матрица

$$C' \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Пустая строка и пустой столбец оставлены для удобства чтения.) Ясно, что при её редуцировании ничего нового не происходит, так как каждая строка и каждый столбец содержат нули. При вызове функции ChooseArc в строке 12 выполняются следующие сравнения типа m+k>w.

$$C_{14} - C_{12} + C_{42} - C_{41} > -1.$$

Очевидно, это неравенство совместимо с условием  $C \in K(y)$ . Далее, выполняется неравенство

$$C_{31} - C_{34} + C_{14} - C_{12} \le C_{14} - C_{12} + C_{42} - C_{41},$$

которое удовлетворяет условиям леммы 1. Следующее сравнение

$$C_{31} - C_{34} + C_{42} - C_{41} \leqslant C_{14} - C_{12} + C_{42} - C_{41}$$

тоже совместимо с  $C \in K(y)$ .

Итак, после вызова функции ChooseArc во втором экземпляре BranchBound, выбирается дуга (1,2). Гамильтонов цикл с дугами (2,3) и (1,2) определяется однозначно. Выполняется присвоение

lopt := 
$$C_{12} + C_{23} + C_{34} + C_{41}$$
.

После этого алгоритм переходит к рассмотрению случаев, когда контур содержит дугу (2,3), но не содержит (1,2). Запускается третий экземпляр BranchBound с матрицей

$$C'' \coloneqq \begin{pmatrix} & & 1 \\ 1 & & 0 \\ 0 & 1 & \end{pmatrix}$$

При редуцировании две единицы заменяются нулями. Никакие «отбрасывающие» сравнения не выполняются. Значение переменной sum увеличивается на  $M[1,4] = C_{14} - C_{12}$  и на  $M[4,2] = C_{42} - C_{41}$ . Текущий экземпляр процедуры завершается в строке 3 после проверки неравенства sum  $\geqslant$  lopt:

$$(C_{14} - C_{12}) + (C_{42} - C_{41}) > 0.$$

Заметим, что допустимое решение y полностью отбраковывается алгоритмом именно на этом шаге (с учетом ранее проверенного неравенства  $C_{31} > C_{34}$ ). Тем не менее, это неравенство удовлетворяет условиям леммы 1 и, следовательно, совместно с условием  $C \in K(y)$ .

Вместе с третьим экземпляром процедуры **BranchBound** завершается и второй её экземпляр. Алгоритм переходит к выполнению предпоследней строки в первом экземпляре. В этом экземпляре

$$sum = C_{12} + C_{23} + C_{34} + C_{41}$$
.

Для разбора случаев, когда контур не содержит дугу (2,3) вызывается четвертый экземпляр процедуры с матрицей

$$C''' \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

При редуцировании второй строки выполняется сравнение  $M[2,1] \leq M[2,4]$ . При редуцировании третьего столбца —  $M[1,3] \leq M[4,3]$ . Очевидно, ни то ни другое не отбрасывают целиком конус K(y). Значение sum увеличивается на  $(C_{21} - C_{23}) + (C_{13} - C_{12})$ .

И, наконец, сравнение sum ≥ lopt завершает этот четвертый экземпляр процедуры и вообще весь алгоритм. Это сравнение имеет вид

$$(C_{21} - C_{23}) + (C_{13} - C_{12}) \ge 0$$

и тоже совместимо с условием  $C \in K(y)$ .

Итак, условие (\*) из определения 3 не выполнено для этого алгоритма.

### Список литературы

- [1] Бондаренко В. А., Николаев А. В., Шовгенов Д. А. Полиэдральные графы задач об остовных деревьях при дополнительных ограничениях // Моделирование и анализ информационных систем. 2015, 22(4), 453–463.
- [2] Bondarenko V., Nikolaev A. On graphs of the cone decompositions for the min-cut and max-cut problems // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2016, Article ID 7863650.
- [3] Bondarenko V., Nikolaev A. Some properties of the skeleton of the pyramidal tours polytope // Electronic Notes in Discrete Mathematics. 2017, 61, 131–137.
- [4] Бондаренко В. А., Николаев А. В., Шовгенов Д. А. Полиэдральные характеристики задач о сбалансированном и несбалансированном двудольных подграфах // Моделирование и анализ информационных систем. 2017, 24(2), 141–154.
- [5] Bondarenko V. A., Nikolaev A. V. On the skeleton of the polytope of pyramidal tours // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2018, 12(1), 9–18.
- [6] Бондаренко В. А. Неполиномиальная нижняя оценка сложности задачи коммивояжера в одном классе алгоритмов // Автоматика и телемеханика. 1983, 9, 45–50.
- [7] Бондаренко В. А. Геометрические методы системного анализа в комбинаторной оптимизации: дисс. на соискание уч. ст. д. ф.-м. н. Ярославль, 1993.
- [8] Бондаренко В.А., Максименко А.Н. Геометрические конструкции и сложность в комбинаторной оптимизации. М.: URSS, 2008.
- [9] Максименко А. Н. Характеристики сложности: кликовое число графа многогранника и число прямоугольного покрытия // Моделирование и анализ информационных систем. 2014, 21(5), 116–130.
- [10] Little J.D.C., Murty K.G., Sweeney D.W., Karel C. An algorithm for the traveling salesman problem // Operations research. 1963, 11(6), 972–989.
- [11] Рейнгольд Э. М., Нивергельт Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика: Пер. с англ. М.: Мир, 1980.

[12] Padberg M. W., Rao M. R. The travelling salesman problem and a class of polyhedra of diameter two // Math. Program. 1974, 7(1), 32–45.

Лаборатория «Дискретная и вычислительная геометрия», ЯрГУ им. П.Г. Демидова, ул. Советская 14, Ярославль, 150000. E-mail: maximenko.a.n@gmail.com