جامعة الحسن الثاني بالدار البيضاء
UNIVERSITÉ HASSAN II DE CASABLANCA

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'ARTS ET MÉTIERS
UNIVERSITÉ HASSAN II DE CASABLANCA

Analyse II
Notes de cours
Fonctions de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

Pr. Mohamed LAARAJ

Pr. Samih LAZAIZ

Pr. Youssef MANDYLY

Tableau des matières

Fonctions de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

L'étude des fonctions de plusieurs variables élargit notre compréhension des phénomènes complexes dans divers domaines, de l'économie à la physique en passant par l'ingénierie. Contrairement aux fonctions d'une seule variable, qui décrivent des phénomènes unidimensionnels, les fonctions de plusieurs variables capturent les interactions entre plusieurs paramètres pour modéliser des situations réalistes. Ce chapitre généralise les principaux résultats et définitions qu'on a trouvé pour les fonctions à une variable réelle au cas de plusieurs variables, à savoir, limite, continuité, dérivée, développement limité et extremums, offrant des outils précieux pour analyser et résoudre une gamme étendue de problèmes. En comprenant ces concepts, nous pourrons aborder des défis allant de la prédiction du comportement économique à la modélisation des mouvements dans l'espace tridimensionnel. En somme, l'étude des fonctions de plusieurs variables élargit notre perspective et nous permet d'appréhender la complexité du monde qui nous entoure de manière plus nuancée et précise.

Tableau des matières

Définition 2.1

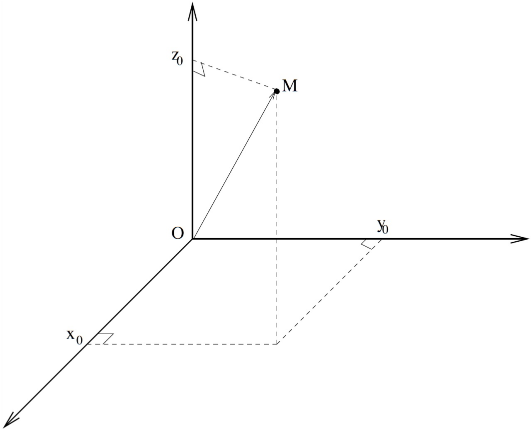
Une fonction de plusieurs variables réelles est une fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, \cdots, x_n) &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Si $z = f(x)$, alors x est dit un **antécédent** de z par f, et z est dite l'image de x par f.

Remarque 2.1

Dans le cas $n = 2$, le triplet $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est un point M ou un vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans un repère orthonormé de $\mathbb{R}^3$ (voir Figure 1.1) d'**abscisse** x_0, d'**ordonnée** y_0 et de **cote** z_0.



Définition 2.2 (Domaine de définition)

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Le domaine de définition de f, noté par D_f, est l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^n$ qui ont une image par f :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, f(x) \text{ existe}\}.$$

Exemples :

1. $f_1(x,y) = \dfrac{x}{y}$, $D_{f_1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y \neq 0\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.
2. $f_2(x,y) = \ln(xy)$,

$$\begin{aligned} D_{f_2} &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, xy > 0\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (x > 0 \text{ et } y > 0) \text{ ou } (x < 0 \text{ et } y < 0)\right\} \\ &= \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \cup \mathbb{R}^{-*} \times \mathbb{R}^{-*}. \end{aligned}$$

3. $f_3(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^3 - xy$, $D_{f_3} = \mathbb{R}^3$.

Définition 2.2 (Domaine de définition)

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Le domaine de définition de f, noté par D_f, est l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^n$ qui ont une image par f :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, f(x) \text{ existe}\}.$$

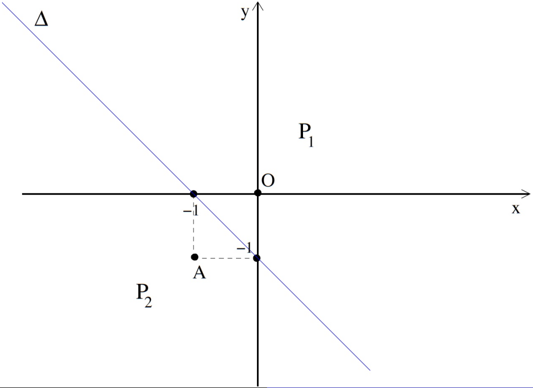
Exemples :

1. $f_1(x,y) = \dfrac{x}{y}$, $D_{f_1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y \neq 0\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.
2. $f_2(x,y) = \ln(xy)$,
$$\begin{aligned} D_{f_2} &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, xy > 0\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (x > 0 \text{ et } y > 0) \text{ ou } (x < 0 \text{ et } y < 0)\right\} \\ &= \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \cup \mathbb{R}^{-*} \times \mathbb{R}^{-*}. \end{aligned}$$
3. $f_3(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^3 - xy$, $D_{f_3} = \mathbb{R}^3$.

Les fonctions citées dans les exemples précédents ont un domaine de définition assez simple. Par exemple, quel est le domaine de définition de la fonction :

$$f(x,y) = \ln(x+y+1),$$

et l'interprétation géométrique de $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x+y+1 > 0\}$. On considère la droite Δ d'équation $x+y+1=0$.



- Le point $O = (0,0) \in \mathrm{P}_1 = \{(x,y) \,/\, x+y+1 > 0\}$; le demi plan supérieur ; car $0+0+1 = 1 > 0$.
- Le point $A = (-1,-1) \in \mathrm{P}_2 = \{(x,y) \,/\, x+y+1 \leq 0\}$; le demi plan inférieur ; car $-1-1+1 = -1 < 0$.

Donc, $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x+y+1 > 0\right\} = \mathrm{P}_1$.

Définition 2.3

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de n variables. On appelle graphe de f le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \,/\, x \in D_f\}.$$

Cas particuliers :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, G_f est un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ et sa représentation graphique est une courbe dans le plan.
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, G_f est un sous ensemble de $\mathbb{R}^3$ et sa représentation graphique est une surface dans l'espace.

- Le point $O = (0,0) \in \mathrm{P}_1 = \{(x,y)\,/\; x+y+1>0\}$; le demi plan supérieur ; car $0+0+1=1>0$.
- Le point $A = (-1,-1) \in \mathrm{P}_2 = \{(x,y)\,/\; x+y+1 \leq 0\}$; le demi plan inférieur ; car $-1-1+1=-1<0$.

Donc, $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\; x+y+1>0\right\} = \mathrm{P}_1$.

Définition 2.3

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de n variables. On appelle graphe de f le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\,/\; x \in D_f\}.$$

Cas particuliers :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, G_f est un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ et sa représentation graphique est une courbe dans le plan.
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, G_f est un sous ensemble de $\mathbb{R}^3$ et sa représentation graphique est une surface dans l'espace.

- Le point $O = (0,0) \in \mathrm{P}_1 = \{(x,y) \,/\, x+y+1>0\}$; le demi plan supérieur ; car $0+0+1=1>0$.
- Le point $A = (-1,-1) \in \mathrm{P}_2 = \{(x,y) \,/\, x+y+1 \leq 0\}$; le demi plan inférieur ; car $-1-1+1=-1<0$.

Donc, $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x+y+1>0\right\} = \mathrm{P}_1$.

Définition 2.3

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de n variables. On appelle graphe de f le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \,/\, x \in D_f\}.$$

Cas particuliers :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, G_f est un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ et sa représentation graphique est une courbe dans le plan.
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, G_f est un sous ensemble de $\mathbb{R}^3$ et sa représentation graphique est une surface dans l'espace.

On considère la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$. Le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R}^2$ et son graphe est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$:

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } z = f(x, y)\}.$$

La représentation graphique de G_f est le paraboloïde d'équation $z = x^2 + y^2$ (voir Figure 1.2)

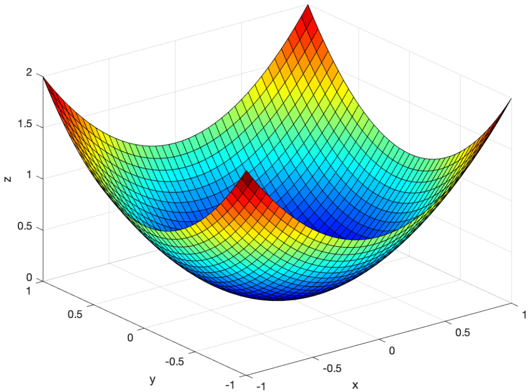


Tableau des matières

Avant de parler de limites ou de continuité pour des fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$, il faut donner un sens précis à "x est proche de y" lorsque x et y sont des points de $\mathbb{R}^n$.
En fait, on sait déjà mesurer la distance entre deux points de $\mathbb{R}^n$. Par exemple pour deux points $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ dans $\mathbb{R}^2$, la longueur du segment $[x, y]$ est donnée par :

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Cette quantité est appelée comme on va le voir ci-dessous distance euclidienne entre x et y. Mais ce n'est la seule façon de mesurer la distance entre deux points.

Définition 2.4

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle norme sur E une application $\mathrm{N} : E \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie les propriétés suivantes :

i) $\forall x \in E$, $\mathrm{N}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (séparation).

ii) $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{N}(\lambda x) = |\lambda|\mathrm{N}(x)$ (homogénéité).

iii) $\forall (x, y) \in E^2$, $\mathrm{N}(x+y) \leq \mathrm{N}(x) + \mathrm{N}(y)$ (inégalité triangulaire).

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{N}}(x) : E^2 &\to \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\mapsto \mathrm{N}(x-y), \end{aligned}$$

Pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on note :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}, \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|,$$

et d'une manière générale : $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

Définition 2.4

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle norme sur E une application $\mathrm{N} : E \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie les propriétés suivantes :

i) $\forall x \in E$, $\mathrm{N}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (séparation).

ii) $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{N}(\lambda x) = |\lambda| \mathrm{N}(x)$ (homogénéité).

iii) $\forall (x, y) \in E^2$, $\mathrm{N}(x + y) \leq \mathrm{N}(x) + \mathrm{N}(y)$ (inégalité triangulaire).

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{N}}(x) : E^2 &\to \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\mapsto \mathrm{N}(x - y), \end{aligned}$$

Pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on note :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}, \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|,$$

et d'une manière générale : $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

Définition 2.5

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient N_1 et N_2 deux normes sur E. On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes s'il existe deux constantes dans $\mathbb{R}_+^*$ k_1 et k_2 telles que :

$$\forall x \in E : k_1 \mathrm{N}_1(x) \leq \mathrm{N}_2(x) \leq k_2 \mathrm{N}_1(x).$$

L'intérêt de savoir que deux normes sont équivalentes est que si deux points sont "proches" pour l'une alors ils sont également "proches" pour l'autre. Cela va simplifier la discussion.

Exemple/Exercice

Montrer que $x \mapsto \|x\|_1$, $x \mapsto \|x\|_2$ et $x \mapsto \|x\|_\infty$ sont équivalentes.

Théorème 2.1 (Admis)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors, toutes normes sur E sont équivalentes.

Définition 2.5

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient N_1 et N_2 deux normes sur E. On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes s'il existe deux constantes dans $\mathbb{R}_+^*$ k_1 et k_2 telles que :

$$\forall x \in E : k_1\mathrm{N}_1(x) \leq \mathrm{N}_2(x) \leq k_2\mathrm{N}_1(x).$$

L'intérêt de savoir que deux normes sont équivalentes est que si deux points sont "proches" pour l'une alors ils sont également "proches" pour l'autre. Cela va simplifier la discussion.

Exemple/Exercice

Montrer que $x \mapsto \|x\|_1$, $x \mapsto \|x\|_2$ et $x \mapsto \|x\|_\infty$ sont équivalentes.

Théorème 2.1 (Admis)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors, toutes normes sur E sont équivalentes.

Définition 2.5

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient N_1 et N_2 deux normes sur E. On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes s'il existe deux constantes dans $\mathbb{R}_+^*$ k_1 et k_2 telles que :

$$\forall x \in E : k_1 \mathrm{N}_1(x) \leq \mathrm{N}_2(x) \leq k_2 \mathrm{N}_1(x).$$

L'intérêt de savoir que deux normes sont équivalentes est que si deux points sont "proches" pour l'une alors ils sont également "proches" pour l'autre. Cela va simplifier la discussion.

Exemple/Exercice

Montrer que $x \mapsto \|x\|_1$, $x \mapsto \|x\|_2$ et $x \mapsto \|x\|_\infty$ sont équivalentes.

Théorème 2.1 (Admis)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors, toutes normes sur E sont équivalentes.

Définition 2.5

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient N_1 et N_2 deux normes sur E. On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes s'il existe deux constantes dans $\mathbb{R}_+^*$ k_1 et k_2 telles que :

$$\forall x \in E : k_1\mathrm{N}_1(x) \leq \mathrm{N}_2(x) \leq k_2\mathrm{N}_1(x).$$

L'intérêt de savoir que deux normes sont équivalentes est que si deux points sont "proches" pour l'une alors ils sont également "proches" pour l'autre. Cela va simplifier la discussion.

Exemple/Exercice

Montrer que $x \mapsto \|x\|_1$, $x \mapsto \|x\|_2$ et $x \mapsto \|x\|_\infty$ sont équivalentes.

Théorème 2.1 (Admis)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors, toutes normes sur E sont équivalentes.

Comme on travaillera en dimension finie, cela signifie que lorsque, on parlera de limites ou continuité, on pourra le faire sans préciser la norme avec laquelle on travaille. Dans la suite, lorsqu'on parlera d'une norme sur $\mathbb{R}^n$, on ne précisera de laquelle il s'agit que quand ce sera nécessaire. Sinon cela signifiera que le résultat énoncé ne dépend pas du choix de la norme.

Tableau des matières

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\|\cdot\|$ une norme sur E.

Définition 2.6

Pour $x \in E$ et $r > 0$, on note :

- $B(x,r) = \{y \in E \ / \ \|x-y\| < r\}$, la boule ouverte de centre x et de rayon r.
- $\bar{B}(x,r) = \{y \in E \ / \ \|x-y\| \leq r\}$, la boule fermée de centre x et de rayon r.
- $S(x,r) = \{y \in E \ / \ \|x-y\| = r\}$, la sphère de centre x et de rayon r.

Définition 2.7

Soit Ω une partie de E. On dit que Ω est ouvert si pour tout $x \in \Omega$ il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset \Omega$. On dit que Ω est fermée si son complémentaire $E \backslash \Omega$ est ouvert.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\|\cdot\|$ une norme sur E.

Définition 2.6

Pour $x \in E$ et $r > 0$, on note :

- $B(x,r) = \{y \in E \ / \ \|x-y\| < r\}$, la boule ouverte de centre x et de rayon r.
- $\bar{B}(x,r) = \{y \in E \ / \ \|x-y\| \leq r\}$, la boule fermée de centre x et de rayon r.
- $S(x,r) = \{y \in E \ / \ \|x-y\| = r\}$, la sphère de centre x et de rayon r.

Définition 2.7

Soit Ω une partie de E. On dit que Ω est ouvert si pour tout $x \in \Omega$ il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset \Omega$. On dit que Ω est fermée si son complémentaire $E \backslash \Omega$ est ouvert.

Exemples :

1. Une boule ouverte de E est une partie ouverte de E.
2. Une boule fermée ou une sphère de E sont des parties fermées de E.

En effet, soient $x \in E$ et $r > 0$. Soit $y \in B(x, r)$ et on note $\rho = r - \| x - y \| > 0$. Alors, $B(y, \rho) \subset B(x, r)$ car pour tout $z \in B(y, \rho)$ on par l'inégalité triangulaire :

$$\| z - x \| = \| (z - y) + (y - x) \| \leq \| z - y \| + \| y - x \| < \rho + (r - \rho) = r,$$

cela prouve que $B(x, r)$ est une partie ouverte de E.

Définition 2.8

Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{V}$ une partie de $\mathbb{R}^n$. On dit que $\mathcal{V}$ est un voisinage de a s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset \mathcal{V}$.

Exemples :

1. Une boule ouverte de E est une partie ouverte de E.
2. Une boule fermée ou une sphère de E sont des parties fermées de E.

En effet, soient $x \in E$ et $r > 0$. Soit $y \in B(x,r)$ et on note $\rho = r - \| x - y \| > 0$. Alors, $B(y,\rho) \subset B(x,r)$ car pour tout $z \in B(y,\rho)$ on par l'inégalité triangulaire :

$$\| z - x \| = \| (z-y) + (y-x) \| \leq \| z - y \| + \| y - x \| < \rho + (r - \rho) = r,$$

cela prouve que $B(x,r)$ est une partie ouverte de E.

Définition 2.8

Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{V}$ une partie de $\mathbb{R}^n$. On dit que $\mathcal{V}$ est un voisinage de a s'il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset \mathcal{V}$.

Exemples :

1. Une boule ouverte de E est une partie ouverte de E.
2. Une boule fermée ou une sphère de E sont des parties fermées de E.

En effet, soient $x \in E$ et $r > 0$. Soit $y \in B(x,r)$ et on note $\rho = r - \| x - y \| > 0$. Alors, $B(y,\rho) \subset B(x,r)$ car pour tout $z \in B(y,\rho)$ on par l'inégalité triangulaire :

$$\| z - x \| = \| (z-y) + (y-x) \| \leq \| z - y \| + \| y - x \| < \rho + (r - \rho) = r,$$

cela prouve que $B(x,r)$ est une partie ouverte de E.

Définition 2.8

Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{V}$ une partie de $\mathbb{R}^n$. On dit que $\mathcal{V}$ est un voisinage de a s'il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset \mathcal{V}$.

Remarque 2.2

i) Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est voisinage de chacun de ces points.

ii) Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant a est voisinage de a, mais tous les voisinages de a ne sont pas des ouverts.

Définition 2.9

On dit d'une partie A de $\mathbb{R}^n$ qu'elle est bornée s'il existe $R \geq 0$ tel que $A \subset B(0, R)$.

Définition 2.10

On dit d'une partie A de $\mathbb{R}^n$ qu'elle est compacte si elle fermée et bornée.

Mise en garde : Cette définition est propre à la dimension finie.

Remarque 2.2

i) Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est voisinage de chacun de ces points.

ii) Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant a est voisinage de a, mais tous les voisinages de a ne sont pas des ouverts.

Définition 2.9

On dit d'une partie A de $\mathbb{R}^n$ qu'elle est bornée s'il existe $R \geq 0$ tel que $A \subset B(0, R)$.

Définition 2.10

On dit d'une partie A de $\mathbb{R}^n$ qu'elle est compacte si elle fermée et bornée.

Mise en garde : Cette définition est propre à la dimension finie.

Remarque 2.2

i) Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est voisinage de chacun de ces points.

ii) Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant a est voisinage de a, mais tous les voisinages de a ne sont pas des ouverts.

Définition 2.9

On dit d'une partie A de $\mathbb{R}^n$ qu'elle est bornée s'il existe $R \geq 0$ tel que $A \subset B(0, R)$.

Définition 2.10

On dit d'une partie A de $\mathbb{R}^n$ qu'elle est compacte si elle fermée et bornée.

Mise en garde : Cette définition est propre à la dimension finie.

Remarque 2.2

i) Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est voisinage de chacun de ces points.

ii) Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant a est voisinage de a, mais tous les voisinages de a ne sont pas des ouverts.

Définition 2.9

On dit d'une partie A de $\mathbb{R}^n$ qu'elle est bornée s'il existe $R \geq 0$ tel que $A \subset B(0, R)$.

Définition 2.10

On dit d'une partie A de $\mathbb{R}^n$ qu'elle est compacte si elle fermée et bornée.

Mise en garde : Cette définition est propre à la dimension finie.

Tableau des matières

Définition 2.11

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

i) On dit que f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \,/\, \|x - a\| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Dans ce cas, on dit que f tend vers ℓ quand x tend vers a et on écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

ii) On dit que f est continue en a si f est définie sur un voisinage de a ($\mathcal{V}(a) \subset D_f$) et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \,/\, \|x - a\| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Remarque 2.3

Ici la différence essentielle avec les fonctions à une variable c'est qu'on a pas seulement deux manières de s'approcher d'un point a (limite à droite et limite à gauche) mais une infinité de direction. À ce moment là, comme dans le cas d'une seule variable, on dira qu'il y a existence de la limite si quelque soit la direction qu'on suit pour s'approcher du point a on a la même limite (voir l'exemple suivant).

Exemple : Soit f la fonction définie comme suit :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2},$$

f n'admet pas de limite en $(0, 0)$. En effet, en calculant la limite de f suivant la direction $y = x$, on a :

$$\lim_{x\to 0} f(x, x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2},$$

Remarque 2.3

Ici la différence essentielle avec les fonctions à une variable c'est qu'on a pas seulement deux manières de s'approcher d'un point a (limite à droite et limite à gauche) mais une infinité de direction. À ce moment là, comme dans le cas d'une seule variable, on dira qu'il y a existence de la limite si quelque soit la direction qu'on suit pour s'approcher du point a on a la même limite (voir l'exemple suivant).

Exemple : Soit f la fonction définie comme suit :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}, \end{aligned}$$

f n'admet pas de limite en $(0, 0)$. En effet, en calculant la limite de f suivant la direction $y = x$, on a :

$$\lim_{x \to 0} f(x, x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2},$$

en calculant la limite de f suivant la direction $y = 0$, on obtient :

$$\lim_{x \to 0} f(x, 0) = 0.$$

On a alors deux limites différentes suivant deux directions différentes, par conséquent f n'admet pas de limite en $(0, 0)$.
Autrement, pour prouver que la fonction f n'admet pas de limite en $(0, 0)$, on peut utiliser la méthode des chemins encore une fois.
Considérons la suite de points $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ avec $n \in \mathbb{N}$. Alors, quand n tend vers l'infini, (x_n, y_n) tend vers $(0, 0)$. Calculons maintenant la limite de $f(x_n, y_n)$ lorsque n tend vers l'infini :

$$\lim_{n \to \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Maintenant, considérons la suite de points $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right)$ avec $n \in \mathbb{N}$. Encore une fois, lorsque n tend vers l'infini, (x_n, y_n) tend vers $(0,0)$. Calculons la limite de $f(x_n, y_n)$ lorsque n tend vers l'infini :

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(-\frac{1}{n}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Puisque les limites obtenues en prenant deux chemins différents vers $(0,0)$ sont différentes $\left(\frac{1}{2} \text{ et } -\frac{1}{2}\right)$, alors la limite de $f(x,y)$ en $(0,0)$ n'existe pas.

Remarque 2.4

Les propriétés et les règles de limite et continuité d'une fonction d'une seule variable reste valable pour les fonctions de plusieurs variables.

Maintenant, considérons la suite de points $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right)$ avec $n \in \mathbb{N}$. Encore une fois, lorsque n tend vers l'infini, (x_n, y_n) tend vers $(0,0)$. Calculons la limite de $f(x_n, y_n)$ lorsque n tend vers l'infini :

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(-\frac{1}{n}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Puisque les limites obtenues en prenant deux chemins différents vers $(0,0)$ sont différentes $\left(\frac{1}{2} \text{ et } -\frac{1}{2}\right)$, alors la limite de $f(x,y)$ en $(0,0)$ n'existe pas.

Remarque 2.4

Les propriétés et les règles de limite et continuité d'une fonction d'une seule variable reste valable pour les fonctions de plusieurs variables.

Définition 2.12

i) On dit que f tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) quand x tend vers a si :

$$\forall A > 0,\ \exists \eta > 0 \,/\, \|x - a\| < \eta \Rightarrow f(x) > A \,(\text{resp. } f(x) < -A).$$

ii) On dit que f tend vers ℓ quand $\|x\|$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0 \,/\ \|x\| > \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

iii) On dit que f tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) quand $\|x\|$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A > 0,\ \exists \eta > 0 \,/\ \|x\| > \eta \Rightarrow f(x) > A \,(\text{resp. } f(x) < -A).$$

Sur le plan pratique, les définitions citées ci-dessous sont rarement utilisées. On utilise souvent les règles suivantes :

Définition 2.12

i) On dit que f tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) quand x tend vers a si :

$$\forall A > 0,\ \exists \eta > 0 \,/\, \|x - a\| < \eta \Rightarrow f(x) > A \,(\text{resp. } f(x) < -A).$$

ii) On dit que f tend vers ℓ quand $\|x\|$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0 \,/\ \|x\| > \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

iii) On dit que f tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) quand $\|x\|$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A > 0,\ \exists \eta > 0 \,/\ \|x\| > \eta \Rightarrow f(x) > A \,(\text{resp. } f(x) < -A).$$

Sur le plan pratique, les définitions citées ci-dessous sont rarement utilisées. On utilise souvent les règles suivantes :

Proposition 2.1

Soit $\mathcal{V}$ un voisinage de $a \in \mathbb{R}^n$.

i) Si $h(x) \leq f(x) \leq g(x),\ \forall x \in \mathcal{V}\backslash\{a\}$ et $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$, alors :
$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell.$$

ii) Si $|f(x)| \leq g(x),\ \forall x \in \mathcal{V}\backslash\{a\}$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, alors :
$$\lim_{x\to a} f(x) = 0.$$

iii) Si $|f(x) - \ell| \leq g(x),\ \forall x \in \mathcal{V}\backslash\{a\}$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, alors
$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell.$$

iv) Si $f(x) \geq g(x),\ \forall x \in \mathcal{V}\backslash\{a\}$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, alors :
$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty.$$

v) Si $f(x) \leq g(x), \ \forall x \in \mathcal{V} \backslash \{a\}$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

Exemples :

1. La fonction f définies par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

On a $D_f = \mathbb{R}^2$ et f est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ comme composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Reste à voir la continuité de f en $(0,0)$. On a :

$$|f(x,y)| = \left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|x|^3 + |y|^3}{x^2 + y^2}. \qquad (*)$$

Or :

$$|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad |x|^3 \leq (x^2 + y^2)^{3/2},$$

$$|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad |y|^3 \leq (x^2 + y^2)^{3/2}.$$

v) Si $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in \mathcal{V}\backslash\{a\}$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty.$$

Exemples :

1. La fonction f définies par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

On a $D_f = \mathbb{R}^2$ et f est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ comme composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. Reste à voir la continuité de f en $(0,0)$. On a :

$$|f(x,y)| = \left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|x|^3 + |y|^3}{x^2 + y^2}. \qquad (*)$$

Or :

$$|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad |x|^3 \leq (x^2 + y^2)^{3/2},$$

$$|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad |y|^3 \leq (x^2 + y^2)^{3/2}.$$

D'où :

$$|x|^3 + |y|^3 \leq 2(x^2 + y^2)^{3/2}.$$

À partir de la dernière inégalité et de (*), on obtient :

$$|f(x, y)| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2},$$

avec $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$. Par conséquent $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$. Ainsi, f est continue en $(0, 0)$.
En conclusion f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. La fonction f définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Étudions la continuité de f en $(0, 0)$. En utilisant les deux inégalité :

$$|x| \leq |x| + |y| \quad \Rightarrow \quad x^2 \leq (|x| + |y|)^2,$$
$$|y| \leq |x| + |y| \quad \Rightarrow \quad y^2 \leq (|x| + |y|)^2,$$

on obtient :

$$|f(x,y)| \leq \frac{2(|x| + |y|)^2}{|x| + |y|} = 2(|x| + |y|).$$

Or $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (|x| + |y|) = 0$, d'où $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$.
Ainsi, f est continue en $(0,0)$.

3. La fonction f définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Étudions la continuité de f en $(0,0)$. Posant $X = x^2 + y^2$, on a $(x,y) \to (0,0) \Rightarrow X \to 0$. D'où :

$$f(x,y) = \frac{e^X - 1}{X} \text{ et } \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{X\to 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1.$$

Donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq f(0,0)$. Par suite, f est discontinue en $(0,0)$.

4. La fonction f définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Étudions la continuité de f en $(0,0)$. Si on calcule la limite de $f(x,y)$ quand $(x,y) \to (0,0)$ suivant la direction $y=0$, on obtient :

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1 \neq f(0,0).$$

D'où f est discontinue en $(0,0)$.

5. La fonction f définie par :

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2-z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y,z) = (0,0,0), \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^3$. En effet, prouvons que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\eta_\epsilon > 0$ tel que si $\|(x,y,z) - (0,0,0)\| \leq \eta$, alors $|f(x,y,z) - f(0,0,0)| \leq \epsilon$.
Considérons $\epsilon > 0$ donné. Choisissons $\eta_\epsilon = \epsilon$. Par l'inégalité triangulaire, nous avons :

$$\begin{aligned} |f(x,y,z) - f(0,0,0)| &= \left| \frac{x^2 - y^2 - z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - 0 \right| = \frac{|x^2 - y^2 - z^2|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ &\leq \frac{|x^2| + |y^2| + |z^2|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ &\leq \sqrt{x^2+y^2+z^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, $|f(x,y,z) - f(0,0,0)| \leq \|(x,y,z)\|_2$. Puisque $\|(x,y,z)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Donc, $|f(x,y,z) - f(0,0,0)| \leq \epsilon$ lorsque $\|(x,y,z) - (0,0,0)\| \leq \eta_\epsilon = \epsilon$. Ce qui montre que $f(x,y,z)$ est continue en $(0,0,0)$.

Exercice :

Étudier la continuité des fonctions suivantes :

1. $$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
2. $$f(x,y) = \begin{cases} xy\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
3. $$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

Tableau des matières

Tableau des matières

Définition 2.13

Soient $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathcal{V}(a) \subset D_f$. On dit que f admet une dérivée partielles (première) en a par rapport à x_i avec $1 \leq i \leq n$ si la fonction $x_i \in \mathbb{R} \longmapsto f(a_1, \cdots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \cdots, a_n)$ est dérivable en a_i, c'est-à-dire la limite suivante existe :

$$\lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1, \cdots, a_{i-1}, \boldsymbol{x_i}, a_{i+1}, \cdots, a_n) - f(a_1, \cdots, a_n)}{x_i - a_i}.$$

Cette limite est alors noté $f'_{x_i}(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ et se lit dérivée partielle de f par rapport à x_i en a.

Remarque 2.5

Pratiquement, $f'_{x_i}(a)$ se calcule en dérivant f(en a) par rapport à x_i en fixant $x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n$.

Définition 2.13

Soient $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathcal{V}(a) \subset D_f$. On dit que f admet une dérivée partielles (première) en a par rapport à x_i avec $1 \leq i \leq n$ si la fonction $x_i \in \mathbb{R} \longmapsto f(a_1, \cdots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \cdots, a_n)$ est dérivable en a_i, c'est-à-dire la limite suivante existe :

$$\lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1, \cdots, a_{i-1}, \boldsymbol{x_i}, a_{i+1}, \cdots, a_n) - f(a_1, \cdots, a_n)}{x_i - a_i}.$$

Cette limite est alors noté $f'_{x_i}(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ et se lit dérivée partielle de f par rapport à x_i en a.

Remarque 2.5

Pratiquement, $f'_{x_i}(a)$ se calcule en dérivant f(en a) par rapport à x_i en fixant $x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n$.

Exemple : Soit la fonction f définie par : $f(x, y) = x^2y - xy^3$. Calculons les dérivées partielles de f en $(1, 0)$. On a :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy - y^3 & \Rightarrow \quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 - 3xy^2 & \Rightarrow \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 1. \end{cases}$$

On peut aussi calculer les dérivées partielles en utilisant la définition :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x, 0) - f(1, 0)}{x - 1} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{f(1, y) - f(1, 0)}{y - 0} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{y - y^3}{y} = 1. \end{cases}$$

Remarque 2.6

Les règles de dérivation d'une fonction d'une variable reste valable pour calculer les dérivées partielles. Par exemple, on considère la fonction $h(x,y) = \dfrac{e^{xy}}{x^2+y^2}$, $D_h = \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$. Posons $f(x,y) = e^{xy}$ et $g(x,y) = x^2+y^2$. Alors, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$

$$h'_x(x,y) = \frac{f'_x(x,y)g(x,y) - f(x,y)g'_x(x,y)}{\left(g(x,y)\right)^2} = \frac{e^{xy}\left(yx^2+y^3-2x\right)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$h'_y(x,y) = \frac{f'_y(x,y)g(x,y) - f(x,y)g'_y(x,y)}{\left(g(x,y)\right)^2} = \frac{e^{xy}\left(x^3+xy^2-2y\right)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Définition 2.14

On dit que f est différentiable en a si :

i) Les dérivées partielles $f'_{x_i}(a)$ existent pour tout $1 \leq i \leq n$.

ii)
$$\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \nabla f(a)\cdot h}{\|h\|} = 0,$$

avec $\nabla f(a) = (f'_{x_1}(a), \cdots, f'_{x_n}(a))$ appelé **gradient** de f en a et

$$\nabla f(a)\cdot h = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(a) \times h_i,$$

le produit scalaire de $\nabla f(a)$ et $h = (h_1, \cdots, h_n)$.

Définition 2.15

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et A une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$.

i) On dit que f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur A si elle est continue sur A et on note $f \in \mathcal{C}^0(A)$.

ii) On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A si les dérivées partielles de f sont continues sur A et on note $f \in \mathcal{C}^1(A)$.

Proposition 2.2

i) $f \in \mathcal{C}^1(A) \Longrightarrow f \in \mathcal{C}^0(A)$.

ii) f différentiable en $a \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow f$ continue en a.

Exemple :

1. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Définition 2.15

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et A une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$.

i) On dit que f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur A si elle est continue sur A et on note $f \in \mathcal{C}^0(A)$.

ii) On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A si les dérivées partielles de f sont continues sur A et on note $f \in \mathcal{C}^1(A)$.

Proposition 2.2

i) $f \in \mathcal{C}^1(A) \Longrightarrow f \in \mathcal{C}^0(A)$.

ii) f différentiable en $a \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow f$ continue en a.

Exemple :

1. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Définition 2.15

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et A une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$.

i) On dit que f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur A si elle est continue sur A et on note $f \in \mathcal{C}^0(A)$.

ii) On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A si les dérivées partielles de f sont continues sur A et on note $f \in \mathcal{C}^1(A)$.

Proposition 2.2

i) $f \in \mathcal{C}^1(A) \Longrightarrow f \in \mathcal{C}^0(A)$.

ii) f différentiable en $a \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow f$ continue en a.

Exemple :

1. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$D_f = \mathbb{R}^2$ et sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ f est différentiable comme composée de fonctions différentiables sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Étudions la différentiabilité de f en $(0,0)$, on vérifie d'abord la continuité de f en $(0,0)$. Suivant la direction $y = 0$:

$$\lim_{x \to 0} f(x,0) = 1 \neq f(0,0).$$

Donc f n'est pas continue en $(0,0)$. Alors, elle n'est pas différentiable en $(0,0)$.

2. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Étudions la différentiabilité de f en $(0,0)$.

i) L'existence des dérivées partielles :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 1, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = -1. \end{cases}$$

ii) Calculons $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(x,y)$. On a :

$$\varepsilon(x,y) = \frac{f(x,y) - f(0,0) - f'_x(0,0)x - f'_y(0,0)y}{\|(x,y)\|} = \frac{\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} - x + y}{\|(x,y)\|}.$$

Si on choisit $\|(x,y)\| = \|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}$, on obtient :

$$\varepsilon(x,y) = \frac{\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} - x + y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{xy(x-y)}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Selon la direction $y = -x$, on a :

$$\lim_{x\to 0} \varepsilon(x,-x) = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{\sqrt{2}|x|} \neq 0.$$

D'où f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Définitions

3. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   Étudions le différentiabilité de f en $(0,0)$.

   i) L'existence des dérivées partielles :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \displaystyle\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{x^4}{x^3} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \displaystyle\lim_{y \to 0} \dfrac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \to 0} \dfrac{y^4}{y^3} = 0. \end{cases}$$

   ii) Calculons $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \varepsilon(x,y)$. On a :

$$\varepsilon(x,y) = \frac{f(x,y) - f(0,0) - f'_x(0,0)x - f'_y(0,0)y}{\|(x,y)\|} = \frac{\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

   En utilisant les deux inégalités :

$$x^4 \leq (x^2+y^2)^2 \text{ et } y^4 \leq (x^2+y^2)^2,$$

   on obtient :

$$|\varepsilon(x,y)| \leq 2\sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow 0 \text{ quand } (x,y) \text{ tend vers } 0.$$

   D'où f est différentiable en $(0,0)$.

Exercice :

Étudier la différentiabilité de la fonction f donnée par :

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2\ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Tableau des matières

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. L'équation du plan tangent au point $(a, b, f(a, b))$ du graphe G_f (la surface d'équation $z = f(x, y)$) est donnée par :

$$z = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b).$$

Soit $f(x,y) = x^2 + y^2$ et $(a,b) = (-1,1)$. L'équation du plan tangent en $(a,b,f(a,b))$ à G_f est (voir figure 5.3) :

$$z = 2 - 2(x+1) + 2(y-1) = -2x + 2y - 2.$$

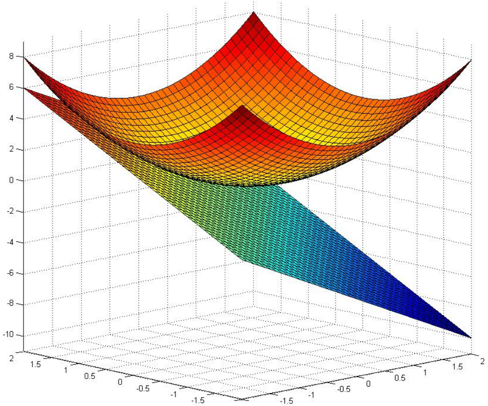


FIGURE 5.3 – Plan tangent.

Tableau des matières

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Il existe alors une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$f(a+h) = f(a) + \nabla f(a) \cdot h + \|h\| \, \varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Exemple : Déterminons le DL d'ordre 1 de $f(x,y) = x^3 + y^3 \cos(x)$ au voisinage de $(\pi, 1)$. On a

$$\begin{cases} f(\pi,1) = \pi^3 - 1, & & \\ f'_x(x,y) = 3x^2 - y^3 \sin(x) & \Longrightarrow & f'_x(\pi,1) = 3\pi^2, \\ f'_y(x,y) = 3y^2 \cos(x) & \Longrightarrow & f'_y(\pi,1) = -3, \end{cases}$$

D'où :

$$f(\pi+h, 1+k) = \pi^3 - 1 + 3\pi^2 \, h - 3\, k + \sqrt{h^2 + k^2}\, \varepsilon(h,k),$$

avec $\displaystyle\lim_{(h,k) \to (0,0)} \varepsilon(h,k) = 0.$

Le DL c'est un outil principal d'approximation locale des fonctions. On peut approcher $f(a+h)$ avec h assez petit à l'aide de la formule :

$$f(a+h) \approx f(a) + \nabla f(a) \cdot h.$$

Exemple : Soit $f(x,y) = x^2 - 3x^3y^2 + 4x - 2y^3 + 6$. Calculons une approximation de $f(-2.02, 3.01)$ en utilisant le DL d'ordre 1 de f au voisinage de $(-2,3)$. On a :

$$\begin{cases} f(-2,3) = 164, & \\ f'_x(x,y) = 2x - 9x^2y^2 + 4 & \Longrightarrow \quad f'_x(-2,3) = -324, \\ f'_y(x,y) = -6x^3y - 6y^2 & \Longrightarrow \quad f'_y(-2,3) = 90. \end{cases}$$

D'où le DL d'ordre 1 est donné par :

$$f(-2+h, 3+k) = 164 - 324h + 90k + \sqrt{h^2+k^2}\,\varepsilon(h,k),$$

avec $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$, et l'approximation d'ordre 1 de $f(-2.02, 3.01)$ est :

$$f(-2.02, 3.01) \approx 164 - 324 \times (-0.02) + 90 \times 0.01 = 171,38.$$

Si on compare cette approximation avec la valeur exacte de $f(-2.02, 3.01) = 171.4897$. On remarque que la différence entre la valeur approchée et la valeur exacte est 0.1097. On peut améliorer ce résultat en utilisant le développement d'ordre 2.

Tableau des matières

Dérivées partielles d'ordre supérieur

Dans la section précédente, on a définit les dérivées partielles d'ordre 1 de $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. En posant $\phi(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ avec $i = 1, \cdots, n$ fixé. ϕ est aussi une fonction de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si ϕ à son tour une dérivée partielle par rapport à la variable x_j, $1 \leq j \leq n$. On note alors :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x), \ \ \forall 1 \leq i, j \leq n.$$

On l'appelle dérivée partielle seconde ou d'ordre 2 de f. Si $i = j$ on note $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$ au lieu de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(x)$.

Notation : On note aussi $f''_{x_i x_j}(x)$.

Remarque 2.7

En général, pour $i \neq j$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x).$$

Dérivées partielles d'ordre supérieur

Dans la section précédente, on a définit les dérivées partielles d'ordre 1 de $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. En posant $\phi(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ avec $i = 1, \cdots, n$ fixé. ϕ est aussi une fonction de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si ϕ à son tour une dérivée partielle par rapport à la variable x_j, $1 \leq j \leq n$. On note alors :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x), \ \ \forall 1 \leq i, j \leq n.$$

On l'appelle dérivée partielle seconde ou d'ordre 2 de f. Si $i = j$ on note $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$ au lieu de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(x)$.

Notation : On note aussi $f''_{x_i x_j}(x)$.

Remarque 2.7

En général, pour $i \neq j$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x).$$

D'où le théorème suivant :

Théorème 2.2 (Théorème de Schwarz)

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Si les dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existent et sont continues en $a \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

De la même manière que dans le début de cette section, on peut définir les dérivées partielles d'ordre 3 : $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}$, $1 \leq i, j, k \leq n$ et les dérivées partielles d'ordre supérieur.

Dérivées partielles d'ordre supérieur

D'où le théorème suivant :

Théorème 2.2 (Théorème de Schwarz)

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Si les dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existent et sont continues en $a \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

De la même manière que dans le début de cette section, on peut définir les dérivées partielles d'ordre 3 : $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}$, $1 \leq i, j, k \leq n$ et les dérivées partielles d'ordre supérieur.

Définition 2.16

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $U \subset D_f$ un ouvert non vide.

i) On dit que f est de classe $\mathcal{C}^m$ sur U et on note $f \in \mathcal{C}^m(U)$ si les dérivées partielles d'ordre m : $\dfrac{\partial^m f}{\partial_{x_{i_1}} \cdots \partial_{x_{i_m}}}$ existent et sont continus sur U.

ii) On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U et on note $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ si $f \in \mathcal{C}^m(U)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Proposition 2.3

$$\mathcal{C}^\infty(U) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^{m+1}(U) \subset \mathcal{C}^m(U) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^1(U) \subset \mathcal{C}^0(U).$$

Exemple :

1. Toute fonction polynomiale de n variables est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.
2. Toute fonction rationnelle de n variables est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition.

Définition 2.16

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $U \subset D_f$ un ouvert non vide.

i) On dit que f est de classe $\mathcal{C}^m$ sur U et on note $f \in \mathcal{C}^m(U)$ si les dérivées partielles d'ordre m : $\dfrac{\partial^m f}{\partial_{x_{i_1}} \cdots \partial_{x_{i_m}}}$ existent et sont continus sur U.

ii) On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U et on note $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ si $f \in \mathcal{C}^m(U)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Proposition 2.3

$$\mathcal{C}^\infty(U) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^{m+1}(U) \subset \mathcal{C}^m(U) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^1(U) \subset \mathcal{C}^0(U).$$

Exemple :

1. Toute fonction polynomiale de n variables est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.
2. Toute fonction rationnelle de n variables est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition.

Définition 2.16

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $U \subset D_f$ un ouvert non vide.

i) On dit que f est de classe $\mathcal{C}^m$ sur U et on note $f \in \mathcal{C}^m(U)$ si les dérivées partielles d'ordre m : $\dfrac{\partial^m f}{\partial_{x_{i_1}} \cdots \partial_{x_{i_m}}}$ existent et sont continus sur U.

ii) On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U et on note $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ si $f \in \mathcal{C}^m(U)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Proposition 2.3

$$\mathcal{C}^\infty(U) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^{m+1}(U) \subset \mathcal{C}^m(U) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^1(U) \subset \mathcal{C}^0(U).$$

Exemple :

1. Toute fonction polynomiale de n variables est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.
2. Toute fonction rationnelle de n variables est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition.

Exemple : Soit la fonction f définie par : $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

f est une fonction rationnelle de 2 variables et son domaine de définition est $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Alors, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D_f. Pour tout $(x,y) \in D_f$ les dérivées partielles d'ordre 1 sont données par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2},$$

et les dérivées partielles d'ordre 2 sont données par :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2x^3y - 6xy^3}{(x^2+y^2)^3},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{-x^4 + 6x^2y^2 - y^4}{(x^2+y^2)^3},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-6x^3y + 2xy^3}{(x^2+y^2)^3}.$$

Tableau des matières

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Il existe alors une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$f(a+h) = f(a) + \nabla f(a) \cdot h + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} h_i^2 f''_{x_i x_i}(a)$$

$$+ \sum_{1 \le i < j \le n} h_i h_j f''_{x_i x_j}(a) + \|h\|^2 \varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Exemple : Reprenons l'exemple du développement limité d'ordre 1. Déterminons le DL d'ordre 2 de f au voisinage de $(-2, 3)$. On a déjà calculé les dérivées partielles d'ordre 1 de f au point $(-2, 3)$. Calculons les dérivées partielles secondes :

$$\begin{cases} f''_{xx}(x,y) = 2 - 18xy^2, \\ f''_{xy}(x,y) = -18x^2y, \\ f''_{yy}(x,y) = -6x^3 - 12y, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f''_{xx}(-2,3) = 326, \\ f''_{xy}(-2,3) = -216, \\ f''_{yy}(-2,3) = 12, \end{cases}$$

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Il existe alors une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$f(a+h) = f(a) + \nabla f(a) \cdot h + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} h_i^2 f''_{x_i x_i}(a)$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j \leq n} h_i h_j f''_{x_i x_j}(a) + \|h\|^2 \varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Exemple : Reprenons l'exemple du développement limité d'ordre 1. Déterminons le DL d'ordre 2 de f au voisinage de $(-2, 3)$. On a déjà calculé les dérivées partielles d'ordre 1 de f au point $(-2, 3)$. Calculons les dérivées partielles secondes :

$$\begin{cases} f''_{xx}(x,y) = 2 - 18xy^2, \\ f''_{xy}(x,y) = -18x^2 y, \\ f''_{yy}(x,y) = -6x^3 - 12y, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f''_{xx}(-2,3) = 326, \\ f''_{xy}(-2,3) = -216, \\ f''_{yy}(-2,3) = 12, \end{cases}$$

D'où le DL d'ordre 2 est donné par :

$$f(-2+h,3+k) = 164-324h+90k+163h^2+6k^2-216\,hk+(h^2+k^2)\,\varepsilon(h,k),$$

avec $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$, et l'approximation d'ordre 2 de $f(-2.02, 3.01)$ est :

$$\begin{aligned} f(-2.02,3.01) &\approx 164 - 324\times(-0.02) + 90\times 0.01 \\ &\quad + 163\times(-0.02)^2 + 6\times(0.01)^2 - 216\times(-0.02)\times 0.01 \\ &= 171.4890. \end{aligned}$$

On remarque qu'on a améliorer l'approximation obtenue dans l'exemple du développement limité d'ordre 1 car la différence entre la valeur exacte et la valeur approchée est $0.0007 = 7.10^{-4}$.

Tableau des matières

Définition 2.17

Soient $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in D_f$. On dit que :

i) f admet un **maximum local** (resp. **global**) en a s'il existe $\mathcal{V}$ voisinage de a tel que :

$$f(x) \leq f(a),\ \forall x \in \mathcal{V} \cap D_f \text{ (resp. } f(x) \leq f(a),\ \forall x \in D_f).$$

ii) f admet un **minimum local** (resp. **global**) en a s'il existe $\mathcal{V}$ voisinage de a tel que :

$$f(x) \geq f(a),\ \forall\, x \in \mathcal{V} \cap D_f \text{ (resp. } f(x) \geq f(a),\ \forall x \in D_f).$$

iii) a est un **extremum** local (resp. global) de f si f admet un minimum ou un maximum local (resp. global) en a.

La question qui se pose, comment déterminer un extremum local ? Une réponse partielle est donnée par la proposition suivante :

Proposition 2.4

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage de a. Si a est un extremum de f, alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, \ \forall i = 1, \cdots, n.$$

Remarque 2.8

La réciproque de cette proposition est en général fausse. Voir par exemple $f(x) = x^3$, on a $f'(0) = 0$ et 0 n'est pas un extremum de f.

Définition 2.18 (Point critique)

Un point qui annule les dérivées partielle de f est appelé point **critique** ou **stationnaire** ou encore **admissible** de f.

La question qui se pose, comment déterminer un extremum local ? Une réponse partielle est donnée par la proposition suivante :

Proposition 2.4

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage de a. Si a est un extremum de f, alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, \ \forall i = 1, \cdots, n.$$

Remarque 2.8

La réciproque de cette proposition est en général fausse. Voir par exemple $f(x) = x^3$, on a $f'(0) = 0$ et 0 n'est pas un extremum de f.

Définition 2.18 (Point critique)

Un point qui annule les dérivées partielle de f est appelé point **critique** ou **stationnaire** ou encore **admissible** de f.

La question qui se pose, comment déterminer un extremum local ? Une réponse partielle est donnée par la proposition suivante :

Proposition 2.4

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un voisinage de a. Si a est un extremum de f, alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, \ \forall i = 1, \cdots, n.$$

Remarque 2.8

La réciproque de cette proposition est en général fausse. Voir par exemple $f(x) = x^3$, on a $f'(0) = 0$ et 0 n'est pas un extremum de f.

Définition 2.18 (Point critique)

Un point qui annule les dérivées partielle de f est appelé point **critique** ou **stationnaire** ou encore **admissible** de f.

Exemple :

1. Soit $f(x,y) = x^2 + y^2$. Le seul point critique de f est $(0,0)$. En effet, soit (x,y) un point critique de f, alors :

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0, \\ f'_y(x,y) = 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x = 0, \\ 2y = 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

   On a $f(x,y) \geq 0 = f(0,0)$, $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Donc, f admet un minimum global en $(0,0)$.

2. Soit $f(x,y) = x^2 - y^2$. On montre facilement que $(0,0)$ est un point critique de f. Mais on sait pas est ce que $f(x,y) \leq f(0,0)$ ou $f(x,y) \geq f(0,0)$ c'est-à-dire est ce que f admet un maximum ou un minimum local en $(0,0)$?
   - suivant la direction $y = 0$, on a $f(x,0) = x^2 \geq 0 = f(0,0)$,
   - suivant la direction $x = 0$, on a $f(0,y) = -y^2 \leq 0 = f(0,0)$.

   Par suite $(0,0)$ n'est pas un extremum de f.

Maintenant comment on peut déterminer facilement est ce que un point critique est un extremum ou non ? Avant de répondre à cette question, on a la définition suivante :

Exemple :

1. Soit $f(x,y)=x^2+y^2$. Le seul point critique de f est $(0,0)$. En effet, soit (x,y) un point critique de f, alors :

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=0, \\ f'_y(x,y)=0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x=0, \\ 2y=0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=0. \end{cases}$$

   On a $f(x,y)\geq 0=f(0,0),\ \forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Donc, f admet un minimum global en $(0,0)$.

2. Soit $f(x,y)=x^2-y^2$. On montre facilement que $(0,0)$ est un point critique de f. Mais on sait pas est ce que $f(x,y)\leq f(0,0)$ ou $f(x,y)\geq f(0,0)$ c'est-à-dire est ce que f admet un maximum ou un minimum local en $(0,0)$?
   - suivant la direction $y=0$, on a $f(x,0)=x^2\geq 0=f(0,0)$,
   - suivant la direction $x=0$, on a $f(0,y)=-y^2\leq 0=f(0,0)$.

   Par suite $(0,0)$ n'est pas un extremum de f.

Maintenant comment on peut déterminer facilement est ce que un point critique est un extremum ou non ? Avant de répondre à cette question, on a la définition suivante :

Définition 2.19 (Hessien)

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}^n$. On appelle **hessien** de f en a la matrice :

$$H_f(a) = D^2 f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Remarque 2.9

D'après le théorème de Schwarz si f est de classe $\mathcal{C}^2$, alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$. Par conséquent $H_f(a)$ est symétrique.

Exemple :

1. Soit $f(x,y) = x^2 + y^2$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$. D'où :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Soient $f(x,y,z) = x\cos(y) + y\sin(z)$ et $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Calculons le hessien de f au point $\left(1, \frac{\pi}{2}, \pi\right)$. On a :

$$\begin{cases} f'_x(x,y,z) = \cos(y), \\ f'_y(x,y,z) = -x\sin(y) + \sin(z), \\ f'_z(x,y,z) = y\cos(z), \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} f''_{xx}(x,y,z) = 0, \;\; f''_{xy}(x,y,z) = -\sin(y), \\ f''_{xz}(x,y,z) = 0, \;\; f''_{yy}(x,y,z) = -x\cos(y), \\ f''_{yz}(x,y,z) = \cos(z), \;\; f''_{zz}(x,y,z) = -y\sin(z). \end{cases}$$

D'où :

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & -\sin(y) & 0 \\ -\sin(y) & -x\cos(y) & \cos(z) \\ 0 & \cos(z) & -y\sin(z) \end{pmatrix}, \; \forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

En particulier, au point $\left(1, \frac{\pi}{2}, \pi\right)$:

$$H_f\left(1, \frac{\pi}{2}, \pi\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.5 (Condition suffisante)

Soit a un point critique d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur un voisinage de a. On note $Sp(H_f(a))$ le spectre de $H_f(a)$. Alors,

i) Si $Sp(H_f(a)) \subset \mathbb{R}_+^*$, f admet au point a un minimum local.

ii) Si $Sp(H_f(a)) \subset \mathbb{R}_-^*$, f admet au point a un maximum local.

iii) Si $Sp(H_f(a)) \subset \mathbb{R}^*$ et contient au moins deux valeurs propres de signe diffèrent, f n'admet pas d'extremum au point a. Dans ce cas, on dit que a est un **point col** ou un **point selle**.

v) Si $0 \in Sp(H_f(a))$ (c'est-à-dire $\det(H_f(a)) = 0$), on ne peut pas conclure directement.

En particulier, au point $\left(1, \frac{\pi}{2}, \pi\right)$:

$$H_f\left(1, \frac{\pi}{2}, \pi\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.5 (Condition suffisante)

Soit a un point critique d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur un voisinage de a. On note $Sp(H_f(a))$ le spectre de $H_f(a)$. Alors,

i) Si $Sp(H_f(a)) \subset \mathbb{R}_+^*$, f admet au point a un minimum local.

ii) Si $Sp(H_f(a)) \subset \mathbb{R}_-^*$, f admet au point a un maximum local.

iii) Si $Sp(H_f(a)) \subset \mathbb{R}^*$ et contient au moins deux valeurs propres de signe diffèrent, f n'admet pas d'extremum au point a. Dans ce cas, on dit que a est un **point col** ou un **point selle**.

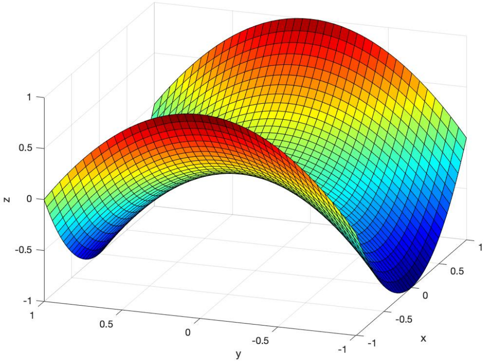
v) Si $0 \in Sp(H_f(a))$ (c'est-à-dire $\det(H_f(a)) = 0$), on ne peut pas conclure directement.

Exemple :

1. Reprenons l'exemple $f(x,y) = x^2 - y^2$. $(0,0)$ est un point critique de f. Si on calcule le hessien de f en ce point, on obtient :

$$A = H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

D'où $Sp(A) = \{-2, 2\}$. Donc, d'après la dernière proposition $(0,0)$ n'est pas un extremum de f, c'est un point col.



2. $f(x,y) = xy(1-x-y)$.

   1. Déterminons les extremums de f. (x,y) est un extremum de f si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{l} f'_x(x,y) = y(1-2x-y) = 0, \\ \text{et} \\ f'_y(x,y) = x(1-2y-x) = 0, \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 0 \text{ ou } 1-2x-y = 0, \\ \text{et} \\ x = 0 \text{ ou } 1-2y-x = 0, \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} (y = 0 \text{ et } x = 0) \text{ ou } (y = 0 \text{ et } 1-2y-x = 0), \\ \text{ou} \\ (1-2x-y = 0 \text{ et } x = 0) \text{ ou } (1-2x-y = 0 \text{ et } 1-2y-x = 0), \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x = 0 \text{ et } y = 0) \text{ ou } (x = 1 \text{ et } y = 0), \\ \text{ou} \\ (x = 0 \text{ et } y = 1) \text{ ou } \left(x = \dfrac{1}{3} \text{ et } y = \dfrac{1}{3}\right). \end{array}\right.$$

   Donc, les points critiques de f sont $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ et $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.

   2. Déterminons la nature de ces extremums. Le hessien de f en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2y & 1-2x-2y \\ 1-2x-2y & -2x \end{pmatrix}$$

- Nature du point $(0,0)$. Soit $A = H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On montre facilement que $Sp(A) = \{-1, 1\}$. Donc, $(0,0)$ est un point col de f.
- Nature du point $(1,0)$. Soit $B = H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. On montre facilement que $Sp(B) = \{-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}\}$. Donc, $(1,0)$ est un point col de f.
- Nature du point $(0,1)$. Soit $C = H_f(0,1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. On montre facilement que $Sp(C) = \{-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}\}$. Donc, $(0,1)$ est un point col de f.
- Nature du point $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Soit

  $$D = H_f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de D est donné par :

$$\mathrm{P}(X) = \det(D - X\,I_2) = \begin{vmatrix} \dfrac{-2}{3} - X & \dfrac{-1}{3} \\ \dfrac{-1}{3} & \dfrac{-2}{3} - X \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{-2}{3} - X\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = (X+1)\left(X + \frac{1}{3}\right).$$

D'où $Sp(D) = \left\{-1, \dfrac{-1}{3}\right\} \subset \mathbb{R}_-^*$. Donc, f admet au point $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ un maximum local.

Tableau des matières

Exemple :

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2)e^z - 2x^2 - 1,$$

et soit $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = 0\}$. On a :

$f(0, 1, 0) = 0$ et $f(x, y, z) = 0 \Rightarrow z = \ln\left(\dfrac{2x^2 + 1}{x^2 + y^2}\right)$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$.

Soit une application φ :

$$(x, y) \mapsto \ln\left(\frac{2x^2 + 1}{x^2 + y^2}\right),$$

φ définie en tout point de $\mathbb{R}^2$ différent de $(0, 0)$ et on a :

$$\varphi(0, 1) = 0 \text{ et } \forall (x, y) \neq (0, 0),\ f(x, y, \varphi(x, y)) = 0.$$

On dit que φ est définie implicitement par la relation $f(x, y, z) = 0$.

2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y, z) = -x^2 + y^2 + z^2.$$

On a :

$$f(x, y, z) = 0 \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2.$$

Ceci n'a un sens que si $x^2 - y^2 \geq 0$ c'est à dire $(x, y) \in \Delta$, où Δ est la partie de $\mathbb{R}^2$ limitée par les droites $y = x$ et $y = -x$ contenant l'axe (Oy). De plus, $z^2 = x^2 - y^2$ définie par deux valeurs de z sur Δ à savoir :

$$z = \sqrt{x^2 - y^2} \text{ et } z = -\sqrt{x^2 - y^2}.$$

Plus généralement, on se pose le problème suivant :
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui à $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ associe $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.
À quelle condition la relation :

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0,$$

permet de définir sur une partie A de $\mathbb{R}^{n-1}$ une application φ :

$$(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \mapsto \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}),$$

vérifiant :

$$\forall (x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \in A,\ f\left(x_1, \cdots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \cdots, x_{n-1})\right) = 0.$$

Théorème 2.3

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathcal{U}$ et

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \cdots, x_n) &\mapsto f(x_1, x_2, \cdots, x_n), \end{aligned}$$

de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant :

$$f(a) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \neq 0.$$

Alors, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ du point $(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1})$ de $\mathbb{R}^{n-1}$, un voisinage ouvert $\mathcal{W}$ du point a_n de $\mathbb{R}$ et une application :

$$\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}, \text{ de classe } \mathcal{C}^1,$$

telle que :

$$\varphi(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}) = a_n,$$

$$\forall (x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \in \mathcal{V}, \; f\left(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})\right) = 0,$$

et pour tout $i \in \{1, \cdots, n-1\}$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}))}{\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}))}.$$

Remarque 2.10

1. Le théorème reste vrai pour toute autre variable x_i de f.
2. Si f est de classe $\mathcal{C}^p$ avec $p > 1$, alors φ est aussi de classe $\mathcal{C}^p$. On obtient les dérivées successives de φ en dérivant $f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})) = 0$.

et pour tout $i \in \{1, \cdots, n-1\}$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}))}{\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}))}.$$

Remarque 2.10

1. Le théorème reste vrai pour toute autre variable x_i de f.
2. Si f est de classe $\mathcal{C}^p$ avec $p > 1$, alors φ est aussi de classe $\mathcal{C}^p$. On obtient les dérivées successives de φ en dérivant $f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})) = 0$.